

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

На правах рукопису

Мазур Тетяна Андріївна

УДК 621.3.001.57

**ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В ОБМОТКАХ ТРАНСФОРМАТОРІВ
ПІД ЧАС ДІЇ НА НИХ ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕНАПРУГ**

Спеціальність: 05.14.02 - Електричні станції, мережі і системи

**Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук**

**Науковий керівник
доктор технічних наук, професор
М.С. Сегеда**

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої

вченої ради



В.І.Коруд

Львів 2017

З М І С Т

Вступ	4
1. Загальна характеристика хвильових процесів в обвитках трансформаторів	12
1.1. Класифікація перенапруг.....	12
1.2. Характеристики перенапруг в силових трансформаторах	18
1.3. Методи визначення перенапруг в електричних мережах	24
1.4. Координації ізоляції за внутрішніми перенапругами та за робочою напругою.....	29
1.5. Координація ізоляції за внутрішніми перенапругами та робочою напругою.....	30
Висновки.....	34
2. Математична модель трансформатора з врахуванням розподіленості параметрів	35
2.1. Математична модель обвитки трансформатора без врахування взаємоіндукції між витками.....	35
2.2. Математична модель обвитки трансформатора з урахуванням взаємоіндукції між витками	48
2.3. Математична модель для дослідження хвильових процесів у двообвиткових трансформаторах.....	67
2.4.1. Обчислення індуктивного опору розсіювання обвитки трансформатора	73
2.4.2. Обчислення взаємоіндуктивності між витками обвитки та обвитками.....	79
2.4.3. Функції електростатичної та електромагнетної взаємоіндукцій і періоди власних коливань обвитки	87
2.4.4. Обчислення ємнісних параметрів заступної схеми обвитки трансформатора	90
Висновки.....	94

3. Математичне моделювання вільних коливань в обвитках трансформаторів під час імпульсних перенапруг в електричних мережах	95
3.1. Математичне моделювання вільних коливань в обвитці трансформатора за різних форм імпульсу перенапруг.....	95
3.2. Аналіз вільних коливань в обвитці під час дії прямокутного імпульсу напруги.....	100
3.3. Аналіз вільних коливань в обвитці під час дії косокутного імпульсу напруги.....	103
3.4. Аналіз вільних коливань в обвитці за експоненційною формою імпульсу напруги.....	105
Висновки.....	107
4. Дослідження хвильових процесів в обвитках трансформаторів з використанням перетворень Лапласа	108
4.1. Початковий розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора	108
4.2. Кінцевий розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора...	112
4.3. Дослідження вільних коливань в обмотках трансформатора на підставі інтегрального перетворення Лапласа	115
4.4. Розподіл напруги вздовж обвитки з урахуванням взаємоіндукції.....	127
Висновки.....	133
Загальні висновки роботи.....	134
Використана література	136
Додатки.....	146
Додаток А.....	147
Додаток Б.....	148
Додаток В.....	149

ВСТУП

Стан проблеми. У математичному моделюванні електромагнетних процесів у електроенергетичних системах (ЕЕС) можна загалом виділити два основні підходи відповідно до процедур для вибору зразкової структури й обчислення координат моделі: моделювання методом “білої скриньки” і моделювання методом “чорної скриньки”.

Моделювання методом “білої скриньки” подібне до методів, які уможливають повне вивчення внутрішньої поведінки динамічної системи, для вибору обладнання та обчислення його координат. Такі моделі отримують на підставі основних законів електротехніки з урахуванням розподіленості параметрів, вони не залежать від експериментальних даних і їхні координати відповідають реальним елементам ЕЕС.

Альтернативний підхід – це моделювання методом “чорної скриньки”. Цей підхід асоціюється з методами, за якими структуру і координати моделі обчислюють тільки на початку і в кінці (дані входу та виходу) елементів ЕЕС. Структуру і реалізацію вибирають з широкої бази моделей. Параметри заступної схеми не мають ніякого фізичного змісту чи стосунку до яких-небудь фізичних законів, за структурою є суто математичними рівняннями, які відповідають зразковому обладнанню із досліджуваними координатами. В цьому випадку немає ніяких знань про фізичну систему чи її характеристики.

Силові трансформатори можуть виходити з ладу через перенапруги, спричинені електромагнетними перехідними процесами. У [66] розглянуто перенапруги, зумовлені резонансними явищами. Ці явища виникають, коли трансформатор на боці високої напруги підімкнений до кабелю, а сторона низької напруги не навантажена. Перенапруги виникають на боці низької напруги через перехідні процеси, які відбуваються у ненавантаженому кабелі.

Розподіл напруги в обвитках силового трансформатора, спричинений появою швидкоплинних перехідних перенапруг (VFTO), таких як удари блискавки, складається з великих за амплітудою коливань напруги та розподілу

напруги вздовж довжини обвитки і є неоднорідним [14]. Для того, щоб в цих умовах розподіл напруги був рівномірним вздовж довжини обвитки, запропоновано використовувати варистори в обвитках.

У [55] наведена ймовірнісна модель трансформатора, що ґрунтується на ймовірності відмови обладнання, розроблена для оптимізації ремонтно-обслуговувальних робіт окремих компонентів трансформатора. Ця модель охоплює різні рівні погіршення ізоляції й режими обслуговування. Такий метод застосовано до трансформаторів від 300 кВ·А до 15 МВ·А в електричній мережі холдингової компанії Abule-Egba в Нігерії. Отриманий результат дослідження перенапруг й імітаційна модель перевірені експериментально.

Під час грози і комутації вимикачів виникає широкий спектр частоти перенапруг, які є коливальними. Якщо частота коливань зовнішньої перенапруги дорівнює власній частоті обвиток, то внутрішній резонанс перенапруги досягає максимального значення. У [20] запропоновано встановити ОПНи для захисту від перенапруг.

У [18] запропонована методологія розрахунку перенапруг в обвитці трансформатора на підставі числового методу зворотного перетворення Лапласа. Математична модель обвиток трансформатора описується рівняннями у часткових похідних, з урахуванням розподіленості параметрів електричних кіл. Розрахунок перенапруг здійснюється для обвиток із ізолюваною чи заземленою нейтраллю.

У [21] розглянуто перехідні процеси в обвитці трансформатора. Модель трансформатора основана на схемі з розподіленими параметрами. Математичну модель задано системою диференційних рівнянь у часткових похідних. Для розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних використано числові методи. Модель трансформатора враховує діелектричні втрати, що дає змогу розглядати зміну параметрів. На прикладах проілюстровано просторовочасовий розподіл напруги і струму в обвитці трансформатора.

У [30] наведено алгоритм числового розрахунку перенапруги в однофазному трансформаторі з розподіленими параметрами, який складається з довільної кількості однорідних частин. Алгоритм протестовано на низці прикладів щодо його адекватності та точності.

У [49] наведено метод, який дає змогу розрахувати значення ємності, індуктивності й напруги між сусідніми витками обвитки силового трансформатора. Визначення еквівалентних параметрів електричної схеми ґрунтується на досліді короткого замикання. Розрахунок послідовної ємності здійснюється за допущення лінійного розподілу напруги вздовж обвитки. Індуктивність знаходять з відхилень магнетного поля у зазорах трансформатора, розрахованого в комп'ютерному середовищі FEMM 4.2. Еквівалентна схема згідно з першим і другим законами Кірхгофа дає дві системи звичайних диференційних рівнянь для напруги і струму, які розв'язують за допомогою MATLAB. Результати порівнюють з результатами вимірювань, виконаних на сухому трансформаторі ТБС (22/6,3 кВ, 800 кВ·А, Великобританія). Порівняння показує, що відмінності між розрахунковими і вимірними значеннями допустимі.

Актуальність теми. Силові трансформатори є одним з найбільш важливих елементів електроенергетичної системи. Аварійний вихід з ладу трансформаторів порушує нормальне функціонування електроенергетичної системи в цілому.

Для вибору ізоляції обмоток трансформатора та схем захисту трансформаторів від перенапруг необхідно знати максимальні значення напруги відносно землі окремих частин обмоток трансформаторів, а також значення напруги між витками обвитки і обвитками під час імпульсних перенапруг з урахуванням усіх параметрів заступної схеми. Для отримання таких результатів використовується математичне моделювання, оскільки для високовольтних трансформаторів виготовлення таких моделей натуральної величини є дорогим і недоцільним.

Протікання хвильових процесів в обвитках трансформаторів залежить від часу, геометричних розмірів обвитки, питомого опору матеріалу обвитки, діелектричних постійних ізоляції, магнітної проникності сталі та форми імпульсу на початку обвитки.

Проблемі досліджень електромагнітних процесів з врахуванням розподіленості параметрів в ЕЕС присвячено велику кількість публікацій як вітчизняних, так і закордонних наукових шкіл, зокрема Сиротинський Л.І., Лоханін Ф.К., Базуткін В.В., Бьюлей Л.В., Геллер Б., Веверка А.

Однак, на сьогоднішній день ще не в повній мірі вивчені аспекти, які стосуються досліджень електромагнітних процесів з урахуванням розподіленості параметрів в ЕЕС, тому ця проблема є актуальна і важлива щодо підвищення ефективності та надійності функціонування ЕЕС.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами. Тематика роботи пов'язана з таким науково-дослідним напрямком кафедри "Електричні станції" Національного університету "Львівська політехніка": математичне моделювання електромагнітних процесів з врахуванням розподіленості параметрів в ЕЕС. Результати викладені в дисертації, отримані в межах досліджень за угодами з ВАТ «Львівобленерго» (науково-дослідна робота ДР № 0105U004846 (тема № 7184 "Дослідження внутрішніх перенапруг в електричних мережах 6-10 кВ ВАТ «Львівобленерго» та захист від перенапруг") та з ВАТ «Закарпаттяобленерго» (науково-дослідна робота ДР № 0107U010252 (тема № 0173 "Дослідження усталених режимів в електричних мережах ВАТ «Закарпаттяобленерго» та регулювання напруги на них").

Мета та задачі дослідження. Метою дисертації є розроблення математичних моделей для дослідження електромагнітних процесів з урахуванням розподіленості параметрів у високовольтних трансформаторах та аналіз хвильових процесів під час імпульсних перенапруг в електричних мережах для оцінки запасу електричної міцності ізоляції трансформаторів.

Досягнення поставленої мети вимагало розв'язання таких завдань:

- охарактеризувати хвильові процеси в обмотках трансформатора під час імпульсних перенапруг в електричних мережах (ЕМ);
- розроблення математичних моделей та методів розрахунку хвильових процесів в обмотках високовольтних трансформаторів без урахування взаємоіндукції між витками;
- розроблення математичних моделей та методів розрахунку хвильових процесів в обмотках високовольтних трансформаторів з урахування взаємоіндукції між витками;
- розроблення математичної моделі двообмоткового трансформатора;
- розрахунок хвильових процесів в обмотках високовольтних трансформаторів під час імпульсних перенапруг в ЕМ для оцінки електричної міцності ізоляції трансформаторів;
- математичне моделювання вільних коливань в обмотках трансформаторів за різних форм імпульсу напруги в ЕМ;
- розробка математичних моделей для дослідження хвильових процесів у високовольтних трансформаторах з використанням перетворень Лапласа.

Об'єкт дослідження хвильові процеси у високовольтних трансформатора під час імпульсних перенапруг в ЕМ.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є хвильові процеси у високовольтних трансформаторах для оцінки електричної міцності ізоляції трансформаторів.

Методами досліджень дисертаційної роботи є аналітичні методи для розв'язання інтегрально - диференційних рівнянь, які описують хвильові процеси в трансформаторах, перетворення Лапласа.

Наукова новизна отриманих результатів

1. Вдосконалено математичну модель високовольтних трансформаторів у частині врахування струмів спливу між витками, що

дозволило досліджувати хвильові процеси в обвитках трансформаторів під час імпульсних перенапруг в електричних мережах.

2. Розроблено математичну модель високовольтного трансформатора, яка враховує розподіленість параметрів, що дозволяє здійснювати розрахунок розподілу напруги вздовж обвитки трансформаторів та їх тривалість під час імпульсних перенапруг в електричних мережах.

3. Вперше використано метод розділення змінних для розв'язання інтегрально-диференціальних рівнянь, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів, що дозволяє досліджувати процеси в обвитках як з частотою, що відповідає всій обмотці, так і з власною частотою.

Практична цінність отриманих результатів:

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що застосування розроблених програмних засобів, які дозволяють відтворити хвильові процеси в силових трансформаторах, надає адекватно відтворити вільні коливання напруги в обвитках трансформаторів під час дії на них імпульсних перенапруг різних форм хвилі, надає змогу оцінювати запаси електричної міцності ізоляції силових трансформаторів, необхідні для забезпечення їх достатньої експлуатаційної надійності.

На підставі цих моделей створено комплекс цифрових моделей, що використовуються у навчальному процесі Національного університету «Львівська політехніка».

Впровадження. Результати роботи використані для розроблення моделей, які використовуються в навчальному процесі Національного університету «Львівська політехніка» та використані під час дослідження внутрішніх перенапруг в електричних мережах ПАТ «Закарпаттяобленерго».

Особистий внесок здобувача. Наукові положення, які є в дисертації, отримані здобувачем самостійно. В наукових працях, опублікованих у співавторстві безпосередньо дисертанту належить: [94] – визначення усередненої потужності енергообміну електромагнітного осцилографа; [91] – аналіз електромагнітних процесів та обчислення парламентів заступної

схеми; [16, 17] – розв’язання задач, які ілюструють теоретичні матеріали; [89] – аналіз хвильових процесів в трансформаторах; [90] – розв’язання рівнянь часткових похідних методом розділення змінних; [38] – формування математичної моделі для дослідження хвильових процесів в обвитках трансформатора з врахуванням взаємоіндукції між витками; [36, 37] – аналіз різних форм імпульсів напруги під час моделювання вільних коливань в обвитках трансформатора; [34] – дослідження перенапруг в обвитках трансформатора за дії на них імпульсних перенапруг; [39, 40] – розв’язання інтегрально-диференціальних рівнянь методом розділення змінних; [92, 93] – запропоновано заступну схему для дослідження хвильових процесів у високовольтних двообмоткових трансформаторах; [42] – здійснено аналіз внутрішніх перенапруг в високовольтних трансформаторах, запропоновано заступну схему трансформатора і обчислення параметрів, виконано аналітичний розрахунок вільних коливань напруги в обвитках трансформатора.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи оприлюднені на VI Konferencja naukowo-techniczna. "Sieci elektroenergetyczne w przemyśle i energetyce" – SIECI 2008, 12 International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering" - CPEE'2011, 3 Міжнародна науково-технічна конференція "Інтелектуальні енергетичні системи(ESS13)", Мукачеве 10 -14червня 2013 р., XIII міжнародна науково-технічна конференція "Проблеми сучасної електротехніки - 2014", Київ 2 -6 червня 2014 р., 4 міжнародна науково-технічна конференція "Інтелектуальні енергетичні системи (ESS15)", Київ 9 -12 червня 2015 р., 16 International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering" - CPEE'2015, а також на семінарі «Моделі та методи комп’ютерного аналізу електричних кіл та електромеханічних систем», Національного університету Львівська політехніка, 4 червня 2015 р.

Публікації. Матеріали дисертаційної роботи опубліковані у 15 друкованих роботах, в тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях

України, з них 2 статті опубліковано в наукових журналах, що включені до міжнародної наукометричної бази даних Scopus і 1 монографія, рекомендована вченою радою Національного університету «Львівська політехніка», 8 – у матеріалах та тезах доповідей на науково-технічних конференціях, одна з них у міжнародній наукометричній базі даних Scopus, та 2 підручники з грифом Міністерства освіти та науки України, а також у 2-х науково-дослідних роботах, які мають номери державної реєстрації та обліку.

Обсяг і структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 102 найменувань та 3 додатків. Загальний обсяг роботи 176 сторінок. Основний текст викладено на 133 сторінках друкованого тексту, містить 34 рисунки, 6 таблиць. Обсяг ілюстрацій, таблиць та додатків становить 60 сторінок.

1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В ОБВИТКАХ ТРАНСФОРМАТОРІВ

1.1. Класифікація перенапруг

Перенапряга – це напруга, яка більша від амплітуди найбільшої робочої напруги ($U_{ном}$) на ізоляції обладнання електричної мережі. Залежно від місця виникнення розрізняють такі перенапруги: перенапряга фазна; між фазна; в середині обвиток; міжконтактна.

Розрізняють такі характеристики перенапруг:

- максимальне значення U_{max} чи кратність перенапруги $K_n = U_{max} / U_{ном}$;
- тривалість дії;
- форма кривої;
- ширина охоплення обладнання електричної мережі.

Ці характеристики мають стохастичну природу і значний статистичний розкид, оскільки залежать від багатьох чинників.

Основні види перенапруг у мережах високої напруги наведено на рис. 1.1.

Внутрішні перенапруги спричиняють коливання електромагнетної енергії, яка запасена в елементах електричного кола чи яка надходить у кола від генераторів. Залежно від умов виникнення і тривалості дії на ізоляцію розрізняють стаціонарні, квазістаціонарні й комутаційні перенапруги.

Комутаційні перенапруги виникають у разі раптових змін в електричних мережах чи параметрів мережі (планові і аварійні перемикання ліній, трансформаторів тощо), а також у результаті замикань на землю і між фазами. Під час вмикання обладнання електричної мережі (ліній, трансформаторів і реакторів) чи вимикання виникають коливні перехідні процеси, які можуть спричинити значні перенапруги. Втрати на корону ліній електропередавання демпфувально діють на перші максимуми таких перенапруг.

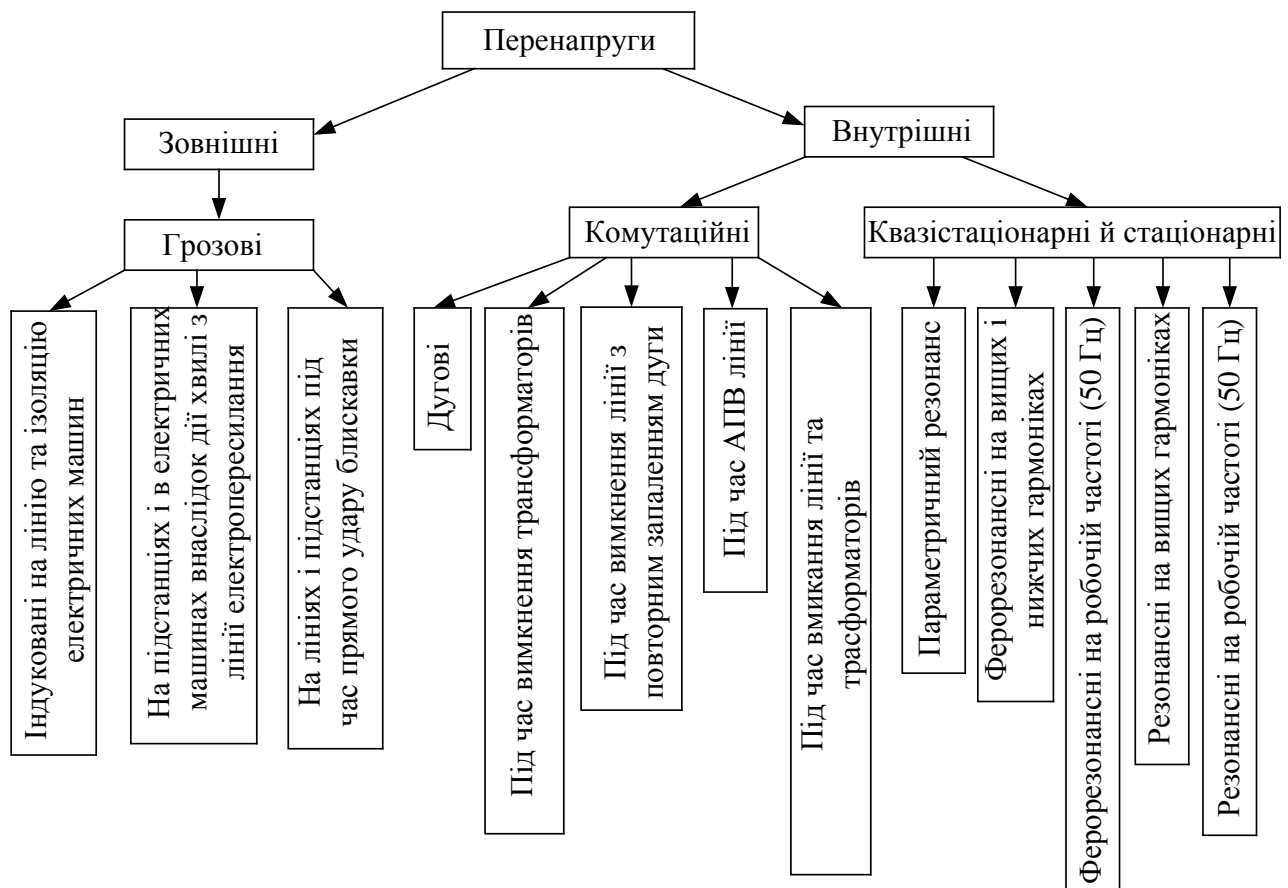


Рис. 1.1. Основні види перенапруг в електричних мережах високої напруги

Вимкнення ємнісних струмів у електричному колі може супроводжуватися повторним запалюванням дуги на вимикачі й багатограними перехідними процесами та їхніми перенапругами, а вимкнення малих струмів неробочого ходу трансформаторів – примусовим розривом дуги у вимикачі й коливним переходом енергії магнетного поля в енергію електричного поля його паралельних ємностей. Під час дугових замикань на землю в електричних мережах з ізольованою нейтраллю також відбувається багатократне запалювання дуги і виникнення відповідних дугових перенапруг.

Основною причиною виникнення квазістаціонарних перенапруг є ємнісний ефект, зумовлений, наприклад, одностороннім живленням від генераторів ліній електропересялення.

Несиметричні режими виникають під час замикання однієї фази на землю, розривання проводу, відмовлення однієї чи двох фаз вимикача, можуть спричинити

додаткове підвищення напруги основної частоти чи перенапругу на будь-якій вищій гармонічній – кратній частоті ЕРС генератора.

Джерелом вищих чи нижчих гармонічних і відповідних ферорезонансних перенапруг може бути будь-який елемент мережі з нелінійною характеристикою, наприклад, трансформатор з насиченим магнетопроводом. За наявності джерела механічної енергії, яке періодично змінює параметри електричного кола, може виникнути параметричний резонанс.

Номінальною напругою ізоляції устаткування електричної мережі визначається його оптимальна робоча напруга в процесі експлуатації. Робота мережі неминуче супроводжується постійними коливаннями робочої напруги, спричиненими змінами навантаження, схеми живлення мережі, кількості генераторів, які працюють, тощо. У випадку коротких замикань, раптових розривів кола, вимкнення навантаження й інших несприятливих режимів напруга може істотно відхилятися від заданого нормальним режимом значення. На напругу промислової частоти можуть накладатися короткочасні імпульси, спричинені перехідними процесами в мережі чи зовнішніми впливами, такими як вплив сусідніх кіл чи грозові розряди. Будь-яке перевищення значень найбільших тривало допустимих робочих напруг прийнято називати перенапругою електричної стійкості ізоляції чи просто перенапругою [21].

Отже, термін “перенапруга” є умовним у тому значенні, що не всяка перенапруга спричиняє реальну небезпеку порушення електричної міцності ізоляції. Для деяких видів електроустаткування вказують верхні межі робочої напруги, допустимої в експлуатації протягом обмеженого часу. Інакше кажучи, обмежені за рівнем тривалості перенапруги допустимі для ізоляції, вибраної відповідно до ДСТУ. Це пояснюється підвищенням розрядних напруг більшості видів ізоляції за скороченої тривалості перенапруги, зумовленої вольт-секундними характеристиками ізоляції. Усі види перенапруг прийнято поділяти на два класи: зовнішні та внутрішні. Причинами зовнішніх перенапруг можуть бути грозові розряди, вплив розташованих поблизу мереж вищої напруги тощо.

Внутрішні перенапруги, також поділяються на дві групи: комутаційні,

спричинені вільними коливаннями електромагнетної енергії в індуктивних і ємнісних елементах мережі за різних комутацій, і режимні, що виникають під час несприятливих режимів роботи мережі.

До режимних перенапруг належать підвищення напруги, створювані спеціально, наприклад, якщо необхідно збільшити робочу напругу живильного кінця лінії для компенсації спаду напруги на ній під час пересилання великої потужності, а також підвищення резонансного походження, зокрема ємнісний ефект лінії, що живиться з одного боку, ферорезонансні перенапруги, параметричний резонанс тощо. До комутаційних перенапруг належать імпульсні підвищення напруги, що супроводжують перехідні процеси під час різних комутацій устаткування чи ділянок мережі. У такому разі під комутацією у розширеному змісті цього слова розуміють будь-яку зміну структури чи параметрів мережі: вмикання, вимкання, розрив, коротке замикання чи ліквідація його тощо. Основні види комутацій, що призводять до розвитку перенапруг, такі: планове вмикання під напругу ділянки ненавантаженої лінії електропересилання; автоматичне вмикання лінії у циклі автоматичного повторного вмикання (АПВ); оперативне чи автоматичне вимкнення ділянки ненавантаженої лінії; коротке замикання в мережі й ліквідація його; розриви лінії електропересилання в режимі пересилання великої потужності чи в режимі асинхронного ходу генераторів, увімкнених з різних сторін від лінії; вимкнення ненавантажених трансформаторів й іншого устаткування, що споживає малий індуктивний струм; періодичні запалювання і гасіння дуги однофазного замикання на землю в мережі з ізольованою нейтраллю. Допустима амплітуда імпульсних перенапруг залежить від фізичних особливостей ізоляції, а також від деяких інших характеристик перенапруг: форми і кількості імпульсів, очікуваної кількості їх за час експлуатації ізоляції; кількості ізоляційних конструкцій, що одночасно перебувають під впливом цієї перенапруги, очікуваних збитків у разі порушення електричної міцності ізоляції внаслідок цього виду перенапруг.

Для вивчення процесів перенапруг у трансформаторах необхідно знати, як з часом змінюється напруга на затискачах трансформатора. З цього погляду можна

розглядати три види хвиль перенапруг: аперіодичні, періодичні та змішані (рис. 1.2) [21, 30]. Тривалість хвилі вимірюється у мікросекундах, амплітуда - в кіловольтах. Аперіодичну хвилю показано на рис. 1.2, а. Час, упродовж якого напруга досягає максимуму, називається фронтом хвилі; час, протягом якого напруга зменшується від максимального значення до половини максимального, - хвостом хвилі. Причиною аперіодичних хвиль є атмосферні перенапруги. Зазвичай вони дуже короткочасні, мають фронт тривалістю від однієї до декількох мікросекунд, а хвіст - декілька десятків мікросекунд. Стандартна аперіодична хвиля, за допомогою якої випробовують імпульсну міцність ізоляції трансформатора та іншої високовольтної апаратури, має фронт 1,5 мкс і хвіст 40 мкс.

Аперіодичні хвилі найнебезпечніші, оскільки їхня амплітуда часто перевищує номінальну фазну напругу трансформаторів у 10 - 15 разів, у них крутий фронт, тобто велика швидкість наростання напруги. За інших однакових умов хвилі перенапруги тим небезпечніші, чим крутіший їхній фронт, оскільки спричиняють великі градієнти напруг вздовж обвитки трансформатора.

На рис. 1.2, б показано так звану зрізану аперіодичну хвилю. Такі хвилі виникають під час перекривання, що відбувається близько до трансформатора, наприклад, на його вводах. У цьому випадку аперіодичний процес переривається і переходить у коливний, а ізоляція трансформатора в доповнення крім швидкого наростання напруги на фронті хвилі, зазнає різкої зміни напруги на її зрізі.

Періодичні хвилі (рис. 1.3, а), як правило, викликані комутаційними причинами. Амплітуда цих хвиль перевищує номінальну фазну напругу трансформатора в три - чотири рази. Але ці хвилі також можуть бути небезпечними для цілісності ізоляції у випадках, коли частота вимушених коливань збігається з частотою власних коливань. Якщо періодичні коливання накладаються на аперіодичну хвилю, то утворюється так звана змішана хвиля (рис. 1.3, б).

Покажемо, що аперіодичні хвилі з крутим фронтом у відносно швидкості наростання напруги еквівалентні напрузі достатньо високої частоти. Крутизну аперіодичної хвилі можна виразити як

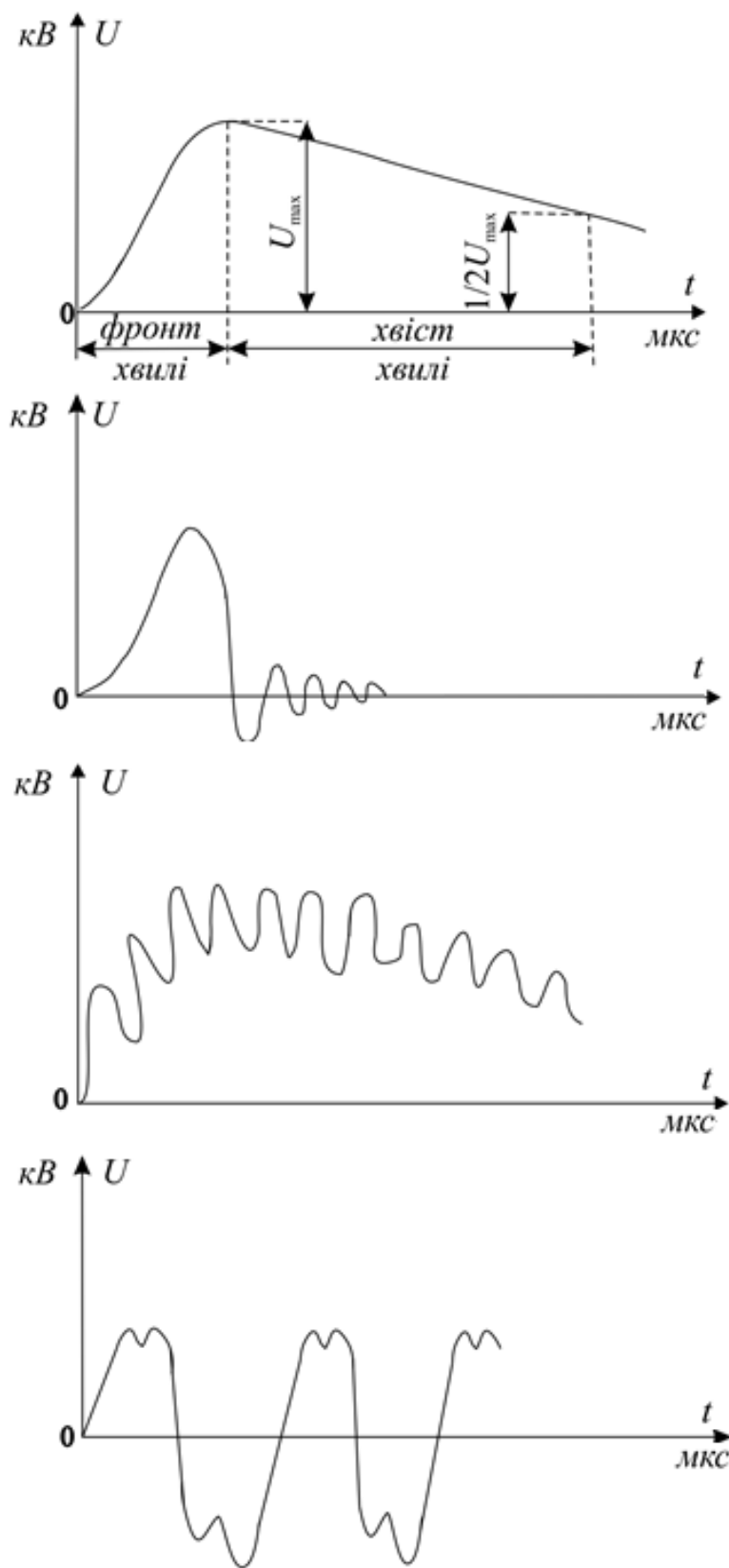


Рис. 1.2. Хвилі перенапруги: а - повна аперіодична; б - зрізана аперіодична; в - періодична; г - змішана

$$U_{max} / t, \tag{1.1}$$

де t - фронт хвилі.

Крутизна еквівалентної синусоїдної хвилі дорівнює

$$\left. \frac{U_m \sin \omega t}{t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\omega U_m \sin \omega t}{\omega t} \right|_{t=0} = \omega U_m \tag{1.2}$$

тобто пропорційна до частоти. Прирівнюючи вирази (1.1) і (1.2), знайдемо частоту, якій еквівалентна аперіодична хвиля

$$\omega = 2\pi f = 1/t, \tag{1.3}$$

чи

$$f = \frac{1}{2\pi t}. \tag{1.4}$$

1.2. Характеристики перенапруг у силових трансформаторах

Характеристики перенапруг є предметом ретельного вивчення насамперед тому, що вони визначають запаси електричної міцності ізоляції, необхідні для забезпечення достатньої експлуатаційної надійності електричної мережі. Техніко-економічні обмеження не дають змоги вибрати ізоляцію, здатну витримати усі без винятку випадки впливу перенапруг. Натомість найвищі техніко-економічні показники електроустаткування досягаються за наявності деякого ризику його відмови під час найбільших перенапруг, що виникають доволі рідко. Аналогічний підхід застосовують і під час вибору засобів захисту від перенапруг: стійкість до впливів перенапруг на захисні пристрої, як і на устаткування, що захищається, вибирають з умови мінімуму зведених річних витрат на електропостачання споживачів. До цих витрат входять витрати на виготовлення й експлуатацію цих пристроїв, з одного боку, і витрати на відшкодування збитку, спричиненого

можливими порушеннями електричної міцності ізоляції - з іншого. Досліджують можливі причини перенапруг і визначають їхні основні кількісні характеристики з перших років існування високовольтних електроенергетичних мереж. У п'ятдесяти роки майже завершилась робота з описання фізичних процесів розвитку перенапруг і способів розрахунку форми і параметрів імпульсів перенапруг різної природи. Це дало змогу перейти від емпіричного підбору запасів ізоляції до техніко-економічного їх обґрунтування. Однак під час реалізації нового підходу, названого техніко-економічною координацією ізоляції, з'ясувалося, що розуміння фізики розвитку перенапруг і вміння розраховувати їхні параметри за заданих умов у мережі ще недостатньо для того, щоб вибрати ізоляцію за заданим терміном служби. Головною перешкодою виявилася мінливість параметрів мережі й умов, за яких можуть розвиватися перенапруги.

Параметри перенапруг практично будь-якого виду можуть змінюватись у широких межах за рахунок випадкової варіації структури мережі, потужності джерел живлення, характеру навантаження і багатьох інших випадкових факторів, такі як погодні умови, що впливають на інтенсивність корони на проводах повітряної лінії, чи стан земної поверхні, що визначають умови протікання у землі струмів нульової послідовності. Передбачити із задовільною точністю, як саме уся сукупність цих випадкових факторів впливатиме на статистичний розподіл основних кількісних характеристик перенапруг, неможливо і сьогодні, незважаючи на залучення до цієї задачі сучасної обчислювальної техніки.

Відсутність достатньо надійних оцінок статистичних параметрів перенапруг змушувала під час проектування користуватися умовною кількісною їх оцінкою - так званою розрахунковою кратністю перенапруг [21]. Для її визначення розглядали комутації та режими мережі, здатні призвести до найвищих перенапруг. Вибирали одну чи кілька таких комутацій ("розрахункові" комутації), і обчислювали відносну перенапругу (у частках робочої напруги) за умови, найнесприятливішого збігу факторів, що впливають на перенапругу. Цю величину прийняли за розрахункову кратність внутрішніх перенапруг і порівнювали з допустимою перенапругою на ізоляційній конструкції устаткування. Запас електричної міцності ізоляції

вважається достатнім, якщо розрахункова кратність не перевищує допустимої, визначеної із деяким запасом стосовно випробувальної напруги.

Основним недоліком такої оцінки внутрішніх перенапруг є її суб'єктивність, оскільки ймовірність умов, що відповідають розрахунковій комутації, чи ймовірна кількість таких комутацій за визначений період експлуатації не оцінюється кількісно. Водночас ця ймовірність істотно впливає на перенапруги: майже у всіх випадках можна вказати такий режим мережі, для якого кратність перенапруг буде вищою від прийнятого значення.

Інший недолік оцінки внутрішніх перенапруг за розрахунковою кратністю - неможливо оцінити необхідний для надійної роботи ресурс стійкості елементів ізоляційних конструкцій, що зазнають старіння під час впливу перенапруг. Наприклад, у паперово-масляній ізоляції вводів високої напруги трансформаторів й інших апаратів кожна перенапруга, що перевищує деякий рівень, викликає незворотну зміну характеристик ізоляції. Зі зростанням кількості впливів ці зміни накопичуються і поступово знижують електричну міцність ізоляції, аж до розвитку пробою за нормальної робочої напруги. У цьому випадку небезпека перенапруг визначається не тільки рівнем, але й частотою їхнього повторення, причому не можна обмежуватися урахуванням лише максимальних перенапруг. Аналогічні труднощі виникають під час визначення вимог до захисних пристроїв, з обмеженим ресурсом кількості спрацьовувань під час комутаційних перенапруг.

Кратність і тривалість внутрішніх перенапруг істотно залежать від режиму роботи нейтралі системи [30, 32, 49]. У системах з ізольованою нейтраллю за стійких металевих замикань на землю напруга на двох фазах підвищується до лінійної. Під час дугового замикання перенапруги у системі можуть досягати величини $(3 \div 4)U_{\phi}$. Оскільки однофазне замикання у системі з ізольованою нейтраллю не супроводжується протіканням великих струмів короткого замикання і не призводить до вимкнення пошкодженої ділянки кола (в цьому і полягає перевага систем з ізольованою нейтраллю), перенапруги в такій системі можуть тривати доволі довго. У такому разі появляється небезпека пробою ізоляції в іншому місці мережі й виникнення двофазного короткого замикання. Для запобігання аваріям у

таких системах необхідно вживати заходів щодо зниження перенапруг та підсилювати ізоляцію. Застосування резонансного заземлення нейтралі через дугогасні котушки сприяє ліквідації замикання і зниженню кратності та тривалості перенапруг, але й стійке однофазне замикання на землю призводить до підвищення напруги у такому випадку на непошкоджених фазах. Однофазне замикання у системах із заземленою нейтраллю супроводжується протіканням струму короткого замикання і швидким вимкненням пошкодженої ділянки, а напруга на непошкоджених фазах збільшується не більше ніж до $(1,2 \div 1,4)U_{\phi}$. Автоматичне повторне ввімкнення здебільшого успішне, і нормальна схема мережі відновлюється.

Інтенсивність внутрішніх перенапруг значної кратності на ізоляції силових трансформаторів і автотрансформаторів залежить передусім від середньорічної кількості комутацій самих апаратів. Порівняно з середньорічною кількістю комутацій ліній, комутації трансформаторів відбуваються рідше, що обмежує обсяг даних про цей тип перенапруг за автоматичної реєстрації.

За статистикою [30] середньорічна кількість комутацій трансформаторів 6 – 35 кВ приблизно втричі менша, ніж для трансформаторів і автотрансформаторів 110 – 750 кВ. Це пояснюється меншими обсягами ремонтних робіт на трансформаторах середніх класів напруги.

Інтенсивність внутрішніх перенапруг на трансформаторах (автотрансформаторах) залежить від місця встановлення цих апаратів. З цього погляду розглянемо три групи трансформаторів:

- трансформатори, що під'єднуються до шин нетупикових підстанцій;
- трансформатори, встановлені на тупикових підстанціях;
- трансформатори блокових, напівблокових схем без вимикачів між лінією і трансформатором і схем з підімкненням апарата в проміжних точках лінії.

На трансформатори першої групи впливають перенапруги на шинах (у режимах, коли трансформатор під'єднаний до шин підстанцій) і перенапруги на ненавантажених трансформаторах під час комутацій їхнього вмикання і вимикання.

Перенапруги під час вмикання і вимикання самих трансформаторів, виміряні

на їхніх вводах, реєструвалися у низці енергосистем [66].

На рис. 1.3 наведена залежність $K_{\tau} = f(\tau)$ для комутацій вимкнення і вмикання ненавантажених трансформаторів різних класів напруги. З рис. 1.4 бачимо, що вимкнення трансформаторів 220 - 500 кВ супроводжуються перенапругами, фактично безпечними для ізоляції. Це пояснюється сприятливим впливом шунтувальних опорів у вимикачах, що комутують трансформатори в ненавантаженому стані (ці опори в межах 100 - 200 кОм на полюс), малими струмами намагнетчування трансформаторів ($I_{н.х}^* = 0,3 \div 0,5 \%$), а також порівняно великою ємністю апаратури й ошиновки, під'єднаної до обвиток трансформатора (автотрансформатора), що комутується. На деяких підстанціях можна комутувати трансформатори без навантаження разом з ненавантаженими збірними шинами. Це дало змогу знизити кратність перенапруг до $K = 1,3 \div 1,4$, хоча у трансформатора, що комутується, найчастіше $I_{н.х}^* = 2,5 \div 3 \%$.

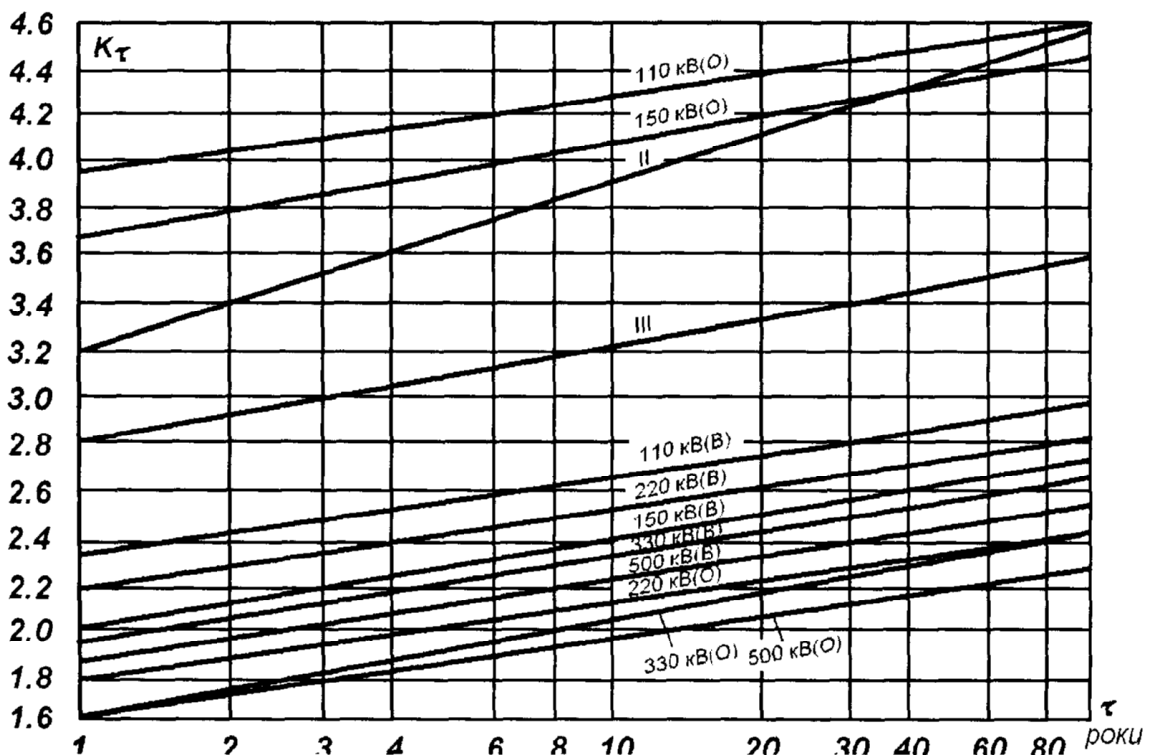


Рис. 1.3. Залежність K_{τ} для перенапруг під час вимкнення (O) і вмикання (B) ненавантажених трансформаторів 110 — 500 кВ і для трансформаторів другої та третьої груп (криві II та III)

Найбільші кратності перенапруг виникають під час вимкнення силових трансформаторів 110 - 150 кВ вимикачами без шунтувальних опорів за невеликої еквівалентної ємності кола вимикач-трансформатор і доволі великого струму $I_{н.х}^* = 2,5 \div 3 \%$.

За перерахованих вище особливостей комутацій для трансформаторів 220 - 500 кВ перенапруги під час вмикання більші, ніж під час вимкнення. Під час вмикання ненавантажених трансформаторів і автотрансформаторів 220 -500 кВ найбільші перенапруги виникають в обвитці, з'єднаній у трикутник. У такому разі перенапруги виникають переважно через неодночасне замикання різних полюсів вимикача і наявність початкової напруги на запізнілих фазах у момент їхнього вмикання, ці напруги трансформуються з обвитки, увімкнені в трикутник.

На трансформаторах другої групи залежно від режиму роботи мережі перенапруги можуть бути доволі високого рівня. Вони виникають у режимах роботи тупикової підстанції, коли звичайне вмикання лінії відбувається з далекого кінця, але вже коли замкнутий лінійний вимикач на тупиковій підстанції. Вимкнення ж відбувається у зворотній послідовності. У цьому режимі під час кожної комутації на устаткування підстанції, зокрема трансформатор, впливають перенапруги розімкнутого кінця. Однак за деяких несприятливих обставин перенапруги на трансформаторах другої групи можуть перевищувати перенапруги, що виникають на розімкнутому кінці ліній.

Для трансформаторів третьої групи найбільші перенапруги спостерігаються, коли звичайна послідовність комутацій передбачає вмикання і вимикання ліній у блоці з трансформатором. Звичайно це відбувається у спрощених схемах, у яких немає вимикача між лінією і трансформатором. У такому разі виявляються всі негативні особливості схем із силовими трансформаторами: ферорезонансні перенапруги під час вмикання, а також резонансні підвищення напруги на неувімкнених фазах під час неодночасного спрацьовування різних полюсів вимикача чи під час неповнофазних режимів. На рис. 1.4 (крива III) наведена залежність $K_{\tau} = f(\tau)$ для перенапруг на вводах трансформаторів 110 - 500 кВ третьої групи.

1.3. Методи визначення перенапруг

Для реалізації статистичного техніко-економічного підходу до координації характеристик ізоляції з характеристиками перенапруг і засобів їхнього обмеження недостатньо знати тільки граничні перенапруги. Необхідні статистичні характеристики перенапруг, такі як кількість перенапруг, що перевищують той чи інший рівень за визначений час (наприклад, за розрахунковий термін експлуатації устаткування), причому повинна бути відома залежність цієї кількості перенапруг від місця встановлення устаткування і від параметрів мережі.

Труднощі одержання цих характеристик за допомогою розрахунків стимулювали на початку шістдесятих років поширення робіт з експериментального визначення характеристик перенапруг у реальних мережах з максимальним урахуванням чинників впливу. Дослідження велися в декількох напрямках.

По-перше, почали широко застосовувати (особливо за кордоном - США, Швеція, Франції, Польщі) фізичні моделі мережі, так звані аналізатори перехідних процесів. На відміну від математичних методів моделювання, фізичні моделі дають змогу порівняно простими способами відтворити такі істотні особливості мережі, як нелінійність кривої намагнечування трансформаторів і реакторів, корона на проводах ліній електропередавання, активні втрати. Основною перевагою модельних досліджень є можливість швидко і з достатньою точністю виконати серію однотипних комутацій (наприклад, вмикання ліній із заданим законом розподілу кутів вмикання контактів вимикача за фіксованих параметрів мережі) і з достатньою надійністю, зумовленою великою кількістю комутацій, знайти закон розподілу амплітуди перенапруг під час цієї комутації. Також моделювання забезпечує широкі можливості для з'ясування впливу окремих характеристик мережі на статичні характеристики амплітуди перенапруг. Зокрема, за допомогою досліджень на моделі отримано закони розподілу кратності перенапруг у мережах, обладнаних вимикачами із шунтувальними опорами, визначено оптимальний шунтувальний опір і тривалість вмикання його в процесі комутації, а також досліджено перенапруги в мережах з вимикачами, забезпеченими

синхронізувальними пристроями для вмикання напруги промислової частоти під час найбільш сприятливої фази.

По-друге, організовано вимірювання перенапруг під час дослідних комутацій у реальних мережах, для того, щоб знайти статистичний розподіл амплітуд перенапруг за таких комутацій.

Ці роботи допомогли істотно уточнити уявлення про статистичні характеристики перенапруг під час певних визначених видів комутацій і одержати деякі результати в розв'язанні задачі статистичної техніко- економічної координації ізоляції ліній електропередавання і лінійного устаткування. Однак для досліджень перенапруг, що супроводжують аварійні комутації (короткі замикання, розриви лінії тощо), організація спеціальних дослідів з великою кількістю комутацій утруднюється. Крім того, для установленого на шинах підстанцій устаткування, є підстави очікувати істотного розходження у статистиці перенапруг під час експлуатаційних комутацій і за аналогічних комутацій під час дослідів. Для дослідів схему мережі спеціально готують так, щоб запобігти розвитку аварії у випадку невдачі результату: вимикається паралельне навантаження, виділяється окрема система шин тощо. Зазвичай умови в мережі під час дослідів відповідають найнесприятливішим з погляду розвитку перенапруг режимів мережі. До того ж організація спеціальних дослідів у мережах вищих класів напруги, що експлуатується, обходиться дуже дорого і тому їх проводять лише у виняткових випадках. Варто також пам'ятати, що ні розрахунки, ні досліди на моделях, ні навіть досліди в реальних мережах не уможливають досліджувати характер внутрішніх перенапруг, їхньої статистичної характеристики, що має велике значення для практичного використання отриманих результатів.

По-третє, організовано реєстрацію внутрішніх перенапруг, що виникають у процесі експлуатації діючих високовольтних мереж, без втручання в їхню роботу. Важливою перевагою цього методу досліджень є одержання безпосередньо тих даних, що потрібні для координації ізоляції, - середньорічної кількості перенапруг, що перевищують задану кратність, з урахуванням варіації усіх чинників, що впливають на рівень і повторюваність внутрішніх перенапруг у досліджуваній

мережі.

Під час збирання й оброблення результатів досліджень внутрішніх перенапруг потрібно враховувати ту обставину, що ДСТУ передбачає єдиний рівень ізоляції для устаткування, що працює у мережах 35 - 750 кВ. Ця обставина фактично унеможливорює індивідуальний підхід до вибору ізоляції електроустаткування для окремих підстанцій з урахуванням впливу параметрів мереж на характеристики внутрішніх перенапруг. В умовах масового будівництва електричних мереж і виробництва електроустаткування така уніфікація ізоляції забезпечує економічні переваги для електропромисловості. Цей підхід обґрунтовують також тим, що статистичні характеристики внутрішніх перенапруг у мережах одного класу напруги не залежать явно від параметрів мереж і розділяються на обмежену кількість груп, що обумовлено насамперед характеристиками застосовуваного електроустаткування.

Реєстрація перенапруг у діючих мережах дає змогу виявити ці групи мереж і визначити усереднені характеристики перенапруг у них, поєднуючи результати вимірювань у доволі великій кількості точок мережі.

Для урахування відмінностей умов розвитку перенапруг у мережах нових, вищих класів напруг, потрібно знати, як позначиться зміна того чи іншого чинника на статистичних характеристиках перенапруг. Такі взаємозв'язки між параметрами схеми і статистикою перенапруг зручніше виявляти за даними модельних дослідів чи спеціальних дослідів у мережах, коли є можливість керувати кожним з параметрів схеми окремо. У цьому плані можливості автоматичної реєстрації перенапруг у діючих мережах має обмеження порівняно з іншими методами досліджень.

Величезний статистичний матеріал, нагромаджений у ході цих досліджень, допоміг істотно уточнити уявлення про небезпеку перенапруг різних видів, уточнити необхідні запаси ізоляції та визначити найбільш економічні й ефективні способи їх обмеження. Реалізовано можливість зниження випробувальних напруг у мережах напругою 220 кВ, розроблено оптимальні заходи для обмеження перенапруг для мереж класу напруги 750 кВ.

Однак проблема уточнення статистичних характеристик перенапруг залишається актуальною, через низку причин.

По-перше, у міру зростання потужності енергосистем стають дедалі жорсткішими вимоги до надійності й економічності електроустаткування, зокрема його ізоляції, що підвищує рівень вимог до точності оцінювання небезпечних впливів.

По-друге, розроблення та застосування нових пристроїв для зниження перенапруг: нелінійних обмежувачів перенапруг, керованих реакторів, удосконаленої комутаційної апаратури - актуалізують питання про перегляд наявних рівнів ізоляції з урахуванням характеристик реальних впливів.

По-третє, дані про перенапруги потрібні під час обґрунтування вимог до самих згаданих пристроїв для обмеження перенапруг. Особливо загострюється питання про уточнення впливів на ізоляцію під час розроблення нових високовольтних конструкцій: закритих розподільних пристроїв високої та надвисокої напруги з елегазовою ізоляцією; ліній із пропускнуою здатністю, підвищеною за рахунок зниження міцності ізолювальних проміжків та іншого сучасного устаткування.

У математичному моделюванні електромагнетних процесів у електроенергетичних системах (ЕЕС) можна загалом виділити два основні підходи відповідно до процедур для вибору зразкової структури і обчислення координат моделі: моделювання методом "білої скриньки" і моделювання методом "чорної скриньки".

Моделювання методом "білої скриньки" подібне до методів, які уможливають повне вивчення внутрішньої поведінки динамічної системи, для вибору обладнання та обчислення його координат. Такі моделі отримують на підставі основних законів електротехніки з урахуванням розподіленості параметрів, вони не залежать від експериментальних даних і їхні координати відповідають реальним елементам ЕЕС.

Альтернативний підхід – це моделювання методом "чорної скриньки". Цей підхід асоціюється з методами, за якими структуру і координати моделі обчислюють

тільки на початку і в кінці (дані входу та виходу) елементів ЕЕС. Структуру і реалізацію вибирають з широкої бази моделей. Параметри заступної схеми не мають ніякого фізичного змісту чи стосунку до яких-небудь фізичних законів, за структурою є суто математичними рівняннями, які відповідають зразковому обладнанню із досліджуваними координатами. В цьому випадку немає ніяких знань про фізичну систему, чи її характеристики.

Компромідом між цими двома методологіями може слугувати модель "сірої скриньки". Ця методологія об'єднує обидва підходи, що дає змогу визначити структуру та координати режимів.

З розвитком моделювання електромагнетних процесів у ЕЕС, у підходах "білої скриньки" почали використовувати еквівалентні параметри, наприклад, опори, власні та взаємні індуктивності, ємності та провідності для формування математичної моделі.

Цей підхід моделювання широко застосовується для вивчення процесів, що відбуваються у конкретних елементах ЕЕС, і може використовуватись для деталізованого представлення. Основна мета такої моделі - обчислення внутрішніх перенапруг, щоб гарантувати, що ізоляція зможе витримати усі перенапруги, які виникають під час експлуатації, і забезпечити оптимальний запас ізоляції.

Моделювання методом "чорної скриньки" в ЕЕС дає змогу відтворити поведінку кожного елемента в цілому з лінійними параметрами. Цей підхід оптимальний для вивчення високочастотної взаємодії елементів ЕЕС, для аналізу перенапруг та координації ізоляції.

Кожен тип моделі має певні переваги і недоліки залежно від того, яка мета його використання. Якщо елемент ЕЕС розглядають як структурну частину енергосистеми, модель "чорної скриньки" може бути адекватною. Але якщо нас цікавлять процеси, що відбуваються в середині будь-якого елемента, такі як, для прикладу, внутрішні перенапруги на ізоляції обвиток трансформатора, необхідно використовувати докладну і складну модель, відому як модель "білої скриньки" [1].

Математичне моделювання хвильових процесів у ЕЕС сьогодні є актуальною проблемою. Використовувати рівняння математичної фізики для дослідження

високочастотних процесів у лініях електропередачі і трансформаторах, можна адекватно відтворити реальні умови експлуатації цих елементів електроенергетичних систем.

1.4. Загальні принципи координації ізоляції

Координація ізоляції – це зіставлення рівнів ізоляції (електрична міцність ізоляції) електрообладнання з напругами, які можуть виникнути на його затискачах під час експлуатації. За такого зіставлення необхідно враховувати витрати на заходи обмеження перенапруг, залежність вартості обладнання від рівня його ізоляції, збитки, спричинені перервами в електропостачанні чи пошкодженням електрообладнання.

В ідеалі координація ізоляції повинна ґрунтуватися на всебічних даних про дію на електрообладнання перенапруг, електричну міцність ізоляції та економічні чинники з урахуванням статистичного характеру розподілу перенапруг і стійкості ізоляції. Метод координації ізоляції є лише наближеним до вказаного ідеального, оскільки багато використаних даних є неповними чи орієнтовними.

Фактично один із аспектів проблеми координації ізоляції полягає в аналізі факторів і умов, від яких залежить перенапряження на затискачах електрообладнання, у виборі конкретних умов як основи для стандартизації рівнів ізоляції, у нормуванні цих рівнів – випробовуваних напруг електрообладнання. Інший аспект проблеми – розв'язання питань, які виникають у випадках дії перенапруг, відмінних від прийнятих для стандартизації. Завдання полягає у вишукуванні додаткових засобів обмеження перенапруг до рівня, допустимого для стандартизованих випробувальних напруг електрообладнання.

Розробляючи норми для електрообладнання надвисоких напруг (330 кВ і вище), на початковій стадії координації ізоляції досліджували технічні можливості обмеження перенапруг на основі удосконалення схем і методів захисту, а також можливості створення електрообладнання з потрібними параметрами, визначали розміри повітряних проміжків, необхідних під час дії цієї чи іншої напруги.

Необхідний рівень ізоляції, тобто випробувальну напругу (координацію ізоляції), неможливо вибрати без детального аналізу перенапруг, що виникають в електричних мережах.

Проблема координації ізоляції передбачає як основне завдання – встановлення рівнів ізоляції електричної мережі. Координація ізоляції повинна ґрунтуватися на заданих амплітудах і формах хвиль перенапруг, що діють.

1.5. Координація ізоляції за внутрішніми перенапругами та робочою напругою

Максимальні напруги на розрядниках вентилях (РВ) під час внутрішніх перенапруг визначаються пробивною напругою іскрового проміжку РВ за робочої частоти за ($U_{np\sim}$). Залишкова напруга на робочому опорі РВ під час впливу внутрішніх перенапруг звичайно нижча $U_{np\sim}$. Перепадів напруги між РВ та ізоляцією, що захищається, не виникає.

У сучасній практиці за рівнем внутрішніх перенапруг, обмежених $U_{np\sim}$, вибирають дослідні однохвилинні напруги робочої частоти $U_{np\sim}$. Значення $U_{np\sim}$ для внутрішньої та зовнішньої ізоляції наведено в табл. 1.1.

Для внутрішньої ізоляції трансформаторів $U_{випр\sim}$ вибирають за формулою

$$U_{випр} = \frac{U_{np\sim}}{K_{\tau}} K_k, \quad (1.5)$$

де K_{τ} – коефіцієнт імпульсу під час перерахунку короткочасних внутрішніх перенапруг до $U_{випр}$; $K_k \approx 1,1$ – коефіцієнт кумулятивності.

Зазвичай внутрішні перенапруги мають характер комутаційних імпульсів з тривалістю не більше за 0,01-0,02 с, тому приймається $K_{\tau} = 1,35$ за тривалості впливу 1 с. Окрім випробування фазної ізоляції, для надвисокої напруги нормується випробування міжфазної ізоляції, що передбачає дію міжфазних комутаційних перенапруг. Координація зовнішньої ізоляції з рівнем внутрішніх (комутаційних)

перенапруг виконується за її міцністю під дощем.

Таблиця 1.1

Дослідні напруги промислової частоти (50 Гц) для електроустаткування
Класи напруги 3-750кВ з нормальною ізоляцією

Клас напруги	Максимальна робоча напруга, $kV_{\text{дiюче}}$	Випробувальна напруга (щохвилинна) ізоляції, $kV_{\text{дiюче}}$				Випробувальна (довготривала) напруга під час плавного підйому для зовнішньої ізоляції, $kV_{\text{дiюче}}$			
		Силві трансформатори, трансформатори напруги і реактори		Апарати	Ізолятори, що випробовуються окремо	У сухому стані		Ізолятори, що випробовуються окремо	Під дощем
		З корпусу	Між фазами			Апарати, трансформатори і реактори			
				На корпус	Між фазами				
3	3,5	18	24	24	25	26		27	20
6	6,9	25	32	32	32	34		36	26
10	11,5	35	42	42	42	45		47	34
15	17,5	45	55	55	57	60		63	45
20	23	55	65	65	68	70		75	55
35	40,5	85	95	95	100	105		110	85
110	126	200	200	250	265	280		295	215
150	172	275	275	320	340	355		375	290
220	252	400	400	470	490	520		550	425
330	363	460	575	600	630	670	875	700	550
500	525	680	830	770	770	850	1180	850	700
750	787	900/800	-	950	950	1050	1700	1050	900

За заданого рівня можливих внутрішніх перенапруг $U_{np\sim}$ випробувальна напруга промислової частоти для зовнішньої ізоляції під зливою визначається за формулою

$$U_{випр} = \frac{U_{np\sim}}{K_{\tau} K_p}. \quad (1.6)$$

Коефіцієнти K_{τ} і K_p у формулі (1.6) визначають так

$$K_{\tau} = 1 + 0,5 \left(\frac{U_{cp}}{U_{mp}} - 1 \right), \quad (1.7)$$

$$K_p = 0,5 \left(1 + \frac{P}{760} \right), \quad (1.8)$$

залежно від відношення U_{cp}/U_{mp} ізолятора.

Для всіх видів зовнішньої ізоляції прийнято $K_{\tau} \approx 1,1$. Коефіцієнт K_p є поправкою на відмінність атмосферного тиску в умовах експлуатації від стандартного. За висоти розташування підстанції до 500 чи 1000 м над рівнем моря приймають значення K_p відповідно 0,965 чи 0,94.

Необхідний рівень випробувальної напруги для зовнішньої ізоляції в сухому стані також можна оцінити за амплітудою внутрішніх перенапруг, що впливають

$$U_{випр\sim} = \frac{U_{np\sim}}{\delta/K}, \quad (1.7)$$

де δ/K - поправка на неточність реальних метеоумов порівняно зі стандартними.

За висот 500 і 1000 м над рівнем моря приймають розрахункове значення δ/K , що дорівнює відповідно 0,89 і 0,84. Коефіцієнт імпульсу, як і коефіцієнт кумулятивності, приймають для сухої зовнішньої ізоляції таким, що дорівнює 1.

Вплив внутрішніх перенапруг можна бути приблизно еквівалентувати напругою не тільки промислової частоти, як прийнято в ДСТУТ 1516.2-97, але й

імпульсною хвилею. Дослідження показали, що по важливості впливу на внутрішню ізоляцію трансформаторів комутаційні імпульси тривалістю 0,01 – 0,02 с і амплітудою U_k відповідають повній імпульсній хвилі 1,5/40 мкс з амплітудою $\sim \frac{U_k}{0,8}$. Отже, випробування повною хвилею 1,5/40 мкс дає змогу координувати внутрішню ізоляцію трансформаторів (а також інші види ізоляції) не тільки з атмосферними, але й з внутрішніми перенапругами. Цей підхід, зокрема, прийнятий у США. Можна також здійснювати випробування безпосередньо комутаційними імпульсами.

У системах, особливо в системах надвисокої напруги, можуть виникати внутрішні перенапруги із тривалістю декілька секунд чи навіть хвилин. Причиною таких впливів можуть бути скидання навантаження, неправильна робота регуляторів напруги, односторонній розрив лінії електропередавання тощо. Амплітуди і тривалості цих перенапруг обмежуються схемними заходами то автоматикою, причому в деяких випадках, наприклад, за умови синхронізації лінії електропередавання, тривалість перенапруг сягає десятків хвилин.

Орієнтовно допустимі значення перенапруг залежно від їхньої тривалості наведено в табл. 1.2. Ці значення визначаються внутрішньою ізоляцією трансформаторів і апаратів, тому вони незалежні від атмосферних умов.

Ця форма координації ґрунтується на стані ізоляції під час тривалого впливу напруги, для внутрішньої ізоляції, зокрема, вимірюють часткові розряди в ізоляції. З удосконаленням захисних характеристик захисних пристроїв рівні внутрішньої ізоляції устаткування все більшою мірою визначаються робочою напругою. Покращення ізоляційних характеристик досягається застосуванням сучасніших ізоляційних матеріалів, удосконалюванням технології виготовлення ізоляції, а також покращенням конструкцій ізоляції стосовно розподілу електричного поля й охолодження.

Важливою проблемою є розроблення надійної методики випробувань внутрішньої ізоляції трансформаторів і апаратів на тривалі впливи. Складність завдання полягає в тому, що «крива життя» внутрішньої ізоляції спадна навіть за

тривалості дії напруги близько 10 год, хоча зрозуміло, що таке тривале випробування ізоляції фактично не прийнятне.

Таблиця 1.2

Координація ізоляції під час тривалих внутрішніх перенапруг

Назва обладнання	Допустиме підвищення напруги, кратне до U_{ϕ} , на підстанційній ізоляції під час довготривалої дії				
	1 с	20 с	до 1 хв	до 20 хв	до 60 хв
Силові трансформатори й автотрансформатори	2,0	1,3	1,2	1,15	1,1
Шунтувальні реактори в однофазному виконанні	2,0	1,4	1,25	1,2	1,15
Трансформатори напруги електромагнетного типу	2,0	1,5	1,3	1,25	1,2
Трансформатори струму, конденсатори зв'язку, вводи масляних вимикачів й інші апарати	2,0	1,6	1,45	1,4	1,3

Зі зниженням рівнів атмосферних і внутрішніх перенапруг робоча напруга починає визначати також вимоги до зовнішньої ізоляції.

Висновки

1. Визначено вимоги до перенапруг, характеристики перенапруг в силових трансформаторах та координацію ізоляції.
2. Проаналізовано і обґрунтовано методи визначення перенапруг в електроенергетичних системах.
3. Визначено вимоги до хвиль перенапруг під час дослідження хвильових процесів в трансформаторах.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАТОРА З ВРАХУВАННЯМ РОЗПОДІЛЕНОСТІ ПАРАМЕТРІВ

2.1. Математична модель обвитки трансформатор без врахування взаємоіндукції між витками

Перенапруги під час аварійних і комутаційних процесів відрізняються від напруг, за яких досліджується ізоляційна здатність трансформаторів, перевищуючи їх. Тому виникає проблема дослідження електромагнетних процесів у трансформаторах із урахуванням розподіленості параметрів.

Хвильові процеси у трансформаторах відрізняються від хвильових процесів у довгих лініях, якщо враховувати ємності між витками обвитки, що істотно впливає на високочастотні процеси та розподіл напруги вздовж обвитки.

Під час проектування надпотужних трансформаторів активізувались експериментальні дослідження, які доповнювали теоретичні розробки. Ізоляція обвитки істотно впливає на розміри, вагу і вартість трансформатора, а також збільшує його реактивний опір, тим самим зменшуючи його пропускну здатність.

Значної економії та покращення експлуатаційних характеристик трансформатора можна досягти, зменшуючи ізоляційні проміжки. Оскільки до трансформаторів ставляться високі вимоги стосовно надійності роботи, зменшити ізоляційні проміжки можливо тільки в разі врахування всіх перенапруг, які виникають під час експлуатації трансформатора.

Проектуючи трансформатори, необхідно знати не тільки максимальні перенапруги в усіх місцях їхньої обвитки, але й тривалість цих перенапруг. Потрібно також враховувати магнетні зв'язки між обвитками, особливо різницю напруг між витками обвитки, оскільки між ними може виникнути висока напруга.

Звідси впливає необхідність математичного моделювання хвильових процесів у трансформаторах [26, 38-43, 66, 93].

Заступну схему обвитки трансформатора на одиницю довжини вздовж осі обвитки, із урахуванням попередніх міркувань, зображено на рис. 2.1 [16, 17].

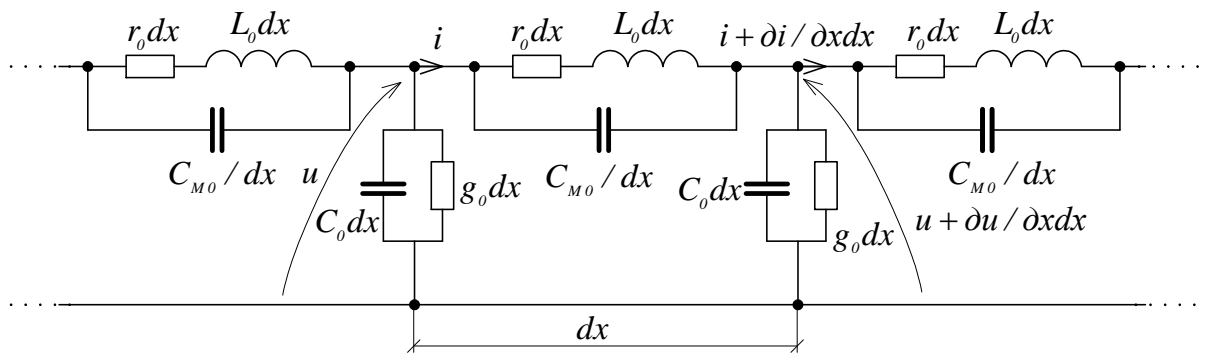


Рис. 2.1. Заступна схема обвитки трансформатора на одиницю довжини вздовж осі обвитки

Наявність ємнісного зв'язку між витками обвитки дає змогу врахувати зміну струму в n -му витку обвитки за рахунок різниці струмів, тобто струму, який протікає між витками через ємність від $(n-1)$ -го витка до n -го витка та струму, що протікає від n -го до $(n+1)$ -го витка.

Позначимо потенціали витків обвитки через u_{n-1} , u_n і u_{n+1} . Сплив струму з витка n визначатиметься різницею струму, який протікає від витка n до $(n+1)$ через ємність $C_{мв} \Delta x$, а також із витка $(n-1)$ до n $C_{мв} \Delta x$, а також струмом від витка n на землю через ємність $C_0 dx$.

Міжвиткова ємність між двома витками (рис. 2.2) визначається так

$$\sum_{i=1}^n C_{мв_i} \Delta x = C_{мв} l_{витка}, \quad (2.1)$$

де Δx – одиниця довжини витка обвитки; $l_{витка}$ – довжина одного витка.

C_{M0} – це ємність на одиницю довжини dx вздовж осі обвитки й у таку одиницю довжини може входити декілька витків, тому ця ємність складається з міжвиткових ємностей, які сполучені послідовно, й на заступній схемі (рис. 2.1) позначається C_{M0}/dx . Ця ємність тим менша, чим більша кількість витків у прийнятій одиниці довжини на осі обвитки, оскільки ємності цих витків сполучені послідовно. Тому якщо $C_{мв} l_{витка}$ поділити на кількість витків обвитки, які є в одиниці довжини на осі

обвитки, то отримаємо міжвиткову ємність на одиницю довжини dx , яку необхідно вводити в рівняння, що описують заступну схему (рис.2.1).

Сумарну ємність вздовж осі обвитки C_M за довжини цієї осі l можна визначити за двома підходами – це ємність між двома витками (2.1), розділена на кількість витків обвитки $n_{\text{витків}}$. Разом з тим, ця ємність дорівнює ємності C_{M0} , поділеній на довжину l вздовж осі обвитки, тобто

$$C_M = C_{\text{ме витка}} l / n_{\text{витків}} = C_{M0} / l, \quad (2.2)$$

де $l_{\text{витка}}$ – довжина одного витка обвитки; l – довжина обвитки вздовж її осі; $C_{\text{ме}}$ – ємність між двома витками обвитки; C_{M0} – ємність на одиницю довжини dx вздовж осі обвитки; $n_{\text{витків}}$ – кількість витків обвитки.

Виткова довжина обвитки визначається так

$$l_{\text{обвитки}} = l_{\text{витка}} n_{\text{витків}}. \quad (2.3)$$

З (2.2) знаходимо C_{M0} на одиницю довжини вздовж обвитки, з урахуванням (2.3), тобто

$$C_{M0} = C_{\text{ме витка}} l_{\text{обвитки}} / n_{\text{витків}} = C_{\text{ме витка}} l_{\text{обвитки}}^2 / l_{\text{витка}}. \quad (2.4)$$

Струм спливу через ємність $C_{\text{ме}} \Delta x$ спричиняє в індуктивності спад напруги. Наявність ємності між витками обвитки дає змогу врахувати зміну струму в n -му витку за рахунок різниці струмів, які протікають через міжвиткову ізоляцію від витка $(n-1)$ до n й від n до $(n+1)$.

Якщо позначимо потенціали витків $(n-1)$, n та $(n+1)$ (рис. 2.2) через відповідно u_{n-1} , u_n , u_{n+1} , то струм спливу з витка n визначатиметься струмами з

витка $(n+1)$ на n та з n на $(n-1)$ через ємності $C_{мб} \Delta x$, а також струмом на землю через ємність C_0 , тобто

$$-\Delta i_{n-1} + \Delta i_{n+1} + i_{C_0} + i_{g_0} = \Delta i_{спливу}. \quad (2.5)$$

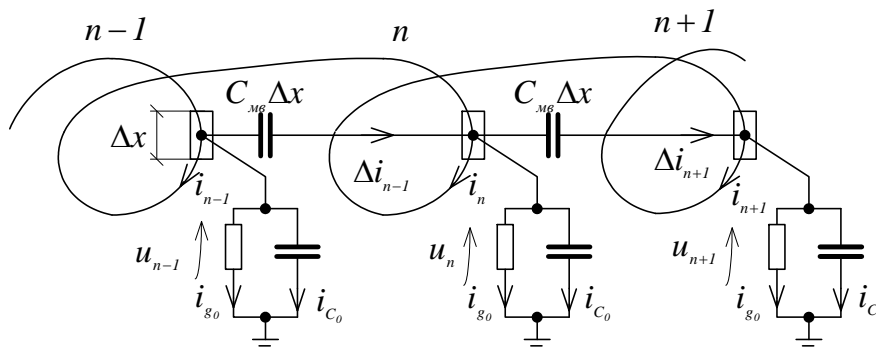


Рис. 2.2. Струми спливу з витка обвитки трансформатора

Струм спливу, який протікає через ємність $C_{мб} \Delta x$ із витка $(n-1)$ до витка n , визначається так

$$\Delta i_{n-1} = C_{мб} \Delta x d(\Delta u_{n-1}) / dt = C_{мб} \Delta x d(u_{n-1} - u_n) / dt. \quad (2.6)$$

Аналогічно визначається струм спливу через ємність $C_{мб} \Delta x$ із витка n до витка $(n+1)$, тобто

$$\Delta i_{n+1} = C_{мб} \Delta x d(\Delta u_{n+1}) / dt = C_{мб} \Delta x d(u_n - u_{n+1}) / dt. \quad (2.7)$$

Струми спливу через ємність C_0 і g_0 на землю з витка n визначаються відповідно так

$$\begin{aligned} i_{C_0} &= C_0 du_n / dt; \\ i_{g_0} &= g_0 u_n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Загальний струм спливу з витка з урахуванням (2.6) – (2.8) на підставі (2.5) запишемо так

$$\begin{aligned} \Delta i_{\text{спливу}} &= C_{\text{мс}} \Delta x d((u_n - u_{n+1}) - (u_{n-1} - u_n)) / dt + C_0 du_n / dt + g_0 u_n = \\ &= -C_{\text{мс}} \Delta x d((u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})) / dt + C_0 du_n / dt + g_0 u_n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Вираз у дужках під знаком похідної формули (2.9) можна розглядати як різницю скінченних різниць, тобто скінченну різницю другого порядку

$$((u_n - u_{n+1}) - (u_{n-1} - u_n)) = \Delta^2 u_n = \Delta^2 u_n / \Delta x^2 \Delta x^2. \quad (2.10)$$

З урахуванням (2.10) формулу (2.9) запишемо так

$$\Delta i_{\text{спливу}} = C_{\text{мс}} \Delta x d(\Delta^2 u_n / \Delta x^2 \Delta x^2) / dt + C_0 du_n / dt + g_0 u_n. \quad (2.11)$$

Оскільки Δx - це є елемент довжини витка обвитки, то на підставі (2.11) струм спливу з цього елемента запишемо так

$$-\partial i_n / \partial x = g_0 u_n + C_0 \partial u_n / \partial t - C_{\text{мс}} \Delta x \partial^3 u_n / (\partial x^2 \partial t). \quad (2.12)$$

Якщо відраховувати відстань вздовж осі обвитки, то (2.12) запишемо так

$$-\partial i_n / \partial x = g_0 u_n + C_0 \partial u_n / \partial t - C_{\text{м0}} \partial^3 u_n / (\partial x^2 \partial t). \quad (2.13)$$

Спад напруги на одиницю довжини витка обвитки

$$-\partial u / \partial x = r_0 i_n + L_0 \partial i_n / \partial t. \quad (2.14)$$

Зведемо рівняння (2.13) і (2.14) до однієї змінної $u(x, t)$. Для цього (2.13) продиференціюємо за t і помножимо на L_0

$$L_0 \partial_t^2 i_n / (\partial t \partial x) + L_0 g_0 \partial u_n / \partial t + L_0 C_0 \partial^2 u_n / \partial t^2 - L_0 C_{M0} \partial^4 u_n / (\partial x^2 \partial t^2) = 0, \quad (2.15)$$

а рівняння (2.14) продиференціюємо за x

$$\partial^2 u / \partial x^2 + r_0 \partial i_n / \partial t + L_0 \partial^2 i_n / (\partial t \partial x) = 0. \quad (2.16)$$

Від рівняння (2.15) віднімемо рівняння (2.16), в результаті чого отримуємо

$$\begin{aligned} & -L_0 C_{M0} \partial^4 u_n / (\partial x^2 \partial t^2) + L_0 C_0 \partial^2 u_n / \partial t^2 - \partial^2 u_n / \partial x^2 + L_0 g_0 \partial u_n / \partial t - \\ & - r_0 \partial i_n / \partial x = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

У рівняння (2.17) замість похідної $\partial i_n / \partial x$ підставляємо її значення з рівняння (2.13). Одержуємо рівняння, яке містить тільки одну невідому функцію $u(x, t)$, тобто

$$\begin{aligned} & -L_0 C_{M0} \partial^4 u_n / (\partial x^2 \partial t^2) - r_0 C_{M0} \partial^3 u_n / (\partial x^2 \partial t) + L_0 C_0 \partial^2 u_n / \partial t^2 - \partial^2 u_n / \partial x^2 + \\ & + (r_0 C_0 + L_0 g_0) \partial u_n / \partial t + r_0 g_0 u_n = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.13) і (2.14) можна також звести до однієї змінної $i(x, t)$. Для цього (2.13) продиференціюємо за x

$$-\partial^2 i_n / \partial x^2 = g_0 \partial u_n / \partial x + C_0 \partial^2 u_n / (\partial x \partial t) - C_{M0} \partial^4 u_n / (\partial x^3 \partial t). \quad (2.18')$$

Підставимо в (2.18') рівняння (2.14), отримуємо

$$\begin{aligned}
& -L_0 C_{M_0} \partial^4 i_n / (\partial x^2 \partial t^2) - r_0 C_{M_0} \partial^3 i_n / (\partial x^2 \partial t) + L_0 C_0 \partial^2 i_n / \partial t^2 - \\
& - \partial^2 i_n / \partial x^2 + (r_0 C_0 + L_0 g_0) \partial i_n / \partial t + r_0 g_0 i_n = 0.
\end{aligned} \tag{2.18''}$$

Рівняння (2.18'') за формою аналогічне рівнянню (2.18).

Для розв'язання рівняння (2.18) використаємо метод розділення змінних.

Уведемо позначення $a = L_0 C_{M_0}$, $b = r_0 C_{M_0}$, $c = L_0 C_0$, $h = r_0 C_0 + L_0 g_0$, $s = r_0 g_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
& -a \partial^4 u_n / (\partial x^2 \partial t^2) - b \partial^3 u_n / (\partial x^2 \partial t) + c \partial^2 u_n / \partial t^2 - \\
& - \partial^2 u_n / \partial x^2 + h \partial u_n / \partial t + s u_n = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Початкові та граничні умови

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u_0(x) = E_\delta, \quad x \in (0, l);$$

$$\partial u(x, t) / \partial t \Big|_{t=0} = u_1(x) = 0;$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = f_0(t) = e_{imn}(t) = E(e^{-at} - e^{-bt}), \quad t > 0; \tag{2.20}$$

$$u(x, t) \Big|_{x=l} = f_1(t) = 0.$$

Узгодженість умов

$$u_0(x) \Big|_{t=0} = u(x, t) \Big|_{t=0} = f_0(t) \Big|_{t=0};$$

$$u_0(x) \Big|_{x=l} = u(x, t) \Big|_{t=0} = f_1(t) \Big|_{t=0};$$

$$f_0(0) = u_0(0), \quad f_1(0) = u_1(l),$$

$$df_0(t) / dt \Big|_{t=0} = u_0(0) \Big|_{t=0}, \quad df_1(t) / dt \Big|_{t=0} = u_1(t).$$

Шукаємо функції $A(t)$ та $B(t)$, щоб заміна

$$u(x, t) = V(x, t) + A(t) + xB(t), \quad (2.22)$$

дала для $V(x, t)$ узгоджені умови (2.21), тобто

$$V(x, t)|_{x=0} = 0; \quad V(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (2.23)$$

Відповідно до (2.22) $u(x, t)|_{x=0} = V(x, t)|_{x=0} + A(t) = f_0(t)$ та $u(x, t)|_{x=l} = V(x, t)|_{x=l} + A(t) + lB(t) = f_1(t)$, звідки $A(t) = f_0(t) = e_{imn}(t)$ та $B(t) = \frac{1}{l}(f_1(t) - f_0(t)) = -\frac{1}{l}f_0(t) = -\frac{1}{l}e_{imn}(t)$.

Замість початкових умов (2.20) виникають умови

$$u(x, t)|_{t=0} = V(x, t)|_{t=0} + A(t)|_{t=0} + xB(t)|_{t=0} \equiv u_0(x);$$

$$\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = \partial V(x, t)/\partial t|_{t=0} + dA(t)/dt|_{t=0} + xdB(t)/dt|_{t=0} \equiv u_1(x). \quad (2.24)$$

Звідси

$$V(x, t)|_{t=0} = u_0(x) - A(t)|_{t=0} - xB(t)|_{t=0} = -A(t)|_{t=0} - xB(t)|_{t=0} \equiv V_0(x);$$

$$\partial V(x, t)/\partial t|_{t=0} = u_1(x) - dA(t)/dt|_{t=0} - xdB(t)/dt|_{t=0} =$$

$$= -dA(t)/dt|_{t=0} - xdB(t)/dt|_{t=0} \equiv V_1(x). \quad (2.25)$$

Рівняння для змінної $V(x, t)$ одержуємо, підставляючи (2.22) в (2.19), тобто

$$-a\partial^4 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t^2) - b\partial^3 V(x, t)/(\partial u^2 \partial t) + c(\partial^2 V(x, t)/\partial t^2 +$$

$$+ d^2 A(t)/dt^2 + xd^2 B(t)/dt^2) - \partial^2 V(x, t)/\partial x^2 + h(\partial V(x, t)/\partial t +$$

$$+ dA(t)/dt + xdB(t)/dt) + s(V(x, t) + A(t) + xB(t)) = 0$$

чи

$$-a\partial^4 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t^2) - b\partial^3 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t) + c\partial^2 V(x, t)/\partial t^2 -$$

$$- \partial^2 V(x, t)/\partial x^2 + h\partial V(x, t)/\partial t + sV(x, t) = F(x, t), \quad (2.26)$$

де

$$F(x, t) = -cd^2 A(t)/dt^2 - cxd^2 B(t)/dt^2 - hdA(t)/dt - hxdB(t)/dt - sA(t) - sxB(t)$$

– відома частина рівняння.

Враховуючи (2.23), шукаємо розв'язок $V(x, t)$ у вигляді

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{100} C_k(t) \sin(\pi kx/l), \quad 0 < x < l. \quad (2.27)$$

Похідна від (2.27)

$$\partial V(x, t)/\partial t = \sum_{k=1}^{100} dC_k(t)/dt \sin(\pi kx/l). \quad (2.28)$$

За $t = 0$ отримуємо

$$V(x, t)|_{t=0} = V_0(x) = \sum_{k=1}^{100} C_k(t)|_{t=0} \sin(\pi kx/l); \quad (2.29)$$

$$\partial V(x, t)/dt|_{t=0} = V_1(x) = \sum_{k=1}^{100} dC(t)/dt|_{t=0} \sin(\pi kx/l).$$

Розкладемо початкові умови в ряди Фур'є

$$V_0(x) = \sum_{k=1}^{100} \alpha_k \sin(\pi kx/l); \quad (2.30)$$

$$V_1(x) = \sum_{k=1}^{100} \beta_k \sin(\pi kx/l).$$

З рівнянь (2.30) знаходимо

$$\alpha_k = 1/l \int_{x=0}^l V_0(x) \sin(\pi kx/l) dx; \quad (2.30')$$

$$\beta_k = 1/l \int_{x=0}^l V_1(x) \sin(\pi kx/l) dx.$$

Тоді з (2.29) отримуємо

$$C_k(t)|_{t=0} = \alpha_k \text{ і } dC(t)/dt|_{t=0} = \beta_k. \quad (2.31)$$

Диференційні рівняння для $C_k(t)$ знаходимо, розклавши $F(x, t)$ в ряд Фур'є, тобто

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{100} \gamma_k(t) \sin(\pi k x / l). \quad (2.32)$$

Використовуючи (2.27), перетворимо ліву частину (2.26) так

$$\begin{aligned} & -a\partial^4 V(x, t) / (\partial x^2 \partial t^2) + c\partial^2 V(x, t) / \partial t^2 = \\ & = \sum_{k=1}^{100} (a(\pi k / l)^2 + c) d^2 C_k(t) / dt^2 \sin(\pi k x / l); \\ & -b\partial^3 V(x, t) / (\partial x^2 \partial t) + h\partial V(x, t) / \partial t = \\ & = \sum_{k=1}^{100} (b(\pi k / l)^2 + h) dC_k(t) / dt \sin(\pi k x / l); \\ & -\partial^2 V(x, t) / \partial x^2 + sV(x, t) = \\ & = \sum_{k=1}^{100} ((\pi k / l)^2 + s) C_k(t) \sin(\pi k x / l). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Згідно з (2.26) і (2.32) уводимо позначення

$$a_i = (\pi k / l)^2 + c; \quad b_i = (\pi k / l)^2 + h; \quad c_i = (\pi k / l)^2 + s, \quad (2.34)$$

отримуємо рівняння

$$a_1 d^2 C_k(t) / dt^2 + b_1 dC_k(t) / dt + c_1 C_k(t) = \gamma_k(t),$$

$$k = \overline{1, 100}. \quad (2.35)$$

Розглянемо рівняння (2.35) як однорідне зі сталими коефіцієнтами

$$a_1 d^2 e(t) / dt^2 + b_1 de(t) / dt + c_1 e(t) = 0. \quad (2.36)$$

Знаходимо характеристичне рівняння для (2.36)

$$a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1 = 0. \quad (2.37)$$

З урахуванням (2.34) за $k \rightarrow \infty$ характеристичне рівняння (2.37) наближається до рівняння $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, яке має комплексні корені.

Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \delta + j\theta$.

Тоді однорідне рівняння (2.36) має фундаментальну систему розв'язання $e_1(t) = e^{\delta t} \cos(\theta t)$ і $e_2(t) = e^{\delta t} \sin(\theta t)$.

Згідно з методом варіації довільних сталих шукаємо розв'язок рівняння (2.35) у вигляді

$$C_k(t) = B_1(t) e_1(t) + B_2(t) e_2(t). \quad (2.38)$$

Функції B_1 і B_2 шукаємо з системи

$$dB_1(t) / dt e_1(t) + dB_2(t) / dt e_2(t) = 0;$$

$$dB_1(t) / dt de_1(t) / dt + dB_2(t) / dt de_2(t) / dt = 1 / a_1 \gamma_k(t). \quad (2.39)$$

Ввівши позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_1(t) & e_2(t) \\ \frac{de_1(t)}{dt} & \frac{de_2(t)}{dt} \end{vmatrix},$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} dB_1(t)/dt &= -1/(a_1\Delta)\gamma_k(t)e_2(t); \\ dB_2(t)/dt &= 1/(a_1\Delta)\gamma_k(t)e_1(t). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Для знаходження початкових умов $B_1(t)|_{t=0}$ і $B_2(t)|_{t=0}$, диференціюємо (2.38) і, використавши перше рівняння із (2.39), отримуємо

$$\begin{aligned} dC_k(t)/dt &= dB_1(t)/dte_1(t) + dB_2(t)/dte_2(t) + \\ &+ B_1(t)de_1(t)/dt + B_2(t)de_2(t)/dt = \\ &= B_1(t)de_1(t)/dt + B_2(t)de_2(t)/dt. \end{aligned} \quad (2.41)$$

З рівняння (2.41) і рівняння (2.38) за $t = 0$ одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} C_k(t)|_{t=0} &= B_1(t)|_{t=0}e_1(t)|_{t=0} + B_2(t)|_{t=0}e_2(t)|_{t=0}; \\ dC_k(t)/dt|_{t=0} &= B_1(t)|_{t=0}de_1(t)/dt|_{t=0} + B_2(t)|_{t=0}de_2(t)/dt|_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Враховуючи (2.41), знаходимо з (2.42) $B_1(t)|_{t=0}$ і $B_2(t)|_{t=0}$ і згідно з (2.40)

знаходимо

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \int_0^t dB_1(t)/dt + B_1(t)|_{t=0}; \\ B_2(t) &= \int_0^t dB_2(t)/dt + B_2(t)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Згідно з (2.38) знаходимо $C_k(t)$, і згідно з (2.27) $V(x,t)$ і за (2.22) визначаємо $u(x,t)$, тобто розв'язок рівняння (2.19) [17, 35, 90, 91].

Розподіл напруги вздовж первинної обвитки високовольтного трансформатора для різного часу показано на рис. 2.3. Зі зміною часу амплітуда напруги зростає [40].

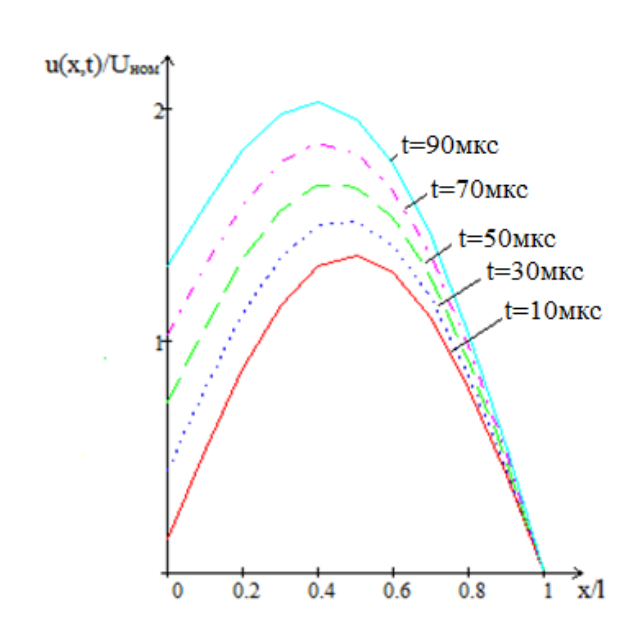


Рис. 2.3. Розподіл напруги вздовж первинної обвитки високовольтного трансформатора для різного часу

На рис. 2.4 показано розподіл імпульсу напруги вздовж обвитки трансформатора у тривимірному просторі.

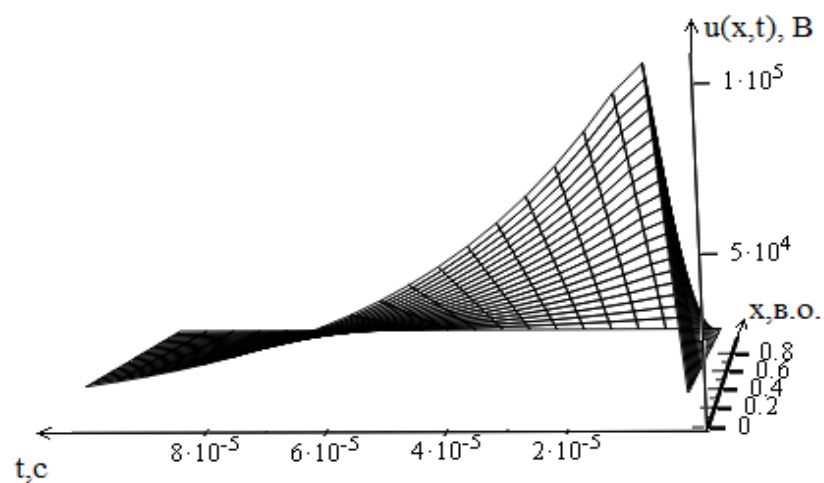


Рис. 2.4. Розподіл імпульсу напруги вздовж обвитки трансформатора в тривимірному просторі

Отриманий математичний апарат дає змогу досліджувати хвильові процеси в обвитках трансформаторів з урахуванням залежності напруги і струму від відстані та часу. Під час дослідження хвильових процесів у обвитках трансформаторів необхідно враховувати співвідношення між інтервалом часу поширення електромагнетних хвиль уздовж усієї довжини обвитки та інтервалом часу, упродовж якого струм і напруга змінюються істотніше від повної їх зміни у розглянутому процесі.

2.2. Математична модель обвитки трансформатора з урахуванням взаємоіндукції між витками

Для вибору ізоляції обвитки трансформаторів та схем захисту трансформаторів від перенапруг необхідно знати максимальні значення напруг відносно землі окремих частин обвиток трансформаторів, а також значення напруг між витками обвитки й обвитками під час імпульсних перенапруг з урахуванням всіх параметрів заступної схеми. Для отримання таких результатів використовується математичне моделювання, оскільки для великих трансформаторів виготовляти такі моделі у натуральну величину дорого і недоцільно.

Перебіг хвильових процесів у обвитках трансформаторів залежить від часу, геометричних розмірів обвитки, питомого опору матеріалу обвитки, діелектричних сталих ізоляції, магнетної проникності сталі та форми імпульсу на початку обвитки [4, 6, 8, 9, 22].

Рівняння в часткових похідних, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів з урахуванням взаємоіндукції між витками [38, 39] для невідомих $i(x, t)$, $u(x, t)$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = g_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_{M_0} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t}; \quad (2.44)$$

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = r_0 i(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial i(s, t)}{\partial t} ds, \quad (2.45)$$

з початковими умовами

$$i|_{t=0} = \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.46)$$

і граничними умовами

$$L_n \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} - u(0, t) = f(t); \quad (2.47)$$

$$L_k \frac{\partial i(l, t)}{\partial t} = u(l, t). \quad (2.48)$$

Зведення до задачі з однорідними граничними умовами.

$$\text{Позначимо } h(t) = i(0, t), \quad g(t) = i(l, t). \quad (2.49)$$

Згідно з (2.47) – (2.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial i(l, t)}{\partial t} &= \frac{1}{L_k} u(l, t) = \frac{dg(t)}{dt}; \\ \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} &= \frac{1}{L_n} [u(0, t) + f(t)] = \frac{dh(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Введемо невідому функцію $v(x, t)$ співвідношенням

$$i(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} g(t) + \frac{l-x}{l} h(t). \quad (2.51)$$

Підставляючи разом з $\frac{\partial i(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} + \frac{x}{l} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{l-x}{l} \frac{dh(t)}{dt}$ в (2.44) –

(2.45), одержимо

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= g_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_{M_0} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + F_0(t); \\ -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= r_0 v(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds + F_1(x, t), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $F_0(t) = \frac{1}{l}(g(t) - h(t))$; (2.53)

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &= r_0 \frac{x}{l} g(t) + r_0 \frac{l-x}{l} h(t) + \frac{1}{l} \frac{dg(t)}{dt} \int_0^l s M(x, s) ds + \\ &+ \frac{1}{l} \frac{dh(t)}{dt} \int_0^l (l-s) M(x, s) ds. \end{aligned} \quad (2.54)$$

З рівностей (2.46) і (2.49) випливає

$$h(0) = \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = g(0) = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ і з (2.46), (2.51) одержуємо початкові}$$

умови $v(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$. (2.55)

Підстановка $x=0$ чи $x=l$ у (2.51) з урахуванням (2.49) дає

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad (2.56)$$

тобто однорідні граничні рівняння для системи (2.52).

Рівняння для функції $v(x, t)$.

Диференціювання за x першого рівняння системи (2.52) дає систему

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left[g_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_{M_0} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + F_0(t) \right] \Big|_{x=0}; \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -g_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - C_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + C_{M_0} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t}; \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -r_0 v(x, t) - \int_0^l M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds - F_1(x, t), \quad (2.59)$$

яка еквівалентна системі (2.52).

Підставляючи $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ з (2.59) у (2.58), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = & g_0 \left[r_0 v(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds + F_1(x, t) \right] + \\ & + C_0 \left[r_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} ds + \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} \right] - \\ & - C_{M_0} \left[r_0 \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + \int_0^l \frac{\partial^2 M(x, s)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} ds + \frac{\partial^3 F_1(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right], \end{aligned}$$

чи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[v(x, t) + C_{M_0} r_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] - \left(g_0 r_0 v(x, t) + C_0 r_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) = \\ = \int_0^l \left[g_0 M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} + M_1(x, s) \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} \right] ds + F(x, t), \end{aligned} \quad (2.60)$$

де (див. (2.54))

$$M_1(x, s) = C_0 M(x, s) - C_{M_0} \frac{\partial^2 M(x, s)}{\partial x^2}; \quad (2.60')$$

$$F(x, t) = g_0 F_1(x, t) + C_0 \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} - C_{M_0} \frac{\partial^3 F_1(x, t)}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.61)$$

Розділення змінних.

Подемо функцію $v(x, t)$ рядом Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in (0, l). \quad (2.62)$$

Розглянемо вираз з правої частини рівняння (2.60)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \left[g_0 M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} + M_1(x, s) \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} \right] ds = \\ &= \sum_k \left[\frac{dT_k(t)}{dt} \int_0^l g_0 M(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) ds + \frac{d^2 T_k(t)}{dt^2} \int_0^l M_1(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) ds \right]. \end{aligned}$$

Подемо інтеграли рядами Фур'є

$$\int_0^l g_0 M(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) ds = \sum_n \tilde{B}_{nk} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right);$$

$$\int_0^l M_1(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) ds = \sum_n A_{nk} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

де $\tilde{B}_{nk} = \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l g_0 M(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) ds dx;$

$$A_{nk} = \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l M_1(x, s) \sin\left(\frac{\pi k s}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) ds dx; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.62')$$

тоді $I = \sum_n \left[\sum_k \left(A_{nk} \frac{d^2 T_k(t)}{dt^2} + \tilde{B}_{nk} \frac{dT_k(t)}{dt} \right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$

Підставляючи (2.52), вираз I , а також розклад

$$F(x, t) = \sum_n F_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

де

$$F_n(t) = \frac{1}{l} \int_0^l F(x, t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad (2.63)$$

в рівняння (2.50), одержуємо

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} (T_n(t) + C_{M_0} r_0 \frac{dT_n(t)}{dt}) - (g_0 r_0 T_n(t) + C_0 r_0 \frac{dT_n(t)}{dt}) = \\ & = \sum_k (A_{nk} \frac{d^2 T_k(t)}{dt^2} + \tilde{B}_{nk} \frac{dT_k(t)}{dt}) + F_n(t), \end{aligned} \quad (2.64)$$

де $n = 1, 2, \dots$

$$\text{Згідно з (2.55), (2.62) одержимо умови } T_k(0) = \left. \frac{dT_k(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що функції $F_1(x, t)$, $F(x, t)$ (див. (2.45), (2.51)) залежать від невідомих функцій $h(t)$, $g(t)$. Отже, функції $v(x, t)$, $i(x, t)$ визначатимуться функціями $h(t)$, $g(t)$. Побудуємо систему рівнянь для визначення функцій $h(t)$, $g(t)$. Першим рівнянням системи є рівняння (2.47), у якому використовується представлення (2.59) та умови (2.50).

Представлення (2.59) і умови (2.60) визначають також друге рівняння системи, а саме

$$\int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx = u(l, t) - u(0, t). \quad (2.65)$$

Отримавши функцію $h(t)$, $g(t)$ як розв'язок побудованої системи, знаходимо $v(x, t)$ і потім (див. (2.59))

$$u(x, t) = u(0, t) + \int_0^x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx = u(0, t) - \int_0^x \left[r_0 v(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds + F_1(x, t) \right] dx. \quad (2.66)$$

Система рівнянь для функції $T_k(t)$.

Розглядаємо наближений розв'язок задачі (2.44), який виникає за обмеження в системі (2.64) N рівняннями та N невідомими функціями $T_1(t), T_2(t), \dots, T_N(t)$.

Позначення $u(x, t)$, $v(x, t)$ зберігаємо без зміни.

Для зручності використовуємо простір R^N , його елементи позначаємо θ, σ, \dots , скалярний добуток має вигляд $\vec{\theta} \cdot \vec{\theta} = \sum_{i=1}^N \theta_i \tilde{\theta}_i$. Елементи простору R^{2N} позначимо через $\vec{Q}(t), \vec{W}(t), \vec{W}I^i, \dots$. Елементи простору R^N записуємо у векторній формі, тобто, наприклад, (див. (2.42), (2.63))

$$\begin{aligned} \vec{\theta}(t) &= (T_1(t), T_2(t), \dots, T_N(t))_t; \\ \vec{\sigma}(x) &= \left(\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{\pi 2x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi Nx}{l}\right) \right)_x; \\ \vec{\tilde{\theta}}(t) &= (F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t))_t \end{aligned} \quad (2.67)$$

тоді (2.62) запишемо так

$$v(x, t) = \vec{\theta}(t) \cdot \vec{\sigma}(x). \quad (2.67')$$

Розглянемо систему (2.64)

$$\sum_{k=1}^N \left(A_{nk} \frac{d^2 T_k(t)}{dt^2} + B_{nk} \frac{dT_k(t)}{dt} \right) + \left(\frac{\pi^2 n^2}{l^2} C_{M_0} r_0 + C_0 r_0 \right) \frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{\pi^2 n^2}{l^2} + g_0 r_0 \right) T_n(t) + F_n(t) = 0,$$

$$\text{де } B_{nk} = \begin{cases} \tilde{B}_{nk} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} C_{M_0} r_0 + C_0 r_0, & k = n \\ \tilde{B}_{nk}, & k \neq n \end{cases}; \quad n = 1, \dots, N$$

Введемо матриці A , B і D розмірності $N \times N$, де

$$D = \text{diag} \left(\frac{\pi^2 n^2}{l^2} + g_0 r_0 \right).$$

Система (2.64) набуде вигляду

$$A \frac{d^2 \vec{\theta}(t)}{dt^2} + B \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} + D \vec{\theta}(t) + \vec{\phi}(t) = 0; \tag{2.68}$$

$$\vec{\theta}(0) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} = 0.$$

1. Випадок $\det A = 0$.

Позначимо через $r = \text{rank} A$ ранг матриці A . Використовуючи метод Гаусса матрицю коефіцієнтів A системи (2.68) зводимо до вигляду, за якого елементи нижче від діагоналі дорівнюють нулеві й останні $N - r$ рядків складено з нулів, а саме

$$\left. \begin{array}{ccccccc}
a'_{11} \frac{d^2 T_1(t)}{dt^2} + a'_{12} \frac{d^2 T_2(t)}{dt^2} + a'_{13} \frac{d^2 T_3(t)}{dt^2} + \dots + a'_{1r} \frac{d^2 T_r(t)}{dt^2} + \dots + a'_{1N} \frac{d^2 T_N(t)}{dt^2} \\
a'_{22} \frac{d^2 T_2(t)}{dt^2} + a'_{23} \frac{d^2 T_3(t)}{dt^2} + \dots + a'_{2r} \frac{d^2 T_r(t)}{dt^2} + \dots + a'_{2N} \frac{d^2 T_N(t)}{dt^2} \\
\vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\
a'_{rr} \frac{d^2 T_r(t)}{dt^2} + \dots + a'_{rN} \frac{d^2 T_N(t)}{dt^2}
\end{array} \right\} r$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{array} \right\} N-r$$

де $a'_{kk} \neq 0$, $k = 1, \dots, r$. Введемо замість функції $T_1(t), T_2(t), \dots, T_N(t)$ невідомі функції $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)$ заміною

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccc}
a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & a'_{1r+2} & \dots & a'_{1N} \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & a'_{2r+2} & \dots & a'_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & a'_{rr+2} & \dots & a'_{rN} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c}
T_1(t) \\
T_2(t) \\
T_3(t) \\
T_4(t) \\
T_5(t) \\
\vdots \\
T_r(t) \\
T_{r+1}(t) \\
T_{r+2}(t) \\
\vdots \\
T_N(t)
\end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c}
y_1(t) \\
y_2(t) \\
\vdots \\
y_r(t) \\
y_{r+1}(t) \\
y_{r+2}(t) \\
\vdots \\
y_N(t)
\end{array} \right\| \quad (2.69)$$

де $\det A' \neq 0$; $A' = (a'_{kn})_{k,n=1}^r$.

Розв'язавши систему лінійних алгебричних рівнянь (2.69) і задаючи $T_1(t), T_2(t), \dots, T_N(t)$ лінійними комбінаціями функцій $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)$, зводимо систему диференціальних рівнянь (2.68), тобто систему (2.64), до вигляду

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 Y_1(t)}{dt^2} + P_1(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0; \\
& \frac{d^2 Y_2(t)}{dt^2} + P_2(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0; \\
& \dots; \\
& \frac{d^2 Y_r(t)}{dt^2} + P_r(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0; \\
& P_{r+1}(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0; \\
& P_{r+2}(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0; \\
& \dots; \\
& P_N(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \frac{dY_1(t)}{dt}, \frac{dY_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dY_N(t)}{dt}) = 0, \tag{2.70}
\end{aligned}$$

де матриця коефіцієнтів біля других похідних є одиничною. Це означає випадок рівняння (2.68), де $\det A \neq 0$. Відповідний розв'язок наведено далі ((2.72) і (2.75)). Розв'язавши перші r рівнянь, подаємо $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_r(t)$ та їх похідні через $Y_{r+1}(t), Y_{r+2}(t), \dots, Y_N(t)$ та їх похідні, тоді інші $N - r$ рівнянь утворюють систему рівнянь першого порядку для функцій $Y_{r+1}(t), Y_{r+2}(t), \dots, Y_N(t)$.

Приклад.

Нехай $N = 3$, $M_j(x, s) = \mu_1(x) \mu_2(x)$, тоді згідно з (3.56'), (3.58') $A_{nk} = a_n b_k$, $n, k = 1, 2, 3$, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}; \det A = 0.$$

Заміна (2.69), очевидно, має вигляд

$$\begin{cases} b_1 T_1(t) + b_2 T_2(t) + b_3 T_3(t) = Y_1(t); \\ T_2(t) = Y_2(t); \\ T_3(t) = Y_3(t). \end{cases}$$

2. Випадок $\det A \neq 0$.

Обернена матриця A^{-1} існує, тоді систему рівнянь (2.68) можна записати так (див. (2.67))

$$\frac{d^2 \vec{\theta}(t)}{dt^2} = -A^{-1} B \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} - A^{-1} D \vec{\theta}(t) - A^{-1} \vec{\varphi}(t). \quad (2.71)$$

Введемо позначення (див. (2.67))

$$\vec{p}(t) = \vec{\theta}(t); \quad \vec{q}(t) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt}$$

і в просторі R^{2N} введемо вектор розмірності $2N$, а саме

$$\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\theta}(t) \\ \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Оскільки

$$\begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ \vec{q}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \\ \frac{d^2 \vec{\theta}(t)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ -A^{-1} B \vec{q}(t) - A^{-1} D \vec{p}(t) - A^{-1} \vec{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

ТО, ПОЗНАЧИВШИ

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}D & -A^{-1}B \end{pmatrix}; \vec{W}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -A^{-1}\vec{\Phi}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

одержимо (2.71) у вигляді

$$\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = H\vec{Q}(t) + \vec{W}(t); \vec{Q}(0) = 0. \quad (2.74)$$

Шукаємо $\vec{Q}_0(t)$ так, що $\vec{Q}(t) = e^{tH}\vec{Q}_0(t)$, підстановка в (2.74) дає

$$e^{tH} \frac{d\vec{Q}_0(t)}{dt} = \vec{W}(t).$$

Звідки

$$\vec{Q}_0(t) = \int_0^t e^{-\tau H} \vec{W}(\tau) d\tau$$

і отже

$$\vec{Q}(t) = e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} \vec{W}(\tau) d\tau. \quad (2.75)$$

Позначимо через $P_1: R^{2N} \rightarrow R^N$ оператор проектування $2N$ – вектора на першу компоненту, тобто в прямій сумі $R^{2N} = R^N \oplus R^N$ маємо $P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді згідно з (2.76)

$$\vec{\Theta}(t) = P_l \vec{Q}(t). \quad (2.76)$$

Вираз (3.71) містить $2N$ – вектор $\vec{W}(t)$ (див. (2.73)), залежний від $\vec{\Phi}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_N(t))_t$, де згідно з (2.63), (2.61), (2.54) подано компоненти векторів через функції $g(t)$, $h(t)$.

Представлення розв'язків $u(x, t)$, $v(x, t)$ через функції $g(t)$, $h(t)$.

Визначимо скалярні функції $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ рівністю (див. (2.54), (2.65)).

$$F(x, t) = \sum_{i=0}^2 (\alpha_i(x) g^{(i)}(t) + \beta_i(x) h^{(i)}(t)). \quad (2.77)$$

Тоді згідно з (2.63)

$$F_n(t) = \frac{1}{l} \int_0^l F(x, t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

і згідно з (2.67)

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(t) &= (F_1(t), F_1(t), \dots, F_N(t))_t = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l F(x, t) \left(\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \dots, \sin\left(\frac{N\pi x}{l}\right) \right)_t dx = \frac{1}{l} \int_0^l F(x, t) \vec{\Theta}(x) dx. \end{aligned}$$

В отримане рівняння підставимо (2.77), тоді

$$\vec{\Phi}(t) = \sum_{i=0}^2 (g^{(i)}(t) \vec{\Phi}_i + h^{(i)}(t) \vec{\Psi}_i),$$

де $\vec{\Phi}_i = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_i(x) \vec{\sigma}(x) dx$; $\vec{\Psi}_i = \frac{1}{l} \int_0^l \beta_i(x) \vec{\sigma}(x) dx$; які $\in R^N$.

Введемо позначення

$$\vec{W}1^i = (0, -A^{-1}\vec{\Phi}_i)_t; \vec{W}2^i = (0, -A^{-1}\vec{\Psi}_i)_t, \text{ які } \in R^{2N}.$$

Тоді згідно з (2.77)

$$\vec{W}(t) = \sum_{i=0}^2 (g^{(i)}(t) \vec{W}1^i + h^{(i)}(t) \vec{W}2^i). \quad (2.77')$$

Підставимо (2.77') в (2.75), одержимо

$$\vec{Q}(t) = \sum_{i=0}^2 e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} (g^{(i)}(\tau) \vec{W}1^i + h^{(i)}(\tau) \vec{W}2^i) d\tau. \quad (2.78)$$

Інтегрування частинами дає $(g(0) = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0)$

$$\int_0^t e^{-\tau H} \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau = e^{-tH} g(t) + H \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau;$$

$$\int_0^t e^{-\tau H} \frac{d^2 g(\tau)}{d\tau^2} d\tau = e^{-tH} \left(\frac{dg(t)}{dt} + Hg(t) \right) + H^2 \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau.$$

Застосуємо оператори

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau;$$

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau = g(t) + e^{tH} H \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau;$$

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} \frac{d^2 g(\tau)}{d\tau^2} d\tau = \frac{g(t)}{dt} + Hg(t) + e^{tH} H^2 \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau$$

до векторів $\vec{W}I^i$ і оператори

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} h(\tau) d\tau;$$

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau = h(t) + e^{tH} H \int_0^t e^{-\tau H} h(\tau) d\tau;$$

$$e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} \frac{d^2 h(\tau)}{d\tau^2} d\tau = \frac{dh(t)}{dt} + Hh(t) + e^{tH} H^2 \int_0^t e^{-\tau H} h(\tau) d\tau$$

до векторів $\vec{W}2^i$.

Підставляючи отримані вирази в (2.78), одержимо

$$\begin{aligned} \vec{Q}(t) = & \frac{g(t)}{dt} \vec{W}I^2 + g(t) \vec{W}I^1 + e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} g(\tau) d\tau \cdot \vec{W}I^0 + \\ & + \frac{dh(t)}{dt} \vec{W}2^2 + h(t) \vec{W}2^1 + e^{tH} \int_0^t e^{-\tau H} h(\tau) d\tau \cdot \vec{W}2^0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \vec{W}I^0 = & \vec{W}I^0 + H\vec{W}I^1 + H^2\vec{W}I^2; & \vec{W}I^1 = & \vec{W}I^1 + H\vec{W}I^2; & \vec{W}I^2 = & \vec{W}I^2; \\ \vec{W}2^0 = & \vec{W}2^0 + H\vec{W}2^1 + H^2\vec{W}2^2; & \vec{W}2^1 = & \vec{W}2^1 + H\vec{W}2^2; & \vec{W}2^2 = & \vec{W}2^2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Згідно з (2.67') і (2.76)

$$v(x, t) = \vec{\Theta}(t) \cdot \vec{\Theta}(x) = P_t \vec{Q}(t) \cdot \vec{\Theta}(x). \quad (2.80')$$

Підставляючи в (2.80') вираз (2.79), отримуємо

$$v(x, t) = c_0(x)g(t) + \int_0^t K(t, x, \tau)g(\tau)d\tau + \\ + d_0(x)h(t) + \int_0^t L(t, x, \tau)h(\tau)d\tau, \quad (2.81)$$

де $c_0(x) = P_1 \vec{W} I^1 \cdot \vec{\sigma}(x)$; $d_0(x) = P_1 \vec{W} 2^1 \cdot \vec{\sigma}(x)$;

$$K(t, x, \tau) = P_1 e^{(t-\tau)H} \vec{W} I^0 \cdot \vec{\sigma}(x); \quad (2.82)$$

$$L(t, x, \tau) = P_1 e^{(t-\tau)H} \vec{W} 2^1 \cdot \vec{\sigma}(x).$$

У (2.28) враховано, що

$$P_1 \vec{W} I^2 = P_1 \vec{W} I^1 = 0; \quad P_1 \vec{W} 2^2 = P_1 \vec{W} 2^1 = 0. \quad (2.83)$$

Розглянемо рівняння (2.66). Згідно з (2.54) введемо функції \vec{a}_i та b_i ($i = 0, 1$) означенням

$$\int_0^x F_i(y, t)dy = a_0(x)g(t) + a_1(x)\frac{dg(t)}{dt} + b_0(x)h(t) + b_1(x)\frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.84)$$

Згідно з (2.50) $u(0, t) = L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t)$ рівняння (2.66) запишеться так

$$u(x, t) = L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(x)g(t) + a_1(x)\frac{dg(t)}{dt} + b_0(x)h(t) + \\ + b_1(x)\frac{dh(t)}{dt}) - r_0 \int_0^x v(y, t)dy - \int_0^x \int_0^l M(y, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} dsdy. \quad (2.85)$$

Згідно (2.80')

$$\int_0^x v(y, t) dy = P_1 \vec{Q}(t) \cdot \vec{\sigma}_1(x), \quad (2.86)$$

де $\vec{\sigma}_1(x) = \int_0^x \vec{\sigma}(y) dy$.

Зауважимо, що з означення $\vec{W}(t)$ (формула (2.73)) випливає, що $P_1 \vec{W}(t) \equiv 0$, тому (формула (2.74))

$$P_1 \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = P_1 H Q(t). \quad (2.87)$$

Згідно з (2.80') $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = P_1 \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} \cdot \vec{\sigma}(x)$, тому

$$\int_0^x \int_0^l M(y, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds dy \equiv P_1 \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} \cdot \vec{\sigma}_M(x),$$

де $\vec{\sigma}_M(x) = \int_0^x \int_0^l M(y, s) \vec{\sigma}(s) ds dy$.

Підстановка в (2.85) дає (див. формулу (2.87))

$$\begin{aligned} u(x, t) = & L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(x)g(t) + a_1(x) \frac{dg(t)}{dt} + \\ & + b_0(x)h(t) + b_1(x) \frac{dh(t)}{dt}) - r_0 P_1 \vec{Q}(t) \cdot \vec{\sigma}_1(x) - P_1 H \vec{Q}(t) \cdot \vec{\sigma}_M(x). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Зауважимо, що вираз $P_1 \vec{Q}(t)$, на відміну від $\vec{Q}(t)$, (див. формулу (2.79)), не містить похідних $\frac{dg(t)}{dt}$ та $\frac{dh(t)}{dt}$ (див. формулу (2.83)), тобто

$$\begin{aligned}
P_l \vec{Q}(t) &= g(t) P_l \vec{W} 1' + h(t) P_l \vec{W} 2' + \\
&+ P_l e^{th} \int_0^t e^{-\tau h} g(\tau) d\tau \cdot \vec{W} 1^0 + P_l e^{th} \int_0^t e^{-\tau h} h(\tau) d\tau \cdot \vec{W} 2^0.
\end{aligned}
\tag{2.89}$$

Система рівнянь для функцій $g(t)$ та $h(t)$. Згідно з (2.50)

$u(l, t) = L_\kappa \frac{dg(t)}{dt}$ і підставляючи $x = l$ у рівність (2.88), одержуємо (див. також формулу (2.87))

$$\begin{aligned}
L_\kappa \frac{dg(t)}{dt} &= L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t) - (a_0(l)g(t) + a_1(l) \frac{dg(t)}{dt} + b_0(l)h(t) + \\
&+ b_1(l) \frac{dh(t)}{dt}) - r_0 P_l \vec{Q}(t) \cdot \vec{\sigma}_1(l) - P_l \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} \cdot \vec{\sigma}_M(l).
\end{aligned}$$

Інтегруючи в інтервалі $[0; t]$ і враховуючи $h(0) = g(0) = 0$, $\vec{Q}(0) = 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
L_\kappa g(t) &= L_n h(t) - \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^t (a_0(l)g(\tau) - b_0(l)h(\tau)) d\tau - \\
&- (a_1(l)g(t) + b_1(l)h(t)) - r_0 \int_0^t (P_l \vec{Q}(\tau) \cdot \vec{\sigma}_1(l)) d\tau - P_l \vec{Q}(t) \cdot \vec{\sigma}_M(l).
\end{aligned}
\tag{2.90}$$

Розглянемо рівняння (2.57). Згідно з (2.80')

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = P_l \vec{Q}(t) \cdot \frac{d\sigma(0)}{dx}.$$

Далі (див. (2.46) – (2.47) і (2.88))

$$u(x, t)|_{x=0} = -f(0); \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{t=0} = 0$$

й інтегруючи (2.57) в інтервалі $[0; t]$, одержуємо

$$-\int_0^t (P_1 \vec{Q}(t) \cdot \frac{d\sigma(0)}{dx}) d\tau = g_0 \int_0^t u(0, \tau) d\tau + C_0 (u(0, t) + f(0)) - \\ - C_{M_0} \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \int_0^t F_0(\tau) d\tau.$$

Оскільки $u(0, t) = L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t)$, згідно з (2.88), (2.53) одержуємо

$$-\int_0^t (P_1 \vec{Q}(t) \cdot \frac{d\sigma(0)}{dx}) d\tau = g_0 h(t) - g_0 \int_0^t f(\tau) d\tau + C_0 (L_n \frac{dh(t)}{dt} - f(t) + \\ + f(0)) + C_{M_0} \left(\frac{d^2 a_0(0)}{dx^2} g(t) + \frac{d^2 a_1(0)}{dx^2} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{d^2 b_0(0)}{dx^2} h(t) + \right. \\ \left. + \frac{d^2 b_1(0)}{dx^2} \frac{dh(t)}{dt} \right) + r_0 P_1 \vec{Q}(t) \cdot \frac{d^2 \sigma_1(0)}{dx^2} - \\ - P_1 H \vec{Q}(t) \cdot \frac{d^2 \sigma_M(0)}{dx^2} + \frac{l}{l} \int_0^t (g(\tau) - h(\tau)) d\tau. \quad (2.91)$$

Ураховуючи (2.79) й інтегруючи рівняння (2.91) в інтервалі $[0; t]$, одержуємо разом з (2.90) систему двох лінійних рівнянь, що містять $g(t)$, $h(t)$ та інтегральні перетворення від них. Розв'язавши ці рівняння, відновлюємо $v(x, t)$ згідно з (2.81), $u(x, t)$ згідно з (2.88).

Системи отриманих інтегральних рівнянь розв'язуємо методом послідовних наближень.

2.3. Математична модель для дослідження хвильових процесів у двообвиткових трансформаторах

Формування математичної моделі обвитки трансформатора із заземленим чи ізольованим кінцем описано у [6, 8, 9, 34, 36, 37, 41]. На підставі запропонованої моделі отримано розподіл напруги вздовж обвитки та частотні характеристики за дії на обвитку перенапруг різної форми.

На рис. 2.5 показана заступна схема двообвиткового трансформатора на одиницю довжини [8, 92, 93].

Математична модель сформована на підставі міркувань, наведених у [17, 35].

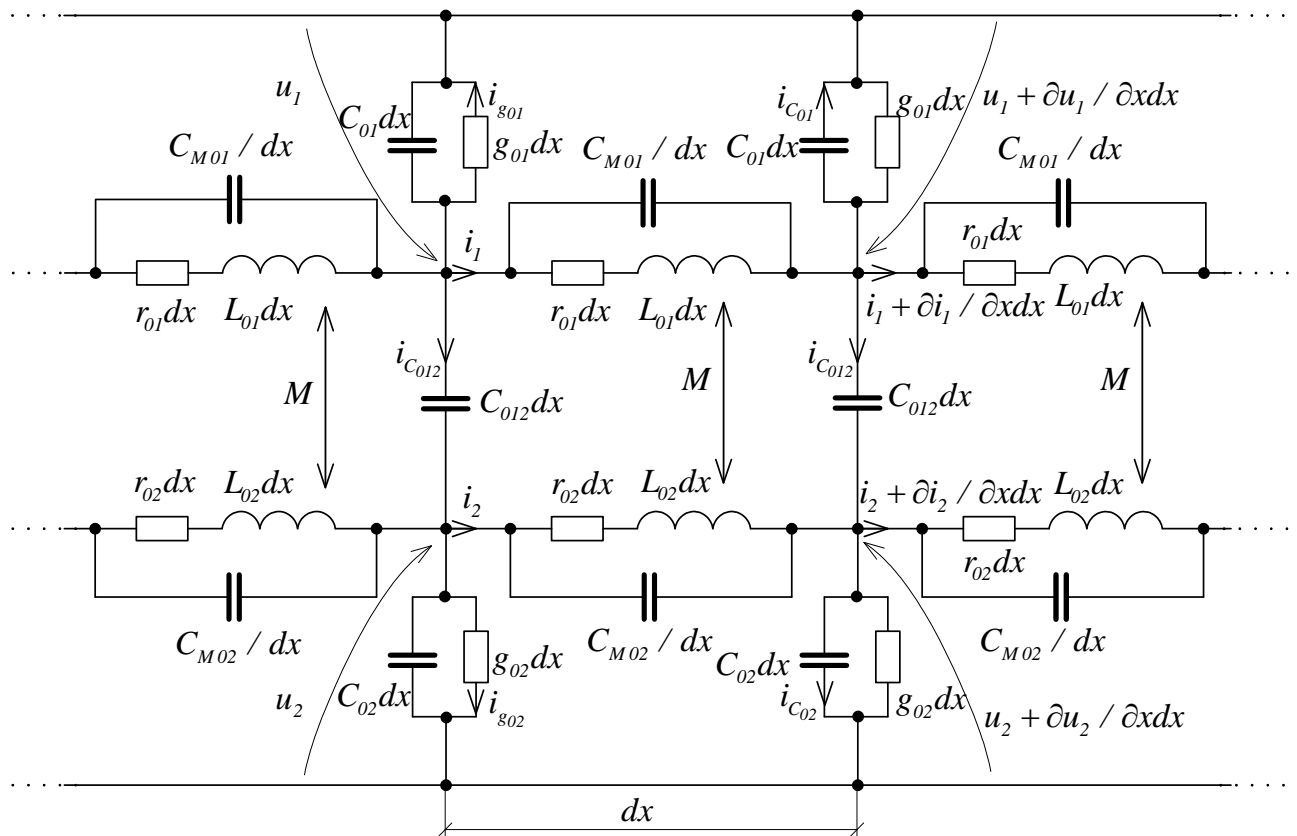


Рис. 2.5. Заступна схема обвиток двообвиткового трансформатора на одиницю довжини вздовж їх осі

Диференційні рівняння зміни струму, які протікає через обвитки

$$\begin{aligned}
-\partial i_1 / \partial x &= g_{01} u_1 + C_{01} \partial u_1 / \partial t - C_{M_{01}} \partial^3 u_1 / (\partial x^2 \partial t) + C_{012} \partial (u_1 - u_2) / \partial t; \\
-\partial i_2 / \partial x &= g_{02} u_2 + C_{02} \partial u_2 / \partial t - C_{M_{02}} \partial^3 u_2 / (\partial x^2 \partial t) + C_{012} \partial (u_2 - u_1) / \partial t. \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Спад напруги на одиницю довжини витка обвиток

$$\begin{aligned}
-\partial u_1 / \partial x &= r_{01} i_1 + \int_0^l M(x, s) \partial i_1(s, t) / \partial t ds; \\
-\partial u_2 / \partial x &= r_{02} i_2 + \int_0^l M(x, s) \partial i_2(s, t) / \partial t ds. \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Зведемо рівняння (2.92) і (2.93) до однієї змінної $i(x, t)$. Для цього диференціюємо (2.92) за x , в результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned}
-\partial^2 i_1 / \partial x^2 &= g_{01} \partial u_1 / \partial x + C_{01} \partial^2 u_1 / (\partial t \partial x) - C_{M_{01}} \partial^4 u_1 / (\partial x^3 \partial t) + \\
&+ C_{012} \partial (u_1 - u_2) / (\partial t \partial x); \\
-\partial^2 i_2 / \partial x^2 &= g_{02} \partial u_2 / \partial x + C_{02} \partial^2 u_2 / (\partial t \partial x) - C_{M_{02}} \partial^4 u_2 / (\partial x^3 \partial t) + \\
&+ C_{012} \partial (u_2 - u_1) / (\partial t \partial x). \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Підставляємо (2.93) в (2.94), тобто

$$\begin{aligned}
\partial^2 i_1 / \partial x^2 &= g_{01} r_{01} i_1 + g_{01} \int_0^l M(x, s) \partial i_1(s, t) / \partial t ds + C_{01} r_{01} \partial i_1 / \partial t + \\
&+ C_{01} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds - C_{M_{01}} r_{01} \partial^3 i_1 / (\partial t \partial x^2) - \\
&- C_{M_{01}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M(x, s) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds + C_{012} \partial^2 u_1 / (\partial t \partial x) - C_{012} \partial u_2 / (\partial t \partial x) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_{01} r_{01} i_1 + g_{01} \int_0^l M(x, s) \partial i_1(s, t) / \partial t dx + C_{01} r_{01} \partial i_1 / \partial t + \\
&+ C_{01} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds - C_{M_{01}} r_{01} \partial^3 i_1 / (\partial t \partial x^2) - \\
&- C_{M_{01}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M(x, s) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds + C_{M_{01}} r_{01} \partial^3 i_1 / (\partial t \partial x^2) + \tag{2.95} \\
&+ C_{012} r_{02} \partial i_2 / \partial t + C_{012} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds - C_{012} r_{01} \partial i_1 / \partial t - \\
&- C_{012} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 i_2 / \partial x^2 &= g_{02} r_{02} i_2 + g_{02} \int_0^l M(x, s) \partial i_2(s, t) / \partial t dx + C_{02} r_{02} \partial i_2 / \partial t + \\
&+ C_{02} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds - C_{M_{02}} r_{02} \partial^3 i_2 / (\partial t \partial x^2) - \\
&- C_{M_{02}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M(x, s) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds + C_{012} \partial^2 u_2 / (\partial t \partial x) - C_{012} \partial u_1 / (\partial t \partial x) = \\
&= g_{02} r_{02} i_2 + g_{02} \int_0^l M(x, s) \partial i_2(s, t) / \partial t dx + C_{02} r_{02} \partial i_2 / \partial t + \\
&+ C_{02} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds - C_{M_{02}} r_{02} \partial^3 i_2 / (\partial t \partial x^2) - \\
&- C_{M_{02}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M(x, s) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds + C_{M_{02}} r_{02} \partial^3 i_2 / (\partial t \partial x^2) + \tag{2.96} \\
&+ C_{012} r_{01} \partial i_1 / \partial t + C_{012} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_1(s, t) / \partial t^2 ds - C_{012} r_{02} \partial i_2 / \partial t - \\
&- C_{012} \int_0^l M(s, t) \partial^2 i_2(s, t) / \partial t^2 ds.
\end{aligned}$$

Для розв'язання рівнянь (2.95) і (2.96) використаємо метод розділення змінних, який наведено в [15, 16, 38].

Для того, щоб відтворити еквівалентну магнетну провідність ярма (рис. 2.6), магнетопровід з обох кінців обвиток подовжують на відстань a [13, 44].

Вважаємо, що магнетний потік протікає в осерді трансформатора без урахування втрат, а всі витки мають середню довжину, позначену l_B .

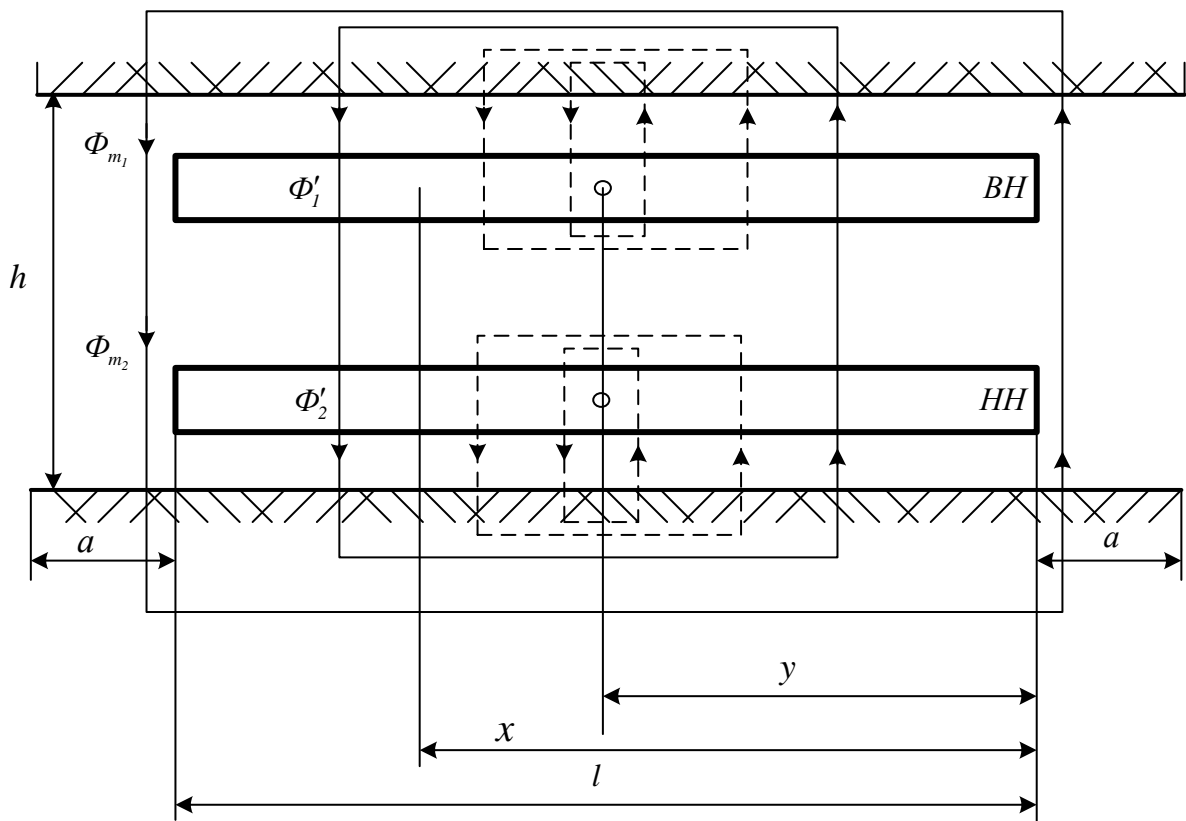


Рис. 2.6. Потокозчеплення між обвитками двообвиткового трансформатора

Розглянемо дію струму витків, розміщених на відстані y від початку обвиток, на інші витки, які розташовані на відстані x від початку обвиток. Допустимо, що обвитки ВН і НН мають n_1 і n_2 витків відповідно на одиницю довжини [41].

Під дією струмів у обвитках трансформаторів утворюються магнетні потоки, які охоплюють частину витків, тобто потоки часткових зчеплень. Якщо через витки обвитки ВН, які розташовані на відстані y , протікає струм i_1 , ампер-витки $n_1 i_1$, на одиницю довжини створюють магнетний потік, який охоплює витки цієї ж обвитки на відстані x . Водночас в обвитці НН є ампер-витки на відстані y $n_2 i_2$.

Вплив самоіндукції, яка має лінійну залежність, між різними частинами обвитки важливий під час дослідження хвильових процесів.

Ампер-витки, які розміщені на відстані y обвитки ВН, створюють магнетне поле, яке охоплює частково витки обвитки НН, що буде враховано коефіцієнтом σ .

Використання методу розділення змінних (методі Фур'є), який є одним з найчастіше використовуваних методів розв'язання змішаних задач, оскільки

параметри заступної схеми електричної мережі будь-якого елемента не залежать від часу.

Стала величина h , тобто відстань між осердям магнетної системи трансформатора, на осердя яких намотана обвитка трансформатора дає підстави вважати, що магнетний потік, створений будь-яким витком, не залежить від розташування витка. Якщо виток міститься в точці y , тоді магнетний опір для магнетного потоку, створеного струмом у витку, можна обчислити так

$$R_{\mu} = \frac{l}{l_a} \left(\frac{h}{a+l-a} + \frac{h}{a+h} \right) = \frac{h(2a+l)}{l_b(a+l-y)(a+y)}. \quad (2.97)$$

Звичайно, не весь магнетний потік, створений у витку в точці y , охоплює виток у точці x , коли розташування їх різне. Якщо виток розміщений на відстані x лівіше від витка на відстані y , то магнетний потік між витком на відстані y та x не створює електромагнетну індукцію у витку відстані x і тільки частина, тобто $(a+l-x)/(a+l-y)$, загального магнетного потоку охоплює виток, розміщений на відстані x .

Запишемо загальне потокозчеплення з витком на відстані x обвитки ВН від ампер-витків, які містяться на відстані y праворуч від відстані x

$$\Phi'_1 = \frac{0,4\pi l_B}{(2a+l)h_0} \int_0^x (n_1 i_1 + \sigma n_2 i_2)(a+l-x)(a+y) dy. \quad (2.98)$$

Аналогічно запишемо для магнетного потоку створеного ампер-витка, який розміщений зліва від відстані x , що охоплюють витки обвитки ВН на відстані y

$$\Phi''_1 = \frac{0,4\pi l_B}{(2a+l)h_x} \int_x^l (n_1 i_1 + \sigma n_2 i_2)(a+l-y)(a+x) dy. \quad (2.99)$$

Магнетний потік обвитки ВН на відстані x визначатиметься

$$\Phi_1 = \Phi'_1 + \Phi''_1. \quad (2.100)$$

Для обвитки НН аналогічні формули, тобто

$$\Phi'_2 = \frac{0,4\pi l_B}{(2a+l)h} \int_0^x (\sigma n_1 i_1 + n_2 i_2) (a+l-x)(a+y) dy; \quad (2.101)$$

$$\Phi''_2 = \frac{0,4\pi l_B}{(2a+l)h} \int_x^l (\sigma n_1 i_1 + n_2 i_2) (a+l-y)(a+x) dy; \quad (2.102)$$

$$\Phi_2 = \Phi'_2 + \Phi''_2. \quad (2.103)$$

Спад напруги через магнетні потоки визначається так

$$\partial u_1 / \partial x = \frac{n_1}{10^8} \partial \Phi_1 / \partial t; \quad (2.104)$$

$$\partial u_2 / \partial x = \frac{n_2}{10^8} \partial \Phi_2 / \partial t. \quad (2.105)$$

Продиференціювавши три рази рівняння (2.104) і (2.105), отримуємо такі рівняння

$$\begin{aligned} \partial^4 u_1 / \partial x^4 &= -\frac{0,4\pi n_1 l_B}{10^8 h} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (n_1 i_1 + \sigma n_2 i_2) = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (L_1 i_1 + M i_2), \\ \partial^4 u_2 / \partial x^4 &= -\frac{0,4\pi n_2 l_B}{10^8 h} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (n_2 i_2 + \sigma n_1 i_1) = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (L_2 i_2 + M i_1), \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\text{де } L_1 = \frac{0,4\pi n_1^2 l_B}{10^8 h}; L_2 = \frac{0,4\pi n_2^2 l_B}{10^8 h}; M = \frac{0,4\pi n_1 n_2 \sigma l_B}{10^8 h}.$$

Таким підходом ми отримуємо що L_1 , L_2 , M є статичними.

Три кратне диференціювання $\partial u/\partial x$ дало нам лінійні диференційні рівняння з наступними коефіцієнтами, але так як частковий потік Φ_2 , який охоплює всі витки, не залежить від x , то диференціювання за x усунуло магнетний потік з рівняння.

Струми, які протікають через обвитку визначаються за рівняннями (2.92). Ці рівняння диференціюємо за t і підставляємо в рівняння (2.106). В результаті отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} \partial^4 u_1 / \partial x^4 = & -(L_1(g_{01} \partial u_1 / \partial t - C_{01} \partial^2 u_1 / \partial t^2 - C_{M_{01}} \partial^4 u_1 / (\partial x^2 \partial t^2) + \\ & + C_{012} \partial^2 (u_1 - u_2) / \partial t^2) + M(g_{02} \partial u_2 / \partial t + C_{02} \partial^2 u_2 / \partial t^2 - C_{M_{01}} \partial^4 u_2 / (\partial x^2 \partial t^2) + \\ & + C_{012} \partial^2 (u_2 - u_1) / \partial t^2)); \\ \partial^4 u_2 / \partial x^4 = & -(L_2(g_{01} \partial u_2 / \partial t - C_{02} \partial^2 u_2 / \partial t^2 - C_{M_{02}} \partial^4 u_2 / (\partial x^2 \partial t^2) + \\ & + C_{012} \partial^2 (u_2 - u_1) / \partial t^2) + M(g_{01} \partial u_1 / \partial t + C_{01} \partial^2 u_1 / \partial t^2 - \\ & - C_{M_{01}} \partial^4 u_1 / (\partial x^2 \partial t^2) + C_{012} \partial^2 (u_2 - u_1) / \partial t^2)); \end{aligned} \quad (2.107)$$

Розв'язання отриманих рівнянь наведено в п.2.1

2.4.1. Обчислення індуктивного опору розсіювання обвитки трансформатора

Розглянемо поле розсіювання двообвиткового трансформатора з концентричними обвитками [4-6], схематично показане на рис. 2.7, а. Лінії поля фактично по всій висоті обвитки розташовані паралельно до стержня і лише біля його торців викривляються. Більша частина магнеторушійної сили (МРС) поля розсіювання витрачається на частині шляху, що дорівнює висоті обвиток, оскільки, виходячи за їхні межі, магнітні лінії розширюються, а магнітний опір зменшується. Опором шляху потоку розсіювання у сталі зазвичай нехтують.

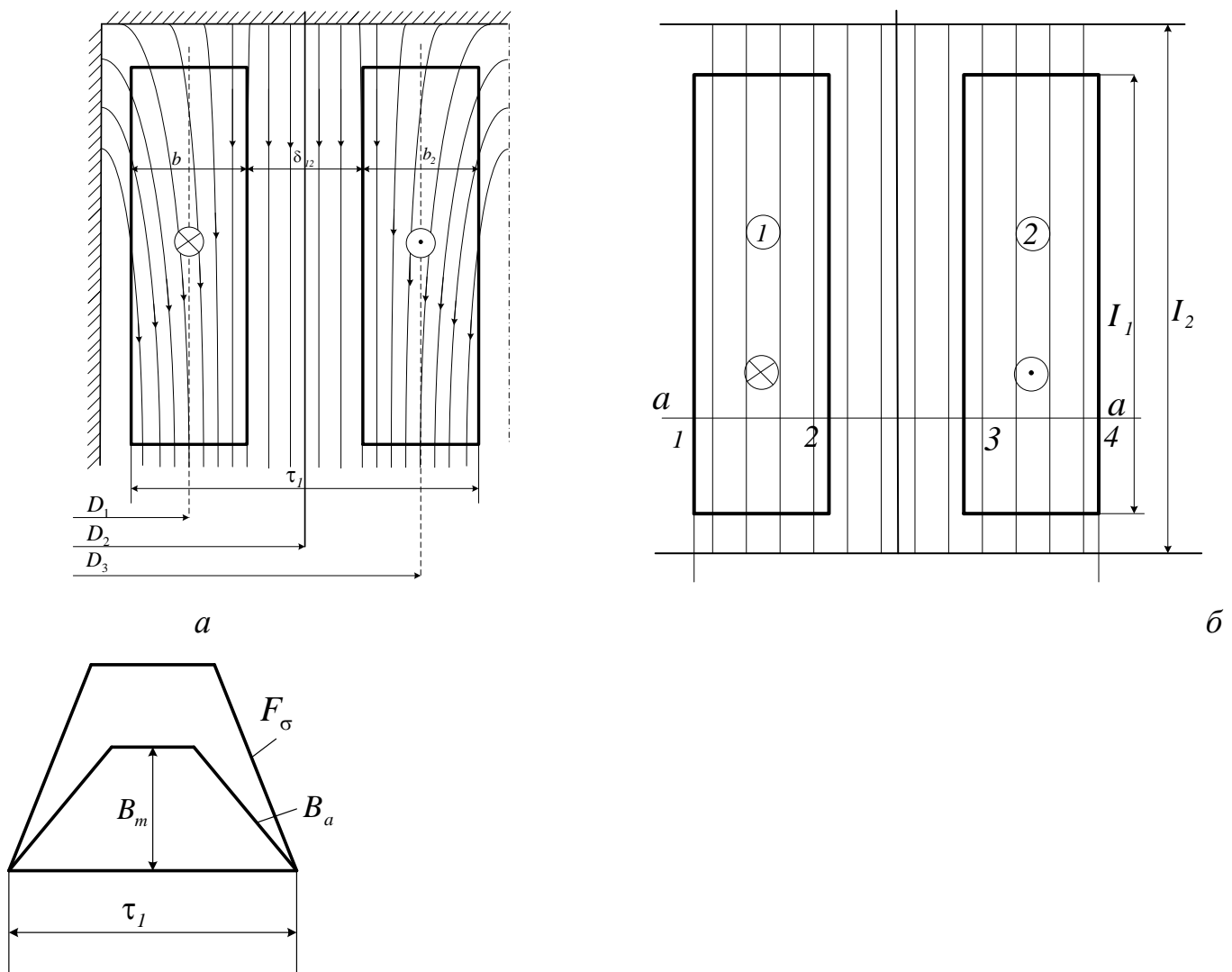


Рис. 2.7. Поле розсіювання обвиток трансформатора з рівномірно розподіленими за висотою МРС: а – картина реального поля; б – розрахункова схема

Для трансформаторів, у яких висота обвиток h значно більша від їх радіального розміру τ , можна з незначною похибкою обчислювати індуктивний опір розсіювання обвиток, вважаючи, що поле складається з магнетних ліній, паралельних до осі стержня, довжина яких дорівнює висоті обвиток. За висоти обвиток h одного порядку з їхнім радіальним розміром τ необхідно вносити поправкові коефіцієнти, які враховують магнетний опір шляху зовні обвиток. Поправкові коефіцієнти для концентричних і симетричних обвиток отримав проф. В. Роговський на підставі розв'язання рівнянь електромагнетного поля. Ці коефіцієнти дають можливість, розраховуючи індуктивні опори розсіювання

трансформатора, реальну картину поля розсіювання замінити розрахунковою, яка складається з магнетних ліній, довжина яких однакова й дорівнює

$$l_p = h / \rho_l, \quad (2.108)$$

де h – висота обвиток; $\rho_l < l$ – коефіцієнт Роговського.

Крива розподілу МРС поля розсіювання в будь-якому поперечному перерізі має трапецієподібну форму, як показано внизу на рис. 2.7, б. Це впливає з того, що МРС у будь-якій точці перерізу дорівнює повному струму всередині контуру $(iw)_x$ створеного магнетною лінією, що проходить через цю точку. В точці 1 перерізу а-а МРС дорівнює нулю. Потім у напрямку зліва направо вона зростає лінійно, оскільки струм збільшується пропорційно до відстані від точки 1. Між точками 2 і 3 МРС залишається постійною, тому що будь-який контур у цьому проміжку повністю охоплює первинну чи вторинну обвитку. Від точки 3 МРС починає зменшуватися через те, що струм у другій обвитці має протилежний знак, і досягає нуля в точці 4.

Крива розподілу індукції поля розсіювання у поперечному перерізі обвиток має таку саму форму, що і крива МРС, створеного будь-якою магнетною лінією

$$\frac{B_x}{\mu_0} l_p = (iw)_x \quad (2.109)$$

чи

$$B_x = \frac{\mu_0}{l_p} (iw)_x \equiv (iw)_x, \quad (2.110)$$

тобто індукція поля розсіювання в будь-якій точці перерізу пропорційна до повного струму, який охоплює магнетна лінія, що проходить через цю точку. Амплітуда індукції поля розсіювання

$$B_m = \frac{\mu_0 I_m w \rho_l}{h}, \quad (2.111)$$

де I_m – амплітуда струму в обвитці; w – кількість її витків.

Щоб визначити індуктивності розсіювання L_{σ_1} і L_{σ_2} первинної та вторинної обвиток окремо, необхідно знайти лінію поділу (границю) між магнетними потоками, які зчіплюються з окремими обвитками. Цю задачу важко розв'язати, оскільки розташування лінії поділу залежить від геометричних розмірів обвиток. Значно простіше визначити сумарну індуктивність обох обвиток $L_k = L_{\sigma_1} + L_{\sigma_2}$.

Вважаємо, що обвитки мають однакову кількість витків $w_1 = w_2 = w$. Це допущення еквівалентне зведенню обвиток до загальної кількості витків.

Енергія магнетного поля розсіювання пов'язана з індуктивністю короткого замикання L_k виразом

$$W = 0,5 L_k i^2, \quad (2.112)$$

тобто

$$L_k = 2W / i^2 = 2W_m / I_m^2 = W_m / I^2 \quad (2.113)$$

чи

$$x_k = 2\pi f L_k = 2\pi f W_m / I^2, \quad (2.114)$$

де W_m – енергія поля, яка відповідає амплітуді струму I_m ; I – діюче значення струму в одній з обвиток.

Енергію поля можна визначити так

$$W = \frac{1}{2} \int_V B H dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV, \quad (2.115)$$

де $B = \mu_0 H$, оскільки поля розсіювання трансформатора проходять здебільшого в немагнетному середовищі.

Для вертикального каналу між обвитками $B = B_m$ у момент максимуму струму, і об'єм, що займає поле розсіювання, згідно з розрахунковою картиною поля

$$V = \pi D_{12} \delta_{12} \frac{h}{\rho_1}. \quad (2.116)$$

Тому енергія магнетного поля в проміжку між об витками

$$W_{m12} = \frac{B_m^2}{2\mu_0} V, \quad (2.117)$$

підставляючи у формулу (2.117) $B_m = \mu_0 H_m = \mu_0 \frac{I_m w}{h/\rho_1}$ і значення об'єму V , отримаємо

$$W_{m12} = \frac{\mu_0 (I_m w)^2 \rho_1 \pi D_{12} \delta_{12}}{2h}. \quad (2.118)$$

Враховуючи, що $I_m = \sqrt{2}I$, одержуємо

$$W_{m12} = \frac{\mu_0 (I w)^2 \rho_1 \pi D_{12} \delta_{12}}{h}. \quad (2.119)$$

Для визначення енергії поля в просторі, зайнятому обвиткою 1, виберемо магнетну лінію шириною dx , яка розміщена на відстані x від внутрішнього краю обвитки. Тоді індукція в точці x

$$B_x = B_m \frac{x}{b_1} = \frac{\mu_0 I_m w \rho_1 x}{h b_1} \quad (2.120)$$

й елемент об'єму

$$dV = \frac{\pi(D_1 - b_1 + 2x)h}{\rho_1} dx. \quad (2.121)$$

Тому енергія поля обвитки 1 визначається так

$$\begin{aligned} W_{m1} &= \frac{1}{2\mu_0} \int B_x^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{b_1} \frac{\pi(D_1 - b_1 + 2x)\mu_0^2 I_m^2 w^2 \rho_1^2 x^2 h}{\rho_1 h^2 b_1^2} dx = \\ &= \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1 b_1}{3h} \left(D_1 + \frac{b_1}{2} \right) \approx \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1 b_1 D_1}{3h}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Аналогічно для простору, зайнятого обвиткою 2,

$$W_{m2} = \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1 b_2}{3h} \left(D_2 + \frac{b_2}{2} \right) \approx \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1 b_2 D_2}{3h}. \quad (2.123)$$

Додаючи вирази (2.119), (2.122), та (2.123), отримаємо

$$W_m = W_{m12} + W_{m1} + W_{m2} \approx \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1}{h} \left(D_{12} \delta_{12} + \frac{b_1 D_1 + b_2 D_2}{3} \right). \quad (2.124)$$

Для трансформаторів великої потужності, в яких діаметр обвиток значно більший від їхньої ширини, можна наближено вважати

$$D_{12} \delta_{12} + \frac{b_1 D_1 + b_2 D_2}{3} \approx D_{12} \left(\delta_{12} + \frac{b_1 + b_2}{3} \right) = D_{12} \delta', \quad (2.125)$$

де $\delta' = \delta_{12} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{3}$ – зведена ширина головного каналу розсіювання.

Тоді вираз (2.124) запишеться у вигляді

$$W_m = \frac{\mu_0 \pi (Iw)^2 \rho_1 D_{12} \delta'}{h}. \quad (2.126)$$

Підставляючи (2.126) в (2.114), отримаємо вираз для індуктивного опору розсіювання трансформатора

$$x_k = \frac{2\pi f \mu_0 w^2 \rho_1 D_{12} \delta'}{h}, \quad (2.127)$$

З рівності правих частин виразів (2.114) та (2.127) визначимо сумарну індуктивність обох обвиток, тобто

$$L_k = \frac{\pi \mu_0 w^2 \rho_1 D_{12} \delta'}{h}. \quad (2.128)$$

2.4.2. Обчислення взаємоіндуктивності між витками обвитки та обвитками

Питання розрахунку перенапруг в обвитках трансформаторів під час імпульсних впливів розглянуто у багатьох роботах різних авторів. У більшості робіт надається велике значення правильному розрахунку магнетних зв'язків з урахуванням взаємоіндукції між всіма елементами досліджуваної обвитки [4].

Висновки більшості науковців зводяться до того, що електромагнетна взаємоіндукція відіграє вирішальну роль у виникненні й характері нестационарних процесів у обвитці. Однак підхід дослідників до вивчення магнетних зв'язків і математичний аналіз явищ різняться, що призводить до різної величини

розрахункових перенапруг. Магнетні зв'язки одні автори розглядають на основі загального магнетного потоку, що пронизує обвитку, інші – із взаємоіндукції двох витків, узятих незалежно від іншої частини обвитки.

У теорії [4, 44] як базу для аналізу імпульсних явищ вводять у розрахунок “функції взаємоіндукції” магнетних і електростатичних зв'язків, тобто залежність взаємоіндукції двох елементів обвитки від відстані між ними. Зрозуміло, що види функції електромагнетної взаємоіндукції за закороченої та розімкнутої вторинної обвитки нижчої напруги відмінні. Під час розгляду функції електростатичної взаємоіндукції враховуємо наявність проміжних витків, тому що вони впливають на величину взаємної індуктивності двох витків.

Досліди показали, що істотно впливає на точність розрахунку перехідних процесів правильне врахування величини само- та взаємоіндукції витка, оскільки струм, який протікає у витку з координатою s , створює свій магнетний потік. Водночас з цим витком може бути зчеплений потік, який створюється іншими витками. Індуктивний зв'язок цього витка з іншим витком, який має координату x , визначається індуктивністю $M(x, s)$ між ними. Величина $M(x, s)$ залежить не від координат x та s окремо, а визначається їх різницею, тобто

$$M(x, s) = M(|x - s|). \quad (2.129)$$

Тоді рівняння спаду напруги запишеться

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^1 M(x, s) \frac{\partial i(s, t)}{\partial t} ds, \quad (2.130)$$

де довжина обвитки взята за одиницю; s – поточна координата, яка визначається відстанню від точки x до іншої точки обвитки, яка змінюється від нуля до одиниці.

Диференційне рівняння зміни струму, який протікає через індуктивність обвитки, має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= C_0 \int_0^l M(x, s) \frac{\partial^2 i(s, t)}{\partial x^2} ds - \\ &- C_{M0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^l M(x, s) \frac{\partial^2 i(s, t)}{dt^2} ds. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Якщо розглядати розв'язок (2.130) у вигляді суми синусоїдних у часі коливань з невідомим розподілом амплітуд вздовж довжини обвитки і підставити його в (2.130), одержимо рівняння для розподілу простих амплітуд просторових гармонік. Виконавши підстановку

$$i = f(x) e^{j\omega t}, \quad (2.132)$$

отримаємо інтегро–диференційне рівняння відносно $f(x)$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\omega^2 C_0 \int_0^l M(x, s) f(s) ds + \omega^2 C_{M0} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^l M(x, s) f(s) ds. \quad (2.133)$$

Рівняння (2.133) у замкненому вигляді розв'язати не вдається, тому в практичних розрахунках намагаються за змоги звести його до диференційного. Це можливо тільки в деяких часткових випадках. Але із (2.133) випливає важливий висновок, що просторовий розподіл $f(x)$ вільних коливань залежить від взаємоіндукції $M(x, s)$, яка змінюється.

Розглянемо деякі часткові випадки. Для цього проаналізуємо структуру другого доданка в правій частині рівняння (2.133). Маємо такі співвідношення

$$\int_0^l M(|x-s|) f(s) ds = \int_0^x M(x-s) f(s) ds + \int_x^l M(s-x) f(s) ds; \quad (2.134)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^l M(|x-s|) f(s) ds = \int_0^x \frac{dM(x-s)}{dx} f(s) ds - \int_x^l \frac{dM(s-x)}{dx} f(s) ds; \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^l M(|x-s|) f(s) ds &= \int_0^x \frac{d^2 M(x-s)}{dx^2} f(s) ds + \int_x^l \frac{d^2 M(s-x)}{dx^2} f(s) ds \\ &+ 2 \left(\frac{dM}{dx} \right)_{|x-s|=0} f(x) = \int_0^l \frac{d^2 M(x,s)}{dx^2} f(s) ds + 2 \left(\frac{dM}{dx} \right)_{|x-s|=0} f(x). \end{aligned} \quad (2.136)$$

З (2.136) випливає, що рівняння (2.132) можна звести до звичайного диференційного рівняння у випадку, коли функція $M(x, s)$ лінійна, тобто

$$M(|x-s|) = a + b|x-s|. \quad (2.137)$$

Тоді (2.133) набуде вигляду

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\omega^2 C_0 \int_0^l M(x,s) f(s) ds + \omega^2 C_{M_0} 2b. \quad (2.138)$$

Диференціюючи (2.138) двічі, з урахуванням (2.137), отримаємо

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} - 2b\omega^2 C_{M_0} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2b^2 C_0 f(x) = 0. \quad (2.139)$$

Зведення інтегро-диференційного рівняння до диференційного можливе також, якщо функція $M(x, s)$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{d^2 M(x-s)}{dx^2} f(x) ds + \int_0^l \frac{d^2 M(s-x)}{dx^2} f(s) ds &= \\ = \lambda^2 \left[\int_0^x M(x-s) f(s) ds + \int_x^l M(s-x) f(s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.140)$$

чи

$$\frac{d^2 M(x, s)}{dx^2} = \gamma^2 M(x, s). \quad (2.140a)$$

Оскільки $M(x, s)$ повинна бути спадною функцією, то розв'язок (2.140a) можна взяти у вигляді

$$M(x, s) = M_0 e^{-\gamma|x-s|}. \quad (2.141)$$

Якщо функцію взаємодукції взяти такою (2.141) та врахувати (2.140), то рівняння (2.133) набуде вигляду

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (\omega^2 C_{M_0} \gamma^2 - \omega^2 C_0) \int_0^l M(x, s) f(s) ds - 2M_0 \gamma \omega^2 C_{M_0} f(x). \quad (2.142)$$

Звернемо увагу на те, що якщо показник експоненти задовольняє умову

$$\gamma^2 = C_0 / C_{M_0}, \quad (2.143)$$

то матимемо синусоїдний розподіл амплітуд вільних коливань струму.

Диференціюючи двічі за x (2.141) та враховуючи рівняння (2.140), отримаємо звичайне інтегро-диференційне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = & (\omega^2 C_{M_0} \gamma^2 - \omega^2 C_0) \left[\gamma^2 \int_0^l M(x, s) f(s) ds - 2\gamma M_0 f(x) \right] - \\ & - 2M_0 \gamma \omega^2 C_{M_0} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Підставивши в (2.143) значення інтеграла із (2.141), одержимо

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} + (2M_o \gamma \omega^2 C_{M_o} - \gamma^2) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2M_o \gamma \omega^2 C_o f(x). \quad (2.145)$$

Підставимо в це рівняння як розв'язок

$$\underline{F} = F_o e^{-j\alpha x}. \quad (2.146)$$

Отримаємо

$$\omega^2 = \alpha^2 \frac{\gamma + \alpha^2 / \gamma}{2M_o (C_o + C_{M_o} \alpha^2)}. \quad (2.147)$$

Розрахунки показують, що величина γl відображає ступінь магнетного зв'язку витків, віддалених один від одного. Слабкому магнетному зв'язку відповідають великі значення γl . Тоді вираз (2.146) запишеться

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2}{\frac{2M_o}{\gamma} (C_o + C_{M_o} \alpha^2)}. \quad (2.147)$$

Якщо взяти за приклад два однакові витки в повітрі (тобто без урахування магнетопроводу), то взаємоіндукція визначається розмірами витків та відстанню між ними. На рис. 2.8 показано відношення $M(x, s) / M_o$ залежно від співвідношення a / r , тобто

$$|x - s| / r = a / r; \quad (2.148)$$

де M_o - індуктивність витка; r - радіус витка, м.

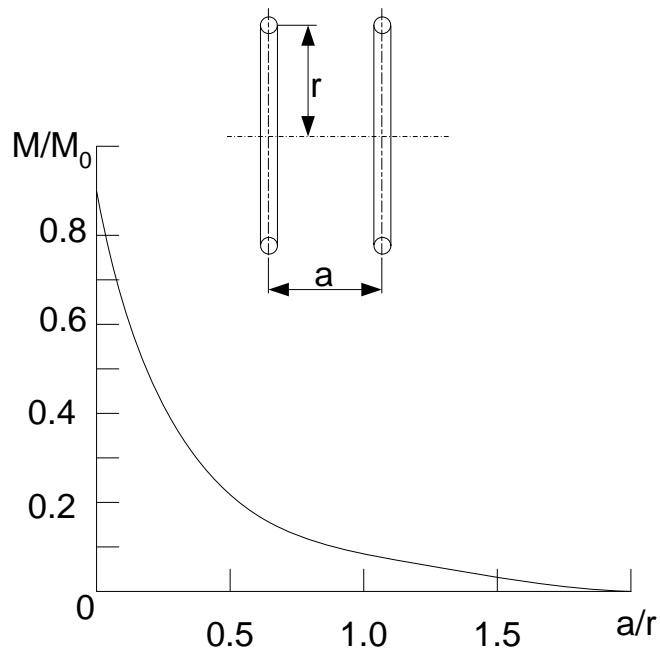


Рис. 2.8. Залежність взаємодукції двох витків у повітрі від віддалі між ними

Взаємодуктивність M_0 , Гн, можна розрахувати за формулою

$$M_0 = 4\pi r (\ln(8r/\rho) - 2) \cdot 10^{-7}, \quad (2.149)$$

де ρ - радіус проводу, м.

За наявності екранованого феромагнетного осердя залежність $M(x, s)/M_0$ від a/b аналогічна (рис. 2.9). У цьому випадку M_0 , Гн, визначається за формулою

$$M_0 = 4\pi r \ln \sqrt{(2b/\rho) + 1} \cdot 10^{-7}. \quad (2.150)$$

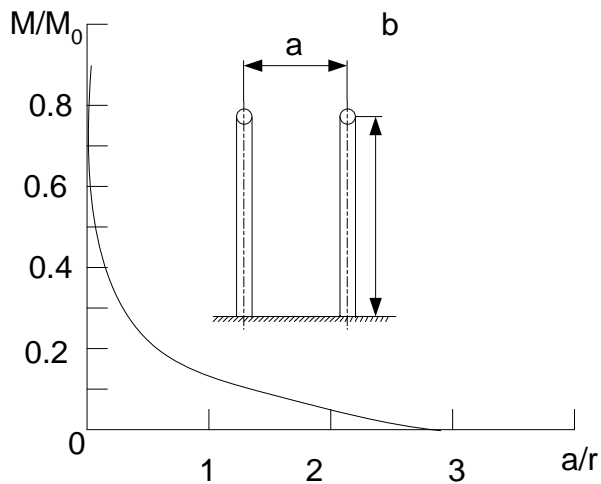


Рис. 2.9. Залежність взаємодукції двох витків від віддалі між ними за магнето-екранованого металевого осердя

Якщо суцільний металевий екран на осерді замінити короткозамкнутою вторинною обвиткою, то залежність $M(x, s) / M_0$ від співвідношення a / l матиме вигляд, показаний на рис. 2.10 (l - аксіальна довжина обвитки). Наведений аналіз показав, що залежність $M(x, s)$ у багатьох випадках справді можна апроксимувати простою експоненційною функцією.

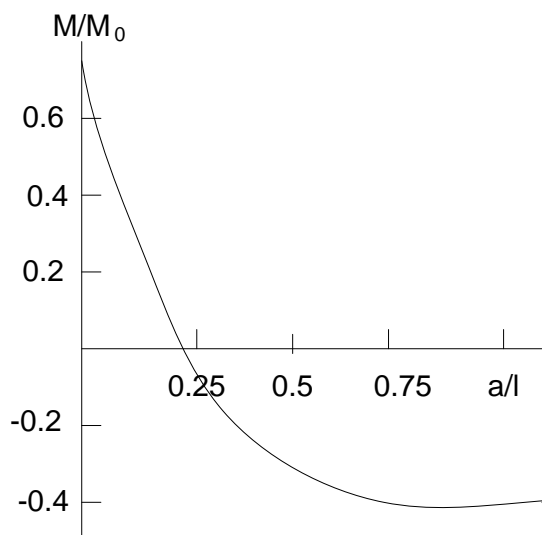


Рис. 2.10. Залежність взаємодуктивності двох витків від віддалі між ними на сталевому осерді за короткозамкнутої вторинної обвитки

Наприклад, для повітряної обвитки

$$M(x, s) / M_0 = \exp(-3,15a / r); \quad (2.151)$$

для екранованого осердя

$$M(x, s) / M_0 = \exp(-2,2a / b). \quad (2.152)$$

Під час розрахунку індуктивних параметрів заступної схеми до визначення власних та взаємоіндуктивностей всіх розглянутих елементів, зазвичай нехтують поверхневим ефектом у проводі та впливом ярма і сусідніх стержнів на імпульсний процес в обвитці. Як розрахункову модель для визначення L_{ij} ($i = j$ – власна індуктивність, $i \neq j$ – взаємна індуктивність) беруть систему двох концентрично розміщених витків прямокутного перерізу, які надягнені на циліндричний стержень нескінченної довжини з постійною магнетною проникністю.

Іноколи можна скористатись наближеними формулами для розрахунку власних та взаємних індуктивностей кругових обвиток прямокутного перерізу в повітрі. Але, як показали експериментальні дослідження під час визначення імпульсних напруг між обвитками, наведень на внутрішні обвитки, градієнтів у глибині й біля нейтралі випробуваної обвитки, вплив магнетопроводу проявляється доволі істотно.

2.4.3. Функції електростатичної та електромагнетної взаємоіндукцій і періоди власних коливань обвитки

Результати вимірювань електростатичної взаємоіндукції показали [15], що збігаються функції взаємоіндукції за заземленої вторинної обвитки і з екраном, що відтворює вторинну обвитку.

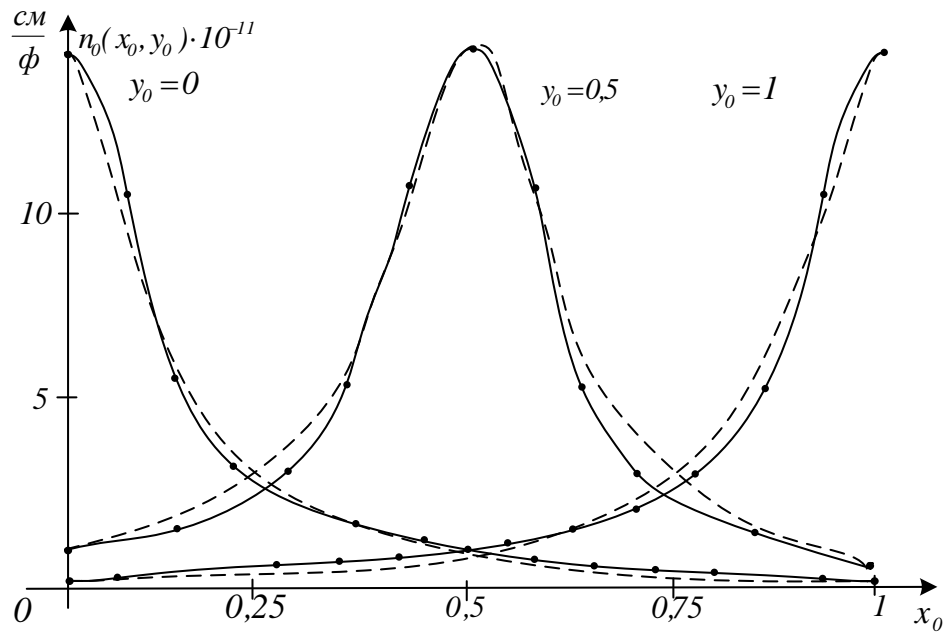


Рис. 2.11. Функції електростатичної взаємодукції

Якщо не враховувати впливу проміжних знеструмлених витків обвитки на взаємодукцію, то розрахунок $n_o^*(x_o, y_o)$ можна виконати за формулою

$$n_o^*(x_o, y_o) = n_o^*(z_o) = \frac{9 \cdot 10^{11}}{\varepsilon} \ln \frac{z_o^2 + 4a_o^2}{z_o^2}, \quad (2.153)$$

де ε - діелектрична проникність середовища; z_o - відстань між досліджуваними витками ($z_o = y_o - x_o$); $a_o = \frac{a}{l}$, де a - ширина каналу між обвитками.

Результати вимірювань $n_o^*(x_o, y_o)$ за відсутності між досліджуваними витками проміжних витків збігаються з обчисленими за формулою (2.153). Але результати дослідів вимірювання взаємодукції між двома витками за наявності на гетинаксовому циліндрі проміжних витків (рис. 2.11) відрізняються від результатів, отриманих за формулою (2.153). Наявність проміжних витків призводить до порушення геометричної подібності (дуальності) магнетного поля витка й електричного поля заряду, розподіленого у тому самому витку.

Функцію електромагнетної взаємодуції $m_0(x_0, y_0)$ під час відтворення вторинної обвитки екраном можна подати у вигляді

$$m_0(x_0, y_0) = m_0(z_0) = 10^{-9} \ln \frac{z_0^2 + 4a_0^2}{z_0^2}. \quad (2.154)$$

Досліджена залежність для $m_0(x_0, y_0)$ добре збігається з розрахованою за формулою (2.154).

Як видно з формул (2.153) і (2.154), функції $n_0^*(x_0, y_0)$ і $m_0(x_0, y_0)$ подібні між собою, що підтверджується і дослідом, але функції $n_0(x_0, y_0)$ і $m_0(x_0, y_0)$ не подібні, що впливає з результату, наведеного вище.

Такі результати дають підставу стверджувати, що процес в обвитці не можна подати у вигляді руху звичайної плоскої хвилі, навіть в такому простому випадку, коли вторинна обвитка відтворена екраном.

Для тонких обвиток за закороченої вторинної обвитки розрахунок електромагнетної взаємодуції можна здійснити за наближеною формулою, тобто

$$m_0(x_0, y_0) = 10^{-9} (-2 \ln|z_0| - \ln(z_0^2 + 4a_0^2)) - M_0, \quad (2.155)$$

де $M_0 = const$.

Як видно з рис. 2.11, дослідні криві доволі добре збігаються з розрахунковими. Така залежність спостерігається у всьому діапазоні частот прикладеної напруги від 50 Гц до 200 кГц.

Вимірювання фазового кута між струмом $I(y_0)$ і напругою $U(x_0)$ показують, що втрати в сталі за закороченої вторинної обвитки можна не враховувати у всьому діапазоні частот.

Зазначимо, що вимірювання за імпульсного режиму дає такий самий характер кривих, що і за високочастотного режиму.

У табл. 2.1 наведено дані, отримані з досліду відношення періоду основної гармоніки (417 мкс) за ізолюваної нейтралі й розімкнутої вторинної обвитки до періодів трьох перших гармонік за різних станів обвиток.

Таблиця 2.1

№ гармонік	Нейтраль ізолювана		Нейтраль заземлена		Вторинна обвитка, відтворена екраном	
	Вторинна обвитка		Вторинна обвитка		Нейтраль первинної	
	розімкнута	закорочена	розімкнута	закорочена	ізолювана	заземлена
1	1,0	5,85	7,30	7,35	8,37	18,0
2	9,21	10,90	17,50	17,80	22,30	29,2
3	18,40	18,90	28,40	28,40	31,40	36,0

З табл. 2.1 видно, що періоди коливань змінюються у широких межах залежно від стану вторинної обвитки і нейтралі первинної обвитки.

За розімкнутої вторинної обвитки велику роль відіграють високочастотні втрати в сталі. Так, за збудження високою частотою окремої обвитки, насадженої на осердя, отримали відношення реактивного струму до активного струму (з точністю до 10 %), наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

$f, \text{кГц}$	3	6	12	18	40	80
I_r/I_a	2,30	1,80	1,65	1,50	1,75	1,65

2.4.4. Обчислення ємнісних параметрів заступної схеми обвитки трансформатора

Розрахунок ємнісних параметрів заступної схеми виконується за умови, що елементом обвиток є витки. Потім відповідно до прийнятої схеми розділення обвиток на елементи знайдена ємність витка приводиться до кінців відповідного елемента, до складу якого входить цей виток.

Розрахунок ємнісних параметрів витка зводиться до визначення поперечної ємності та ємності магнетопроводу, причому в другому випадку має значення сумарна ємність, а не її розподіленість вздовж периметра витка.

Проміжки між концентрами трансформаторів, звичайно, мають неоднорідну будову вздовж контуру. Для визначення сумарної ємності обвитки на сусідній концентр вказані проміжки розподіляються по колу контуру на кілька зон, у межах яких діелектрична проникність незмінна за шириною і кусково-стала вздовж радіального напрямку. Нехтуючи крайовими ефектами на межах з'єднання сусідніх зон, можна розглядати кожну зону як циліндричний конденсатор із багат шаровим діелектриком.

Приймають, що ємність цього циліндричного конденсатора дорівнює ємності відповідного плоского конденсатора з багат шаровим діелектриком, оскільки середній діаметр обвиток потужних трансформаторів набагато більший від його радіального розміру. Зважаючи на це, загальну ємність обвитки $C_{обв.}$, пФ, що дорівнює сумі ємнісних зон, які знаходять за формулою плоского конденсатора, можна записати у вигляді [6]

$$C_{обв.} = \frac{0,111 \varepsilon_{re} D_{12} h}{4l}, \quad (2.156)$$

де D_{12} - середній діаметр проміжку між обвитками, мм; h - розрахункова висота обвитки, мм; l - віддаль між обвитками, мм; ε_{re} - еквівалентна відносна діелектрична проникність, яка враховує неоднорідну будову проміжків за контуром і багат шаровість діелектрика.

За розрахункову висоту обвитки h , зазвичай, приймають віддаль між серединами прилеглих до обвитки каналів, не враховуючи її несучільності в осьовому напрямку.

Для розрахунку ємності між сусідніми витками можна використовувати також формулу плоского конденсатора з поправкою на крайовий ефект [6]

$$C_{Mo} = \frac{0,111 \varepsilon_{re} D_{cp} \Delta R (1 + \delta_{kp})}{4(a + S)}, \quad (2.157)$$

де D_{cp} - середній діаметр витка, мм; ΔR - радіальний розмір витка, мм; S - ширина масляного каналу між витками, мм; a - сумарна товщина паперової ізоляції у міжвитковому каналі, мм.

Для звичайних конструкцій обвиток $\varepsilon_{re} = 1,8 \div 2,3$. Поправка на крайовий ефект δ_{kp} залежить від товщини обвиток і межах $0,1 \div 1,15$.

Геометричні розміри трансформатора *ТРДН – 63000 / 110* наведено на рис. 2.12. Потужність обвиток (ВН/НН1/НН2), *кВ·А - 63000 / 31500 / 31500*. Напруги обвиток (ВН/НН1/НН2), *кВ - 115 ± 9 × 1,78 / 6,3 / 6,3*. Схема і група з'єднання обвиток *Y / Δ / Δ – 11 – 11*. Розміри магнетопроводу: діаметр стержня - $D_{стер} = 600$ мм; висота вікна - $h_{вік.} = 2340$ мм; міжосьова відстань між стержнями - $M_{ос.} = 1280$ мм; ширина центрального пакета стержня (ярма) - 580 мм. Обвитка НН – двоходова гвинтова, ВН – навійна, обвитка РПН (регулювальна обвитка) – десятиходова гвинтова без каналів. Середня висота охолоджувальної канави між навоями (без урахування усадки картонних прокладок) обвитки НН - 2,85 мм, обвитки ВН - 4,1 мм. Розрахункова висота навою обвитки НН - 13,05 мм, обвитки ВН - 12,55 мм, обвитки РПН – 11,96 мм. Товщина виткової ізоляції навою (на дві сторони) обвитки НН - 0,55 мм, обвитки ВН - 1,36 мм, обвитки РПН – 2,96 мм. Сумарна товщина паперової ізоляції у міжнавійному каналі обвитки НН - 0,55 мм, обвитки ВН - 1,36 мм.

Основні паспортні дані трансформатора ТРДН-63000/110 наведено в табл. 2.3, а в табл. 2.4 - основні розрахункові параметри.

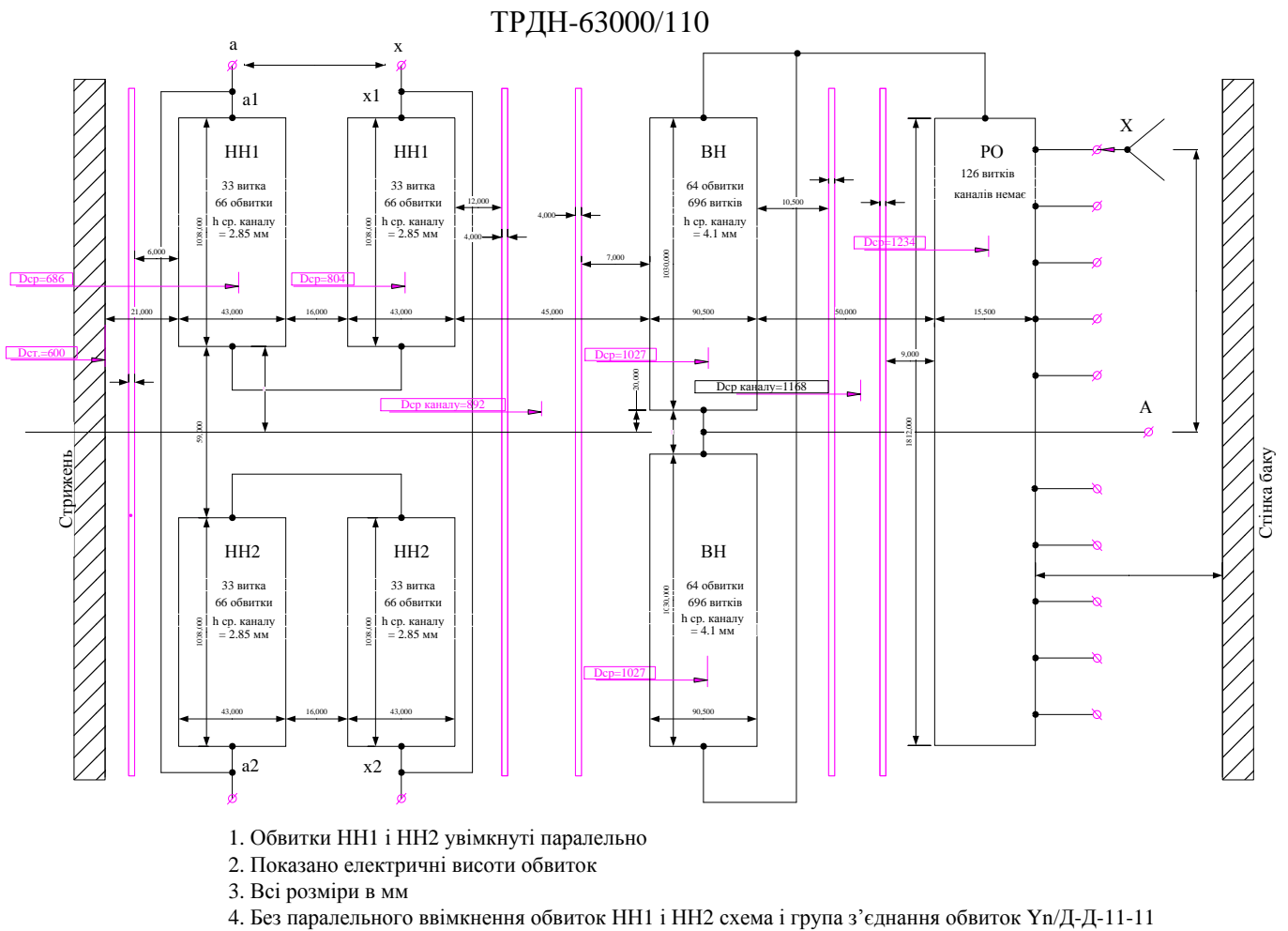


Рис. 2.12. Геометричні розміри трансформатора ТРДН – 63000 / 110

Таблиця 2.3

Основні паспортні дані трансформатора ТРДН-63000/110

$S_{ном}, MB \cdot A$	$PПН$	$U_{ном}, кВ$		$u_k, \%$	$\Delta P_k, кВт$	$\Delta P_{н.х.}, кВт$	$I_{н.х.}, \%$
		<i>ВН</i>	<i>НН</i>				
63	$\pm 9 \times 1,78\%$	115	6,3/6,3; 6,3/10,5; 10,5/10,5;	10,5	260	59	0,6

Основні розрахункові параметри трансформатора ТРДН-63000/110

$r_T, Ом$	$x_T, Ом$	$\Delta Q_{н.х.}, квар$	$b_T, См$	$g_T, Ом$	$\underline{Y}_T, См$
0,87	22	410	$2,858 \times 10^{-5}$	$4,461 \times 10^{-6}$	$4,461 \times 10^{-6} - j2,858 \times 10^{-5}$

$r_0 dx, Ом$	$L_0 dx, Гн$	$C_{M0} / dx, Ф$	$C_0 dx, Ф$	$g_0 dx, См$
$1,547 \times 10^{-3}$	$2,026 \times 10^{-4}$	$9,856 \times 10^{-10}$	$1,434 \times 10^{-6}$	$9,365 \times 10^{-7}$

Висновки

1. Розроблено математичну модель для дослідження хвильових процесів в обвитках трансформатора з врахуванням і без врахування взаєміндукції між витками обвитки.

2. Запропоновано і обґрунтовано доцільність застосування методу розділення змінних для розв'язання рівнянь в часткових похідних, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів.

3. Розроблена математична модель для дослідження хвильових процесів в двообвиткових трансформаторах з врахуванням еквівалентної магнітної провідності магнітопроводу трансформатора.

3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ В ОБВИТКАХ ТРАНСФОРМАТОРА ПІД ЧАС ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕНАПРУГ В ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ

3.1. Математичне моделювання вільних коливань в обвитці трансформатора за різних форм імпульсу перенапруги

Надійність ізоляції трансформаторів під час імпульсних перенапруг має визначальне значення і залежить від правильної її координації. Ізоляція високовольтичних трансформаторів повинна забезпечувати їх безаварійну роботу, як під час довготривалої дії напруги, так і під час короткотривалих зовнішніх і внутрішніх перенапруг. Розроблення математичних моделей для дослідження хвильових процесів в трансформаторах з врахуванням цих факторів є актуальним. Ізоляція обвиток трансформатора істотно впливає на розміри, вартість та його вагу, збільшує реактивний опір, тим самим зменшує його пропускну здатність. Для вибору ізоляції обвитки трансформаторів та схем захисту трансформаторів від перенапруг необхідно знати максимальні значення напруг по відношенню до землі окремих частин обвиток трансформаторів, а також значення напруг між витками обвитки і обвитками під час імпульсних перенапруг з врахуванням всіх параметрів заступної схеми. Для отримання таких результатів використовується математичне моделювання, так як для великих трансформаторів виготовлення таких моделей в натуральну величину є дорогим і недоцільним. Протікання хвильових процесів в обвитках трансформаторів залежить від часу, геометричних розмірів обвитки, питомого опору матеріалу обвитки, діелектричних постійних ізоляції, магнетної проникності сталі та форми імпульсу на початку обвитки.

Для дослідження хвильових процесів в трансформаторах під час зовнішніх перенапруг необхідно змоделювати форму хвилі. Емпіричне рівняння, яке характеризує форму імпульсної хвилі, має вигляд [8, 34-37]

$$e_{im} = E(e^{-at} - e^{-bt}), \quad (3.1)$$

де E - максимальна величина потенціалу хвилі; a і b - параметри хвилі; t - час.

Імпульсна хвиля характеризується такими параметрами: максимальною величиною потенціалу хвилі (амплітуда); довжиною фронту; частиною хвилі від 0 до E_{max} ; довжиною хвилі; частина хвилі від E_{max} до її половини; знаком амплітуди.

Графічне відтворення імпульсу хвилі, яка набігає на обвитки трансформатора показано на рис. 3.1.

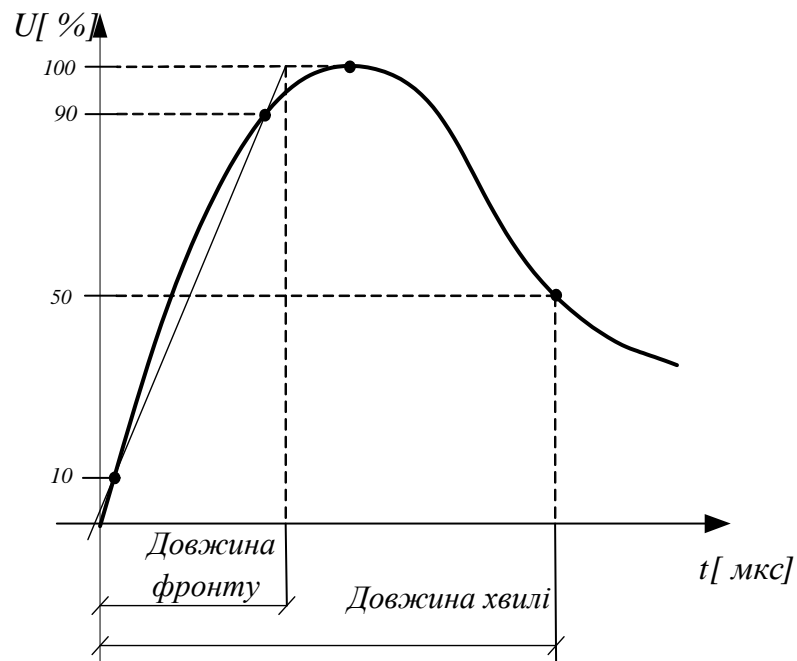


Рис.3.1. Імпульсна характеристика напруги

Стандартна хвиля приймається за 50 % імпульсної напруги з довжиною фронту 1 мкс і довжиною хвилі 50 мкс . Тому необхідно правильно вибрати параметри рівняння (1), якщо a і b мають дійсні значення, то рівняння (3.1) відтворює хвилю з закругленим фронтом і експоненційним хвостом.

Якщо на обвитку трансформатора, яка знаходиться в кінці лінії електропересилання, набігає імпульс напруги, на підставі першого закону комутації струм в індуктивності не змінюється стрибком, обвитка в перший

момент ведеться як конденсатор з ємністю $C_{обс}$. Виходячи з цього напругу на виводах обвитки можна записати у вигляді

$$u = 2e_{имн} \left(1 - e^{-\frac{1}{Z_c C_{обс}} t} \right), \quad (3.2)$$

де Z_c - хвильовий опір лінії електропересилання; $C_{обс}$ - вхідна ємність обвитки; $e_{имн}$ - напруга імпульсної хвилі; t - час.

Враховуючи, що в основному обвитки трансформатора в середньому мають $C_{обс} = 100 \text{ нф}$, а хвильовий опір лінії електропересилання $Z_c = 250 \text{ Ом}$ то напруга на обвитці швидко досягає $2e_{имн}$.

Заступну схему обвитки трансформатора на одиницю довжини вздовж осі обвитки, із врахуванням попередніх міркувань, зображено на рис. 2.1.

Рівняння в часткових похідних, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів з врахуванням взаємоіндукції між витками [1 - 6] для невідомих $i(x, t)$, $u(x, t)$, $0 < x < l$, $t > 0$ утворюють таку систему

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = g_o u(x, t) + C_o \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_{M_o} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t}; \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = r_o i(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial i(s, t)}{\partial t} ds, \quad (3.4)$$

з початковими умовами

$$i|_{t=0} = \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} |_{t=0} = 0, \quad (3.5)$$

і граничними умовами

$$L_n \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} - u(0, t) = f(t); \quad (3.6)$$

$$L_k \frac{\partial i(l, t)}{\partial t} = u(l, t). \quad (3.7)$$

Зведення до задачі з однорідними граничними умовами.

Позначимо

$$h(t) = i(0, t), \quad g(t) = i(l, t). \quad (3.8)$$

Згідно (3.6) - (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial i(l, t)}{\partial t} &= \frac{1}{L_k} u(l, t) = \frac{dg(t)}{dt}; \\ \frac{\partial i(0, t)}{\partial t} &= \frac{1}{L_n} [u(0, t) + f(t)] = \frac{dh(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введемо невідому функцію $v(x, t)$ співвідношенням

$$i(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} g(t) + \frac{l-x}{l} h(t). \quad (3.10)$$

Підставляючи разом з

$$\frac{\partial i(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} + \frac{x}{l} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{l-x}{l} \frac{dh(t)}{dt}$$

в (3.3) – (3.4), одержимо

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= g_0 u(x, t) + C_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - C_{M_0} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + F_0(t); \\
-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= r_0 v(x, t) + \int_0^l M(x, s) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} ds + F_l(x, t),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\text{де } F_0(t) = \frac{1}{l} (g(t) - h(t)); \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
F_l(x, t) &= r_0 \frac{x}{l} g(t) + r_0 \frac{l-x}{l} h(t) + \\
&+ \frac{1}{l} \frac{dg(t)}{dt} \int_0^l s M(x, s) ds + \frac{1}{l} \frac{dh(t)}{dt} \int_0^l (l-s) M(x, s) ds.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

З рівностей (3.5) і (3.8) випливає

$$h(0) = \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = g(0) = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

і з (3.3), (3.8) одержуємо початкові умови

$$v(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \tag{3.14}$$

Підстановка $x = 0$ чи $x = l$ у (3.10) з врахуванням (3.8) дає

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \tag{3.15}$$

тобто однорідні граничні рівняння для системи (3.11).

Розв'язання системи рівнянь (3.3) - (3.4) наведено в [1].

3.2. Аналіз вільних коливань в обвитці під час дії прямокутного імпульсу напруги

Якщо задано стан коливних процесів під час дії одиночного імпульсу $\varphi(t)$ тоді для змінного в часі імпульсу $F(t)$ згідно інтегралу Дюамеля отримаємо

$$u(t) = F(t)\varphi(0) + \int_0^t F(t-T)\varphi'(T)dT \quad (3.16)$$

чи

$$u(t) = F(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-T)F'(T)dT; \quad (3.17)$$

де $\varphi(0)$ - стан системи для часу $t = 0$; $F(0)$ - значення імпульсу для $t = 0$; T - довжина імпульсу.

Якщо форма імпульсу є простою, тоді розв'язок можна отримати без використання інтеграла Дюамеля.

Для прикладу розглянемо одиничний зрізаний імпульс (прямокутної форми) (рис. 3.2) з довжиною T і таку хвилю можна розглядати як накладання двох одиничних імпульсів – додатного і від'ємного з врахуванням того, що один імпульс зсунутий відносно іншого на час T .

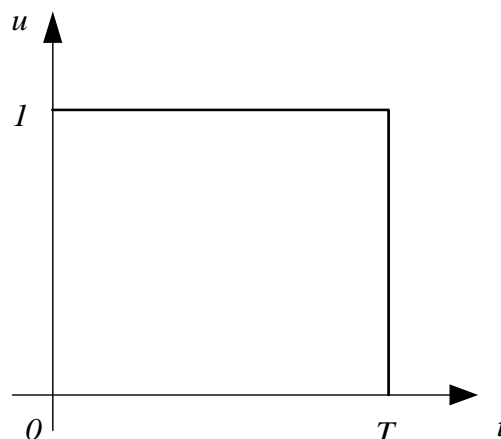


Рис. 3.2. Імпульс зі зрізаним фронтом

Для обвитки, яка заземлена, вільні коливання в обвиті, під час дії на неї одиничного імпульсу зрізаної хвилі, напругу можна записати так

$$u(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) \cos(\omega_i t), \quad (3.18)$$

де α_i - просторова кутова швидкість; ω_i - кутова частота; b_i - постійна інтегрування; $\alpha/(2\pi)$ - просторова частота; $\omega/(2\pi)$ - часова частота.

Амплітуди постійної інтегрування знаходимо за виразом

$$b_i = \frac{2}{i\pi} \frac{\gamma l}{(i\pi)^2 + (\gamma l)^2}, \quad (3.19)$$

де $\gamma = \sqrt{\frac{C_0}{C_{M_0}}}$; l - осьова довжина обвитки.

З граничних умов $u(0, t) = u(l, t) = 0$ отримуємо $\alpha_i = (i\pi)/l$, де $i = 1, 2, 3, \dots$

Зв'язок між α і ω отримуємо з диференційного рівняння для напруги обвитки трансформатора без врахування активних опор та провідності з розв'язком його $u = Ue^{j\omega t} e^{j\omega\alpha}$, тобто

$$\omega = \alpha / \sqrt{LC(1 + M_{C_0} / C_0 \alpha^2)}. \quad (3.20)$$

Кожному можливому значенню просторової частоти α відповідає значення часової частоти ω . Зі збільшенням α часова частота ω наближається до критичного значення

$$\omega_{кр} = \omega_{\infty} = 1 / \sqrt{LC_{M_0}}. \quad (3.21)$$

Ця критична частота є найбільшою часовою частотою коливань в обвитці і відповідає власній частоті з індуктивністю L і ємністю C_{M_0} .

Для часу $t > T$ напруга у будь-якій точці x визначається так

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) \cos(\omega_i t) - \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) \cos(\omega_i(t - T)) = \\
 &= -\sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) 2 \sin(t - T/2) \sin((\omega_i T)/2). \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

З формули (3.22) випливає, що напруга обумовлена гармоніками, кутова частота яких $\omega_i T = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) подвоюється, а напруга обумовлена гармоніками для яких $\omega_i T = 2k\pi$ компенсуються.

На рис. 3.3. показано розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за прямокутної форми імпульсу.

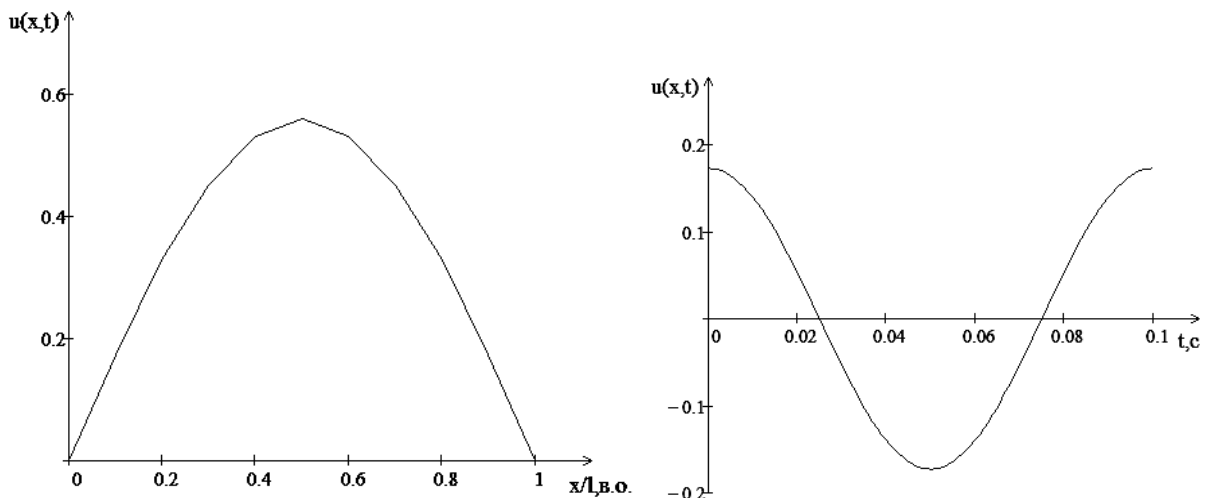


Рис. 3.3. Розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за прямокутної форми імпульсу

За зрізаної хвилі отримуємо збільшення амплітуди вищих гармонік і тим самим збільшення напруги вздовж обвитки. В той час не збільшується напруга обвитки відносно землі, обумовленої основною частотою.

Якщо основні рівняння (3.3) і (3.4) розв'язані у випадку дії на обвитку прямокутної хвилі безмежної довжини, тоді використовуючи інтеграл Дюамеля цей розв'язок можна поширити на випадок дії хвилі на обвитку будь-якої форми.

3.3. Аналіз вільних коливань в обвитці під час дії косокутного імпульсу напруги

Розглянемо імпульс напруги який падає на обвитку з косокутним фронтом (рис. 3.4) довжиною T . Такий імпульс можна представити накладанням двох імпульсів змінних в часі і другий імпульс є від'ємним і зсунутий відносно першого імпульсу на час T . Для першого імпульсу $F = at$, де $a = 1/T$. Підставимо $F = at$, в інтеграл Дюамеля, отримаємо напругу на обвиті, яка в кінці заземлена, тобто

$$u(t) = at(1 - x/l) + \sum_{i=1}^n (ab_i) / \omega_i \sin(\alpha_i x) \cos(\omega_i t). \quad (3.23)$$

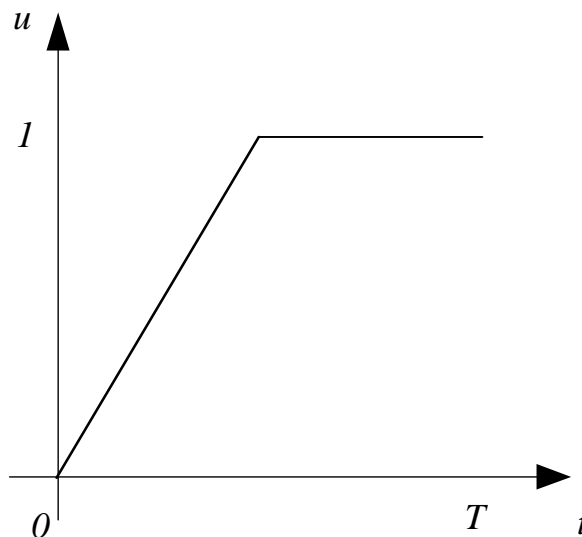


Рис. 3.4. Імпульс з косокутним фронтом

Для часу $t > T$ для косокутної хвилі напруга на обвитці

$$\begin{aligned}
 u(t) = & at(1 - x/l) + \\
 & + \sum_{i=1}^n (ab_i) / \omega_i \sin(\alpha_i x) \cos(\omega_i t) - a(t - T)(1 - x/l) + \\
 & + \sum_{i=1}^n (ab_i) / \omega_i \sin(\alpha_i x) \sin(\omega_i(t - T)).
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Враховуючи, що $aT = 1$ значення напруги на обвитці (3.24) запишемо так

$$\begin{aligned}
 u(t) = & (1 - x/l) + \sum_{i=1}^n b_i / (\omega_i T) \sin(\alpha_i x) 2 \sin((\omega_i T) / 2) \cos(\omega_i(t - (T / 2))) = \\
 = & (1 - x/l) + \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) (\sin((\omega_i T) / 2)) / ((\omega_i T) / 2) \cos(\omega_i(t - (T / 2))).
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Амплітуди гармонік за косокутного імпульсу, який падає на обвитку у порівнянні з одиничним імпульсом зменшується на співвідношення $\sin((\omega_i T) / 2) / ((\omega_i T) / 2)$.

Виходячи з цього зменшення довжини фронту імпульсу впливає на напругу поздовжньої ізоляції. Вплив на напругу у відношенні до землі зауважується лише, якщо T великий.

На рис. 3.5 показано розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за косокутної форми імпульсу.

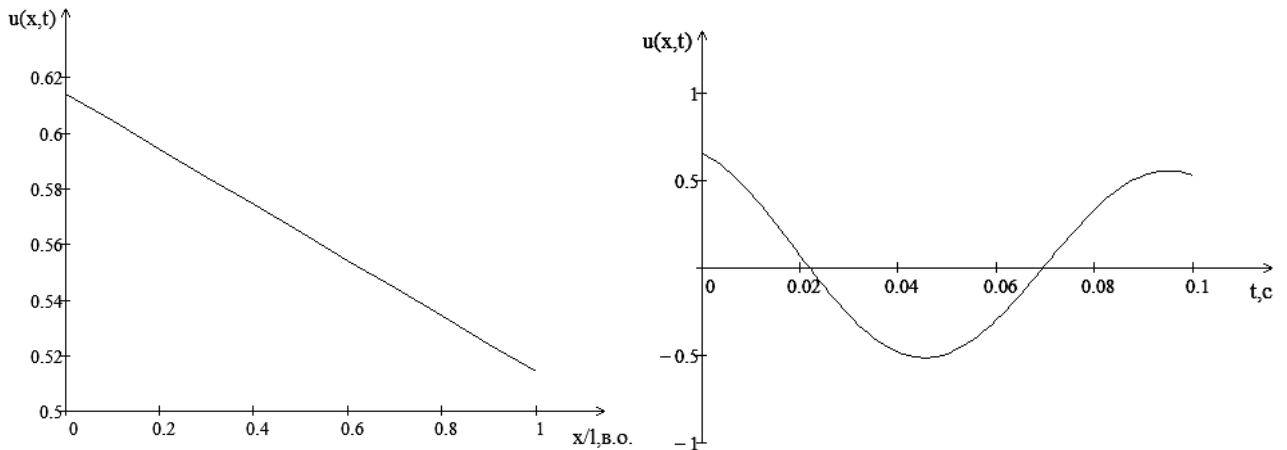


Рис. 3.5. Розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за косокутної форми імпульсу

3.4. Аналіз вільних коливань в обвитці за експоненційною формою імпульсу напруги

Якщо на обвитку, яка розімкнена в кінці, падає імпульс напруги, який має експоненційну форму $F(t) = e^{-t/T}$, то на підставі інтеграла Дюамеля отримаємо значення напруги відносно землі

$$u(x, t) = e^{-t/T} + \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) \left(\frac{e^{-t/T}}{1 + (\omega_i T)^2} + \frac{(\omega_i T)}{\sqrt{1 + (\omega_i T)^2}} \cos(\omega_i t + \arctg(1/(\omega_i T))) \right) \quad (3.26)$$

Для стану коли експоненційна хвиля затухає, значення напруги відносно землі

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n b_i \sin(\alpha_i x) \left(\frac{(\omega_i T)}{\sqrt{1 + (\omega_i T)^2}} \cos(\omega_i t + \arctg(1/(\omega_i T))) \right) \quad (3.27)$$

В зв'язку з цим, окремі гармоніки зменшуються у відношенні до одиничного імпульсу у співвідношенні $1/(\sqrt{1+1/(\omega_i T)^2})/1$, тобто зменшуються амплітуди гармонік нижчих порядків.

Напруга на ізолюваному кінці обвитки визначається з рівняння (3.3), тобто

$$u(t) = e^{-t/T} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i (e^{-t/T} / (1 + (\omega_i T)^2) + (\omega_i T) / (\sqrt{1 + (\omega_i T)^2})) \cos(\omega_i t + \arctg(1/(\omega_i T)))}{1 + (\omega_i T) / (\sqrt{1 + (\omega_i T)^2})}. \quad (3.28)$$

Враховуючи, що напруга відносно землі має в основному першу гармоніку, максимальне значення напруги на ізолюваному кінці обвитки запишемо так

$$u_{max}(l, t) = e^{-t'/T} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i (e^{-t'/T} / (1 + (\omega_i T)^2) + (\omega_i T) / (\sqrt{1 + (\omega_i T)^2})) \cos(\omega_i t + \arctg(1/(\omega_i T)))}{1 + (\omega_i T) / (\sqrt{1 + (\omega_i T)^2})}. \quad (3.29)$$

де t' - корінь трансцендентного рівняння $du(e, t)/dt = 0$.

На рис.3.6 показано розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за експоненціальної форми імпульсу.

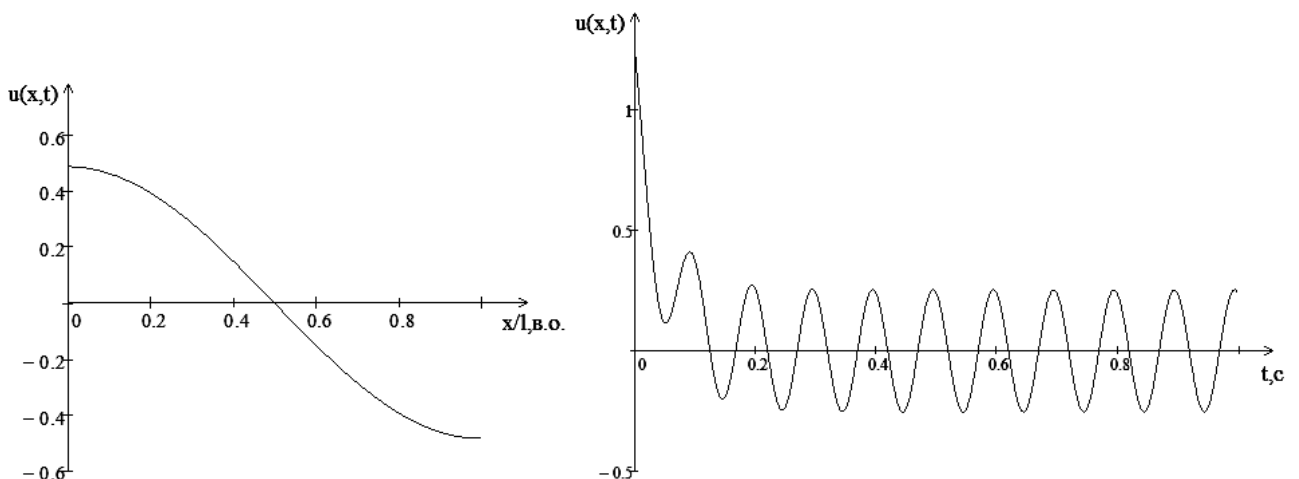


Рис. 3.6. Розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора за експоненціальної форми імпульсу

Запропонована математична модель розв'язання інтегрально-диференціальних рівнянь, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів, методом розділення змінних. Отримано аналітичні вирази напруги вільних коливань в обвитках трансформаторів за дії різних форм імпульсу напруги.

Висновки

1. Запропоновано математичні моделі різних форм хвиль для дослідження перенапруг в трансформаторах.
2. Проведено аналіз розподілу напруг вздовж обвитки трансформатора за різних форм імпульсу напруги.

4. ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В ОБВИТКАХ ТРАНСФОРМАТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА

4.1. Початковий розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора

Вже ранні роботи з дослідження хвильових процесів в обвитках трансформаторів під час грозових імпульсів виявили необхідність представлення обвитки у вигляді електричного кола з розподіленими параметрами. В якості першого наближення однорідну одношарову обвитку можна представити у вигляді лінії з додаванням ємнісних зв'язків між витками, заступна схема якої показана на рис. 4.1.

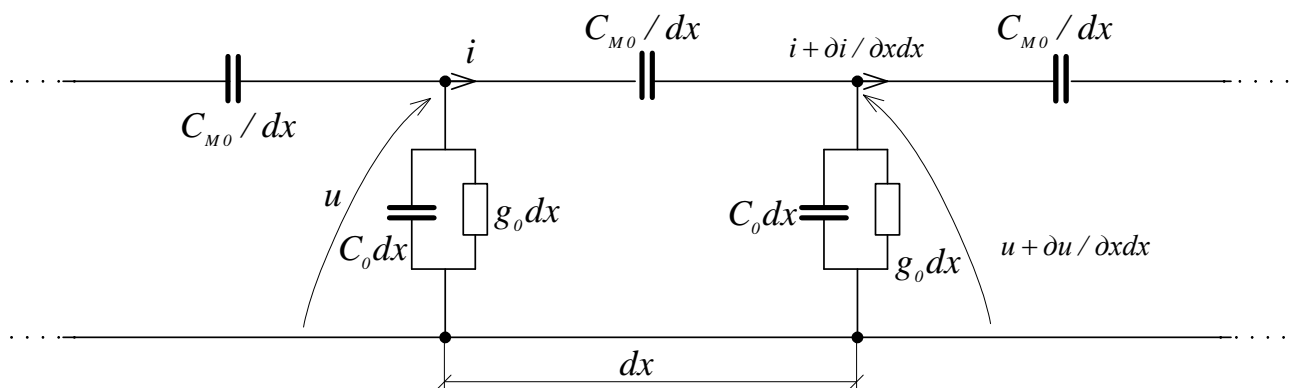


Рис. 4.1. Заступна схема обвитки трансформатора на одиницю довжини під час початкового розподілу напруги

Нехай, на трансформатор діє прямокутна хвиля напруги з амплітудою U_0 . В перший момент часу ($t = 0$) струм в індуктивності обвитки не протікає, тому наявність взаємних індуктивностей не відіграє ніякої ролі. Тоді заступна схема трансформатора для цього моменту часу складається тільки з ємностей C_0 і C_{M0} . Для чисто ємнісної схеми можна записати такі рівняння:

заряд на ємності C_{M0} / dx

$$Q = (C_{M0} / dx) du = C_{M0} (du / dx), \quad (4.1)$$

заряд на ємності $C_0 dx$ рівний приросту заряду Q

$$dQ = C_0 dx u, \text{ чи } dQ / dx = C_0 u. \quad (4.2)$$

З (4.1) і (4.2) впливає диференційне рівняння напруги щодо землі

$$(d^2 u / dx^2) - (C_0 / C_{M0}) u = 0, \quad (4.3)$$

яке має загальний розв'язок

$$u(x) = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}, \quad (4.4)$$

де A, B - постійні інтегрування;

$$\gamma = \sqrt{C_0 / C_{M0}}. \quad (4.5)$$

Постійні інтегрування A і B визначаються з граничних умов, тобто з умов на початку і в кінці обвитки. На початку обвитки ($x=0$) напруга завжди рівна U_0 . Для кінця обвитки (нейтраль трансформатора) граничні умови будуть різними в залежності від режиму роботи нейтралі. Для заземленої нейтралі (тобто при $x=l$, де l - довжина обвитки) напруга на ній буде рівна нулю. Якщо нейтраль ізольована, повздовжній струм в кінці обвитки ($x=l$) має дорівнювати нулю ($du/dx=0$). Використовуючи ці граничні умови отримуємо такі закони розподілу напруги вздовж обвитки трансформатора коли заземлена нейтраль

$$u(x) = U_0 \frac{e^{\gamma l(1-x/l)} - e^{-\gamma l(1-x/l)}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = U_0 \frac{sh(\gamma x(1-x/l))}{sh(\gamma x)} \quad (4.6)$$

ізолювана нейтраль

$$u(x) = U_0 \frac{e^{\gamma l(1-x/l)} + e^{-\gamma l(1-x/l)}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = U_0 \frac{ch(\gamma x(1-x/l))}{ch(\gamma x)} \quad (4.7)$$

З формул наведених вище параметр

$$\gamma l = l \sqrt{\frac{C_0}{C_{M0}}} = \sqrt{\frac{C_0 l}{C_{M0}/l}} = \sqrt{\frac{C_{об}}{C_{M0об}}} \quad (4.8)$$

визначається відношенням сумарної ємності обвитки відносно землі до сумарної повздовжньої ємності.

Розподіл напруги за імпульсу напруги в одношаровій обвитці із заземленим кінцем для різних значень γl наведено на рис. 4.2.

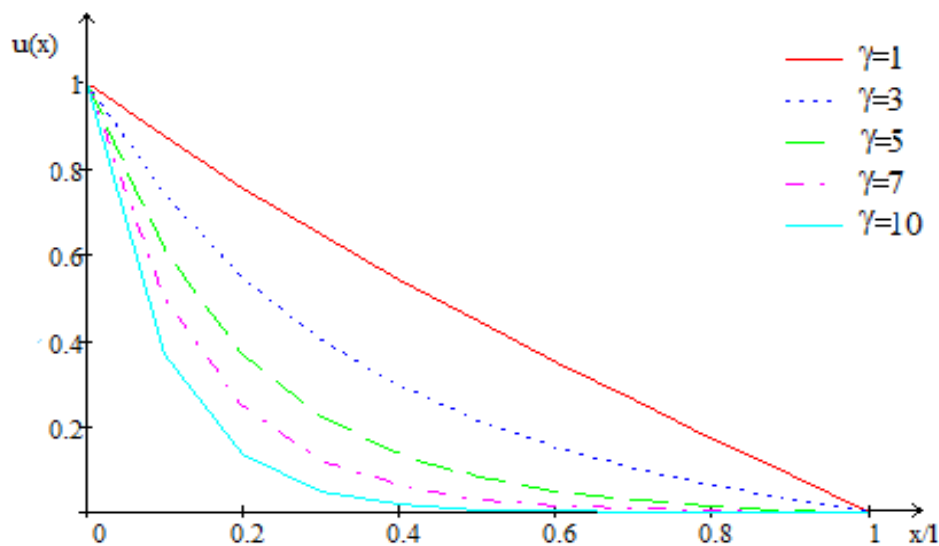


Рис. 4.2. Початковий розподіл напруги за імпульсу в одношаровій обвитці із заземленим кінцем та різних значеннях γl

Розподіл напруги за імпульсу напруги в одношаровій обвитці із ізолюваним кінцем для різних значень γl наведено на рис. 4.3.

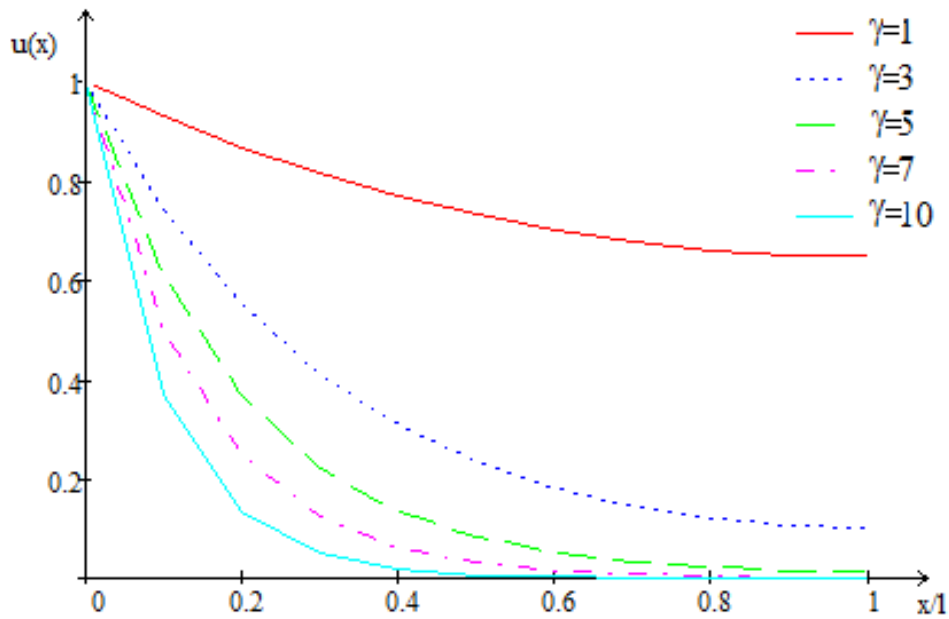


Рис. 4.3. Початковий розподіл напруги за імпульсу в одношаровій обвитці із ізолюваним кінцем та різних значень γl

Для сучасних трансформаторів середнє значення $(\gamma l)_{cp} \approx 10$ і у будь-якому випадку $\gamma l > 10$. Тому в (4.6) і (4.7) завжди $e^{\gamma l} > e^{-\gamma l}$. Для більшої частини обвитки $(x/l) < 0,8$ справедлива також нерівність $e^{\gamma l(1-x/l)} \gg e^{-\gamma l(1-x/l)}$.

Наприклад, для $\gamma l = 10$ і $x/l = 0,8$, $e^{\gamma l(1-x/l)} = e^2 = 7,4$, тоді як $e^{-\gamma l(1-x/l)} = e^{-2} = 0,135$.

Тому для значної частини обвитки розподіл напруги практично однаковий як для ізолюваної, так і для заземленої нейтралі, і приблизно виражається формулою

$$u(x) = U_0 e^{-\frac{\gamma x}{l}}. \quad (4.9)$$

На рис. 4.4 показано початковий розподіл напруги, побудований для випадку $\gamma l = 10$.

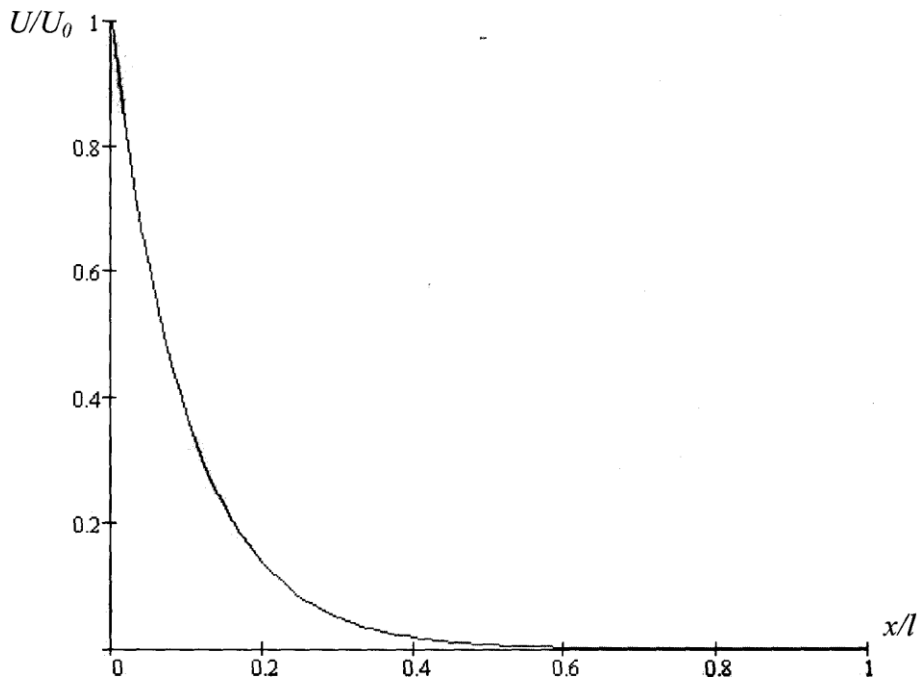


Рис. 4.4. Початковий розподіл напруги в обвитці за $\gamma l = 10$

4.2. Кінцевий розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора

Заступна схема для дослідження кінцевого розподілу напруги вздовж обвитки під час дії прямокутної хвилі напруги з амплітудою U_0 показана на рис. 4.5.

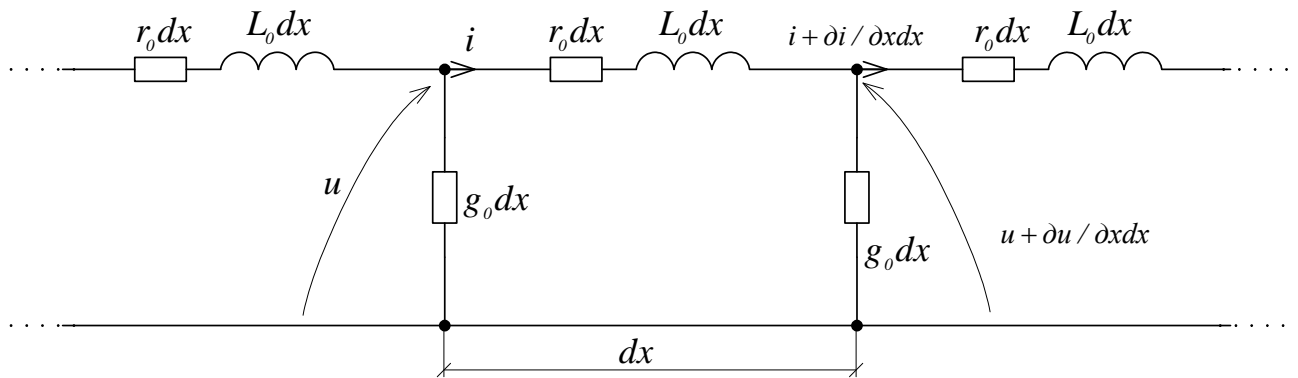


Рис. 4.5. Заступна схема обвитки трансформатора на одиницю довжини під час кінцевого розподілу напруги

Рівняння, яке містить тільки одну невідому функцію $u(x, t)$ наведено в розділі 2 і має вигляд

$$\begin{aligned}
& -L_0 C_{M_0} \partial^4 u_n / (\partial x^2 \partial t^2) - r_0 C_{M_0} \partial^3 u_n / (\partial x^2 \partial t) + L_0 C_0 \partial^2 u_n / \partial t^2 - \\
& - \partial^2 u_n / \partial x^2 + (r_0 C_0 + L_0 g_0) \partial u_n / \partial t + r_0 g_0 u_n = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Диференційне рівняння, яке описує кінцевий розподіл напруги вздовж обвитки можна отримати з рівняння (4.10), якщо згідно правил операційного числення $p = \partial / \partial t = 0$, в результаті чого отримуємо

$$- \partial^2 u_n / \partial x^2 + r_0 g_0 u_n = 0. \tag{4.11}$$

Покажемо вивід рівняння (4.11) з рис. 4.4. Струм спливу запишемо так

$$- \partial i_n / \partial x = g_0 u_n. \tag{4.12}$$

Спад напруги на одиницю довжини витка обвитки

$$- \partial u / \partial x = r_0 i_n + L_0 \partial i_n / \partial t. \tag{4.13}$$

Зведемо рівняння (4.12) і (4.13) до однієї змінної $u(x, t)$. Для цього (4.12) продиференціюємо за t і помножимо на L_0

$$L_0 \partial^2 i_n / (\partial t \partial x) + L_0 g_0 \partial u_n / \partial t = 0. \tag{4.14}$$

Рівняння (4.13) продиференціюємо за x

$$\partial^2 u / \partial x^2 + r_0 \partial i_n / \partial t + L_0 \partial^2 i_n / (\partial t \partial x) = 0. \tag{4.15}$$

Від рівняння (4.14) віднімемо рівняння (4.15)

$$L_0 C_0 \partial^2 u_n / \partial t^2 - \partial^2 u_n / \partial x^2 + L_0 g_0 \partial u_n / \partial t - r_0 \partial i_n / \partial x = 0. \quad (4.16)$$

В рівняння (4.16) підставимо (4.12), в результаті чого отримуємо

$$-\partial^2 u_n / \partial x^2 + L_0 g_0 \partial u_n / \partial t + r_0 g_0 u_n = 0. \quad (4.17)$$

Після закінчення коливного процесу (за $t \rightarrow \infty$) кінцевий розподіл напруги за постійного струму ($L_0 = 0$) описується таким рівнянням

$$-\partial^2 u_n / \partial x^2 + r_0 g_0 u_n = 0, \quad (4.9)$$

яке аналогічне рівнянню (4.3).

На рис. 4.6 і рис. 4.7 показано кінцевий розподіл напруги в одношаровій обвитці із заземленим та ізольованим кінцем обвитки.

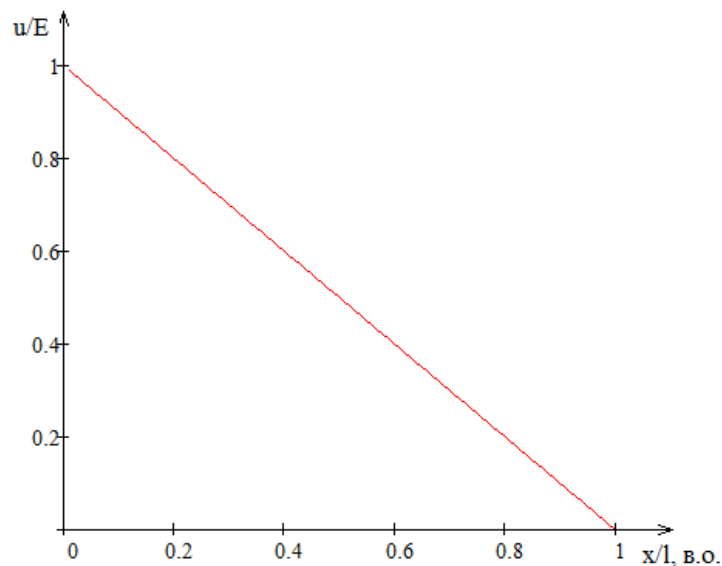


Рис. 4.6. Кінцевий розподіл напруги за імпульсу в одношаровій обвитці із заземленим кінцем

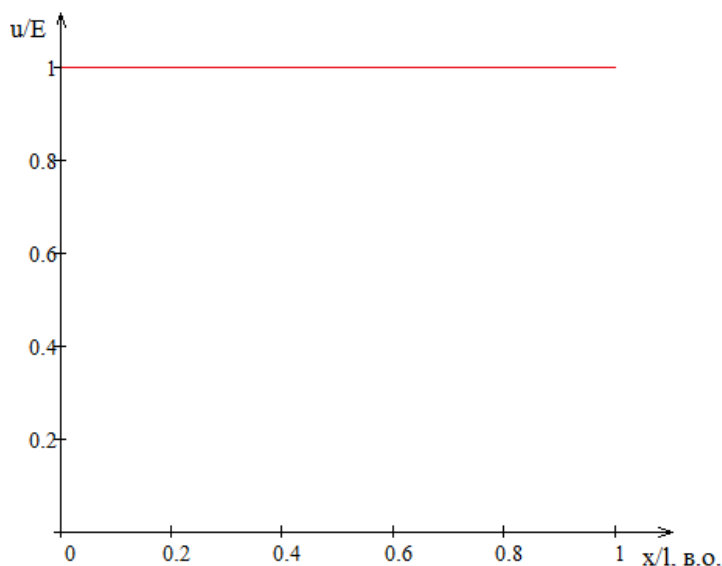


Рис. 4.7. Кінцевий розподіл напруги за імпульсу в одношаровій обвитці із ізолюваним кінцем

4.3. Дослідження вільних коливань в обмотках трансформатора на підставі інтегрального перетворення Лапласа

Вже ранні роботи з дослідження хвильових процесів у обвитках трансформаторів під час грозових імпульсів виявили необхідність подання обвитки у вигляді електричного кола з розподіленими параметрами. Як перше наближення однорідну одношарову обвитку можна подати у вигляді лінії, заступна схема якої показана на рис. 2.1.

Рівняння (2.13) і (2.14), які описують хвильові процеси в обвитках трансформатора без урахування втрат, мають вигляд

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} - C_{Mo} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}; \quad (4.19)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (4.20)$$

Звівши рівняння (4.19) і (4.20) до однієї змінної $u(x, t)$, отримуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_0 C_{M0} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (4.21)$$

Якщо в (4.21) $C_{M0} \rightarrow 0$, то одержимо хвильове рівняння довгої лінії без втрат з параметрами L_0 і C_0 . Тому за малих C_{M0} хвильовий процес у обвитці мало відрізнятиметься від процесу в довгій лінії.

Розв'язання рівняння (4.21) шукатимемо у вигляді комбінації складових вигляду

$$u = U \cos \omega t \sin \alpha x. \quad (4.22)$$

Розв'язання рівняння (4.22) характеризує стоячу хвилю, де α - просторова частота, ω - часова частота. Підставивши (4.22) у рівняння (4.21), отримуємо зв'язок між α і ω , тобто

$$\alpha^2 - L_0 C_0 \omega^2 - L_0 C_{M0} \alpha^2 \omega^2 = 0; \quad (4.23)$$

$$\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{L_0 C_0 \left(1 + \frac{C_{M0}}{C_0} \alpha^2 \right)}}. \quad (4.24)$$

Зі збільшенням α часова частота наближається до границі $\omega_{кр}$, яка є власною частотою коливань витка обвитки з індуктивністю L_0 і ємністю C_{M0} ,

$$\omega_{кр} = \omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_{M0}}}. \quad (4.25)$$

Значення α отримаємо із (4.24)

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{L_0 C_0}{1 - \omega^2 L_0 C_{M0}}} \quad (4.26)$$

Стоячу хвилю (4.22) можна подати у вигляді біжучих хвиль з фазовою швидкістю

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0 (1 + \frac{C_{M0}}{C_0} \alpha^2)}} \quad (4.27)$$

Вираз (4.27) означає, що швидкість біжучої хвилі в обвитці є функцією просторової довжини хвилі; що коротша просторова довжина, то менша її фазова швидкість.

Співвідношення (4.24) та (4.27) наочно показують подібність та відмінність обвитки з довгою лінією. Подібність в тому, що для першої просторової частоти в обвитці та в лінії можна спостерігати аналогічні резонансні криві розподілу напруги. Наприклад, на рис. 4.8 наведено розподіл напруги вздовж обвитки із заземленою нейтраллю, а на рис. 4.9 – поширення напруги вздовж довгої лінії з коротким замиканням в кінці під час живлення від джерела синусоїдної ЕРС.

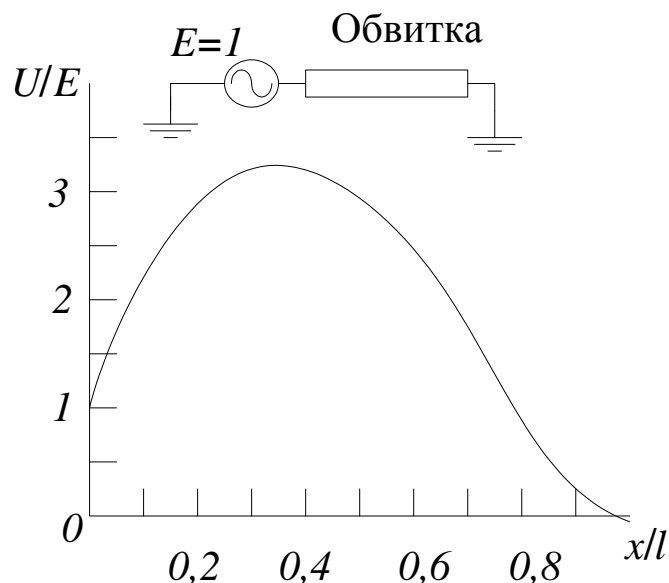


Рис. 4.8. Розподіл напруги вздовж обвитки трансформатора, якщо частота джерела збігається з власною частотою обвитки

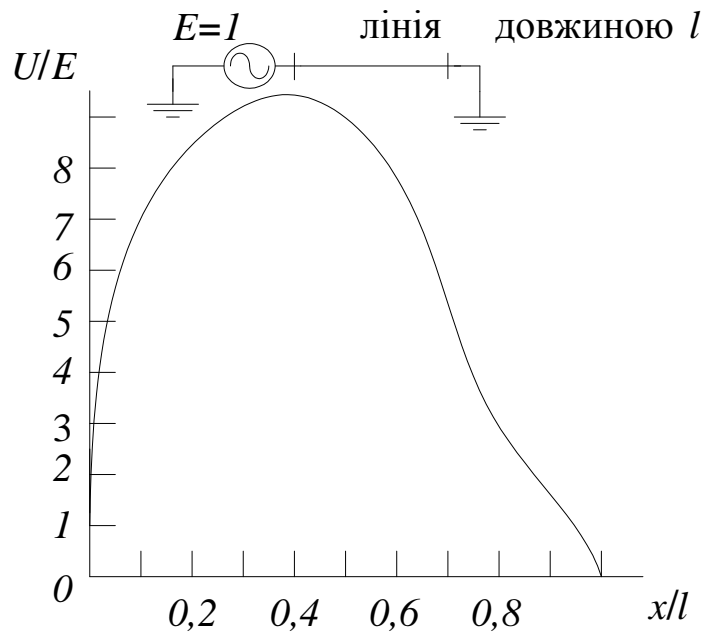


Рис. 4.9. Розподіл напруги в лінії за резонансної частоти

Залежність фазової швидкості в обвитці трансформатора від просторової довжини хвилі призводить до того, що під час поширення імпульсу, у спектрі якого є ряд частот, відбувається його деформація також у схемі без втрат. Відомо, що в лініях без втрат імпульси поширюються без спотворень. В цьому можна вбачати відмінність між обвиткою та довгою лінією.

Наочним прикладом відмінності є так званий початковий розподіл напруги в обвитці. Але, для того, щоб отримати формулу початкового розподілу, необхідно виконати перетворення за Лапласом рівняння (4.21).

Прийнявши нульові початкові умови, в операторному вигляді рівняння (4.21) запишемо так

$$\frac{d^2 u(x, p)}{dx^2} = \chi^2 u(x, p), \quad (4.28)$$

$$\text{де } \chi^2 p = \frac{p^2 L_0 C_0}{p^2 L_0 C_{m0} + 1}.$$

За виглядом вираз (4.28) аналогічний до рівняння довгої лінії, а тому під час

вмикання на постійну ЕРС E/p маємо для обвитки із заземленою нейтраллю:

крайові умови $u(0, p) = E/p$ за $x=0$; $u(l, p) = 0$ за $x=l$, напруга в точці x обвитки

$$u(x, p) = \frac{E \operatorname{sh}(\chi(x-l))}{p \operatorname{ch}(\chi l)}. \quad (4.29)$$

Відповідно у випадку обвитки з ізольованою нейтраллю крайові умови $u(0, p) = E/p$ за $x=0$; $du(x, p)/dx$ за $x=l$ напруга в точці x обвитки

$$u(x, p) = \frac{E \operatorname{ch}(\chi(l-x))}{p \operatorname{ch}(\chi l)}. \quad (4.30)$$

Для початкового розподілу напруги зображення (4.29) та (4.30) необхідно помножити на p і перейти до границі за $p \rightarrow \infty$.

У випадку із заземленою нейтраллю

$$\frac{u(x, 0)}{E} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(\chi(l-x))}{\operatorname{sh}(\chi l)} = \frac{\operatorname{sh}(\gamma(l-x))}{\operatorname{sh}(\gamma l)}. \quad (4.31)$$

У випадку ізольованої нейтралі

$$\frac{u(x, 0)}{E} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch}(\chi(l-x))}{\operatorname{ch}(\chi l)} = \frac{\operatorname{ch}(\gamma(l-x))}{\operatorname{ch}(\gamma l)}, \quad (4.32)$$

$$\text{де } \gamma l = \sqrt{\frac{C_0}{C_{M0}}} l.$$

Для реальних обвиток $\gamma l \approx 10$, тому $\operatorname{sh}(\gamma l)$ та $\operatorname{ch}(\gamma l)$ – доволі великі

значення. Тому з невеликою похибкою як (4.31), так і (4.32) можна записати у вигляді

$$\frac{u(x,0)}{E} \approx e^{-\gamma \frac{x}{l}}. \quad (4.33)$$

Отже, в обвитках трансформатора є початкова напруга, зумовлена наявністю поздовжніх ємностей. Як видно з (4.33), вона встановлюється миттєво (що, звичайно, є ідеалізацією, бо точний аналіз показує, що і початкова напруга встановлюється не миттєво, а упродовж доволі малого часу, приблизно частки мікросекунди. Цей інтервал можна не враховувати, оскільки він на декілька порядків менший за період основної гармоніки обвитки трансформатора). Нагадаємо, що в лінії без втрат під час вмикання на сталу ЕРС $u(x,t) \equiv 0$, якщо $x - vt < 0$, тобто до моменту приходу хвилі в точку x .

Перехідний процес в обвитці має дві складові – усталену та вільну складову напруги. Вільна складова згасає з-за втрат, після чого встановлюється кінцевий розподіл напруги та струму вздовж обвитки. Його можна отримати, прийнявши, що дорівнюють нулю похідні за часом в рівнянні (4.21), тобто

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.34)$$

Розв'язання (4.34) має вигляд $u = Ax + B$.

Беручи до уваги крайові умови, коли нейтраль заземлена $u = E$, за $x = 0$; $u = 0$ за $x = l$ отримаємо

$$u(x, \infty) = E \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (4.35)$$

Коли нейтраль ізольована, крайові умови $u = E$ за $x = 0$; $\frac{du}{dx} = 0$ за $x = l$, в

результаті отримаємо

$$u(x, \infty) = E. \quad (4.36)$$

Якщо підставити (4.35) в (4.20), вимушена складова струму в обвитці із заземленою нейтраллю

$$i = \frac{E}{L_0 l} t, \quad (4.37)$$

тобто струм зростає пропорційно до часу. Такий результат можна отримати, якщо не враховувати втрат. Для обвитки з ізольованою нейтраллю усталений струм $i = 0$.

Вільну складову напруги можна подати у вигляді суми доданків вигляду (4.22), тобто

$$u_{\text{віль}}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\alpha_n x) + b_n \sin(\alpha_n x)) \cos(\omega_n t). \quad (4.38)$$

З граничних умов для обвитки з ізольованою нейтраллю випливає

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0; \\ \alpha_n &= n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Результуюча напруга під час вмикання на сталу ЕРС

$$u(x, t) = E \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos(\omega_n t). \quad (4.40)$$

Для знаходження b_n використаємо співвідношеннями (4.31), та (4.40), яке за $t = 0$ дає початковий розподіл напруги вздовж обвитки із заземленою нейтраллю, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = E \frac{\text{sh}(\gamma(l-x))}{\text{sh}(\gamma l)} - E\left(1 - \frac{x}{l}\right) = f(x). \quad (4.41)$$

Можна зауважити, що b_n є коефіцієнтами розкладу функції $f(x)$ в ряд Фур'є, тобто

$$b_n = \frac{2 \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx}{l}. \quad (4.42)$$

Якщо підставити у (4.42) вираз $f(x)$ і взяти інтеграл, то одержуємо значення амплітуди, тобто

$$b_n = -\frac{2E\gamma^2 l^2}{n\pi((n\pi)^2 + \gamma^2 l^2)}. \quad (4.43)$$

В результаті отримуємо вираз напруги в будь-якій точці обвитки із заземленою нейтраллю, тобто

$$u(x, t) = E\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma l)^2}{(n\pi)^2 + (\gamma l)^2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n} \cos(\omega_n t). \quad (4.44)$$

Розподіл напруги вздовж обвитки з заземленою нейтраллю показано на рис. 4.10.

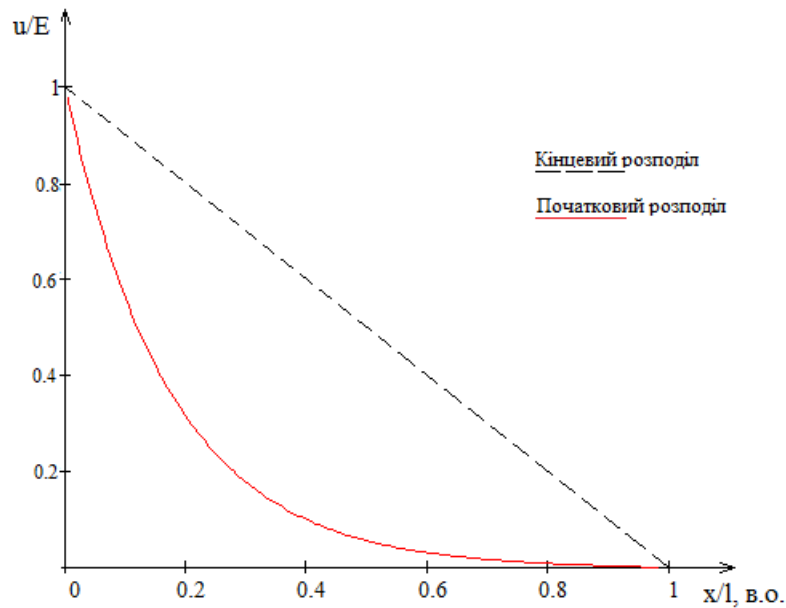


Рис. 4.10. Розподіл напруги вздовж обвитки із заземленою нейтраллю

Використовуючи (4.20), одержуємо вираз для струму

$$i(x, t) = \frac{E}{L_0 l} t + \frac{2E}{\pi \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma l}{\sqrt{(n\pi)^2 + (\gamma l)^2}} \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n} \sin(\omega_n t). \quad (4.45)$$

Наведемо аналогічний аналіз для випадку з ізольованою нейтраллю. Нагадаємо, що усталена напруга під час вмикання на сталу ЕРС E однакова вздовж усієї обвитки і дорівнює E , усталений струм дорівнює нулеві.

Якщо взяти вільні коливання напруги у вигляді (4.38) і врахувати граничні умови $u(0, t) = E$, $i(l, t) = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0; \\ \alpha_n &= \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

і отримаємо

$$u_{\text{вн}}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\alpha_n x) \cos(\omega_n t). \quad (4.47)$$

Звідси одержуємо значення напруги

$$u(x, t) = E + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\alpha_n x) \cos(\omega_n t). \quad (4.48)$$

Якщо в (4.48) підставити $t = 0$, з урахуванням (4.32) отримаємо початковий розподіл напруги, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\alpha_n x) = E \frac{\text{ch}(\gamma(l-x))}{\text{ch}(\gamma l)} - E = \varphi(x). \quad (4.49)$$

З (4.49) b_n є коефіцієнтами розкладу функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є, тобто

$$b_n = \frac{2 \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right) dx}{l}. \quad (4.50)$$

Взявши інтеграл з (4.50) з урахуванням (4.49), запишемо

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi} \frac{(\gamma l)^2}{((2n+1)\pi/2)^2 + (\gamma l)^2}. \quad (4.51)$$

Значення напруги вздовж обвитки з ізолюваною нейтраллю під час вмикання на сталу ЕРС має вигляд

$$u(x, t) = E - \frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma l)^2}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 + (\gamma l)^2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right)}{2n+1} \cos(\omega_n t). \quad (4.52)$$

На рис. 4.11 показано розподіл напруги вздовж обвитки з ізолюваною нейтраллю.

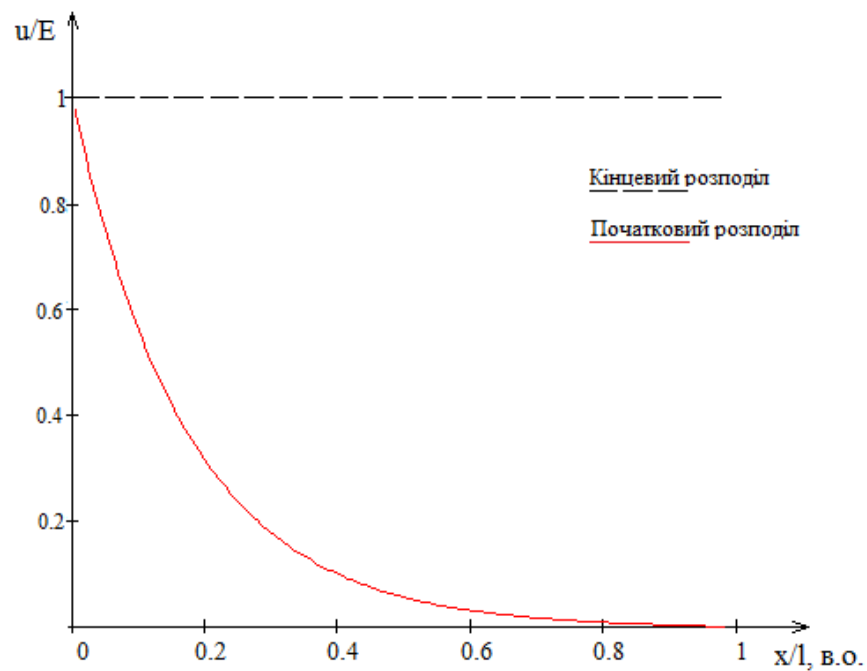


Рис. 4.11. Розподіл напруги вздовж обвитки з ізолюваною нейтраллю

Просторовий розподіл перших трьох гармонік вільних коливань напруги в обвитках із заземленим і з ізолюваним кінцями зображено на рис. 4.12 і рис. 4.13.

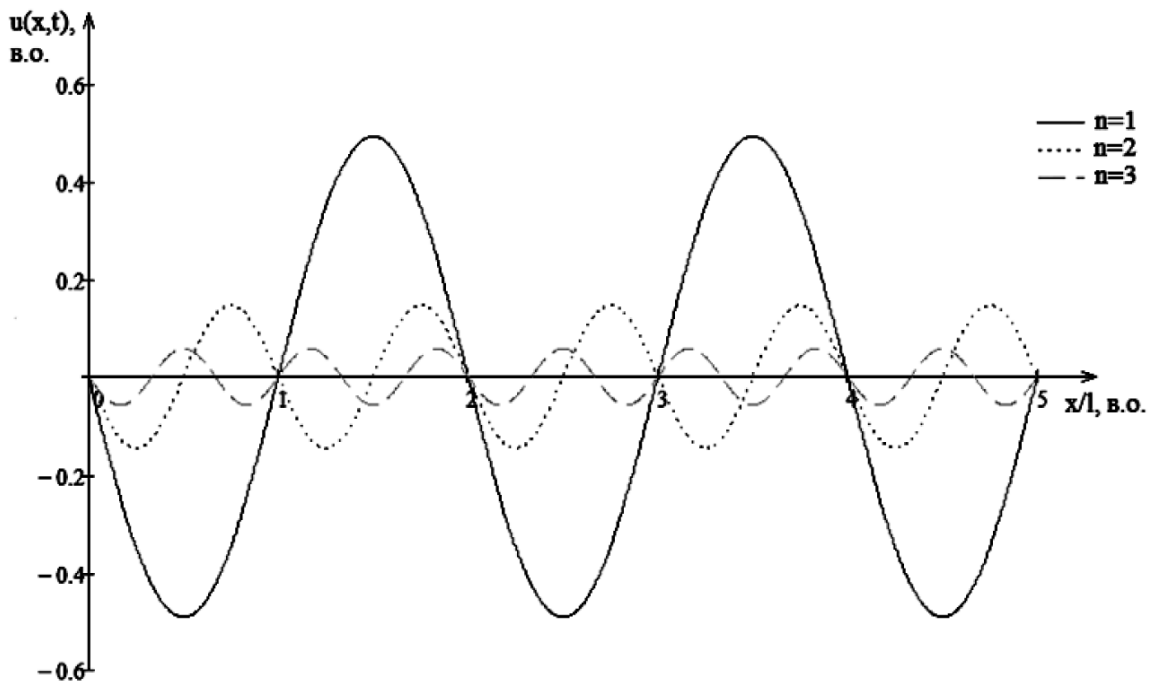


Рис. 4.12. Просторовий розподіл напруги перших трьох гармонік в обвитці із заземленим кінцем у момент часу $t = 0$

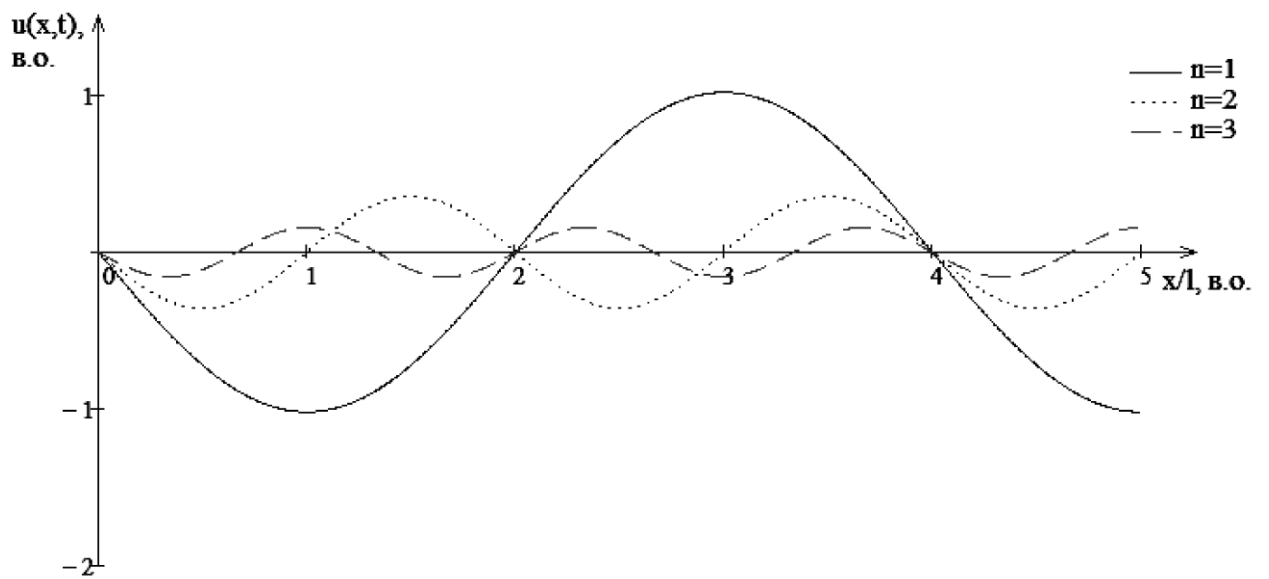


Рис. 4.13. Просторовий розподіл напруги перших трьох гармонік в обвитці із ізолюваним кінцем у момент часу $t = 0$

4.4. Розподіл напруги вздовж обвитки з урахуванням взаємоіндукції

У багатьох практичних випадках функцію взаємоіндукції $M(x, s)$ можна прийняти у вигляді еквівалентної експоненти. В цьому випадку розрахунок хвильових процесів у обвитці можна здійснювати на підставі звичайного диференційного рівняння. Аналізуючи хвильовий процес під час вмикання обвитки із заземленою нейтраллю на прямокутну ЕРС, визначаємо усталений розподіл напруги. Оскільки цей розподіл не залежить від часу і визначається тільки індуктивностями, то в рівнянні (4.19) можна записати, що $\partial u / \partial t = 0$.

Тоді отримуємо

$$\partial i / \partial x = 0 \quad (4.53)$$

чи

$$i(x) = \text{const}; \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial i}{\partial t} \int_0^l M(x, s) ds. \quad (4.55)$$

Отже, в усталеному режимі струм однаковий вздовж усієї довжини обвитки. Інтегруючи рівняння (4.55) з урахуванням $u(0) = E$, одержимо

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x) - E = -\frac{\partial i}{\partial t} \int_0^x dx \int_0^l M(x, s) ds \quad (4.56)$$

чи

$$u(x) = E - \frac{\partial i}{\partial t} \int_0^x dx \int_0^l M(x, s) ds. \quad (4.57)$$

У випадку, коли нейтраль заземлена ($u(l) = 0$), можна записати

$$E = \frac{\partial i}{\partial t} \int_0^l dx \int_0^l M(x, s) ds$$

чи

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{E}{\int_0^l dx \int_0^l M(x, s) ds}. \quad (4.58)$$

Підставивши (4.58) в (4.57), отримуємо усталений розподіл напруги в обвитці із заземленою нейтраллю, тобто

$$u(x) = E - E \frac{\int_0^x dx \int_0^l M(x, s) ds}{\int_0^l dx \int_0^l M(x, s) ds}. \quad (4.59)$$

Використовуючи апроксимацію функції $M(x, s)$ у вигляді експоненти $M(x, s) = M_0 e^{-\gamma|x-s|}$, отримуємо

$$u(x) = E - E \frac{2\gamma x - 1 + e^{-\gamma x} + e^{-\gamma l} - e^{-\gamma(l-x)}}{2\gamma l - 1 + e^{-\gamma l}}. \quad (4.60)$$

У випадку ідеального трансформатора $\gamma = 0$ (сильний магнетний зв'язок) вираз (4.60) спрощується, тобто

$$u(x) = E \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2\gamma x - 1 + e^{-\gamma x} + e^{-\gamma l} - e^{-\gamma(l-x)}}{2\gamma l - 1 + e^{-\gamma l}} \right) = E \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (4.61)$$

Другий граничний випадок $\gamma \rightarrow \infty$ (відсутність магнетного зв'язку) приводить до того самого виразу.

Розглянемо вільну складову хвильового процесу. 3

$\omega^2 = \alpha^2 \frac{\gamma + \alpha^2 / \gamma}{2M_0(C_0 + C_{M0}\alpha^2)}$. впливає, що кожній часовій частоті ω_n відповідає

одне дійсне значення α_{1n} та одне уявне значення α_{2n} . Тому загальний вираз для вільних складових струму можна записати у вигляді

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_{1n} x + B_n \sin \alpha_{1n} x + C_n \cosh \alpha_{2n} x + D_n \sinh \alpha_{2n} x + E_n \sinh \alpha_{2n} x) e^{j\omega_n t}, \quad (4.62)$$

де A_n, B_n, C_n, D_n, E_n – сталі інтегрування, які знаходимо з граничних умов.

Для знаходження сталих інтегрування необхідно скласти систему звичайних рівнянь. Для розв'язання поставленої задачі в [4, 76, 89, 91] використано інтегральне перетворення Лапласа, що дало змогу спростити проміжні викладки. Зважаючи на велику практичну цінність такого підходу, зупинимося на ньому детальніше.

Для нульових початкових умов рівняння обвитки запишемо в операторному вигляді, тобто

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = C_0 p U(x, p) - C_{M0} p \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}; \quad (4.63)$$

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = p M_0 \int_0^l e^{-\gamma|x-s|} I(s, p) ds + r I(x, p). \quad (4.64)$$

У рівняннях (4.63) та (4.64) ємності C_0 та C_{M0} зведені до одиниці обвитки, функцію взаємодукції взято у вигляді $M(x, s) = M_0 e^{-\gamma|x-s|}$, а опір r враховує втрати в обвитці.

Диференціюючи двічі рівняння (4.64), з урахуванням співвідношення (4.49) отримуємо

$$\begin{aligned}
-\frac{d^3U(x, p)}{dx^3} &= pM_0\gamma^2 \int_0^l e^{-\gamma|x-s|} I(s, p) ds - 2M_0p\gamma I(x, p) + r \frac{d^2I(x, p)}{dx^2} = \\
&= -\gamma^2 \frac{dU(x, p)}{dx} - (\gamma^2 r + 2M_0p\gamma) I(x, p) + r \frac{d^2I(x, p)}{dx^2}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Використовуючи рівняння (4.63) для вилучення струму із (4.65), отримуємо рівняння для напруги $u(x, p)$, тобто

$$\begin{aligned}
\frac{1 + rC_{M_0}p}{2M_0p\gamma} \frac{d^4U(x, p)}{dx^4} - \left[\frac{r(C_0 + C_{M_0}\gamma^2)}{2\gamma M_0} + C_{M_0}p + \frac{\gamma}{2pM_0} \right] \frac{d^2U(x, p)}{dx^2} + \\
+ \left(1 + \frac{r\gamma}{2M_0p} \right) C_0pU(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Якщо рівняння (4.66) помножити на $1/p^2$ і виконати граничний перехід відповідно до відомого співвідношення операційного числення, за яким

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pU(x, p) = u(x) \Big|_{t=0} \tag{4.67}$$

то отримуємо рівняння для початкового розподілу напруги, тобто

$$C_{M_0} \frac{d^2u(x)}{dx^2} - C_0u(x) = 0. \tag{4.68}$$

Запишемо характеристичне рівняння виразу (4.66), тобто

$$\begin{aligned}
(1 + rC_{M_0}p)\alpha^4 - [rp(C_0 + C_{M_0}\gamma^2) + 2\gamma C_{M_0}M_0p^2 + \gamma^2]\alpha^2 + \\
+ (2M_0p\gamma + r\gamma^2)C_0 = 0
\end{aligned} \tag{4.69}$$

яке має чотири різні корені, що можна подати у вигляді

$$U(x, p) = \sum_{i=1}^4 A_i(p) e^{\alpha_i x}. \quad (4.70)$$

Рівняння (4.69) є рівнянням другого порядку відносно p , яке визначає власні частоти (часові) обвитки Ω . Запишемо його характеристичне рівняння

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

де $\delta = \frac{r(\gamma^2 - \alpha^2)}{4\gamma M_0}$ – коефіцієнт згасання; $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma^2 - \alpha^2)}{2\gamma M_0(C_0 - C_{M_0}\alpha^2)}}$ – частота

часових коливань за відсутності згасання.

Із чотирьох коренів α два є дійсними і два – уявними. Тому (4.70) можна записати у вигляді

$$U(x, p) = A_1 \sin \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_1 x + A_3 \operatorname{sh} \alpha_2 x + A_4 \operatorname{ch} \alpha_2 x. \quad (4.71)$$

Урахування крайових умов дає змогу визначити сталі $A_i(p)$, ($i = 1 \div 4$) за допомогою системи із чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Тоді

$$A_i(p) = D_i(p) / \Delta(p), \quad (4.72)$$

де $\Delta(p)$ – визначник системи, причому його коренями є просторові частоти α ; $D_i(p)$ – визначник, який ми отримали з $\Delta(p)$ заміною стовпця, який складений з коефіцієнтів при $A_i(p)$, стовпцем, який складений з вільних членів.

Під час одиничної дії (прямокутна хвиля з одиничною амплітудою) розв’язок для розподілу напруги вздовж обвитки запишемо так

$$U(x, p) = \frac{1}{p} \frac{H(x, p)}{\Delta(p)}. \quad (4.73)$$

Застосування теореми розкладу до (4.73) дає змогу знайти для хвильового процесу

$$u(x, t) = \frac{H(x, 0)}{\Delta(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H(x, \omega_k)}{\omega_k \Delta'(\omega_k)} e^{-\delta_k t} \cos \omega_k t; \quad (4.74)$$

$$\Delta'(\omega_k) = |\Delta'(p_k)| = \left| \frac{d\Delta}{dp} \right|_{p=j\omega_k}.$$

Обмеженість методу полягає в тому, що розглядаються тільки однорідні обвитки. Але строгість теорії розрахунку допомагає глибше зрозуміти суть хвильового процесу та вплив різних чинників на нього.

На практиці в багатьох випадках конструкції обвиток трансформаторів мають значні неоднорідності (ступінчата ізоляція, наявність елементів ємнісного захисту від перевантажень, наявність регулювальних витків тощо). Для розрахунку хвильового процесу в таких обвитках використовують матричні методи аналізу [4, 43, 89–91].

В основу цих методів покладено принцип розділення обвиток на достатньо велику кількість елементів (витків, груп витків), з власною індуктивністю та взаємоіндуктивністю, поперечною ємністю та ємністю на сусідні елементи і магнетопровід. Такий метод, за відомих значень індуктивних та ємнісних параметрів елементів, є, по суті, методом розрахунку хвильових процесів у заступних схемах із зосередженими параметрами. Такий підхід дає змогу як завгодно детально відображати особливості зв'язків елементів конкретної обвитки і, як показує практика розрахунків, основною межею застосування методу є кількість елементів, які беруть до уваги під час розрахунку.

Висновки

1. Досліджено початковий та кінцевий розподіл напруги в обмотці трансформатора за різних значень γl .
2. Досліджено просторовий розподіл перших трьох гармонік вільних коливань напруги в обвитках трансформатора.
3. Запропоновано для дослідження вільних коливань в обвитках трансформатора інтегральне перетворення Лапласа, для отримання початкового розподілу напруги в обвитках трансформатора з заземленою та ізольованою нейтраллю, що дозволяє отримати розподіл напруги в будь-якій точці обвитки.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ РОБОТИ

У дисертаційній роботі отримано нове розв'язання актуального науково-прикладного завдання підвищення надійності функціонування силових трансформаторів в електричних мережах енергосистем, що полягає в розробленні математичних моделей для дослідження електромагнітних процесів з урахуванням розподіленості параметрів у високовольтних трансформаторах та аналізі хвильових процесів під час імпульсних перенапруг в електричних мережах для оцінки запасу електричної міцності ізоляції трансформаторів.

Основні наукові і практичні результати полягають у наступному:

1. Проаналізовано характеристики перенапруг, що діють на силові трансформатори в експлуатаційних режимах електричних мереж та здійснено їх класифікацію з огляду на особливості перехідних процесів, які вони викликають в обмотках силових трансформаторів.

2. Розроблено математичну модель трансформатора, що дозволяє досліджувати вплив взаємоіндукції між витками його обмотки, а також електромагнітні параметри магнітопроводу на характер хвильових процесів, що виникають в обмотках силового трансформатора під час дії зовнішніх перенапруг.

3. Запропоновано та обґрунтовано доцільність застосування методу розділення змінних для розв'язання рівнянь математичної моделі трансформатора в часткових похідних, які описують хвильові процеси в обмотках трансформатора.

4. Для отримання початкового та кінцевого розподілу напруги вздовж обмотки трансформатора під час дії на них імпульсних перенапруг запропоновано використовувати інтегральне перетворення Лапласа.

5. На основі розробленої моделі досліджено особливості розподілу перехідних напруг вздовж обмоток трансформатора під час дії на них

характерних імпульсних напруг, що можуть виникати в експлуатаційних режимах електричних мереж високої напруги.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александров Г. Н. Коронный разряд на линиях электропередачи / Александров Г. Н. – М.–Л.: Энергия, 1964. – 227 с.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / Анго А. – М.: Наука, 1964. 772 с.
3. Бабилов М. А. Техника высоких напряжений / Бабилов М. А., Комаром Н. С., Сергеев Ф. С. – М.–Л.: Госэнергоиздат 1947. – 312 с.
4. Базуткин В. В. Расчеты переходных процессов и перенапряжений / Базуткин В. В., Дмоховская Л. Ф. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
5. Бахвалов Ю. А. Расчет импульсных воздействий на главную и продольную изоляцию трансформаторов по многоэлементным схемам замещения / Бахвалов Ю. А., Бунин А. Г., Конторович Л. Н. // Электромеханика. – 1973. – № 12.
6. Белецкий З. М. Расчет импульсных воздействий в обмотках трансформаторов с применением ЭВМ / Белецкий З. М., Бунин А. Г., Горбунов А. Г., Конторович Л. Н. – М.: Информэлектро, 1978. – 79 с.
7. Бунин А. Г. Расчет импульсных перенапряжений в регулировочной обмотке трансформатора с учетом нелинейных элементов защиты / Бунин А. Г., Ренев В. П. // Электротехническая промышленность. – Вып. 1 (69). – 1977. – С. 1–5.
8. Бьюлей Л. В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах / Бьюлей Л. В. – М.: – Л.: ОНТИ, 1938. – 288 с.
9. Геллер Б. Волновые процессы в электрических машинах / Геллер Б., Веверка А. – М. – Л.: ГЭИ, 1960. – 631 с.
10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособ. / Данко П. Е., Попов А. Г. – изд. 2-е.– М.: Высш. школа, 1974. – 464 с.
11. Джуварлы Ч. М. Математическое моделирование волновых процессов в электрических сетях / Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. – Баку: ЭЛМ, 1975. – 114 с.
12. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / Диткин В. А., Кузнецов П. И. – М. – Л.: Госиздат техн.-теорет. лит-ры, 1951. – 255 с.

13. Долгинов А. И. Техника высоких напряжений / Долгинов А. И. – М.: Энергия, 1968. – 464 с.
14. Караев Р. Н. Переходные процессы в линиях большой протяженности / Караев Р. Н. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 139 с.
15. Карасев В. А. К расчету перенапряжений в трансформаторных обмотках / Карасев В. А., Склянин Ф. В. // Электричество. – 1952. – С. 46–50.
16. Кириленко О. В. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник / Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. – Львів, 2010. – 608 с.
17. Кириленко О. В. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник / Кириленко О. В., Сегеда М. С., Буткевич О. Ф., Мазур Т. А. – 2-ге вид. – Львів, 2013. – 608 с.
18. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений / Коллатц Л. – М.: Изд. иностран. литерат., 1953.
19. Круг К. А. Основы электротехники. Т. 2 / Круг К. А. – М.–Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1946. – 634 с.
20. Курант Р. Методы математической физики / Курант Р., Гильберт Д. – М.: Госэнергоиздат, 1951.
21. Левин В. И. Дифференциальные уравнения математической физики / Левин В. И., Гросберг Ю. И. – М.: Гостехиздат, 1951.
22. Лоханин Ф. К. Расчет перенапряжений в катушечных обмотках трансформаторов / Лоханин Ф. К. // Электричество. – 1967. – № 4. – С. 17–22.
23. Межгосударственный стандарт: Электрооборудование и электроустановки переменного тока на напряжение 3 кВ и выше. Общие методы испытаний электрической прочности изоляции. ГОСТ 1560.2-97. – К.: Госстандарт Украины, 1999. – 32 с.
24. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / Нейман Л. Р., Демирчан К. С. – М.: Энергоиздат, 1981. – 536 с.

25. Нетушил А. В. Основы электротехники / Нетушил А. В., Страхов С. В. – М.–Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1955. – 216 с.
26. Нормы испытания электрооборудования / под ред. С. Г. Королева. – М.: Атомиздат, 1978. – 304 с.
27. Перхач В. С. Математическая модель многопроводной линии электропередач в фазных координатах / Перхач В. С., Лысяк Г. М., Кинаш Б. М. // Теоретическая электротехника. – 1979. – Вып. 27. – С. 77–85.
28. Перхач В. С. Теоретична електротехніка: підручник / Перхач В. С. – К.: Вища шк., 1992. – 439 с.
29. Перхач В.С. Квазіеталонна математична та цифрова модель автотрансформатора як елемента електропересильні надвисокої напруги / Перхач В.С., Шелепетень Т.М., Горячко В.І. // Вісн. держ. ун-ту “Львівська політехніка” Електроенергетичні та електромеханічні системи, 1999, Вип. 372, С. 154–158.
30. Рэлей (Дж. В. Стрэтт). Теория звука. Т. 1. Гостехиздат, 1955.
31. Рюденберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Рюденберг Р. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 714 с.
32. Самородов Г. И. Оценка приближенных методов учета потерь при решении уравнений длинной линии / Самородов Г. И. // Вопросы надежности и экономичности работы дальних электропередач и промышленных систем: Сб. НЭТИ, 1967.
33. Сапожников А. В. Уровни изоляции электрооборудования высокого напряжения. Нормы и методы испытания электрической прочности / Сапожников А. В. – М.: Энергия, 1969. – 296с.
34. Сегеда М. С. Дослідження перенапруг в обмотках трансформатора за дії на них імпульсних перенапруг / Сегеда М. С., Мазур Т. А. // XIII Міжнародна науково-технічна конференція “Проблеми сучасної електротехніки – 2014”, Київ, 2–6 червня 2014 р.
35. Сегеда М. С. Математичне моделювання в електроенергетиці: навч. посіб. / Сегеда М. С. – Львів:, 2002. – 300 с.

36. Сегеда М. С. Математичне моделювання вільних коливань в обвитці трансформатора за різних форм імпульсу напруги / Сегеда М. С., Мазур Т. А. // 3-тя Міжнародна науково-технічна конференція “Інтелектуальні енергетичні системи(ESS13)”, Мукачеве, 10–14 червня 2013 р.

37. Сегеда М. С. Математичне моделювання вільних коливань в обвитці трансформатора за різних форм імпульсу напруги / Сегеда М. С., Мазур Т. А. // Праці Інституту електродинаміки. – 2013. Спец. вип. – С. 148–154.

38. Сегеда М. С. Математичне моделювання вільних коливань напруги в обвитках трансформаторів з врахуванням взаємоіндукції між витками під час імпульсних перенапруг / Сегеда М. С., Черемних Є. В., Мазур Т. А. // Науковий вісник Національного гірничого університету. – 2013. – № 1. – С. 68–76.

39. Сегеда М. С. Математичне моделювання розподілу напруги вздовж обвитки трансформатора під час імпульсних перенапруг / Сегеда М. С., Черемних Є. В., Хімюк І. В., Мазур Т. А. Курулишин О. М // 4 міжнародна науково-технічна конференція “Інтелектуальні енергетичні системи (ESS15)”, Київ 9 -12 червня 2015 р.

40. Сегеда М. С. Математичне моделювання розподілу напруги вздовж обвитки трансформатора під час імпульсних перенапруг / Сегеда М. С., Черемних Є. В., Хімюк І. В., Мазур Т. А. Курулишин О. М // Техн. електродинаміка. – 2015. – № 6. – С. 8–11.

41. Сегеда М. С. Математичне моделювання електромагнетних процесів у трансформаторах з урахуванням розподіленості параметрів: монографія / М. С. Сегеда, Є. В. Черемних, Т. А. Мазур, О. М. Курилишин. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 148 с.

42. Сегеда М. С. Математичне моделювання хвильових та електромагнетних процесів в електроенергетичних системах: монографія / Сегеда М. С. – Львів, 2002. – 152 с.

43. Сегеда М. С. Математичне моделювання хвильових процесів у трансформаторах / Сегеда М. С. // Техн. електродинаміка. – 2002. – № 3. – С. 47–49.

44. Сиротинский Л. И. Техника высоких напряжений / Сиротинский Л. И. – Ч. 3. Вып. 1. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 368 с.
45. Стайн Г. М. Исследование начального распределения импульсного напряжения в концентрических обмотках трансформаторов / Стайн Г. М. // IEEE. – 1964. – С. 4 – 16.
46. Трансформаторы, аппараты и изоляторы высокого напряжения. Нормы и методы испытаний электрической прочности изоляции. ГОСТ 1560-60. – М.: Изд-во стандартов, 1963.
47. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / Фарлоу С. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
48. Френкел А. Теория переменного тока / Френкел А. – М.–Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1933. – 474 с.
49. Хаяси С. Волны в длинных линиях / Хаяси С. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 343 с.
50. Шелковников Ф. А. Сборник упражнений по операционному исчислению / Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1968. – 256 с.
51. Щербачов О. В. Моделирование переменных параметров коронирующих высоковольтных линий / Щербачов О. В. // Труды ЛПИ. – 1954. – № 1. – С. 117–132.
52. Antonín Předota. Fast transient overvoltage in transformer winding / Antonín Předota, Zdeňka Benešová, West Bohemia, 2003.
53. Anvar S. Voltage distribution along reactor winding under very fast transients / Anvar S., Ejaz S. // Chalmers 2008.
54. Benmouyal G., Lee T. Securing sequencecurrent differential elements; SEL Technical Papers; SEL 2004.
55. Bewley L. W. Traveling waves on transmission systems / Bewley L. W. – New York, 1951.
56. Biricik, S.; Ozerdem, O.C. "Experimental study and comparative analysis of transformer harmonic behaviour under linear and nonlinear load conditions," Environment

and Electrical Engineering (EEEIC), 2011 10th International Conference on , vol., no., pp.1-4, 8-11 May 2011.

57. Bjerkan E. High frequency modeling of power transformers, Trondheim, May 2005.

58. Bjørn Gustavsen Study of Transformer Resonant Overvoltages Caused by Cable-Transformer High-Frequency Interaction // IEEE Transactions on power delivery, Vol. 25, No. 2, April 2010.

59. Carson I. R. Wave propagation in overhead wires with return / Carson I. R. // BSTJ. – 1926. – № 4. – P. 201–215.

60. Cheng, C.L.; Chern, S.C.; Yeh, J.C.; Huang, Y.T.; "Effect of Non-Sinusoidal Excitation to Inrush Current for Transformer," Industrial Electronics and Applications, 2006 1ST IEEE Conference on , vol., no., pp.1-6, 24-26 May 2006.

61. Cornelia A. Bulucea, Doru A. Nicola, Nikos E. Mastorakis, Daniel C. Cismaru Modelling of Electrical Transformers in Dynamic Regimes, Proceedings of the 9th WSEAS/IASME International Conference on Electric power systems, high voltages, electric machines.

62. D. C. Jiles and D. L. Atherton, "Theory of ferromagnetic hysteresis," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol. 61, pp. 48–60, 1986.

63. D. C. Jiles, J. B. Thoeke, and M. K. Devine, "Numerical determination of hysteresis parameters for modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, no. 1, pp. 27–34, Jan. 1992.

64. Daniel Mayer. Surge Phenomena on Power Transmission Line / Daniel Mayer, Bohuš Ulrych // International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering". – Zakopane, 2004.

65. Dejan S. Dynamic thermal modelling of power transformers, Espoo 2005.

66. Electrical Transient Interaction between Transformers and the Power System // Cigre. – April 2014.

67. Experimental studies for surge voltage response of a power transformer model winding provided with metal oxide varistors, arpn / Mohd. Zahed Ahmed Ansari, G. R. Gurumurthy and J. Amarnath // Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 5, No. 11, November 2010.
68. Galloway P. Calculation of electrical parameters for short long polyphase transmission lines / Galloway P. H., Sc. Shroocks W. B. and Wedepohl L. M., Ph. D. B. Sc. (Eng). // Proc. IEE, Vol. 111, No. 12 December, 1964.
69. Gilberto Gonzalez-A, Dunia Nuñez-P Electrical and Magnetic Modelling of a Power Transformer: A Bond Graph Approach, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering Vol:6, No:9, 2012.
70. H. W. Dommel, "Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks," IEEE Trans. on PAS, vol. PAS 88, no. 4, p. 388, Apr. 1969.
71. Herbert E. Transformer SPICE Model, February 14, 2008.
72. IEEE Std C57.110-1998, IEEE Recommended Practice for Establishing Transformer Capability when Supplying Non sinusoidal Load Currents.
73. J. Biela, D. Bortis and J.W. Kolar Modeling of Pulse Transformers with Parallel- and NonParallel-Plate Windings for Power Modulators, Power Electronics Laboratory, ETH Zurich Physikstrasse 3 CH-8092, Zurich, Switzerland.
74. J. R. Lucas, "Representation of magnetization curves over a wide region using non-integer power series," IJEEE, vol. 25, no. 4, p. 335, 1988.
75. J. R. Lucas, P. G. McLaren, and R. P. Jayasinghe, "Improved simulation models for current and voltage transformers in relay studies," IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 7, no. 1, p. 152, Jan. 1992.
76. Jovan Č. Mikulović1. The Numerical Method of Inverse Laplace Transform for Calculation of Overvoltages in Power Transformers and Test Results / Jovan Č. Mikulović1, Tomislav B. Šekara // Serbian journal of electrical engineering Vol. 11, No. 2, June 2014, 243–256.

77. Lj. A. Kojovic, M. Kezunovic, and S. L. Nilsson, "Computer simulation of a ferroresonance suppression circuit for digital modeling of coupling capacitor voltage transformers," in ISMM International Conference, Orlando, FL, 1992.
78. M. J. Wiseman, "CVT transient behavior during shunt capacitor switching," Ontario Hydro Study no. W401, Apr. 15, 1993.
79. M. Kezunovic, C. W. Fromen, S. L. Nilson, L. Kojovic, V. Skendzic, and D. R. Sevcik, "Digital models of coupling capacitor voltage transformers for protective relay transient studies," IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 7, no. 4, p. 1927, Oct. 1992.
80. M. Kezunovic, L. J. Kojovic, A. Abur, C. W. Fromen, D. R. Sevcik, and F. Phillips, "Experimental evaluation of EMTP-based current transformer models for protective relay transient study," IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 9, no. 1, pp. 405–412, Jan. 1994.
81. Massan I. Memoire sur Eintegration graphique des equations aux derivies / Massan I. – Chent, 1899.
82. Mislav Trbušić. Surge wave distribution over the power transformer continuous disc winding / Mislav Trbušić, Marko Čepin // Elektrotehniški vestnik 78(3): 106–111, 2011.
83. Nicola D.A., Bulucea C.A., Electrotechnics, Electrical Equipment and Machines, SITECH Publishing House, Craiova, Romania, 2005.
84. P. G. McLaren, J. R. Lucas, and W. W. L. Keerthipala, "A digital simulation model for a ccvt in relay studies," in IPEC '93, Singapore, Mar. 1993.
85. Procházka M.; Modelování pístrojového transformátoru proudu v programu EMTP – ATP; In: Electro- and Information Engineering 2003: Netiny; ZU 2005 [3].
86. R. Garret, W. C. Kotheimer, and S. E. Zocholl, "Computer simulation of current transformers and relays," in 41st Annual Conference for Protective Relay Engineers, Apr. 18–20, 1988, Texas A&M University.
87. R. Radvan, B. Dobrucky, M. Frivaldsky, P. Rafajdus Modelling and Design of HF 200 kHz Transformers for Hard- and SoftSwitching Application, ISSN 1392 – 1215 2011. No. 4(110).

88. Rahimpour E., Barati M., and Schefer M., "An investigation of parameters affecting the temperature rise in windings with zigzag cooling flow path," *Applied Thermal Engineering*, vol. 27, no. 11-12, pp. 1923-1930, 2007.
89. Seheda M. Analysis of overvoltages in transformer windings with considering of distributed parameters / Seheda M., Mazur T., Chutora I. // 12 International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering." – CPEE'2011, Kostryna. – 2011. – P 47.
90. Seheda M. Mathematical modeling of free voltage oscillations in the transformer windings during pulse overvoltages / Seheda M., Cheremnykh Y., Mazur T. // VII Konferencja naukowo-techniczna. "Sieci elektroenergetyczne w przemyśle I energetyce". – SIECI 2012, 19–21 September, Szklarska Poreba, Poland. – 2012.
91. Seheda M. Modeling of electromagnetic processes in transformers with considering of distributed parameters / Seheda M., Mazur T. // VI Konferencja naukowo-techniczna. "Sieci elektroenergetyczne w przemyśle I energetyce" – SIECI 2008, Szklarska Poreba. – 2008. – P. 415–424.
92. Seheda M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage two-winding transformers / Seheda M., Mazur T., Kurylyshyn O. // 16 International Conference "Computational Problems of Electrical Engineering", September 2–5, 2015, Lviv, Ukraine.
93. Seheda M. Mathematical model for investigation of wave processes in high-voltage double winding transformers / Seheda M., Mazur T., Kurylyshyn O. // 16 International Conference "Computational Problems of Electrical Engineering", September 2–5, 2015, Lviv, Ukraine. – P. 165–167.
94. Seheda M. Simulation of interference process of vibration charge in the electromagnetic contour / M. Seheda, T. Mazur, P. Kosobutskyu, G. Bakalo. // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка", "Електроенергетичні та електромеханічні системи". – 2007. – Вип. 596. – С. 52 – 57.

95. Shamsodin Taheri Ahmad Gholami, Issouf Fofana, Hamed Taheri Modeling and simulation of transformer loading capability and hot spot temperature under harmonic conditions, *Electric Power Systems Research*, Volume 86, May 2012, Pages 68–75.
96. Simulations and experimental tests on the distribution of over-voltage within transformer windings | Silviu Gabriel Bontidean, Mihai Bădic, Mihai Iordache, Neculai Galan // *U.P.B. Sci. Bull., Series C*, Vol. 77, Iss. 3, 2015.
97. Sung Don Cho Parameter estimation for transformer modeling, Michigan Technological University, December 2002.
98. V. D. Dhote , P. G. Asutkar , Subroto Dutt *International Journal of Engineering Research and Applications*, (IJERA) ISSN: 2248-9622 Vol. 3, Issue 4, Jul-Aug 2013, pp.2498-2502.
99. Vivek Pahwa And Dr. K. S. Sandhu, “ Modelling and simulation of single phase transformer including the main flux saturation effect,” XXXII National systems conference, NSC 2008, December 17-19, 2008.
100. W. L. A. Neves and H. W. Dommel, “On modeling iron core nonlinearities,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 8, no. 2, pp. 417–423, May 1993.
101. Witulski A. F. Introduction to modeling of transformers and coupled inductors Dept. of Electr. & Comput. Eng., Arizona Univ., Tucson, AZ, USA *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. :10 ,Issue: 3, June 2002.
102. Zhang J. and Li X., "Coolant flow distribution and pressure loss in ONAN transformer windings. Part I: Theory and model development," *Power Delivery*, *IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 1, pp. 186-193, 2004.

ДОДАТКИ



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор
Національного університету
“Львівська політехніка”

О.Р. Давидчак

15.11 2016 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи Мазур Т.А. на тему “Хвильові процеси в обмотках трансформаторів під час дії на них імпульсних перенапруг” в навчальному процесі кафедри “Електричні станції”

Комісія у складі:

Маляр А.В. - доктор техн. наук, професор, заступник директора ІЕСК;

Василів К.М. - доктор техн. наук, професор кафедри “Електричні станції”;

Варецький Ю.О. - доктор техн. наук, професор кафедри “Електричні станції”;

підтверджує цим актом те, що в навчальному процесі кафедри “Електричні станції” використовуються результати дисертаційного дослідження Мазур Тетяни Андріївної на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук впроваджені у навчальний процес і застосовуються в навчальних дисциплінах “Математичні моделі техніки та електрофізики високих напруг” та “Математичні моделі електротехнічних систем та їх елементів” (для студентів спеціальностей: - 8.05070101 “Електричні станції”; - 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”), а також використовуються при написанні кваліфікаційних робіт магістрів. Зокрема, у навчальному процесі:

- запропоновано підхід щодо формування математичної моделі високовольтних трансформаторів з урахуванням струмів впливу між витками, що дозволяє досліджувати хвильові процеси в обмотках трансформаторів під час імпульсних перенапруг в електричних мережах.

- розроблено математичну модель високовольтного трансформатора, яка враховує розподіленість параметрів, що дозволяє здійснювати розрахунок розподілу напруги вздовж обмотки трансформаторів та їх тривалість під час імпульсних перенапруг в електричних мережах.

- запропоновано метод розділення змінних для розв’язання інтегрально-диференціальних рівнянь, які описують хвильові процеси в обмотках трансформаторів, що дозволяє досліджувати процеси в обмотках з частотою, що відповідає всій обмотці так і з власною частотою.

Заступник директор ІЕСК,
професор, докт. техн. наук

А.В. Маляр

Професор кафедри “Електричні станції”,
професор, доктор техн. наук

К.М. Василів

Професор кафедри “Електричні станції”,
професор, доктор техн. наук

Ю. О. Варецький

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Проректор
з наукової роботи
Національного університету
“Львівська політехніка”
Н.І. Чухрай
“25” 11 2016 р.



“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Технічний директор
ПАТ «Закарпаттяобленерго»
О.О. Білак
“25” 11 2016 р.



АКТ

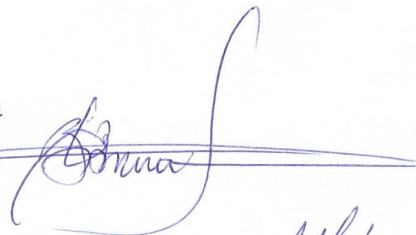
*про впровадження наукових результатів кандидатської дисертаційної роботи
Мазур Т.А. на тему “Хвильові процеси в обмотках трансформаторів під час дії на них
імпульсних перенапруг” в експлуатацію ПАТ «Закарпаттяобленерго»*

Даним актом підтверджуємо впровадження в ПАТ «Закарпаттяобленерго» розроблених на кафедрі “Електричні станції” Національного університету “Львівська політехніка” Мазур Т.А. математичної та цифрової моделі для дослідження внутрішніх перенапруг в електричних мережах ПАТ «Закарпаттяобленерго».

В рамках вище вказаних розробок за безпосередньою участю Мазур Т.А. досліджено внутрішні перенапруги в електричних мережах ПАТ «Закарпаттяобленерго», зокрема запропоновано математичну модель трансформатора з врахуванням розподіленості параметрів.

Вище вказана науково-дослідна робота і впровадження її результатів в ПАТ «Закарпаттяобленерго» виконувалась на підставі договору від 01.07.2007 р. № 0173 між ПАТ «Закарпаттяобленерго» та Національним університетом “Львівська політехніка”.

Заступник технічного директора
ПАТ «Закарпаттяобленерго»



В. Дзіковський

Начальник служби ізоляції та захисту
від перенапруг ПАТ «Закарпаттяобленерго»



А. Мороко

Начальник служби підстанцій 35 кВ і вище
ПАТ «Закарпаттяобленерго»



С. Шурухін



Д1. Методи розв'язання рівнянь, які описують хвильові процеси в обвитках трансформаторів

Д1.1. Загальні засади про рівняння в часткових похідних

Рівняння у часткових похідних – це рівняння, в яких невідома функція входить разом із своїми частковими похідними. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, у яких невідома функція залежить тільки від однієї змінної, у рівняннях із частковими похідними невідома функція залежить від двох і більше змінних, наприклад, струм уздовж лінії $i(x, t)$ залежить від координати x й часу t .

Більшість фізичних явищ у таких галузях, як електрика, магнетизм, механіка, оптика, можуть бути описані тільки рівняннями у часткових похідних. Якщо за їх допомогою досліджуються періодичні процеси, такі рівняння зводять до звичайних диференціальних рівнянь [1, 2, 3, 4, 7].

Для розв'язання рівнянь у часткових похідних використовують такі методи:

– метод розділення змінних (рівняння в часткових похідних із n незалежними змінними зводиться до n звичайних диференціальних рівнянь у разі повного розділення змінних, і часткового розділення змінних, одне рівняння з частковими похідними зводиться до декількох рівнянь із частковими похідними з меншою кількістю незалежних змінних);

– метод інтегральних змінних (рівняння з частковими похідними із n незалежними змінними зводиться до рівнянь із частковими похідними з $(n-1)$ незалежними змінними; відповідно рівняння з двома незалежними змінними можна звести до звичайного диференціального рівняння у разі одновимірного інтегрального перетворення; для k -вимірного інтегрального перетворення рівняння у часткових похідних із n незалежними змінними зводиться до рівнянь у часткових похідних із $n-k$ незалежними змінними);

– метод перетворення координат (вихідне рівняння з частковими похідними зводиться до звичайних диференціальних рівнянь чи до іншого простого рівняння у часткових похідних за допомогою відповідного перетворення координат);

– перетворення незалежної змінної (вихідне рівняння з частковими похідними перетворюється на рівняння з частковими похідними з іншою невідомою функцією, яке розв'язується простіше ніж вихідне);

– числові методи (вихідне рівняння з частковими похідними зводиться до системи різницевих рівнянь, яку розв'язують ітераційними методами. Часто це єдиний підхід до розв'язання рівнянь із частковими похідними. Крім різницевих методів розв'язання рівнянь із частковими похідними, є й інші числові методи, наприклад, метод, що ґрунтується на апроксимації поліноміальними поверхнями (апроксимація сплайнами);

– метод теорії збурень (вихідна нелінійна задача зводиться до послідовностей лінійних задач, які апроксимують нелінійну задачу);

– метод функції Гріна (початкові та граничні умови замінюються системою джерел і задача розв'язується для кожного джерела. Повне розв'язування задачі одержують, додаючи розв'язки для елементарних джерел);

– метод інтегральних рівнянь (рівняння з частковими похідними зводиться до інтегрального рівняння);

– варіаційні методи (замість рівнянь із частковими похідними розв'язується деяка задача мінімізації. Функція, яка зводить деякий вираз до мінімуму, водночас є розв'язком вихідного рівняння з частковими похідними);

– метод розкладання за власними функціями (рівняння з частковими похідними розв'язується у вигляді ряду за власними функціями. Ці власні функції знаходять як розв'язок так званої задачі за власними значеннями, яка відповідає вихідній задачі для рівнянь із частковими похідними).

Рівняння з частковими похідними класифікують за певними ознаками. Класифікація важлива тому, що для кожного класу задач розроблено відповідні методи їх розв'язування [17].

Надалі рівняння із частковими похідними класифікувати за такими ознаками.

1. Порядок рівняння. Порядком рівняння називають найбільший порядок часткових похідних, які входять у нього, наприклад:

$$\partial u / \partial t = \partial u / \partial x \text{ – рівняння першого порядку;}$$

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 \text{ – рівняння другого порядку;}$$

$$\partial u / \partial t = u \partial^3 u / \partial x^3 + \sin x \text{ – рівняння третього порядку.}$$

2. Кількість змінних. Кількість змінних – це кількість незалежних змінних, тобто

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 \text{ – рівняння з двома незалежними змінними - } t \text{ та } x;$$

$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial r^2 + 1 / r \partial u / \partial r + 1 / r^2 \partial^2 u / \partial \theta^2$ – рівняння з трьома незалежними змінними – t , r і θ .

3. Лінійність. Рівняння з частковими похідними є лінійними чи нелінійними. У лінійних рівняннях залежна змінна та всі її часткові похідні є лінійними, тобто немає їхнього добутку, піднесення до степеня тощо. Лінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$A \partial^2 u / \partial x^2 + B \partial^2 u / (\partial x \partial y) + C \partial^2 u / \partial y^2 + D \partial u / \partial x + E \partial u / \partial y + F u = G(x, y), \quad (Д1.1)$$

де A, B, C, D, E, F, G – сталі чи задані функції незалежних змінних x і y .

Для прикладу:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = e^{-t} \partial^2 u / \partial x^2 + \sin t \text{ – лінійне рівняння;}$$

$$u \partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial t = 0 \text{ – нелінійне рівняння;}$$

$$\partial^2 u / \partial x^2 + y \partial^2 u / \partial y^2 = 0 \text{ – лінійне рівняння;}$$

$$x \partial u / \partial x + y \partial u / \partial y + u^2 = 0 \text{ – нелінійне рівняння.}$$

4. Однорідність. Рівняння (Д1.1) називається однорідним, якщо права частина $G(x, y)$ дорівнює нулю для всіх x і y . Якщо $G(x, y)$ не дорівнює тотожно нулеві, то рівняння називається неоднорідним.

5. Види коефіцієнтів. Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E і F рівняння (Д1.1) стали, то рівняння називається рівнянням зі сталими коефіцієнтами, в іншому разі – рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Основні типи лінійних рівнянь. Усі лінійні рівняння з частковими похідними другого порядку (Д1.1) поділяються на такі типи: параболічні; гіперболічні; еліптичні.

1. Рівняння параболічного типу описують процеси теплопровідності та дифузії і визначаються умовою $B^2 - 4AC = 0$.

2. Рівняння гіперболічного типу описують хвильові процеси та коливні системи і визначаються умовою $B^2 - 4AC > 0$.

3. Рівняння еліптичного типу описують усталені процеси і визначаються умовою $B^2 - 4AC < 0$.

Для прикладу:

$$- \partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2, \quad B^2 - 4AC = 0 \text{ – параболічне;}$$

$$- \partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2, \quad B^2 - 4AC = 4 \text{ – гіперболічне;}$$

$$- \partial^2 u / (\partial x \partial y) = 0, \quad B^2 - 4AC = 1 \text{ – гіперболічне;}$$

$$- \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0, \quad B^2 - 4AC = -4 \text{ – еліптичне;}$$

- $y \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0, \quad B^2 - 4AC = -4y$ – еліптичне, якщо $y > 0$,
 параболічне, якщо $y = 0$, гіперболічне, якщо $y < 0$.

Якщо коефіцієнти змінні, тип рівняння може змінюватися від точки до точки. У загальному випадку $B^2 - 4AC$ є функцією незалежних змінних. Відповідно основний тип рівняння може змінюватися в області визначення рівняння, хоч це не обов'язково. У рівнянні (Д1.1) незалежними змінними є x і y . У багатьох задачах однією зі змінних є час і рівняння (Д1.1) можна записати через x і t .

**Д1.2. Розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних
на підставі формули Д'Аламбера**

У загальному випадку хвильове рівняння можна записати так

$$\partial^2 u / \partial t^2 = v^2 \partial^2 u / \partial x^2, \quad (Д1.2)$$

де v – швидкість поширення хвилі; $-\infty < x < \infty$; $0 < t < \infty$.

Для прикладу розглянемо рівняння в часткових похідних, які описують хвильові процеси в довгих лініях, тобто

$$\begin{aligned} -\partial u / \partial x &= r_0 i + L_0 \partial i / \partial t; \\ -\partial i / \partial x &= g_0 u + C_0 \partial u / \partial t. \end{aligned} \quad (Д1.3)$$

З наведеної системи рівнянь можна отримати окремі рівняння, що містять тільки одну невідому координату $i(x, t)$ чи $u(x, t)$

$$\partial^2 u / \partial x^2 = C_0 L_0 \partial^2 u / \partial t^2 + (g_0 L_0 - C_0 r_0) \partial u / \partial t + g_0 r_0 u; \quad (Д1.4)$$

$$\partial^2 i / \partial x^2 = C_0 L_0 \partial^2 i / \partial t^2 + (g_0 L_0 + C_0 r_0) \partial i / \partial t + g_0 r_0 i. \quad (Д1.5)$$

Зводимо рівняння (Д1.5) методом підставлення до рівняння Д'Аламбера, усунувши з нього першу похідну за часом. Зведення здійснюємо за допомогою підставлення

$$\vec{u} = e^{-\alpha t} \vec{U},$$

(Д1.6)

де α - деякий коефіцієнт; \vec{U} - вектор-функція, яка залежить від відстані x і часу t .

Похідні від рівняння (Д1.6) мають такий вигляд

$$\partial^2 \vec{u} / \partial x^2 = e^{-\alpha t} \partial^2 \vec{U} / \partial x^2; \quad (Д1.7)$$

$$\partial \vec{u} / \partial t = e^{-\alpha t} (\partial \vec{U} / \partial t - \alpha \vec{U}); \quad (Д1.8)$$

$$\partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = e^{-\alpha t} (\partial^2 \vec{U} / \partial t^2 - 2\alpha \partial \vec{U} / \partial t + \alpha^2 \vec{U}). \quad (Д1.9)$$

Значення похідних (Д1.7) і (Д1.9) підставляємо в рівняння (Д1.4) і, скоротивши на $e^{-\alpha t}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \partial^2 \vec{U} / \partial x^2 = L_0 C_\partial \partial^2 \vec{U} / \partial t^2 + (C_\partial r_0 + g_0 L_0 - \\ - 2\alpha L_0 C_\partial) \partial \vec{U} / \partial t + (r_0 g_0 - \alpha(r_0 C_\partial + g_0 L_0) + \alpha^2 L_0 C_\partial) \vec{U}. \end{aligned} \quad (Д1.10)$$

Коефіцієнт біля першої похідної у рівнянні (Д1.10) дорівнюватиме нулеві, коли

$$\alpha = (r_0 L_0^{-1} + g_0 C_\partial^{-1}) / 2. \quad (Д1.11)$$

Звідси коефіцієнт біля змінної \vec{U} з урахуванням (3.114) буде таким

$$\begin{aligned} r_0 g_0 - \alpha(r_0 C_\partial + g_0 L_0) + \alpha^2 L_0 C_\partial = -L_0 C_\partial (r_0 L_0^{-1} - g_0 C_\partial^{-1})^2 / 4 = \\ = -L_0 C_\partial \delta^2, \end{aligned} \quad (Д1.12)$$

$$\text{де } \delta = (r_0 L_0^{-1} - g_0 C_\partial^{-1}) / 2.$$

З урахуванням (Д1.11) і (Д1.12) рівняння (Д1.10) набуде вигляду

$$\partial^2 \vec{U} / \partial x^2 = L_0 C_\partial (\partial^2 \vec{U} / \partial t^2 - \delta^2 \vec{U}). \quad (Д1.13)$$

Розглянемо випадок, коли лінія не має спотворення, тобто виконується умова $r_0 g_0^{-1} = L_0 C_\partial^{-1}$. За такого підходу $\delta = 0$ і дістанемо такі рівняння

$$\partial^2 \vec{U} / \partial x^2 = 1/v^2 (\partial^2 \vec{U} / \partial t^2); \quad (Д1.14)$$

$$\partial^2 \vec{U} / \partial t^2 = v^2 \partial^2 \vec{U} / \partial x^2, \quad (Д1.15)$$

де $v = 1 / \sqrt{C_\partial L_0}$ - швидкість поширення хвилі.

Параметри x і t знаходяться в області $\{x \in (-\infty, +\infty); t \in (0, +\infty)\}$.

Розв'язки рівняння (Д1.13) задовольняють такі початкові умови

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{\phi}(x); \quad (Д1.16)$$

$$\partial \vec{u}(x, 0) / \partial t = \vec{\psi}(x), \quad (Д1.17)$$

де $\vec{\phi}(x)$ і $\vec{\psi}(x)$ - задані функції.

Рівняння (Д1.13) еквівалентне рівнянню коливання струни. Його розв'язання запропонував Д'Аламбер у вигляді

$$\vec{U} = \vec{f}_1(x - vt) + \vec{f}_2(x + vt), \quad (Д1.18)$$

де $\vec{f}_1(x - vt)$, $\vec{f}_2(x + vt)$ – вектори-функції, які відтворюють дві хвилі незмінної форми, що переміщуються зі швидкістю $v = const$.

Підставляючи (Д1.18) у рівняння (Д1.6), отримуємо

$$\vec{u}(x, t) = e^{-\alpha t} (\vec{f}_1(x - vt) + \vec{f}_2(x + vt)). \quad (Д1.19)$$

Тепер підставимо (Д1.11) у рівняння (Д1.3), одержуємо

$$-\partial \vec{i} / \partial x = e^{-\alpha t} g_0 (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) - \alpha C_\partial e^{-\alpha t} (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + e^{-\alpha t} C_\partial (-v \partial \vec{f}_1 / \partial x + v \partial \vec{f}_2 / \partial x).$$

(Д1.20)

Проінтегрувавши рівняння (Д1.20), отримаємо

$$\vec{i}(x, t) = \sqrt{C_\partial L_0^{-1}} e^{-\alpha t} (\vec{f}_1(x - vt) - \vec{f}_2(x + vt)). \quad (Д1.21)$$

Вектор-функція $\vec{f}_1(x - vt)$ переміщається в напрямі додатних x (додатна хвиля), оскільки ця функція через деякий проміжок часу на відстані $dx = v dt$ від попередньої точки має те саме значення, що і в момент часу dt у точці x . Функція $\vec{f}_2(x + vt)$ переміщується у напрямі від'ємних x , тобто це відбита хвиля.

Підставимо в рівняння (Д1.21) $t = 0$ і візьмемо похідну за x

$$\partial \vec{i}(x, 0) / \partial x = \sqrt{C_\partial L_0^{-1}} (\partial \vec{f}_1(x) / \partial x - \partial \vec{f}_2(x) / \partial x). \quad (Д1.22)$$

Якщо в рівнянні (3.106) прийняти, що $g_0 \approx 0$, то

$$-\partial \vec{i} / \partial x = C_\partial \partial \vec{u} / \partial t. \quad (Д1.23)$$

Підставимо рівняння (Д1.22) у (Д1.23)

$$\sqrt{C_\partial L_0^{-1}} (\partial \vec{f}_2(x) / \partial x - \partial \vec{f}_1(x) / \partial x) = C_\partial \partial \vec{u}(x, 0) / \partial t; \quad (Д1.24)$$

$$1 / \sqrt{C_\partial L_0} (\partial \vec{f}_2(x) / \partial x - \partial \vec{f}_1(x) / \partial x) = \partial \vec{u}(x, 0) / \partial t. \quad (Д1.25)$$

Урахувавши умову (Д1.17), отримаємо таке рівняння

$$\partial \vec{f}_2(x) / \partial x - \partial \vec{f}_1(x) / \partial x = \frac{1}{v} \vec{\psi}(x). \quad (Д1.26)$$

Проінтегруємо рівняння (Д1.26)

$$\vec{f}_2(x) - \vec{f}_1(x) = \frac{1}{v} \int_{x_0}^x \vec{\psi}(x) dx, \quad (Д1.27)$$

де x_0 - фіксована точка.

Підставивши в рівняння (Д1.19) $t = 0$ і врахувавши умову (Д1.16) отримаємо таке рівняння

$$\vec{f}_1(x) + \vec{f}_2(x) = \vec{\phi}(x). \quad (Д1.28)$$

Розв'язавши рівняння (Д1.27) і (Д1.28), одержимо вирази функцій $\vec{f}_1(x)$ і $\vec{f}_2(x)$, тобто

$$\vec{f}_2(x) = \frac{1}{2} \vec{\phi}(x) + \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x \vec{\psi}(x) dx; \quad (Д1.29)$$

$$\vec{f}_1(x) = \frac{1}{2} \vec{\phi}(x) - \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x \vec{\psi}(x) dx = \frac{1}{2} \vec{\phi}(x) - \frac{1}{2v} \int_x^{x_0} \vec{\psi}(x) dx. \quad (Д1.30)$$

Підставивши знайдені функції (Д1.29) і (Д1.30) у рівняння (Д1.19), отримуємо формулу Д'Аламбера

$$\begin{aligned} \vec{u}(x,t) &= \frac{1}{2} e^{-\alpha t} (\vec{\phi}(x-vt) + \vec{\phi}(x+vt)) + \frac{1}{2v} e^{-\alpha t} \int_{x_0}^{x+vt} \vec{\psi}(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2v} e^{-\alpha t} \int_{x-vt}^{x_0} \vec{\psi}(x) dx = \frac{1}{2} e^{-\alpha t} (\vec{\phi}(x-vt) + \vec{\phi}(x+vt)) + \frac{1}{2v} e^{-\alpha t} \int_{x-vt}^{x+vt} \vec{\psi}(x) dx. \end{aligned} \quad (Д1.31)$$

Д1.3. Розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних методом розділення змінних

Метод розділення змінних використовується, якщо рівняння лінійні та однорідні (не обов'язково зі сталими коефіцієнтами), а також якщо граничні умови задані у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) &= 0; \\ \gamma \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \delta u(1, t) &= 0, \end{aligned} \tag{Д1.32}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі.

Граничні умови (Д1.32) називають лінійними однорідними граничними умовами.

Для вивчення методу розділення змінних розглянемо рівняння у часткових похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{Д1.33}$$

де $0 < x < 1; 0 < t < \infty$.

Рівняння (3.136) задовольняє граничні умови

$$\begin{cases} u(0, t) = 0; \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \tag{Д1.34}$$

якщо $0 < t < \infty$, і початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{Д1.35}$$

для $0 \leq x \leq 1$.

Для простого рівняння з частковими похідними розділення змінних - це пошук розв'язання у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{Д1.36}$$

де $X(x)$ – функція, яка залежить тільки від змінної x ; $T(t)$ – функція, яка залежить тільки від змінної t .

Загальна ідея полягає в тому, щоб знайти нескінченну кількість таких розв'язків рівняння із частковими похідними, які задовольняли б граничні умови. Розв'язання знаходимо у вигляді лінійної комбінації фундаментальних розв'язків, тобто у вигляді суми

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t), \tag{Д1.37}$$

яка задовольняє початкові умови.

Оскільки сума (Д1.37) задовольняє рівняння та граничні й початкові умови, вона є розв'язанням вихідної задачі.

Цей алгоритм покажемо на прикладі розв'язання рівняння (Д1.33) з граничними (Д1.34) та початковими умовами (Д1.35).

Шукатимемо розв'язання (Д1.33) у вигляді (Д1.36). Для цього (Д1.36) підставимо у рівняння (Д1.33), і отримаємо

$$X(x)dT(t)/dt = \alpha^2 d^2 X(x)/dx^2 T(t). \quad (Д1.38)$$

Розділимо рівняння (Д1.38) на $\alpha^2 X(x)T(t)$, у результаті чого одержуємо

$$(dT(t)/dt)/(\alpha^2 T(t)) = (d^2 X(x)/dx^2)/X(x), \quad (Д1.39)$$

тобто в рівнянні (Д1.39) змінні розділені, ліва частина залежить тільки від t , права від x .

Оскільки x і t не залежать одне від одного, то кожна з цих частин повинна бути сталою. Позначимо цю сталу через k , тобто

$$(dT(t)/dt)/(\alpha^2 T(t)) = (d^2 X(x)/dx^2)/X(x) = k \quad (Д1.40)$$

чи

$$dT(t)/dt - k\alpha^2 T(t) = 0; \quad (Д1.41)$$

$$d^2 X(x)/dx^2 - kX(x) = 0. \quad (Д1.42)$$

Рівняння (Д1.41) і (Д1.42) є звичайними диференціальними рівняннями, які можна розв'язати. Добуток відповідних розв'язків задовольнятиме вихідне рівняння (Д1.33).

Зауважимо, що стала k повинна бути від'ємною, в іншому разі рівняння (Д1.42) з граничними умовами $X(0) = X(1) = 0$ мало би тривіальне розв'язання $X(x) \equiv 0$. Інакше кажучи, функція $T(t)$ повинна прямувати до нуля за $t \rightarrow \infty$. Враховуючи вищесказане, введемо позначення

$$k = -\lambda^2, \quad (Д1.43)$$

де $\lambda \neq 0$ (тільки в такому випадку $\lambda < 0$).

З урахуванням (Д1.43) рівняння (Д1.41) та (Д1.42) запишемо так

$$dT(t)/dt + \lambda^2 \alpha^2 T(t) = 0; \quad (Д1.44)$$

$$d^2 X(x)/dx^2 + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (Д1.45)$$

Загальне розв'язання рівнянь (Д1.44) та (Д1.45) відповідно таке

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t}; \quad (Д1.46)$$

$$X(x) = D \sin(\lambda x) + F \cos(\lambda x), \quad (Д1.47)$$

де C, D, F – довільні сталі.

Відповідно до (Д1.40) розв'язання рівняння (Д1.33) має вигляд

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t} (D \sin(\lambda x) + F \cos(\lambda x)) = \\ &= e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} (A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)), \end{aligned} \quad (Д1.48)$$

де A і B – довільні сталі.

У результаті ми отримали нескінченний набір функцій вигляду (Д1.48), які задовольняють вихідне рівняння (Д1.33).

Наше завдання - вибрати з цієї кількості розв'язань ті, які задовольняють граничні умови

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0; \\ u(1, t) &= 0, \end{aligned} \quad (Д1.49)$$

тобто

$$u(0, t) = Be^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0; \quad (Д1.50)$$

$$u(1, t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda = 0 \Rightarrow \sin \lambda = 0. \quad (Д1.51)$$

Друга гранична умова накладає обмеження на можливі значення константи λ . Вона повинна бути коренем рівняння

$$\sin \lambda = 0, \quad (Д1.52)$$

де $\lambda_n = \pm n\pi, n = 1, 2, \dots, \infty$.

Зазначимо, що може виконуватися умова (Д1.51), коли $A = 0$, але в такому разі розв'язання (Д1.48) дорівнюватиме нулю.

У результаті ми отримали набір функцій

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi\alpha), \quad (Д1.53)$$

де $n = 1, 2, \dots$

Кожна з функцій (Д1.53) задовольняє рівняння (Д1.33) і граничні умови. У результаті ми одержали функції, на підставі яких побудуємо розв'язання нашої задачі (рис. Д1.1). Її розв'язок є сумою цих функцій

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi\alpha). \quad (Д1.54)$$

Конкретний вигляд суми залежатиме від початкових умов, тобто необхідні такі коефіцієнти A_n , щоб функція задовольняла початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (Д1.55)$$

З урахуванням (Д1.55) рівняння (Д1.54) запишемо так

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x). \quad (Д1.56)$$

Рівняння (Д1.56) відповідає розкладанню функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є. Щоб знайти коефіцієнти розкладання A_n , скористаємося властивістю системи функцій $\sin(n\pi x)$ ($i = 1, 2, \dots$), які є ортогональними. Дві функції лінійного простору ортогональні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. У нашому випадку ці функції задовольняють умови

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1/2, & m = n, \end{cases} \quad (Д1.57)$$

де m – будь-яке ціле число.

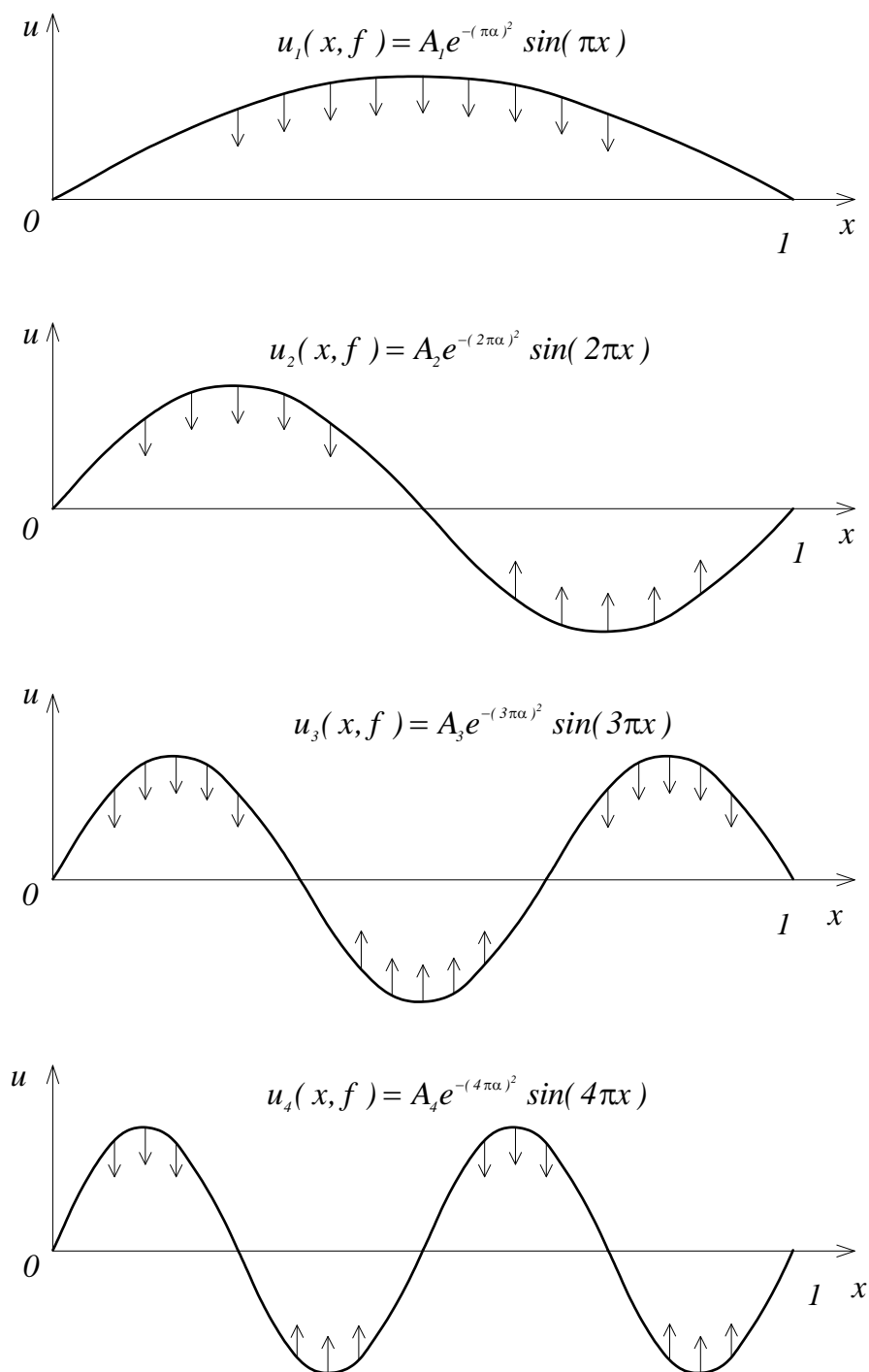


Рис. Д1.1. Фундаментальні розв'язання

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$$

Властивість ортогональності системи функцій ілюструється рис. Д1.2, де відтворено деякі з них.

Щоб знайти коефіцієнти ряду Фур'є (Д1.53), множимо його ліву та праву частини на $\sin(m\pi x)$ й проінтегруємо від нуля до одиниці. У результаті отримаємо

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = A_m / 2. \quad (Д1.58)$$

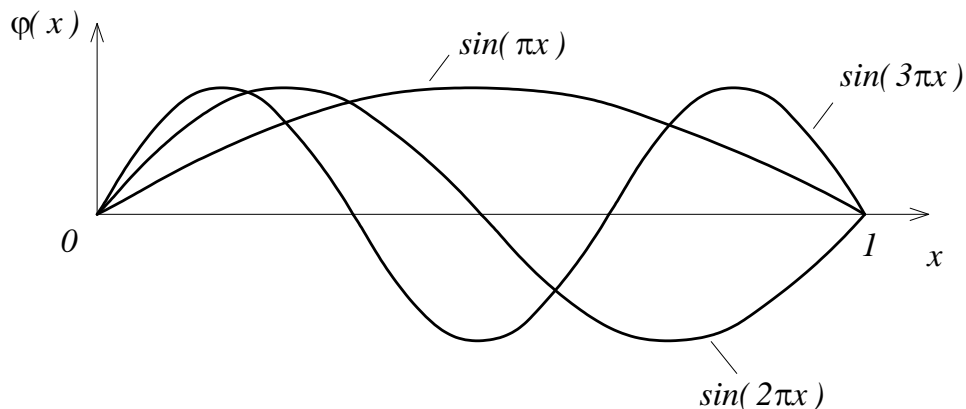


Рис. Д1.2. Послідовність ортогональних функцій

Усі інші складові перетворюються на нуль, оскільки вони ортогональні. З (Д1.58) знаходимо

$$A_m = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin(m\pi x) dx. \quad (Д1.59)$$

Отже, ми отримали розв'язання (Д1.33), яке записуємо у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x), \quad (Д1.60)$$

$$\text{де } A_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Кожна складова (Д1.60) є функцією x і t . Зауважимо, що складові з великими номерами, якщо $t > 0$, дуже малі. Це впливає із множника $e^{-(n\pi\alpha)^2 t}$. Відповідно після великого проміжку часу повне розв'язання збігається з першою складовою, що є загасаючою напівхвилею синусоїди, що загасає з часом.

Д1.4. Розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних числовими методами

Розв'язуючи диференційні рівняння у часткових похідних числовими методами, часткові похідні замінюють їх скінченно-різницеvими апроксимаціями, тобто рівняння в часткових похідних зводяться до системи скінченних алгебричних рівнянь. Розв'язання алгебричної системи рівнянь ітераційними методами дає змогу отримати наближене розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних.

Для виведення формул методу скінченних різниць скористаємося розкладанням у ряд Тейлора функції $f(x)$, тобто

$$f(x+h) = f(x) + d f(x)/dx h + 1/(2!) d^2 f(x)/dx^2 h^2 + \dots \quad (Д1.61)$$

Якщо усікти цей ряд у лінійній частині

$$f(x+h) \cong f(x) + d f(x)/dx h, \quad (Д1.62)$$

знайдемо значення похідної

$$d f(x)/dx \cong (f(x+h) - f(x))/h. \quad (Д1.63)$$

Права частина формули (Д1.63) називається правою різницевою похідною, яка апроксимує першу похідну в точці x .

Замінивши у формулі (Д1.62) h на $-h$, отримаємо ліву різницеву похідну

$$f(x-h) \cong f(x) - d f(x)/dx h \quad (Д1.64)$$

чи

$$d f(x)/dx \cong (f(x) - f(x-h))/h. \quad (Д1.65)$$

Віднявши від (3.166) формулу (3.164), отримаємо центральну різницеву похідну

$$d f(x)/dx \cong 1/(2h)(f(x+h) - f(x-h)). \quad (Д1.66)$$

Аналогічно можна одержати центральну різницеву похідну для апроксимації другої похідної, відсікаючи за другою похідною ряд Тейлора (Д1.61), тобто

$$d^2 f(x)/dx^2 \cong 1/h^2 (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)). \quad (Д1.67)$$

Поняття скінченно-різницевої апроксимації можна поширити і на часткові похідні. Для цього розкладемо у ряд Тейлора функцію двох змінних

$$\begin{aligned}
 u(x+h, y) &= u(x, y) + \partial u(x, y) / \partial x h + \partial^2 u(x, y) / \partial x^2 h^2 / (2!) + \dots; \\
 u(x-h, y) &= u(x, y) - \partial u(x, y) / \partial x h + \partial^2 u(x, y) / \partial x^2 h^2 / (2!) - \dots.
 \end{aligned}
 \tag{Д1.68}$$

З (Д1.68) отримуємо формули для апроксимації часткових похідних

$$\partial u(x, y) / dx \cong (u(x+h, y) - u(x, y)) / h; \tag{Д1.69}$$

$$\partial^2 u(x, y) / dx^2 \cong (u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)) / h^2; \tag{Д1.70}$$

$$\partial u(x, y) / dy \cong (u(x, y+k) - u(x, y)) / k; \tag{Д1.71}$$

$$\partial^2 u(x, y) / dy^2 \cong (u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)) / k^2, \tag{Д1.72}$$

де h – крок за віссю x ; k – крок за віссю y .

У наведених формулах (Д1.69) - (Д1.72) апроксимувати часткові похідні можна також центральними та лівими різницевиими похідними.

Розглянемо для прикладу розв'язання задачі Діріхле методом скінченних різниць, тобто

$$\partial^2 u(x, y) / dx^2 + \partial^2 u(x, y) / dy^2 = 0; \tag{Д1.73}$$

за $0 < x < 1$; $0 < y < 1$.

Граничні умови $u(x, y) = 0$ на верхній та бічній сторонах квадрата і $u(x, 0) = \sin(x\pi)$, якщо $0 \leq x \leq 1$; $y = 0$.

Побудуємо на площині (x, y) сітку (рис. Д1.3) і введемо такі позначення

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_{i,j}; \\
u(x, y+k) &= u_{i+1,j}; \\
u(x, y-k) &= u_{i-1,j}; \\
u(x-h, y) &= u_{i,j-1}; \\
u(x+h, y) &= u_{i,j+1};
\end{aligned} \tag{Д1.74}$$

$$\begin{aligned}
\partial u(x, y) / \partial x &= (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) / (2h); \\
\partial u(x, y) / \partial y &= (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) / (2k); \\
\partial^2 u(x, y) / \partial x^2 &= (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) / h^2; \\
\partial^2 u(x, y) / \partial y^2 &= (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / k^2.
\end{aligned}$$

Для розв'язання задачі Діріхле використовуються центральні різницеві похідні.

Основна ідея розв'язання задачі Діріхле ґрунтується на заміні часткових похідних у рівнянні Лапласа, тобто

$$\partial^2 u(x, y) / dx^2 + \partial^2 u(x, y) / dy^2 = 0, \tag{Д1.75}$$

їх скінченно-різницеви́ми апроксимаціями. У результаті отримуємо таке різницеве рівняння Лапласа

$$\Delta u = (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) / h^2 + (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / k^2 = 0. \tag{Д1.76}$$

Якщо $y = k$, різницеве рівняння Лапласа (Д1.76) запишеться так

$$(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = 0. \tag{Д1.77}$$

З рівняння (Д1.77) знаходимо $u_{i,j}$, тобто

$$u_{i,j} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) / 4. \tag{Д1.78}$$

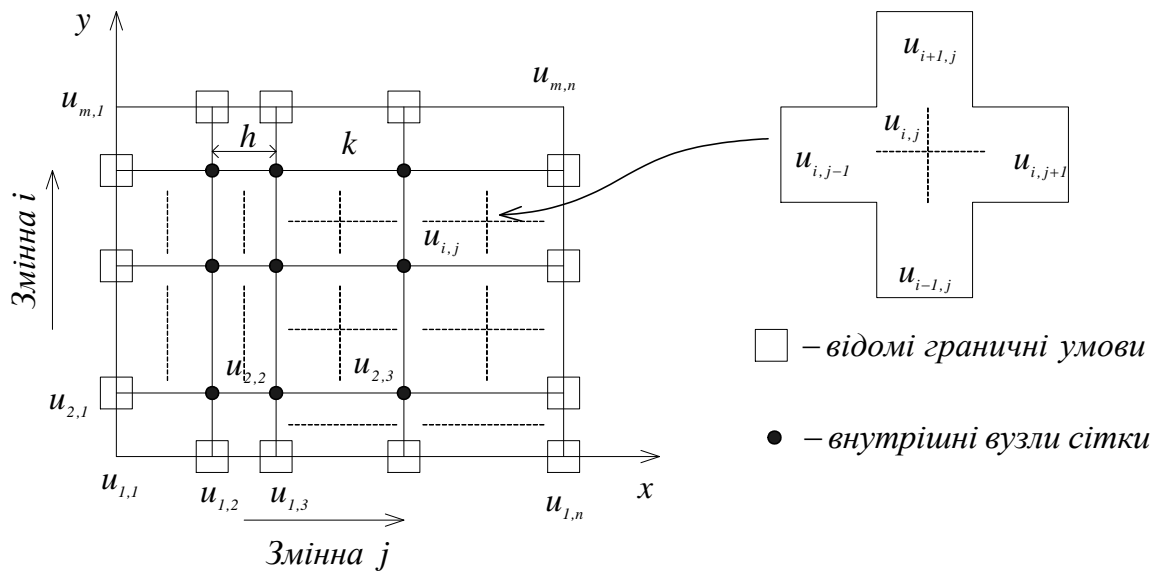


Рис. Д1.3. Сітка для задачі Діріхле всередині квадрата

Зазначимо, що всі значення $u_{i,j}$ беруться для внутрішніх вузлів. Згідно з (Д1.78) $u_{i,j}$ апроксимується середнім значенням розв'язання за чотирма сусідніми точками.

За попереднього підходу розв'язання одержуємо одночасно в усіх внутрішніх вузлах. Різницеві методи можна також використовувати для задач, які залежать від часу. Основна ідея полягає у тому, що за відомим розв'язанням у початковий момент часу можна за схемою поточного розрахунку знайти розв'язки для $t = \Delta t; 2\Delta t; \dots$. Замінюючи часткові похідні за часом і за просторовою змінною скінченно-різницеви похідними, можна отримати явні вирази для $u_{i,j}$ через значення функції u у попередній момент часу. Такий процес називається явною схемою поточного рахунку.

Для розв'язання числовими методами диференціальних рівнянь у часткових похідних можна також використовувати неявні різницеві схеми. Як і раніше, часткові похідні замінюються скінченно-різницеви апроксимаціями, а $u_{i+1,j}$ не виражаються у явному вигляді через попередні значення. У такому разі необхідно

для знаходження $u_{i+1,j}$ розв'язати систему рівнянь, тобто на кожному часовому кроці необхідно розв'язувати систему рівнянь.

Щоб забезпечити числову стійкість явної схеми розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних, повинна виконуватися умова

$$\Delta t / (\Delta x^2) \leq 0,5, \quad (Д1.79)$$

де Δx – крок просторової змінної; Δt – крок зміни за часом.

Д1.5. Розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних методом конформних відображень

Використання для розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних методу конформних відображень дає змогу перетворити деякі двовимірні крайові задачі на простіші. Для прикладу розглянемо рівняння Лапласа

$$\partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2 + \partial^2 \varphi(x, y) / \partial y^2 = 0, \quad (Д1.80)$$

з деякими граничними умовами в області складної форми (Д1.4).

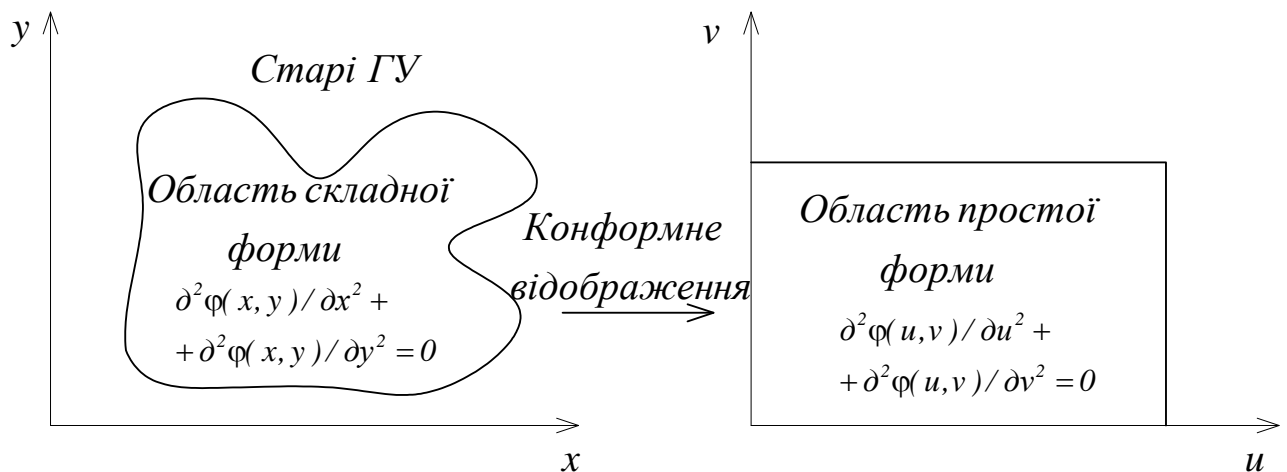


Рис. Д1.4. Конформне відображення

Цю задачу можна перетворити на нову задачу, в якій необхідно знайти розв'язання рівняння Лапласа

$$\partial^2 \varphi(u, v) / du^2 + \partial^2 \varphi(u, v) / dv^2 = 0, \quad (Д1.81)$$

з простішими граничними умовами (рис. Д1.2), тобто під час конформного відображення рівняння Лапласа (Д1.80) у координатній площині (x, y) переходимо до рівняння Лапласа (Д1.81) в координатній площині (u, v) .

Метод конформних відображень дає змогу розв'язувати крайові задачі зі складною формою границь.

Д1.5.1. Комплексні функції та конформні відображення

Розглянемо розрахунок характеристик плоскопаралельного поля за допомогою функції комплексного аргументу. Для цього введемо відповідні аналітичні функції.

Нехай маємо комплексну змінну величину

$$\underline{\omega} = u + jv,$$

(Д1.82)

яка є функцією комплексного аргументу $\underline{z} = x + jy$, тобто

$$\underline{\omega} = f(\underline{z}). \quad (Д1.83)$$

У (Д1.82) дійсна й уявна складові функції $\underline{\omega}$ є функціями від x та y . Залежність (Д1.83) можна зобразити графічно за допомогою двох площин: площини \underline{z} з координатами x і y і площини $\underline{\omega}$ з координатами u і v .

Залежність (Д1.83) відтворюється графічно так, що для кожної точки $P(x, y)$ знаходять відповідну точку $Q(u, v)$ з координатами u, v , які визначають залежно від x та y за (Д1.83).

Наприклад, якщо $\underline{\omega} = \underline{z}^2$ і відповідно

$$\underline{\omega} = \underline{z}^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy, \quad (Д1.84)$$

то до (3.184)

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2; \\ v &= 2xy. \end{aligned} \quad (Д1.85)$$

Знайдемо похідну $d\overline{\omega}/d\underline{z}$, тобто

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\underline{z}} = \frac{du + jdv}{dx + jdy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)}{dx + jdy}. \quad (Д1.86)$$

Одержане співвідношення $d\overline{\omega}/d\underline{z}$ залежить від вибору $d\underline{z}$. Якщо $d\underline{z} = dx$, тобто $dy = 0$, то відповідно (Д1.86) набуде вигляду

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\underline{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (Д1.87)$$

Якщо $d\underline{z} = jdy$, тобто $dx = 0$, то отримаємо

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\underline{z}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy + j \frac{\partial v}{\partial y} dy}{jdy} = \frac{dv}{dx} - j \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (Д1.88)$$

Рівність виразів правої частини (Д1.87) та (Д1.88) є необхідною умовою, для того щоб похідна $d\overline{\omega}/d\underline{z}$ мала одне і те саме значення, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \quad (Д1.89)$$

чи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (Д1.90)$$

Покажемо, що умова (Д1.90) є не тільки необхідною, але й достатньою, для того щоб значення $d\overline{\omega}/d\underline{z}$ не залежало від вибору $d\underline{z}$. Для цього введемо позначення $dy = \lambda dx$,

$$d\underline{z} = dx(1 + j\lambda), \quad (Д1.91)$$

де λ – параметр, який може мати будь-яке значення.

Підставивши (Д1.91) в (Д1.88), матимемо

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\underline{z}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dx + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} \lambda dx\right)}{dx + (1 + j\lambda)}. \quad (Д1.92)$$

З одержаного виразу (Д1.92) випливає, що значення похідної $d\varpi/dz$ не залежить від параметра λ , якщо виконується умова (Д1.90), тобто

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi}{dz} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(1+j\lambda) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\lambda+j)}{1+j\lambda} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(1+j\lambda) + j\frac{\partial v}{\partial x}(1+j\lambda)}{1+j\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{Д1.93})$$

Отже, умова (Д1.90) є необхідною і достатньою для того, щоб функція мала для кожного значення z похідну незалежно від вибору приросту $d\underline{z}$.

Функції $\underline{f}(\underline{z})$, які мають похідні, визначені в певній області незалежно від вибору $d\underline{z}$, називають **аналітичними функціями** \underline{z} у цій області.

Диференційні умови (Д1.90), які необхідні та достатні для того, щоб функція $\underline{f}(\underline{z})$ була аналітичною, називають **диференційними рівняннями Коші-Рімана**.

Д1.5.2. Визначення конформних відображень

Для прикладу розглянемо рівняння Лапласа у верхній напівплощині, тобто

$$\partial^2 \varphi(x, y) / dx^2 + \partial^2 \varphi(x, y) / dy^2 = 0, \quad (\text{Д1.94})$$

де $-\infty < x < \infty; 0 < y < \infty$.

Граничні умови

$$\varphi(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1, & |x| \leq 1. \end{cases} \quad (\text{Д1.95})$$

Для розв'язання цієї задачі можна використовувати перетворення Фур'є за змінною x , але у цьому випадку - доцільніше конформне відображення на площині (u, v) .

Конформне відображення

$$\varpi = \ln((z-1)/(z+1)), \quad (\text{Д1.96})$$

має такі властивості: 1) відображає верхню напівплощину z на смугу $-\infty < u < \infty, 0 < v < \pi$ на площині ϖ ; 2) відрізок прямої $y=0, -1 < x < 1$ у площині z (де потенціал дорівнює 1) переходить у пряму $v=\pi, -\infty < u < \infty$, у площині ϖ ; 3) два промені $x > 1, y=0$ та $x < -1, y=0$ у площині z переходять відповідно в додатну й від'ємну напівосі у площині ϖ .

Ці властивості перетворюють вихідну задачу на простішу, тобто

$$\partial^2 \varphi(u, v) / du^2 + \partial^2 \varphi(u, v) / dv^2 = 0, \quad (\text{Д1.97})$$

де $-\infty < u < \infty; 0 < v < \pi$.

Граничні умови

$$\begin{cases} \varphi(u, 0) = 0; \\ \varphi(u, \pi) = 1. \end{cases} \quad (\text{Д1.98})$$

Розв'язання цієї задачі

$$\varphi(u, v) = v / \pi. \quad (\text{Д1.99})$$

Для того, щоб знайти розв'язання вихідної задачі, необхідно виразити v через x і y й підставити цей вираз у (Д1.99), тобто

$$\begin{aligned} \varpi = u + jv &= \ln((z-1)/(z+1)) = \\ &= \ln((z-1)/(z+1)) + j \arg((z-1)/(z+1)). \end{aligned} \quad (\text{Д1.100})$$

З (Д1.100) отримуємо

$$\begin{aligned} v &= \arg((z-1)/(z+1)) = \arg((x+jy-1)/(x+1+jy)) = \\ &= \arg((x^2+y^2-1+j^2y)/((x+1)^2+y^2)) = \arctg(2y/(x^2+y^2-1)). \end{aligned} \quad (\text{Д1.101})$$

Отже, розв'язання рівняння (Д1.94) має вигляд

$$\varphi(x, y) = \arctg(2y/(x^2+y^2-1)) / \pi. \quad (\text{Д1.102})$$

Метод конформних відображень має обмежені можливості, оскільки його використовують тільки до двовимірного рівняння Лапласа і з деякими змінами до рівняння Пуассона.

Д1.6. Розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь

Структура загального розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь n -го порядку, тобто рівнянь з правою частиною

$$dy^n / dx^n + a_1(x) dy^{n-1} / dx^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x) dy / dx + a_n(x) y = f(x) \quad (Д1.103)$$

визначається такою теоремою [14].

Якщо $u = u(x)$ є частковим розв'язанням неоднорідного рівняння, а y_1, y_2, \dots, y_n - фундаментальна система розв'язання відповідно однорідного рівняння, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд $y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$; іншими словами, загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі будь-якого його часткового розв'язання і загального розв'язання відповідного однорідного рівняння.

Отже для побудови спільного розв'язання неоднорідного рівняння потрібно знайти його одне часткове розв'язання (враховуючи, що вже відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння).

Розглянемо два методи знаходження часткового розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь.

Метод варіації довільних постійних. Цей метод застосовують для знаходження часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку як зі змінними так і зі сталими коефіцієнтами, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Метод варіацій полягає у наступному. Цей метод застосовують для знаходження часткового розв'язання лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку, як з перемінними так і з постійними коефіцієнтами якщо відомо загальне розв'язання відповідного однорідного рівняння.

Метод варіації полягає в наступному. Нехай відома фундаментальна система розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n відповідного однорідного рівняння. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння необхідно шукати у вигляді

$$u(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n, \quad (Д1.104)$$

де функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ визначаються з системи рівнянь

$$y_1 dC_1(x)/dx + y_2 dC_2(x)/dx + \dots + y_n dC_n(x)/dx = 0;$$

$$(dC_1(x)dy_1)/dx^2 + (dC_2(x)dy_2)/dx^2 + \dots + (dC_n(x)dy_n)/dx^2 = 0;$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots$$

$$dy_1^{n-2}/dx^{n-2} dC_1(x)/dx + dy_2^{n-2}/dx^{n-2} dC_2(x)/dx + \dots + dy_n^{n-2}/dx^{n-2} dC_n(x)/dx = 0;$$

$$dy_1^{n-1}/dx^{n-1} dC_1(x)/dx + dy_2^{n-1}/dx^{n-1} dC_2(x)/dx + \dots + dy_n^{n-1}/dx^{n-1} dC_n(x)/dx = f(x),$$

де $f(x)$ - права частина рівняння (Д1.103).

Для рівняння другого порядку

$$d^2 y/dx^2 + a_1(x)dy/dx + a_2(x)y = f(x) \text{ відповідна система має вигляд}$$

$$y_1 dC_1(x)/dx + y_2 dC_2(x)/dx = 0;$$

$$(dC_1(x)dy_1)/dx^2 + (dC_2(x)dy_2)/dx^2 = f(x). \tag{Д1.105}$$

Розв'язання цієї системи знаходиться за формулами

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}; \quad C_2(x) = -\int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}. \tag{Д1.106}$$

тоді $u(x)$ можна знайти за формулою

$$u(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}, \tag{Д1.107}$$

де $W(y_1, y_2)$ - вронскіан розв'язання y_1 і y_2 .

Нехай наприклад необхідно проінтегрувати рівняння

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{ctgx}{x}.$$

Для відповідного однорідного рівняння знайдено часткове розв'язання

$$y_1 = \sin x/x, \quad y_2 = \cos x/x \quad \text{їх вронскіан } W(y_1, y_2) = -1/x^2.$$

Тоді $u(x)$ можна знайти за формулою

$$u(x) = -\frac{\sin x}{x} \int \frac{\cos x \cdot \operatorname{ctgx}}{(-1/x^2)} dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\sin x \cdot \operatorname{ctgx}}{(-1/x^2)} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx - \frac{\cos x}{x} \cdot \int \cos x dx = \frac{\sin x}{x} \cdot [\ln|\operatorname{tg}x/2| + \cos x] - \frac{\cos x}{x} \cdot \sin x.$$

Таким чином $u(x) = \frac{\sin x \ln|\operatorname{tg}x/2|}{x}$, а загальний розв'язок цього рівняння

має вигляд

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \ln|\operatorname{tg}x/2|.$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку може бути проінтегроване в квадратурах, якщо відомо одне часткове розв'язання $y_1(x)$ відповідного однорідного рівняння; загальне розв'язання такого рівняння має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + u(x)$, де y_2 знаходиться через y_1 за формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2} dx, \quad (\text{Д1.108})$$

а $u(x)$ визначається за y_1 і y_2 за формулою (Д1.107).

Метод підбору часткового розв'язання (метод невизначених коефіцієнтів). Цей метод застосовується тільки до лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами і тільки в тому випадку коли його права частина має такий вигляд (чи є сумою функцій такого вигляду)

$$f(x) = e^{\alpha x} [p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x] \quad (\text{Д1.109})$$

де α і β - сталі; $p_n(x)$ і $q_m(x)$ - багаточлени від x відповідно n -ї і m -ї степені.

Часткове розв'язання рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(n-2)} + a_n y = f(x), \quad (\text{Д1.110})$$

де $f(x)$ має зазначений вигляд, а a_1, a_2, a_n - уявні сталі коефіцієнти, необхідно шукати у вигляді

$$u(x) = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x], \quad (\text{Д1.111})$$

де r дорівнює показнику кратності кореня $\alpha + i\beta$ для характеристичного рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$ (якщо характеристичне рівняння такого кореня немає, тоді $r = 0$); $P_l(x)$ і $Q_l(x)$ - повні багаточлени від x ступені l з невизначеними коефіцієнтами, при чому l дорівнює найбільшому з чисел n і m , тобто

$$\begin{aligned} P_l(x) &= A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \dots + A_l; \\ Q_l(x) &= B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \dots + B_l. \end{aligned} \quad (\text{Д1.112})$$

Багаточлени $P_l(x)$ і $Q_l(x)$ повинні бути повними (тобто мати усі степені x від 0 до l) з різними невизначеними коефіцієнтами у одних і тих же степенях x в обох багаточленах і під час цього, якщо у виразі функції $f(x)$ входить хоча б одна з функцій $\cos \beta x$ чи $\sin \beta x$, то в $u(x)$ завжди потрібно вводити обидві функції.

Невизначені коефіцієнти можна знайти з системи лінійних алгебричних рівнянь, одержуваних ототожнюванням коефіцієнтів подібних членів в правій і лівій частинах вихідного рівняння після підстановки в нього $u(x)$ замість y .

Перевірка правильності вибраної форми часткового розв'язання дає можливість співставити усі члени правої частини рівняння з подібними їм членами лівої частини, що появилися в ній після підставлення $u(x)$.

Якщо права частина вихідного рівняння рівна сумі декількох різних функцій розглянутої структури, то для знаходження часткового розв'язку такого рівняння потрібно використовувати теорему накладання розв'язків: необхідно знайти частковий розв'язок, що відповідає окремим складовим правої частини і взяти їх суму, яка й буде частковим розв'язком вихідного рівняння (тобто рівняння з сумою відповідних функцій в правій частині).

Примітка. Окремим випадком функції $f(x)$ розглянутої структури (за наявності яких в правій частині рівняння застосовується метод підбору часткового розв'язку) є такі функції:

- 1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$ (A - стала) $\{\alpha + i\beta \equiv \alpha\}$;
- 2) $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ (A і B - сталі) $\{\alpha + i\beta \equiv i\beta\}$;
- 3) $f(x) = p_n(x)$ (багаточлен степені n) $\{\alpha + i\beta \equiv 0\}$;
- 4) $f(x) = p_n(x)e^{\alpha x}$ $\{\alpha + i\beta \equiv \alpha\}$;
- 5) $f(x) = p_n(x)\cos\beta x + q_m\sin\beta x$ $\{\alpha + i\beta \equiv i\beta\}$;
- 6) $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (A і B - сталі).