

Національний лісотехнічний університет України
Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Борецька Ірина Богданівна

УДК 004.94; 674.047

ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО
ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З ВРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ
ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
«05 – Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



І.Б. Борецька

Науковий керівник:

Соколовський Ярослав Іванович

доктор технічних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Учений секретар спеціалізованої

вченої ради Д 35.052.05



 /Р.А. Бунь/

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Борецька І.Б. Математичне моделювання конвективного процесу сушіння деревини з урахуванням границь фазових переходів.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет “Львівська політехніка” Міністерства освіти і науки України, Львів, 2019.

Підготовка здійснювалась на кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Міністерства освіти і науки України.

Спеціалізована вчена рада Д 35.052.05 при Національному університеті “Львівська політехніка” Міністерства освіти і науки України, Львів.

Дисертацію присвячено вирішенню актуального науково–прикладного завдання побудови та реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в’язко-пружного деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, охарактеризовано наукову новизну і практичне значення результатів, відзначено особистий внесок автора, подано структуру та обсяг роботи.

У першому розділі проаналізовано сучасний стан математичного моделювання неізотермічного вологоперенесення та в’язко-пружного деформування у капілярно-пористих матеріалах з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи.

Дослідження механізму поглиблення зони випаровування висушеного матеріалу вперше досліджено Т. Шервудом. Подальші теоретичні та експериментальні дослідження підтвердили наявність поглиблення поверхні випаровування. Існують декілька підходів у моделюванні процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з врахуванням руху поглиблення зони випаровування. Зокрема, критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах.

При іншому підході моделювання процесу видалення вологи розглядається у рамках задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз, а видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. З поглибленням зони випаровування в об'ємі висушеного матеріалу спостерігається суттєве зростання тиску біля фронту випаровування. Тому, беручи до уваги енергетичні витрати кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла у зони випаровування враховуються різними підходами для представлення моделі зони випаровування.

Найбільш характерною особливістю процесів, для яких математичні моделі є нелінійні, є наперед невідома топологія границь між різними фазами. Як правило, розглядаються класичні представлення однофазної та двофазної задачі Стефана. У цих математичних моделях на поверхні розділу фаз окрім умов ізотермічності використовується закон збереження енергії з врахуванням скритої теплоти. Основна ідея підходу полягає у введенні ефективної теплоємності, яка включає теплоту фазового переходу. Використання дельта-функції Дірака дозволяє використовувати єдине рівняння енергії для всієї області. Така ентальпійна форма представлення рівняння енергії використовується для аналізу багатовимірних моделей Стефана.

У літературі представлено мало альтернативних підходів до моделювання теплоперенесення у середовищах з врахуванням фазових переходів. Зокрема, описано клітинно-автоматний алгоритм розв'язання одновимірної задачі Стефана для вирощування кристалів та решіткові рівняння Больцмана.

З математичної точки зору крайові задачі тепломасоперенесення або узагальнені крайові задачі принципово відрізняються від класичних задач. Залежність характеристичного розміру області випаровування від часу ускладнює застосування класичних методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Аналітичні дослідження здійснювалися для обмежених випадків наперед відомого закону руху границі, наприклад, лінійного або параболічного. Для цього використовувалися методи теплових потенціалів, контурного інтегрування, степеневих рядів, «миттєвих» власних функцій Грінберга. Отримання аналітичних

розв'язків крайової задачі узагальненого типу в області з рухомою границею фазового переходу за довільним законом зводилося до інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема інтегральних рівнянь Вольтера II-го роду зі складними ядрами. Тому встановлювалися лише якісні результати поведінки таких систем. Досить ефективним методом розв'язання задач нагрівання та кінетики сушіння вологих матеріалів є метод диференціальних рядів. Він дозволяє отримати числово-аналітичні розв'язки крайової задачі тепломасоперенесення для граничних умов третього роду.

Використання числових методів для багатовимірних задач тепломасоперенесення з фазовим переходом пов'язано з алгоритмічними труднощами та значними обчислювальними затратами. Для знаходження наближеного розв'язку широкого застосування набули методи «наскрізного» розрахунку з використанням узагальненого формування класичної задачі Стефана, у якій невідомим виступає не температура, а ентальпія. Для чисельної реалізації деяких математичних моделей використовуються різницеві схеми.

Для чисельних реалізацій математичних моделей тепломасоперенесення з фазовими переходами використовуються для основних підходи. Для першого використовуються методи з виділенням границі розділу фаз на кожному часовому шарі за рахунок використання динамічних незалежних змінних або використання динамічних сіток постійної структури із закріпленням вузлів на границях розділу фаз. Для другого підходу використовуються методи без виділення границі фазового переходу або методи наскрізного розрахунку. Адаптація до границі розділу фаз здійснюється за рахунок використання змінного кроку за часом (ловля фронту у вузол просторової сітки). У цьому аспекті, важливим є варіаційні формування математичних моделей теплоперенесення з використанням методів штрафних функцій.

Для випадку, коли висушуваний матеріал характеризується реологічними властивостями, частина енергії, пов'язана з незворотніми деформаціями, розсіюється у матеріалі. Тому рівняння балансу енергії дисплатії на поверхні фазового переходу дає можливість сформулювати умови для зони поглиблення випаровування, враховуючи зберігання незворотних деформацій при фазових

переходах. Розроблення математичних моделей в'язкопружних капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння базується на моделях наслідкової повзучості. Однак такі моделі описують реологічну поведінку різних середовищ для неперервної історії деформування. Для випадку, коли у процесі деформування капілярно-пористих середовищах неявні фазові переходи і процес деформування на їх границі характеризується розривами, то необхідно враховувати вплив передісторії навантаження до фазового переходу на подальший розвиток напружено-деформівного стану середовища. Для однорідних в'язкопружних середовищ, які у процесі деформування міняли фазовий перехід, використовується гіпотеза про збереження в'язкопружних напружень на границі переходу.

У другому розділі побудовано нову нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння анізотропних капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи. У процесі сушіння пластина контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари, а тепло, яке підводиться агентом сушіння, витрачається на випаровування вологи, нагрівання матеріалу і подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом. Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В процесі сушіння у пластині виникає зона осушених пор та пор, насичених вологістю. Вплив пористої структури деревної пластини враховується введенням в рівняння Стефана-Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії. Система рівнянь Стефана-Максвелла доповнюється рівнянням фільтрації Дарсі з ефективними характеристиками в'язкості μ_g і проникливості K_g та рівнянням стану ідеального газу.

Розвинуто аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Побудовано функцію впливу математичної моделі з однорідними граничними умовами. Встановлені співвідношення для визначення безрозмірної густини пари та тиску пари в довільній точці \bar{z} за товщиною шару. Отримано рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ.

У третьому розділі здійснено математичне моделювання впливу термодифузії на масоперенесення вологи при сушінні деревної пластини при врахуванні дифузійного, конвективного та теплового потоків. Встановлено співвідношення для визначення густини пари і тиску в довільній точці пластини. Отримано рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ. Встановлено залежність для часу, при якому відносна насиченість досягає значення \bar{z}_m^* при умові $\partial(T_1 - T_m)/\partial\bar{z}_m^* \ll 1$, але з врахуванням термоградієнтної складової. Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологою поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури скелету.

У четвертому розділі побудовано двовимірну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів. Визначено вплив головних компонентів та орієнтації головних осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному брусі прямокутного поперечного перерізу $\{2L_1, 2L_2\}$ з урахуванням руху границь фазових переходів. Розроблено аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазових переходів та встановлення рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням головних осей анізотропії. Побудовані алгоритми нелінійної математичної моделі при змінних температурних режимах середовища. Інтеграли по межі фазового переходу визначаються числовим методом. Всі інші величини, які входять в дане рівняння обчислюються за даними фізико-тепловими характеристиками конкретного матеріалу.

У п'ятому розділі побудована математична модель реологічної поведінки деревної пластини з урахуванням зони випаровування вологи, яка поділяє пластину на дві області з різними структурними і реологічними властивостями. У вологій зоні пластини на основі реологічної моделі Кельвіна-Фойгта, отримано визначальне співвідношення. Отримано також узагальнення гіпотези збереження незворотних

деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фазового переходу на границі випаровування вологи. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з врахуванням руху зони випаровування. Встановлені розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу.

Встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язкопружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Досліджено вплив термодифузії, теплофізичних характеристик матеріалу, режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів.

Ключові слова: математична модель, аналітично-числовий метод, неізотермічне вологоперенесення, в'язко-пружне деформування, границя фазового переходу, процес сушіння.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Математичне моделювання конвективного сушіння деревини з врахуванням границь фазових переходів // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології: зб. наук. праць. 2015. № 826. С. 219-230.
2. Sokolovsky Yu., Boretska I., Gayvas B. Mathematical modeling of moving boundaries of phase transition in the process of drying anisotropic plate // Journal of Engineering Research and Application. 2018. Vol. 8, No. 12. P. 57-63.
3. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл // Комп'ютерні технології друкарства: зб. наук. пр. 2011. № 26. С. 231-240.

4. Sokolovskyu Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided and drying and vesearch of chambers of wood drying by Means of SolidWorks API and COSMOSFloWorks // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2013. Вип. 17. С. 175-185.
5. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Осушення пористих тіл у сушильних камерах за м'яких режимів // Науковий вісник НЛТУ України. 2011. Вип. 21.9. С. 317-326.
6. Соколовський Я.І., Борецька І.Б., Дендюк М.В. Аналіз впливу зв'язку перенесення тепла і вологи на напружено-деформівний стан у деревній пластині // Науковий вісник НЛТУ України. 2010. Вип. 20.12. С. 309-314.
7. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Моделювання нелінійної реологічної поведінки деревини // Науковий вісник НЛТУ України. 2009. Вип. 19.2. С. 275-279.
8. Sokolovskyu Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided design and research of forest drying chambers by means of SolidWorks API // Техніка та енергетика. 2013. Вип. 185, част. 2. С. 215-218.
9. Sokolowskyu Ya., Boretska I., Yatsyshyn S., Kaspryshyn Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2300. P. 83-86. (SCOPUS).
10. Борецька І.Б. Математичне моделювання впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у процесі сушіння // Технічні вісті. 2015. Вип. 2015/1(42), 2(43). С. 60-67.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

11. Mathematical models and analysis of the heat-mass-transfer in anisotropic materials taking into account the boundaries of phase transition / Ya Sokolovskyu, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyu // The Experience of Designing and Application of CAD Systems 'CADSM 2019': proc of 15 Intern. Conf., 26 February – 2 March, 2019. Polyana-Svalyava (Zakarpatya), 2019. P. 28-33. (SCOPUS).
12. Mathematical modeling of the heat-mass-exchange in anisotropic environments taking into account the boundary of phase transition / Ya. Sokolovskyu, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyu // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 147-150. (SCOPUS,

WEB of SCIENCE).

13. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Y. Sokolowskyu, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2011': proc. of the 6th Intern. Sci. and Techn. Conf. Lviv, 2011. P. 210-213.
14. Вплив режиму сушіння на процеси тепломасоперенесення в пористому шарі / Я.Й. Буряк, Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT-2011'. Київ, 2011. С. 62-63.
15. Mathematical modeling of capillary-porous materials elastic-viscous-plastic deformation on the drying process / Ya. Sokolowskyu, I. Kroshnyi, I. Boretska, O. Sykala // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT 2014': proc. of the 16-th International Conferense, 26-30 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 323.
16. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // Advanced Computer Information Technologies: proc of the International Conference, 1-3 June, 2018. Czech Republic, Ceske Budejovice, 2018. P. 83-87.
17. Автоматизация технологии моделирования и анализа деформационно-релаксационных и тепломассообменных технологий при сушке древесины / Я.И. Соколовский, О.В. Мокрицкая, И.Б. Борецкая // Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов): IV-я междунар. науч.-практ. конф. 'СЭТТ-2011'. Москва, 2011. С. 118-121.
18. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, І.Б. Борецька, В.Я. Семенюк // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту. Херсон: ХНТУ, 2014. С. 177-178.
19. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity state of wood in the process of drying / Ya. Sokolovskyy, A. Bakalletz, O Mokrytska, I. Kapran, I. Boretska // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту 'ISDMCI 2011': міжнар. наук. конф. Євпаторія, 2011. С. 102-108.

20. Modeling deformation of wood with changeable potentials of mass heat transfer / Ya. Sokolowskyu, B. Pobereyko, A. Bakalletz, I. Senkiv, I. Boretska // Системний аналіз та інформаційні технології: X міжнар. наук.-техн. конф. Київ, 2008. С. 30-31.
21. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепло-масообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька О.В. Мокрицька, В.М. Шиманський, А.П. Здолбіцький, // Математичне та імітаційне моделювання систем 'МОДС 2011': VI наук.-практ. конф. з міжнар. участю. Чернігів, 2011. С. 88-89.
22. Застосування штучних нейронних мереж для чисельного моделювання тепло-масообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.М. Крошній, І.Б. Борецька І.Д. Капран, // Математичне та імітаційне моделювання систем 'МОДС 2011': VI наук.-практ. конф. з міжнар. участю. Чернігів, 2011. С. 92-93.

ABSTRACT

Boretska I.B. Mathematical model of convective timber taking into account of the border phase transitions.

The dissertation for earning PhD in technical sciences (*Kandidat* of technical sciences), specialty 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods. - National University *Lviv Polytechnic* of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2019.

The training was carried out at the Department of Information Technologies of the Ukrainian National Forestry University of the Ministry of Education and Science of Ukraine.

Specialized Academic Council D 35.052.05 at the National University *Lviv Polytechnic* of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv.

The dissertation is devoted to solving the urgent scientific and applied problem of constructing and implementing mathematical models of nonisothermic moisture transfer and visco-elastic deformation during drying of capillary-porous materials, in particular wood, taking into account the movement of the evaporation zone for non-steady drying schedules, as well as to the development of effective analytical and numerical methods for

their implementation.

In the introduction, the relevance of the dissertation subject is substantiated, the goals and objectives of the study are formulated, described are the scientific novelty and practical significance of the results, the personal contribution of the author is noted, and the structure and scope of the work are presented.

Section 1 analyzes the current state of mathematical modeling of non-isothermic moisture transfer and visco-elastic deformation in capillary-porous materials, taking into account the moving boundaries of the moisture evaporation zone.

The mechanism of deepening the evaporation zone of the material being dried was first investigated by T. Sherwood. Further theoretical and experimental studies confirmed the presence of a deepening of the evaporation surface. There are several approaches to modeling the processes of heat-and-mass transfer in materials during drying, taking into account the dynamic deepening of the evaporation zone. In particular, the phase transition criterion, which varies with the coordinate of the body, is taken into account in boundary conditions.

In another approach, modeling the process of moisture removal is considered in the framework of Stefan's tasks which are extremely complex even with minor changes in the density of the material in the evaporation zone. However, the evaporation of water causes a change in its volume by almost a thousand times, and the removal of the vapour-gas mixture from the evaporation zone requires a significant consumption of energy. With the deepening of the evaporation zone, in the volume of the material being dried, a significant increase in pressure is observed at the evaporation front. Therefore, the energy consumption of the kinetics of vapour movement and convection heat transfer to the evaporation zones is taken into account by various approaches in representing the evaporation zone model.

The most characteristic feature of processes for which mathematical models are non-linear is the unknown in advance topology of the boundaries between the various phases. As a rule, classical representations of the single-phase and two-phase Stefan problems are considered. In these mathematical models, on the phase interface surface, in addition to the isothermic conditions, the energy conservation law is used taking into

account latent heat. The main idea of the approach is to introduce effective heat capacity which includes the heat of phase transition. The use of Dirac's delta function allows the use of a single energy equation for the whole region. This enthalpy form of energy equation representation is used to analyze Stefan's multidimensional models.

The relevant literature presents few alternative approaches to modeling heat transfer in media with regard to phase transitions. In particular, a cellular automaton algorithm for solving the one-dimensional Stefan problem for growing crystals and the Boltzmann lattice equation is described.

From a mathematical point of view, boundary-value problems of heat-and-mass transfer or generalized boundary-value problems are fundamentally different from classical problems.

The dependence of the characteristic size of the evaporation zone on time makes it difficult to apply the classical methods of separation of variables or integral transformations. Analytical studies were carried out for limited cases of the known in advance law of boundary motion, for example, linear or parabolic. For this purpose, methods of thermal potentials, contour integration, power series, "instantaneous" Greenberg eigenfunctions were used. Obtaining analytical solutions of a generalized boundary-value problem in the region with a moving phase transition boundary according to an arbitrary law was reduced to integro-differential equations, in particular, the Voltaire integral equations of the second kind with complex kernels. Therefore, only qualitative results of the behavior of such systems were determined. A sufficiently effective method for solving the problems of heating and drying kinetics of moist materials is the method of differential series. It allows obtaining numerical-analytical solutions to the boundary-value problem of heat-and-mass transfer for boundary conditions of the third kind.

The use of numerical methods for multidimensional problems of heat-and-mass transfer with phase transition is associated with algorithmic difficulties and considerable computational costs. To find an approximate solution, the methods of "through" calculation, using the generalized formulation of the classical Stefan problem in which the unknown is not temperature but enthalpy, are widely used. For the numerical implementation of some mathematical models, difference schemes are used.

Two basic approaches are used for numerical implementations of mathematical models of heat-and-mass transfer with phase transitions. For the first one, methods are used with separation of the phase transition boundary at each time layer through the use of dynamic independent variables or the use of dynamic networks of constant structure with fixing nodes at the phase boundaries. For the second approach, methods without separation of the phase transition boundary or “through” calculation methods are used. Adaptation to the phase boundary is achieved through the use of a variable time step (catching the front into a spatial grid node). In this aspect, variational formation of mathematical models of heat transfer using methods of penalty functions is important.

For the case when the material to be dried is characterized by rheological properties, part of the energy associated with irreversible deformations is dissipated in the material. Therefore, the equation of the dysplasia energy balance on the surface of the phase transition makes it possible to formulate the conditions for the deepening zone of evaporation, taking into account the conservation of irreversible deformations during phase transitions. The development of mathematical models of viscoelastic capillary-porous materials in the drying process is based on consequent creep models. However, such models describe the rheological behavior of various media for a continuous history of deformation. If, in the process of deformation of capillary-porous media, phase transitions are implicit and the process of deformation at their boundary is characterized by discontinuities, it is necessary to take into account the influence of pre-history of loading before the phase transition on the further development of stress-strain state of the medium. For homogeneous visco-elastic media that change the phase transition during deformation, the hypothesis of conservation of visco-elastic stresses at the transition boundary is used.

Section 2 deals with the construction of a new nonlinear mathematical model of non-isothermic moisture transfer during drying of anisotropic capillary-porous materials, taking into account the moving boundaries of the moisture evaporation zone. During the drying process, the plate is in contact with a gaseous environment which is a mixture of dry air and vapour, and the heat that is supplied by the drying agent is expended on evaporating moisture, heating the material and overcoming the energy of bonding moisture to the material. It is believed that the thermal conditions on the plate surfaces are the same

and the drying process is symmetrical with respect to the middle surface. During the drying process, a zone of dried pores and moisture-saturated pores appears in the plate. The effect of the porous structure of the wooden plate is taken into account by introducing effective binary interaction coefficients into the Stefan-Maxwell equation. The Stefan-Maxwell equation system is complemented by the Darcy filter equation with the effective viscosity μ_g and permeability K_g characteristics and the perfect gas equation.

An analytical-numerical method for the determination of non-isothermic moisture transfer in non-steady modes of the drying process has been developed taking into account the dynamics of the phase transition boundary. The influence function of a mathematical model with homogeneous boundary conditions is constructed. Relations are established for determining the dimensionless vapour density and vapour pressure at an arbitrary point \bar{z} along the layer thickness. Obtained are an equation to determine the change in relative humidity over time and an equation of motion of the liquid-gas interface.

In section 3, mathematical modeling of the effect of thermal diffusion on moisture transfer during drying of a wooden plate is carried out, taking into account diffusion, convective, and heat fluxes. A relation is established to determine the vapour density and pressure at an arbitrary point on the plate. Obtained are an equation to determine the change in relative humidity over time and an equation of motion of the liquid-gas interface. The dependence is established for the time at which the relative saturation reaches a value of \bar{z}_m^* under the condition $\partial(T_1 - T_m) / \partial \bar{z}_m^* \ll 1$, taking into account the motion of the boundaries of phase transitions. An analytical-numerical method has been developed to determine heat transfer in an orthotropic plate with a moving boundary of phase transitions, as well as establishing moving boundaries of a phase transition in a rectangular region, taking into account the main axes of anisotropy. Algorithms of a nonlinear mathematical model are constructed for variable temperature conditions of the medium. The integrals along the phase transition boundary are determined by the numerical method. All other values included in this equation are calculated according to the physical and thermal characteristics of a particular material.

In section 4, a two-dimensional mathematical model of the process of convection drying of anisotropic porous materials is constructed taking into account the phase

transition boundary. Determined is the influence of the main components and the orientation of the main axes of the heat transfer tensor on unsteady temperature fields in a prismatic bar of rectangular cross-section $\{2L_1, 2L_2\}$, taking into account the motion of the boundaries of phase transitions. An analytical-numerical method has been developed to determine heat transfer in an orthotropic plate with a moving boundary of phase transitions, as well as establishing moving boundaries of a phase transition in a rectangular region, taking into account the main axes of anisotropy. Algorithms of a nonlinear mathematical model are constructed for variable temperature conditions of the medium. The integrals along the phase transition boundary are determined by the numerical method. All other values included in this equation are calculated according to the physical and thermal characteristics of a particular material.

In section 5, a mathematical model of the rheological behavior of a wooden plate is constructed taking into account the moisture evaporation zone which divides the plate into two regions with different structural and rheological properties. In the moist zone of the plate, on the basis of the Kelvin-Voigt rheological model, a determining relation is obtained. A generalization is also obtained of the hypothesis of conservation of irreversible deformations in case of visco-elastic deformation of capillary-porous materials, taking into account the phase transition at the boundary of moisture evaporation. Object-oriented application software has been developed for the implementation of mathematical models of non-isothermic moisture transfer and visco-elastic deformation in media, taking into account the motion of the evaporation zone. Identified are the patterns of influence of the anisotropy of the thermophysical and mechanical characteristics of wood, its initial moisture content, geometric parameters and the characteristics of the drying agent on the variations in temperature-moisture and visco-elastic state of wood during convection drying, taking into account the dynamics of the change in the phase transition boundary. The effect of thermal diffusion, thermophysical characteristics of the material, and operating conditions of the drying agent on the temperature of phase transitions is investigated.

Keywords: mathematical model, analytical-numerical method, non-isothermic moisture transfer, visco-elastic deformation, phase transition boundary, drying process.

LIST OF PUBLICATION BY THE SUBJECTS OF DISSERTATION

Publications, in which the main scientific results of the dissertation are published

1. Sokolovskyy Ya., Boretska I. Mathematical modeling of convective drying of wood, taking into account the boundaries of phase transitions // Herald of the National University "Lviv Polytechnic". Series: Computer Science and Information Technologies: collection. of scientific works. 2015. No 826. P. 219-230.
2. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Gayvas B. Mathematical modeling of moving boundaries of phase transition in the process of drying anisotropic plate // Journal of Engineering Research and Application. 2018. Vol. 8, No. 12. P. 57-63.
3. Guivas B., Boretska I. Influence of the regime of a drying agent on the drainage of porous bodies // Computer technologies of printing: collection of scientific works. 2011. No 26. P. 231-240.
4. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided and drying and vesearch of chambers of wood drying by Means of SolidWorks API and COSMOSFloWorks // Physical-mathematical modeling and information technologies. 2013. Vol. 17. P. 175-185.
5. Guivas B. Boretska I. Dehydration of porous bodies in drying chambers for soft regimes // Scientific Bulletin of NLTU of Ukraine. 2011. Vol. 21.9. P. 317-326.
6. Sokolovskyy Ya., Boretska I. Analysis of the influence of the connection of the transfer of heat and moisture to the stress-strain state in the wood plate // Scientific Bulletin of NLTU of Ukraine. 2010. Vol. 20.12. P. 309-314.
7. Sokolovsky Ya. Boretska I. Modeling of Nonlinear Rheological Behavior of Wood // Scientific Bulletin of NLTU of Ukraine. 2009. Vol. 19.2. P. 275-279.
8. Sokolovskyy Ya., Boretska I., Rozhak P. Information Technologies for Designing and Researching Dry Drying Cameras by SolidWorks API and COSMOSFloWorks // Technique and energy. 2013. Vol. 185 part 2. P. 215-218.
9. Sokolowskyy Ya., Boretska I., Yatsyshyn S., Kaspryshyn Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2300. P. 83-86. (SCOPUS).
10. Boretka I. B. Mathematical modeling of influence of thermal diffusion on deepening of the zone of evaporation of moisture during drying // Technical news. 2015. Vol. 2015 / 1 (42), 2 (43). P. 60-67.

Publications certifying the approbation of the materials of the dissertation

11. Mathematical models and analysis of the heat-mass-transfer in anisotropic materials taking into account the boundaries of phase transition / Ya Sokolovskyy, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyy // The Experience of Designing and Application of CAD Systems ‘CADSM 2019’: proc of 15 Intern. Conf., 26 February – 2 March, 2019. Polyana-Svalyava (Zakarpattya), 2019. P. 28-33. (SCOPUS).
12. Mathematical modeling of the heat-mass-exchange in anisotropic environments taking into account the boundary of phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyy // Computer Science and Information Technologies ‘CSIT 2018’: proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 147-150. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
13. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Y. Sokolowskyy, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala // Computer Science and Information Technologies ‘CSIT 2011’: proc. of the 6th Intern. Sci. and Techn. Conf. Lviv, 2011. P. 210-213.
14. Influence of the drying mode on the processes of heat transfer in the porous layer / Y. Buryak, B. Guivas, I. Boretska // System Analysis and Information Technologies SAIT-2011. Kyiv, 2011. P. 62-63.
15. Mathematical modeling of capillary-porous materials elastic-viscous-plastic deformation on the drying process / Ya. Sokolowskyy, I. Kroshnyi, I. Boretska, O. Sykala // System Analysis and Information Technologies ‘SAIT 2014’: proc. of the 16-th International Conference, 26-30 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 323.
16. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // Advanced Computer Information Technologies: proc of the International Conference, 1-3 June, 2018. Czech Republic, Ceske Budejovice, 2018. P. 83-87.
17. Automation of the technology of modeling and analysis of deformation-relaxation and heat-mass-exchange technologies in the drying of wood / Ya. Sokolovskyy, O. Mokritska, I. Boretska // Modern energy-saving technologies (drying and thermosensitive processing of materials): IV-th intern. scient.-pract. conf. Moscow, 2011. P. 118-121.

18. Modeling of rheological behavior of capillary-porous materials with fractal structure in the process of drying / Ya. Sokolovskyy, V. Shymansky, I. Boretska, B. Semenyuk // Intelligent decision-making and problem-solving systems artificial intelligence. Kherson: KhNTU, 2014. P. 177-178.
19. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity of wood in the process of drying / Ya. Sokolovskyy, A. Bakalets, O. Mokritska, I. Kapran, I. Boretska // Intelligent Systems for Decision Making and Problems of Computing Intelligence 'ISDMCI 2011': intern. sciences. conf. Evpatoria, 2011. P. 102-108.
20. Modeling deformation of wood with changeable potentials of mass heat transfer / Ya Sokolowskyy, B. Pobereyko, A. Bakalletz, I. Senkiv, I. Boretska // System analysis and information technologies: X International scientific and technical conference. Kyiv, 2008. P. 30-31.
21. Automation of analysis and modeling of deformation-relaxation and heat-mass-exchange processes / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, O. Mokritska, V. Shymansky, A. Zdolbitsky // Mathematical and simulation modeling of systems 'MODS 2011': VI scientific-practical conference with international participation. Chernihiv, 2011. P. 88-89.
22. Application of artificial neural networks for numerical modeling of heat and mass transfer processes / Ya. Sokolovskyy, I. Kroshnyy, I. Boretska, I. Capran // Mathematical and simulation systems simulation 'MODS 2011': VI scientific-practical conference with international participation. Chernihiv, 2011. P. 92-93.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	21
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕСУ СУШІННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ	26
1.1. Сучасний стан математичного моделювання фізичних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням зони випаровування	26
1.2. Аналіз математичного моделювання процесів тепломасоперенесення з ураху- ванням рухомих меж фазових переходів.....	32
1.3. Аналіз математичних моделей деформування матеріалів у процесів сушіння.....	39
Висновки до розділу 1.....	43
РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ	46
2.1. Механізми перенесення вологи в капілярах в нестационарних режимах	46
2.2. Побудова математичної моделі сушіння капілярно-пористих тіл для неста- ціонарного режиму	52
2.3. Побудова розв'язку задачі теплопровідності при нестационарному режимі сушильного агента.....	58
2.4. Математична модель масоперенесення в процесі симетричного конвектив- ного сушіння деревної пластини.....	64
2.5. Числовий аналіз моделювання температури і вологості у деревній пластині.....	68
Висновки до розділу 2.....	78
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕРМОДИFUЗІЇ НА МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ВОЛОГИ ПРИ СУШІННІ КАПІЛЯРНО- ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ	79
3.1. Математична модель з урахуванням рухомої границі фазового переходу	79
3.2. Дослідження математичної моделі.....	81
3.3. Визначення температури фазового переходу з врахуванням градієнта темпе- ратури у деревній пластині.....	83
3.4. Чисельний аналіз процесів тепломасоперенесення у деревині під час сушіння .	88

	20
Висновки до розділу 3.....	96
РОЗДІЛ 4 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ ПРИ СУШІННІ АНІЗОТРОПНИХ КАПІЛЯРНО–ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ	97
4.1. Математична модель сушіння ортотропного призматичного бруса прямокутного поперечного перерізу	97
4.2. Побудова аналітико-числового методу реалізації математичної моделі. Ідентифікація рухомих границь фазових переходів.	104
4.3. Двовірна математична модель процесу сушіння деревини з рухомою границею фазового переходу	119
Висновки до розділу 4.....	136
РОЗДІЛ 5 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕОЛОГІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ДЕРЕВИНИ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ З УРАХУВАННЯ ЗОНИ ВИПАРОВУВАННЯ	137
5.1. Моделювання впливу передісторії навантаження на реологічну поведінку деревини з урахування зони випаровування	137
5.2. Математична модель реологічної поведінки деревної пластини з урахуванням зони випаровування вологи	143
5.3 Аналіз впливу тепломасоперенесення на напружено-деформівний стан у деревній пластині	151
Висновки до розділу 5.....	155
ВИСНОВКИ	157
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	160
ДОДАТОК А. Значення параметрів реологічної поведінки деревини за експериментальними даними	182
ДОДАТОК Б. Експериментальні та розрахункові значення вологості деревини	184
ДОДАТОК В. Лістинг програмного коду чисельної реалізації математичної моделі	185
ДОДАТОК Г. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи.....	201
ДОДАТОК Ґ. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	205

ВСТУП

Актуальність теми. Інтенсифікація технологій сушіння колоїдних капілярно-пористих матеріалів зумовлює подальший розвиток математичного моделювання процесів тепломасоперенесення, фазових перетворень і деформування, які б адекватно описували закономірності видалення вологи у висушуваних матеріалах. Процеси сушіння вологісних матеріалів, зокрема природного походження, характеризуються значною енергозатратністю. Це зумовлено великою питомою теплою випаровування вологи у значних об'ємах. Процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів супроводжується поглибленням зони випаровування вологи у середину матеріалу. Наявність рухомої границі фазових перетворень на межі розділу фаз з різними теплофізичними і механічними характеристиками суттєво ускладнює математичні моделі деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Моделювання тепломасоперенесення з фазовими переходами у процесі сушіння зводяться до розв'язання задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз, а видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. З поглибленням зони випаровування в об'ємі висушуваного матеріалу спостерігається суттєве зростання тиску біля фронту випаровування. Отже, врахування енергетичних витрат кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла у зоні випаровування висушуваних матеріалів, його впливу на процеси деформування дозволяє встановити закономірності формування кінцевого продукту із заданими фізико-механічними та структурними характеристиками із зменшенням тривалості процесу сушіння.

Тому існує об'єктивна необхідність побудови математичних моделей неізо-термічного вологоперенесення і дослідження впливу термодифузії на масо перенесення і деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Такі математичні моделі та методи аналізу дадуть змогу розробляти нові та вдосконалювати існуючі технологічні

процеси гідроскопічного оброблення органічних матеріалів, зокрема деревини.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування у капілярно-пористих матеріалах у процесі конвективного сушіння з рухомими межами фазового переходу, розроблення та вдосконалення аналітико-числових методів реалізації таких моделей для областей з рухомими межами.

Для досягнення поставленої мети передбачено вирішення таких задач:

- синтезувати математичну модель тепломасоперенесення з врахуванням границь фазового переходу для капілярно-пористої пластини;
- побудувати математичну модель реологічної поведінки капілярно-пористої пластини в умовах неізотермічного волого перенесення з врахуванням рухомих меж зони випаровування;
- побудувати двовимірну математичну модель тепломасоперенесення анізотропних середовищах з врахуванням границі фазових переходів;
- розробити ефективні аналітично-числові методи та прикладне програмне забезпечення для реалізації таких математичних моделей;
- провести обчислювальні експерименти та встановити закономірності впливу неізотермічного волого перенесення та в'язкопружного деформування на кінетику фазових переходів у процесі сушіння деревини.

Об'єкт дослідження – процес конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів.

Предмет дослідження – нелінійні математичні моделі та аналітико-числові методи аналізу процесу конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з рухомими межами випаровування вологи.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано такі методи дослідження:

- методи механіки спадкових середовищ і математичної фізики для розроблення математичних моделей;
- методи інтегральних перетворень, скінченних різниць, варіаційні та апроксимаційні методи для реалізації математичних моделей;

- методи об'єктно-орієнтованого аналізу та проектування програмного забезпечення;
- методи статистичного моделювання для перевірки адекватності моделей.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:

- побудовано нову нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомої границі зони випаровування вологи, яка, на відміну від інших, дає змогу визначити зміну температурно-вологісних полів у висушуваній деревині у довільний момент часу залежно від координати фазового переходу, теплофізичних характеристик матеріалу, нестационарних режимних параметрів агента сушіння;
- отримав подальший розвиток аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення, тривалості процесу сушіння для нестационарних багатоетапних режимів агента сушіння з врахуванням зміни границі фазового переходу та температури фазового переходу;
- побудовано нову двовимірну нелінійну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів, яка дозволяє врахувати вплив головних компонентів та орієнтації осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному тілі;
- вперше узагальнено та обґрунтовано аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазового переходу у процесі конвективного сушіння та встановлення зміни рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням анізотропії теплофізичних характеристик матеріалу;
- побудовано нову математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи та отримано узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені аналітико-числові методи, алгоритмічне та програмне забезпечення можуть бути використані для створення систем автоматизованого розрахунку температури, вологовмісту, тиску та компонентів напружень під час сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини з урахуванням зони випаровування вологи та змінних технологічних параметрів агента конвективного сушіння.

Отримано розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів тепловологоперенесення, часу сушіння, для якого відносна насиченість досягає границі фазового переходу, та повного часу конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини.

Результати дисертаційної роботи використано в ТзОВ «Суховільський ДОК» (Городоцький р-н, Львівська обл., акт від 21.05.2018 р.) для аналізу розподілів температури, вологовмісту та компонентів в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи, що дає можливість обґрунтування режимних змінних параметрів конвективного сушіння деревини за умови забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України: “Моделювання систем”, “Проектування CAE/CAD/CAM систем” та “Автоматизовані системи моделювання об'єктів і процесів” (акт від 11.12.2017 р.).

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачеві. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: [106, 117, 122, 193, 198] – розроблення нелінійної математичної моделі напружень і деформацій з урахуванням границі фазових переходів; [19, 109, 130, 191, 192, 194, 196] – аналітично-числові методи, реалізація математичних моделей; [105, 113, 123, 190, 200] – математичне моделювання закономірностей вологоперенесення урахуванням границі фазових переходів; [28, 31, 112, 199] – розроблення програмного забезпечення для реалізації математичних моделей.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи висвітлено у доповідях та обговорено на:

- X міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології», SAIT-2008 (м. Київ, 2008 р.);
- Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту», ISDMCI – 2011(м. Євпаторія, 2011 р.);
- VI науково-практичній конференції з міжнародною участю «Математичне та імітаційне моделювання систем», МОДС – 2011 (м. Чернігів, 2011 р.);
- IV международной практической конференции «Современные энерго-сберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов)», СЭТТ – 2011 (м. Москва, 2011 р.);
- VIth International Conferences on Computer Science and Informational Technologies, CSIT – 2011, (м. Львів, 2011 р.);
- XIII Міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології», SAIT – 2011, (м. Київ, 2011р.);
- 16-th International Conferense «System Analysis and Informational Technologies», SAIT – 2014, (м. Київ, 2014 р.);
- Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту» (м. Херсон, 2014 р.);
- International conference «Advanced computer information technologies» (Чеська Республіка, м. Чеське Будейовіце, 2018 р.);
- XIIIth International Conferences on Computer Science and Informational Technologies, CSIT – 2018, (м. Львів, 2011 р.);
- 15-th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems, CADSM-2019 (Polyana-Svalyava, 2019);
- Науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу НЛТУ України в період з 2008–2018 рр.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕСУ СУШІННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ

У розділі подано огляд та проведено аналіз літератури в області математичного моделювання неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи.

1.1. Сучасний стан математичного моделювання фізичних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням зони випаровування

Інтенсифікація процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема природного походження, полягає у вирішенні взаємопов'язаних завдань. До них можна віднести такі [9, 10, 27, 95, 102, 149]:

- дослідження та прогнозування теплофізичних, механічних і технологічних властивостей висушуваних матеріалів;
- вивчення та обґрунтування режимів осушування на основі теоретичних та експериментальних досліджень процесів деформування та зовнішнього і внутрішнього тепломасоперенесення;
- розрахунок та обґрунтування параметрів конструкцій лісосушильних камер.

Відомо, що процес сушіння матеріалів може супроводжуватися коробленням або утворенням тріщин [7, 9, 135, 136]. Це пов'язано з тим, що стягуючий тиск в рідині (викликаний капілярними силами) і розпираючий тиск пароповітряної суміші (істотний при сушінні з кипінням), що діють на пористий скелет, зумовлює переупакування структури та перерозподілу структурного простору у капілярно-пористих матеріалах. З іншого боку, нерівномірність розподілу цих тисків обумовлює появу внутрішніх напружень, деформування та утворення тріщин. Тому важливим завданням є дослідження і визначення динаміки внутрішніх напружень. Їх значення може перевищити межу міцності і порушити суцільність матеріалу.

Застосування системного аналізу [77] до вирішення вище наведених задач з використанням математичного моделювання дає можливість обґрунтувати параметри оптимальної реалізації процесу сушіння. Такий підхід також дозволяє обрати найбільш раціональний спосіб керування цим процесом. Зокрема, метою може бути отримання заданої якості висушеного матеріалу в реальних виробничих умовах.

Одним з найбільш використовуваних та перспективних способів сушіння деревини є конвективний. Тому важливими є роботи [1, 2, 18, 33, 147] щодо розроблення математичних моделей внутрішнього і зовнішнього тепломасоперенесення з урахуванням рухомих меж випаровування вологи для такого технологічного процесу. Однак для побудови математичної моделі приймається ряд суттєвих допущень. Це, насамперед, зумовлено складністю структурної будови деревини як природнього полімерного матеріалу [25, 155]. Сформульовані математичні моделі процесу сушіння деревини з врахуванням рухомих меж зони випаровування вологи дозволяють побудувати ефективні технологічні режими. Такий підхід є актуальним ще й тому, що проведення у повному обсягу експериментальних досліджень щодо конвективного способу сушіння в силу великої енергозатратності та довго тривалості є практично неможливими [60, 97].

Фазовими переходами у середовищах називають перехід речовини із однієї фази у іншу при зміні термодинамічного стану системи. Вони розділені між собою поверхнею розподілу [1, 5, 39, 54, 184, 185]. При цьому кожна фаза характеризується визначеним хімічним складом та термодинамічними властивостями. Основною характеристикою фазових переходів є певна температура. Характерною ознакою є те, що фази знаходяться у стані термодинамічної рівноваги (точка фазового переходу). У літературі наводиться класифікація фазових переходів [66, 69, 143]. Згідно неї, для фазових переходів першого роду характерним є те, що в точці фазового переходу спостерігається виділення або поглинання тепла та зміна об'єму. З точки зору зміни термодинамічних параметрів, до фазових переходів першого роду відносяться ті, які характеризуються рівністю питомих енергій Гіббса

(термодинамічних потенціалів) двох фаз в точці фазового переходу. Однак, перші похідні енергій Гіббса за температурою та тиском зазнають скачкоподібні зміни. Слід зазначити, що в точці фазового переходу на температурній залежності ентропії питомого об'єму, а також ентальпії є розриви [5, 39, 54]. До таких процесів, окрім сушіння різних капілярно-пористих матеріалів, відносяться: перетворення твердого тіла у рідке (плавлення); зворотній процес (кристалізація); перетворення рідкого – у пару (випаровування, кипіння); різні кристалічні модифікації (поліморфне перетворення) і т. д. [5, 88, 143].

Дослідження механізму поглиблення зони випаровування висушеного матеріалу вперше експериментально здійснено Т. Шервудом [69, 149]. Подальші теоретичні та експериментальні дослідження підтвердили наявність поглиблення поверхні випаровування [39, 132]. У різних капілярно-пористих матеріалах існують декілька підходів у моделюванні процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з врахуванням руху поглиблення зони випаровування. Зокрема, критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах [39, 54]. Однак, його експериментальне визначення є затрудненим.

При іншому підході розглядається моделювання процесу видалення вологи у рамках задачі Стефана [23, 29, 31, 149]. Такі задачі є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води у процесі сушіння зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз. Тому, видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. З поглибленням зони випаровування в об'ємі висушеного матеріалу спостерігається суттєве зростання тиску біля фронту випаровування. Беручи до уваги енергетичні витрати кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла, у зоні випаровування розглядаються різні підходи для представлення моделі зони випаровування [15-17, 37, 40, 144-146, 152].

Для деяких моделей характерним є те [26, 60, 98, 149], що опис рівняння містить коефіцієнт фазового переходу. Він характеризує інтенсивність локального пароутворення. Причому цей коефіцієнт в ході сушіння змінюється від 0 (перенесення тільки у вигляді рідини) до 1 (перенесення тільки в паровій фазі).

Великі труднощі у визначенні цього коефіцієнта змушують в інженерних розрахунках відмовитися від завдання фактичного закону його зміни в ході процесу і проводити розрахунок за спрощеними математичними моделями, зокрема для різних значень від нуля до одиниці. Даний механізм повністю реалізується при сушінні непористих матеріалів, до числа яких відносяться полімери. До нього близькі також умови сушіння колоїдних капілярно-пористих тіл з мікропорами ($r_{\text{опр}} \leq 10^{-7}$ м).

Найбільш характерною особливістю аналізу та синтезу таких процесів є те, що математичні моделі є нелінійними. Процес, який досліджується, ускладнюється ще й тим, що є наперед невідома топологія границь між різними фазами. Як правило, у літературі розглядаються класичні представлення однофазної та двофазної задачі Стефана [37, 40, 96, 170]. У цих математичних моделях на поверхні розділу фаз окрім умов ізотермічності, використовується закон збереження енергії з врахуванням скритої теплоти. Іншим підходом до розв'язування задач про фазові переходи (задачі Стефана) є перехід до ентальпійного формулювання отриманого із припущення ергодичної гіпотези про те, що ефективні властивості гетерогенного матеріалу не залежать від досліджуваного взірця. Основна ідея підходу полягає у введенні ефективної теплоємності, яка включає теплоту фазового переходу [51, 59, 151]. Використання дельта-функції Дірака дозволяє використовувати єдине рівняння енергії для всієї області [150, 151]. Така ентальпійна форма представлення рівняння енергії використовується для аналізу багатовимірних моделей Стефана [34, 58].

Математичному моделюванню процесів, які протікають під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням рухомих меж зони випаровування присвячений цикл робіт [18, 19, 27, 30, 36, 44, 108]. У них використані підходи для математичного моделювання напружено-деформівного стану у тонкому шарі матеріалу у процесі конвективного сушіння. Характерна особливість таких моделей пов'язана зі специфікою об'єкта досліджень. Вона полягає у моделюванні в'язкопружної поведінки у насиченій області. Процес випаровування характеризується фронтом капілярних менісків. Оскільки розмірності двофазної зони суттєво залежать від інтенсивності випаровування та змінюються з урахуванням

неоднорідності середовища, то така постановка у математичних моделях дозволяє з достатньою точністю інженерної практики адекватно описувати процеси конвективного сушіння пористих середовищ з мікрооднорідною структурою [44, 139].

Детальне вивчення масоперенесення при ізотермічному сушінні недеформуючого середовища проведено в роботах [29, 30, 34, 35, 44, 48, 87, 132, 149]. Розглянуто чотири механізми перенесення вологи, можливих в ізотермічних умовах: фільтрація рідини в порах, обумовлена градієнтом тиску в рідині; фільтрація рідини в плівках, обумовлена градієнтом розклинюючого тиску; дифузія пари і переконденсація, обумовлена градієнтом парціального тиску пари; конвекція пароповітряної суміші, обумовлена градієнтом тиску в газі. Для висушеного середовища в загальному випадку можна виділити чотири характерні зони: суха зона; зовнішня двофазна зона, де поряд з сухими порами є ізольовані рідкі включення; внутрішня двофазна зона, де існує зв'язана система заповнених рідиною пор; повністю насичена зона. Межі цих зон при сушінні поступово відсуваються всередину середовища.

Строгий математичний опис процесу сушіння включає перенесення вологи і теплоти в капілярно-пористому тілі під дією градієнтів концентраційного, термічного і фільтраційного потенціалів включає систему диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку [63, 70, 140, 149]. Найбільшу практичну зацікавленість представляють моделі, які описують кінетику гідро- і гігротермічних процесів в системі капілярно-пористе тіло - навколишнє середовище з урахуванням явищ зовнішнього і внутрішнього волого- і теплообміну [47, 48, 123, 124, 149]. Об'єктивна оцінка адекватності опису зовнішнього перенесення з використанням відомих критеріальних залежностей зумовлює допустиму похибку.

При вивченні процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів з колоїдними властивостями виникають принципові труднощі. Зокрема, вони зумовлені суттєвою роллю поверхнево-капілярних сил. На дослідження цих особливостей спрямовані сучасні підходи до моделювання процесів тепло- та масообміну [94, 100]. Математична модель взаємопов'язаного тепломасонесення [30, 73, 110, 111] з єдиних позицій описує процеси неізотермічного сушіння, сорбції та двофазної

фільтрації. Рівняння перенесення отримані в [30, 75, 78, 79] методом усереднення за елементарним об'ємом середовища (квазігомогенне наближення), не дозволяють, зокрема, дати детальні описи фізичних явищ на міжфазних межах (фазові переходи), розглянути перенесення різних типів зв'язаної і вільної води. В роботі [14, 44] представлені результати дослідження динаміки розвитку нестационарного перенесення маси, імпульсу і енергії всіх фаз колоїдного капілярно-пористого матеріалу з урахуванням широкого спектра фізичних факторів. Макроскопічний опис тепло-фізичних процесів виконано в рамках механіки багатофазних систем [20, 43, 61]. Континуальні рівняння для макроскопічних параметрів рідкої, твердої і газоподібної фаз системи отримані методом об'ємного усереднення відповідних мікрорівнянь для кожної з фаз окремо. Розроблено опис гідродинамічних процесів в анізотропному колоїдному капілярно-пористу тілі з гідрофільними властивостями шляхом застосування додаткового усереднення за трьома об'ємами – вільної води і води граничних шарів (в змочуючих плівках і тонких прошарках).

У ряді робіт [2, 4, 41, 48, 53, 60, 65, 107, 171, 174] розглянуті процеси високотемпературного сушіння капілярно-пористих матеріалів. Відзначено, що особливості високотемпературного процесу сушіння відповідно до їхнього фізичного змісту близькі до задачі Стефана. Так, наприклад, у роботі [65] розглянуто задачу тепломасоперенесення з урахуванням поглиблення зони випаровування при сушінні. Отримано аналітичні та наближені розв'язки задачі. Для визначення швидкості заглиблення вирішувалося трансцендентне рівняння, що впливає з умов Стефана на межі фазових переходів. Вважалося, що в сухій зоні температурні криві є лінійними. Однак при вирішенні завдання нехтувалось градієнтами перенесення у вологій зоні тіла, а також припускалось, що теплота, яка підводилася за рахунок теплопровідності сухого шару, цілком витрачається на випаровування води, що може відбуватися тільки при початковій температурі тіла дуже близької до температури насичення води.

Система диференціальних рівнянь тепломасообміну в процесі сушіння пористих матеріалів з хаотичною структурою запропонована у працях [48, 140]. Вона замикається за допомогою рівняння ізотерми десорбції. Це дозволяє врахувати

фазові переходи без введення спеціальних початкових членів. Тут наводяться зауваження з приводу використання лінійного закону Дарсі для моделювання теплообміну у матеріалах з такою структурою.

1.2. Аналіз математичних моделей та методів аналізу процесів тепломасоперенесення з урахуванням рухомих меж фазових переходів

Під задачею Стефана у широкому сенсі розуміють клас математичних моделей, які описують в основному такі теплові та дифузійні процеси, які супроводжуються фазовими переходами з поглинанням або виділенням прихованого тепла. Розв'язок задачі Стефана полягає в обчисленні температурного (або концентраційного) полів та визначення стану міжфазних границь у різні моменти часу [1, 55, 64, 66, 69, 70, 73, 87]. Принципова складність під час розв'язку даного класу задач пов'язана з тим, що рухомі границі формують змінні області, а положення цих границь є невідомим. Необхідні рішення ідентифікації, як правило, визначаються в ході розв'язку. Дослідження таких задач суттєво ускладнюється тим, що їх математичні моделі представляють собою нелінійні крайові задачі теорії тепломасопровідності. Загалом, всі задачі, які характеризуються наявністю шуканих змінних границь, відносяться до числа суттєво нелінійних задач з розривом градієнта температури на фронті розподілу фаз. За рідкісним виключенням, задачі з фазовими переходами не мають точних розв'язків. Відомі точні розв'язки є вкрай обмеженими [1, 2, 39, 65]. У зв'язку з цим, широкого розповсюдження при розв'язуванні задач Стефана набуло використання наближених аналітичних методів. Задачі Стефана на сьогоднішній день часто трактується як проблема обчислювальної математики. При цьому пропонуються різні варіанти розв'язку із застосуванням явних та неявних схем, «зв'язаних» з рухомим фронтом [22, 42, 101, 133].

З математичної точки зору крайові задачі теплопровідності в області з рухомою межею (так звані узагальнені крайові задачі) принципово відмінні від класичних задач теплопровідності. Тут проблематичними є застосування класичних методів поділу змінних, інтегральних перетворень Фур'є. Це пов'язано з тим, що вдається узгодити розв'язок рівняння теплопровідності з рухом межі в області теплоперенесення. Застосування класичних методів було успішним для задач, коли

закон переміщення межі наперед є заданим [1, 51, 73, 158, 165]. Точні розв'язки задач Стефана вдавалося отримати за допомогою вдаливих допущень, штучних прийомів, зокрема для обмеженої кількості випадків руху межі – лінійного або параболічного. Для цього також використовувалися класичні методи теорії рівнянь математичної фізики: теплових потенціалів [39]; контурного інтегрування [40]; розкладання шуканої функції в ряд [96]; «миттєвих» власних функцій Грінберга та інші.

У працях проаналізовано найбільш відомі чисельні методи [5, 21, 45, 72, 83] розв'язку задачі Стефана. Також описано нові методи та підходи щодо вибору найефективнішого з них, виходячи з заданої точності та швидкості розрахунків. Порівняння проводилися із результатами розв'язку задачі рухомої границі фазового переходу «лід-вода». Зроблені висновки поширюються і на інші багатовимірні та багатофронтіві постановки задачі Стефана. Наведена математична модель та представлений короткий опис числових методів, вказані межі їх застосування, переваги та недоліки. Показано, що використання явної схеми призводить до значного збільшення часу розрахунків і може давати нестійкий розв'язок. Таким чином, для одновимірних однофронтівих задач Стефана найефективнішим є метод «виловлювання» фронту у вузол сітки з використанням неявної схеми. Для багатовимірних багатофронтівих задач – метод ентальпії з використанням неявної схеми, який розроблений авторами [83, 84].

Для розв'язування багатовимірних задач тепломасоперенесення з фазовим переходом використання числових методів з явним виділенням границі розділу фаз в багатьох випадках супроводжується з алгоритмічними та обчислювальними складностями [3, 8, 46, 49, 101, 103, 159]. Тут широке поширення отримали методи наскрізного розрахунку. Для цього використовується узагальнене формулювання класичної задачі Стефана. На основі методів розв'язку квазілінійних задач теплопровідності будуються відповідні числові методи розв'язку задачі Стефана [166, 172]. У таких задачах використовується також ентальпійне формулювання задачі Стефана та економічні різницеві схеми [74, 99, 101, 181, 203].

В останні роки найбільшого поширення отримав метод контрольного об'єму [58, 59] для розв'язування даних задач. За допомогою даного методу (інтегро-

інтерполяційного методу) була отримана дискретна постановка задачі Стефана. Вона зводиться залежно від розмірності задачі до задачі знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьох-, п'яти- або семи діагональною матрицею. Розв'язок таких систем отриманий за допомогою методу прогонки (для одновимірного випадку) та методу змінних напрямків (для дво- та тривимірного випадків).

Проведено чисельне моделювання модифікованої постановки класичної задачі Стефана у напівпрозорих сірих середовищах при різних оптичних властивостях границь [86, 154, 162, 178]. Наведено термодинамічне обґрунтування для здійснення фазового переходу у рівномірних умовах з врахуванням проникливості границь для випромінювання. Визначені значення температур, результуючого радіаційного потоку випромінювання, динаміку розподілу фаз та еволюцію зростання температури. Показано, що модифікована класична постановка дозволяє отримувати стабільні результати у широкому діапазоні оптичних параметрів поверхні.

У багатьох працях [1-10, 137, 138], як правило, розглядається однофазна постановка задачі Стефана у напівпросторі. Досліджуються процеси кристалізації рідкої або плавлення твердої фази при температурі фазового переходу під дією відповідної сталої температури на границі. У працях [131, 182, 183] розглядалася двофазна постановка задачі про «тепловий удар» у контактуючих напівпросторах, які заповнені різними фазами, що знаходяться під дією постійних температур відмінних від температури фазового переходу. В цих постановках на поверхні розподілу фаз крім умови ізотермічності, проаналізовано також співвідношення, яке виражає закон збереження енергії з врахуванням прихованого тепла [96, 141]. Також увагу приділено однофазній постановці задачі [140, 141] про промерзання води у напівпросторі під дією змінної температури на границі. Для такої постановки задачі Стефана наведений розв'язок у вигляді степеневого ряду за просторовою змінною та проаналізовано розв'язок типу «біжучої хвилі».

Принципово нова точка зору щодо задачі Стефана відображена у [1, 2, 101, 103, 133]. Основна ідея такого підходу полягає у введенні поняття «ефективної» теплоємності. Ця величина містить в собі також приховану теплоту фазового

переходу, яка виділяється на поверхні розподілу фаз. Це дає можливість із використанням дельта-функції Дірака записати єдине квазілінійне рівняння енергії. Зокрема, умова Стефана є наслідком цього рівняння. Використання методу згладжування коефіцієнтів дозволило здійснити числову реалізацію навіть для нестационарного тривимірного випадку. Така ідея щодо використання ентальпійної форми рівняння енергії послугувала також для подальшого якісного аналізу багатовимірної задачі Стефана [103, 133, 180].

У ряді робіт проводиться теоретичне обґрунтування застосування методу оцінок для розв'язків задачі Стефана [74, 103]. Метод оцінок припускає отримання диференціальних і інтегральних нерівностей для рівнянь параболічного або еліптичного типу. Безпосередня побудова таких нерівностей для задачі Стефана нашоувується на значні труднощі на границі фазового переходу.

У ряді досліджень [51, 54, 58, 59, 96] розглядається задача Стефана не в класичній постановці, а як граничний випадок більш загальної квазілінійної задачі про фазовий перехід в спектрі температур. Показано, що при конкретних умовах існує тотожність між розв'язком квазілінійної задачі і деякої задачі для оцінки розв'язку задачі Стефана. Сформовані принципи забезпечують можливість побудови наближених розв'язків задачі Стефана з різними граничними умовами.

Цілком ефективним методом розв'язку крайових задач теплопровідності, коли рух межі заздалегідь невідомий, є метод інтегральних перетворень Лапласа [58, 59, 70, 103]. Практичне використання даного методу передбачає обчислення похідних будь-якого порядку від виразів спеціального виду в загальному члені ряду. У деяких випадках метод дає можливість в області з довільно рухомими межами отримати аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності для класичних граничних умов.

Глибокий аналіз аналітичних методів дослідження теплоперенесення з урахуванням рухомих меж фазових переходів проведено в працях [2, 11, 16, 17, 26, 39, 64, 169]. Аналітичні методи дають можливість отримати розв'язок для температури як функції координат і часу. Серед основних аналітичних методів можна виділити наступні: 1) розділення змінних (метод Фур'є); 2) метод продовжень; 3) метод похідних

розв'язків; 4) метод Дюамеля; 5) метод інтегральних перетворень; 6) операційний метод; 7) метод функції Гріна; 8) метод відображення (метод джерел).

Зупинимося на огляді аналітичних методів розв'язання одного з найважчих класів крайових задач нестационарної теплопровідності, що відносяться до областей з рухомими межами. Досить часто аналогічні задачі розв'язуються чисельними методами [59, 61, 76, 99, 133]. Однак недоліком підходу, заснованого на застосуванні чисельних методів, є необхідність виконання значної кількості обчислювальних операцій і обмежені можливості для аналітичного дослідження. Представлення розв'язку задачі Стефана в аналітичній чи наближеній формах має велику теоретичну цінність і практичну значимість. Це відкриває ширші можливості для моделювання, оптимізації та управління тепло- і масообмінними процесами.

Перші спроби отримати аналітичним шляхом точний розв'язок крайової задачі узагальненого типу в області з рухомою межею за довільним законом приводили до систем інтегральних рівнянь Вольтера II роду (або інтегро-диференціальних рівнянь). Встановлювалися лише якісні результати для такого роду системи, доводилося існування розв'язку і його єдиність [148].

Вирішення цієї проблеми значно просунулося після виходу в світ серії фундаментальних робіт [35]. Було отримано функціональні перетворення для запису крайової задачі теплопровідності узагальненого типу в рухомій системі координат. У такій системі перетворене рівняння теплопровідності допускало точний розв'язок класичним методом поділу змінних для досить широкого класу нових, однак заданих законів руху межі для відповідних граничних умов. Надалі було отримано точний розв'язок першої узагальненої крайової задачі в області з межею випаровування [52, 140, 157, 163, 204], що рухається по довільному закону в декартовій, циліндричній і сферичній системах координат.

Квазілінійне рівняння теплопровідності лежить в основі ефективних процедур наближеного розв'язку задачі Стефана. Нелінійності у цій задачі змінюють не тільки кількісний характер теплових процесів, а й якісну картину їх протікання [167, 168]. Вони значно ускладнюють математичні моделі теплових процесів. Багато в чому ці складнощі зв'язані з неможливістю застосування для нелінійних задач принципу суперпозиції розв'язку.

Складність отриманні аналітичних розв'язків задач теплопровідності в анізотропних тілах [141] пов'язана з наявністю змішаних похідних у диференціальних рівняннях. Це унеможливує використання класичних методів математичної фізики. Окрім того, на відміну від ізотропних тіл потоки на границях анізотропних тіл завжди містять всі компоненти тензора температур. Оскільки більшість теплозахисних матеріалів, зокрема для авіаційної та ракетно-космічної теплотехніки є анізотропними (графіти, графітовмісні, композиційні матеріали і т.д.), то необхідність у таких розв'язках важко переоцінити. Тому отримання аналітичних розв'язків задач анізотропної теплопровідності актуальне не тільки для тестування числових методів задач тепломасоперенесення, а й для точного аналізу поведінки температурних полів у анізотропних тілах.

Однією з ефективних процедур, які зручні для переходу до інженерних методів розрахунку є коміркові моделі. Вони використовують математичний апарат теорії ланцюгів Маркова [62, 63]. Коміркове представлення процесів перенесення застосовувалося авторами досить давно. Нова хвиля зацікавленості даним підходом виникла після опублікування монографії [134]. У ній було описано узагальнене застосування коміркових моделей для моделювання хімічних реакторів, механічних процесів у дисперсних середовищах [63], процесів термічної обробки дисперсних матеріалів [139, 140]. Особливістю коміркової моделі є представлення рівнянь балансу для малого об'єму середовища, яке допускає безпосередню ідентифікацію параметрів моделі за локальним параметром стану процесу. Параметри стану організовуються у вектор стану. Його еволюція описується перехідною матрицею (аналог матриці перехідних ймовірностей у теорії ланцюгів Маркова). Ця модель є інваріантною до обмежень на лінійність процесу, зокрема на сталість коефіцієнтів перенесення та зовнішнього тепловологообміну.

Запропонований новий підхід до моделювання процесів тепломасоперенесення у середовищі з фазовими переходами «рідина-пара» методом сіткових рівнянь Больцмана (LBE) [62, 63]. За наявності границі розподілу фаз необхідно розглядати рівняння перенесення енергії. Для цього вводиться другий комплект функцій розподілу LBE у формі пасивного скаляру. Він описує перенесення внутрішньої енергії. Для усунення невизначеності дифузії енергії на

границях розділу фаз з великим стрибком густини введені спеціальні «псевдосили». У рівнянні енергії враховуються теплопровідність та робота сил тиску. Важливим є те, щоб у методі LBE можна було б використати алгоритм наскрізного розрахунку границі розділу фаз. Тому виділення та поглиблення прихованої теплоти фазового переходу враховується у рівняння у внутрішній області тонкого перехідного шару від рідини до пари. Проведено ряд простих тестів, які демонструють деякі аспекти досліджуваних процесів. Показано виконання галілеєвської інваріантності та подібність процесів теплопровідності. Метод має малу схемну дифузію внутрішньої енергії. Він може бути застосований для моделювання широкого класу течіння двофазних середовищ з тепломасоперенесення.

У теперішній літературі представлено і деякі альтернативні методи розв'язування задач теплопровідності з фазовими переходами першого роду. Описаний клітинно-автоматний алгоритм розв'язку задачі Стефана був застосований для моделювання процесів зонного вирощування кристалів [50]. Тема клітинних автоматів дуже актуальна, оскільки область їх застосування практично безмежна. Не дивлячись на своєрідну невизначеність і неоднозначність, клітинні автомати притягують своєю простотою та універсальністю. У роботі [50] продемонстрована можливість клітинно-автоматного моделювання процесів теплопровідності для одновимірного випадку. Використовуючи досить прості правила взаємодії, отримано кількісне співпадіння результатів клітинно-автоматного моделювання з аналітичним розв'язком рівняння теплопровідності. Подальше вдосконалення запропонованого клітинно-автоматного методу є актуальним і для процесів теплопровідності, які супроводжуються фазовими переходами.

Задачі, які пов'язані з визначенням оптимального керування температурними полями з фазовими переходами є відносно новими та поки що мало вивченими [1-4, 6, 103, 107]. До них належить оптимізація отриманих відливок у металургії, технології зварювання, відтавання мерзлих ґрунтів і т.д. Існує декілька загальних підходів до вирішення даної проблеми, а саме: прямий метод оптимізації; використання методів теорії варіаційного числення та оптимального керування: метод Лагранжа, метод прямих у поєднанні з принципом максимуму Понтрягіна, за допомогою яких будуються рівняння екстремумів для оптимальних рішень.

У роботі [22] розв'язується одновимірною задачею оптимального керування плавленням та кристалізацією речовин при ряді обмежень – нерівностей. Функцією керування є інтенсивність тепловиділення. Повна варіаційна задача розбивається на дві почергові підзадачі: оптимізації плавлення та кристалізації речовин. Аналітичне дослідження побудоване на методі Лагранжа. Знайдена варіація функціоналу, сформульована спряжена задача для множників Лагранжа. Чисельний розрахунок варіаційної задачі здійснюється прямим методом на основі ентальпійного підходу та градієнтного методу [5]. Описаний підхід для тривимірних задач розвинути у [59]. У [4] отримано оптимальне рівняння для квазістаціонарної задачі Стефана, коли границя фазового переходу рухається вздовж твірної, не змінюючись з постійною швидкістю. Функцією керування є тепловий потік, критерій оптимальності – мінімальне відхилення границі фазового переходу від заданого. Апроксимуючі задачі розв'язуються двоїстим регуляризованим методом. Для розв'язку спряженої задачі застосовується метод Гальоркіна.

Одним із способів подолання обчислювальних складнощів може бути запропонований і описаний підхід для розв'язання задач перенесення тепла з урахуванням фазових перетворень за допомогою нейронних мереж RBF (радіальних базисних функцій) [97]. Нейронна мережа представляє собою високо паралельну динамічну систему з топологією направленої графа. Вона може отримувати вихідну інформацію за допомогою реакції на вхідну дію. Нейронні мережі як математичні моделі часто є частковими випадками нелінійної регресії. Для підбору коефіцієнтів можна використовувати методи регресійного аналізу. Для розв'язання задачі теплопровідності у роботах [23, 147] пропонується використовувати RBF-мережі (або перцептрон) для апроксимації температурного поля, яке задовольняє умову.

1.3. Аналіз математичних моделей деформування матеріалів у процесів сушіння

Суттєві обмеження щодо оптимізації процесу конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, виникають завдяки високим мінливостям структурно-механічних властивостей матеріалу [9, 10, 29, 67, 68, 108,

115, 116, 149]. Також в процесі сушіння видалення вологи з поверхні деревини характеризуються нерівномірністю і супроводжується всиханням. Оскільки сушіння деревини є нестационарним тепломасообмінним процесом, то всихання матеріалу значною мірою зумовлюється наявністю градієнта тепловологоперенесення. Вагомим чинником є також залежність реологічних властивостей від зміни температури і вологості. Це зумовлює виникнення й розвиток напружено-деформівного стану в матеріалі, що може перевищувати гранично допустимі значення. Це в свою чергу зумовлює до небажаних змін експлуатаційних характеристик матеріалу, що висушується та його зменшення показників якості. Це пояснює утворення тріщин, короблення як на поверхні так і у середині матеріалу. Величини напружень і деформацій в процесі видалення вологи з матеріалу визначаються термодинамічними умовами поверхні його взаємодії з агентом сушіння, видом зв'язку вологи з матеріалом та особливостями зміни капілярно-пористої структури.

Побудова математичних моделей, які описують взаємопов'язані процеси тепломасоперенесення і розвиток деформаційно-релаксаційних процесів під час осушування капілярно-пористих матеріалів, базується на феноменологічних уявленнях механіки спадкових середовищ та методах нерівноважної термодинаміки [30, 67, 68, 110, 111].

Фундаментальні енергетичні та термодинамічні підходи до побудови математичних моделей складних фізико-механічних процесів та методів їх розрахунку розвинули у працях [1, 14, 15–18, 69, 86–88, 90, 92, 93, 94, 144]. Вони отримали визначальні рівняння взаємозв'язаної термомеханіки із урахуванням спадкових властивостей середовища. В основі теоретичного дослідження процесу сушіння капілярно-пористих тіл лежить термодинаміка незворотних процесів.

Математичне моделювання процесу сушіння капілярно-пористих тіл присвячені також роботи [9, 28, 29, 60, 120, 121, 126-128, 130, 149, 177, 178] та інших дослідників. Вважається, що нерівноважний стан системи в довільний момент часу процесу сушіння викликаний неоднорідним розподілом температури, вологовмісту, надлишкового тиску і деформаціями. Зростання ентропії в системах

пов'язане з незворотними процесами теплопровідності, дифузійного, конвективного масоперенесення, фазового переходу, вологотермічного деформування і незворотними перехресними процесами.

На думку багатьох дослідників [9, 60, 104, 120, 121, 149, 156] в процесі сушіння тіло перебуває в об'ємно-напруженому стані і зазнає деформацій під впливом нестационарних полів температури, вологовмісту і загального тиску вологого повітря в порах матеріалу. Виникнення значних перепадів вологовмісту і температури у висушуваному матеріалі зумовлюють появу нестационарних напружень, котрі можуть перевищити гранично допустимі і призвести до появи тріщин (розшарування) і короблення. В свою чергу, нерівномірне всихання шарів матеріалу зумовлює зміну конфігурації капілярної структури, що здійснює вплив на його властивості тепломасоперенесення.

В рамках цього підходу в роботах [11, 29, 30, 67, 68, 110] на основі термодинаміки незворотних процесів побудовано математичну модель у вигляді системи диференціальних рівнянь. Така модель описує взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у в'язко-пружних капілярно-пористих тілах. Для цього повний диференціал вільної енергії зображено у вигляді суми зміни вільної енергії в процесах тепломасоперенесення і деформування із врахуванням можливого руйнування, за яке відповідає додатковий член.

Загальний підхід до моделювання взаємопов'язаного тепломасоперенесення і напружено-деформівного стану, заснований на термодинаміці незворотних процесів [97, 98, 110, 111]. У наукових працях [80, 81, 161] цей підхід застосований до дослідження процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів. В рамках теорії малих в'язкопружнопластичних деформацій розв'язувалася одновимірна задача про власні напруження в тонкій вільній пластині при симетричному сушінні з обох сторін. В роботі [68, 91] запропоновано рівняння тепломасоперенесення в деформованих пружних капілярно-пористих середовищах з урахуванням залежності поверхневих властивостей від температури. Однак, вони не описують наявність незворотніх деформацій, зумовлених процесом всихання. Оригінальна одновимірна модель для визначення напружень і деформацій при сушінні шару органометалевого

гелю запропонована в роботі [64]. Тверда фаза при цьому моделюється мікрооднорідною зв'язаною в'язкопружною структурою. Така мікрооднорідність призводить до виродження двофазної зони в поверхню (фронт) випаровування.

У всіх зазначених роботах тип реологічної поведінки матеріалу приймається незалежним від вологості. Однак, у багатьох випадках реологічні характеристики середовища в сухому і насиченому стані є істотно різними. У зв'язку з цим можна виділити цикл робіт дослідників [24, 131, 153, 179].

В роботі [44] наведені результати чисельного розрахунку тепломасо-перенесення при високотемпературному сушінню недеформуючого матеріалу при нехтуванні дією капілярних сил в двофазній області. Показано, що при інтенсивному підводі тепла є можливим закипання рідини. Також істотну роль грає підвищення загального тиску пароповітряної суміші в середовищі.

Математичні моделі, які описують єдиним підходом весь процес деформування деревини, починаючи від самих малих і закінчуючи самими великими періодами часу деформування, представляються лінійними інтегральними співвідношеннями між напруженнями і деформаціями [4, 57, 82, 89]. Фізичний зміст інтегральних рівнянь полягає у введенні специфічних для кожного матеріалу функції впливу випереджаючих навантажень на деформації в даний момент часу.

Важливими та оригінальними є дослідження тепломасообмінних та деформаційних процесів у середовищах з фрактальною структурою з використанням математичного апарату дробових похідних [56, 93, 114, 128, 130, 160, 175, 176, 188, 195, 201].

Сучасний підхід до моделювання деформаційно-релаксаційних процесів, що базується на теперішніх експериментальних дослідженнях, окрім пружних і еластичних деформацій, враховує і механіко-сорбційну складову деформацій [186-202]. Вважаються, що механіко-сорбційні деформації виникають при циклічних змінах вологості навантаженої деревини. Складність адекватного математичного опису цього феномену полягає в тому, що згідно [186, 187, 189, 202], у випадку змінної вологості швидкість деформацій повзучості навантаженої деревини значно

збільшується, і загальні деформації не являються результатом простого складання вологісних деформацій і деформацій повзучості.

Розроблення математичних моделей в'язкопружних капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння базується на моделях наслідкової повзучості (Р. И. Нигматулин, В.А. Минненков). Рівняння балансу енергії дисипації на поверхні фазового переходу дає можливість сформулювати умови для зони поглиблення випаровування, враховуючи зберігання незворотних деформацій при фазових переходах. Однак такі моделі описують реологічну поведінку різних середовищ для неперервної історії деформування. Для випадку, коли у процесі деформування капілярно-пористих середовищах неявні фазові переходи і процес деформування на їх границі характеризується розривами, то необхідно враховувати вплив передісторії навантаження до фазового переходу на подальший розвиток напружено-деформівного стану середовища.

Тому існує об'єктивна необхідність побудови математичних моделей неізо-термічного вологоперенесення і дослідження впливу термодифузії на масоперенесення і деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Такі математичні моделі та методи аналізу дадуть змогу розробляти нові та вдосконалювати існуючі технологічні процеси гідроскопічного оброблення органічних матеріалів, зокрема деревини, оскільки багаточисленні області застосування таких матеріалів вимагають розуміння закономірностей формування кінцевого продукту із заданими фізико-механічними та структурними характеристиками. Виходячи з проведеного аналізу, визначено мету та задачі досліджень.

Висновки до розділу 1

1. Розглянуто можливі варіанти формулювання та реалізації математичних моделей тепломасоперенесення для дослідження процесу сушіння деревини за наявності поглиблення поверхні випаровування.

2. Існують декілька підходів у моделюванні процесів тепломасоперенесення у матеріалах під час сушіння з врахуванням руху поглиблення зони випаровування.

Зокрема, критерій фазового переходу, що змінюється за координатою тіла, враховується у граничних умовах. При іншому підході моделювання процесу видалення вологи розглядається у рамках задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз, а видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. Тому, беручи до уваги енергетичні витрати кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла у зоні випаровування, враховуються різні підходи для представлення моделі зони.

3. Найбільш характерною особливістю процесів, для яких математичні моделі є нелінійні, є наперед невідома топологія границь між різними фазами. Як правило, розглядаються класичні представлення однофазної та двофазної задачі Стефана. У цих математичних моделях на поверхні розділу фаз окрім умов ізотермічності використовується закон збереження енергії з врахуванням скритої теплоти. Основна ідея полягає у введенні ефективної теплоємності, яка включає теплоту фазового переходу. Використання дельта-функції Дірака дозволяє використовувати єдине рівняння енергії для всієї області. Така ентальпійна форма представлення рівняння енергії використовується для аналізу багатовимірних моделей Стефана.

4. У літературі представлено мало альтернативних підходів до моделювання теплоперенесення у середовищах з врахуванням фазових переходів. Зокрема, описано клітинно-автоматний алгоритм розв'язання одновимірної задачі Стефана для вирощування кристалів та решіткові рівняння Больцмана.

5. З математичної точки зору крайові задачі тепломасоперенесення або узагальнені крайові задачі принципово відрізняються від класичних задач. Залежність характеристичного розміру області випаровування від часу ускладнює застосування класичних методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Аналітичні дослідження здійснювалися для обмежених випадків наперед відомого закону руху границі, наприклад, лінійного або параболічного. Тому встановлювалися лише якісні результати поведінки таких систем.

6. Для чисельних реалізацій математичних моделей тепломасоперенесення з фазовими переходами використовуються два основних підходи. Для першого використовуються методи з виділенням границі розділу фаз на кожному часовому шарі за рахунок використання динамічних незалежних змінних або використання динамічних сіток постійної структури із закріпленням вузлів на границях розділу фаз. Для другого підходу використовуються методи без виділення границі фазового переходу або методи наскрізного розрахунку. Адаптація до границі розділу фаз здійснюється за рахунок використання змінного кроку за часом (ловля фронту у вузол просторової сітки). У цьому аспекті, важливим є варіаційні формування математичних моделей теплоперенесення з використанням методів штрафних функцій.

7. Розроблення математичних моделей в'язкопружних капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння базується на моделях наслідкової повзучості. Однак такі моделі описують реологічну поведінку різних середовищ для неперервної історії деформування. Для випадку, коли у процесі деформування капілярно-пористих середовищах наявні фазові переходи і процес деформування на їх границі характеризується розривами, то необхідно враховувати вплив передісторії навантаження до фазового переходу на подальший розвиток напружено-деформівного стану середовища.

8. Тому існує об'єктивна необхідність побудови математичних моделей неізотермічного волого перенесення і дослідження впливу термодифузії на масоперенесення і деформування при сушінні капілярно-пористих матеріалів з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації. Такі математичні моделі та методи аналізу дадуть змогу розробляти нові та вдосконалювати існуючі технологічні процеси гідроскопічного оброблення органічних матеріалів, зокрема деревини, оскільки багаточисленні області застосування таких матеріалів вимагають розуміння закономірностей формування кінцевого продукту із заданими фізико-механічними та структурними характеристиками. Виходячи з проведеного аналізу, визначено мету та задачі досліджень.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ

У даному розділі побудовано нову нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння анізотропних капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи. У процесі сушіння пластина контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари, а тепло, яке підводиться агентом сушіння, витрачається на випаровування вологи, нагрівання матеріалу і подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом. Вважаємо, що теплові умови на поверхнях пластини однакові і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В процесі сушіння у пластині виникає зона осушених пор та пор, насичених вологістю.

Розвинуто аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Побудовано функцію впливу математичної моделі з однорідними граничними умовами. Встановлені співвідношення для визначення безрозмірної густини пари та тиску пари в довільній точці \bar{z} за товщиною шару. Отримано рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ. Результати другого розділу опубліковані у [6, 7, 16, 19].

2.1. Механізми перенесення вологи в капілярах в нестационарних режимах

Математичні моделі сушіння капілярно-пористих матеріалів ґрунтуються на основі термодинаміки незворотних процесів, законів течіння рідин і газів. Для опису взаємного розподілу фаз використовуються структурні моделі капілярно-пористих середовищ [85, 89]. В роботі [143, 164, 183] на основі дослідження процесу масопровідності деревини показано, що для низькотемпературних процесів сушіння, нагрівання можна обмежитись моделлю паралельних циліндричних капілярів. Таке

наближення дозволяє з однієї сторони отримати математичні моделі для дослідження технологічних процесів сушіння деревини близькі до експериментальних, а з іншої сторони – використати наявні експериментальні теплофізичних характеристик матеріалу. При цьому за характерні розміри капілярів беруться такі величини, в яких капілярний підйом відповідає експериментальним значенням для даного матеріалу. В процесі сушіння в середині матеріалу йде перехід вологи з рідкого стану в газоподібний та виникнення конвективно-дифузійного потоку пари назовні, який є причиною руху газової суміші повітря та пари з деякою середньомасовою швидкістю \bar{v} , що задовольняє закону Дарсі.

Ефективним методом управління перенесенням вологи є зміна температурного градієнта всередині матеріалу. Змінюючи величину і напрям градієнта температури можна створити ефективні умови для переміщення вологи і цим впливати на фізико-хімічні, біологічні та експлуатаційні властивості матеріалу.

В початковий період процесу сушіння вологість на поверхнях матеріалу підтримується на сталому рівні, близькому до границі насичення. Швидкість сушіння при цьому стала. Це так званий період сталої швидкості сушіння, коли запаси вологи в приповерхневих зонах вичерпані, вологість стає меншою границі насиченості і випаровування відбувається у глибину матеріалу. За товщиною утворюється три зони – осушена, двофазна і волога. При цьому рідина переходить з капілярного стану в канатний, а тоді в плівково-менісковий, або стиковий стан [47, 69]. Стикова незв'язана рідина розподілена дискретно, тому її зміна відбувається тільки за рахунок фазових переходів. На швидкість сушіння впливають початковий вологовміст матеріалу, геометричні розміри тіла, температура, відносна вологість, швидкість повітря навколишнього середовища.

Густина капілярної рідини відповідає критичному капілярному тиску. Змочувана в капілярах рідина, якщо капіляри достатньо малі, знаходиться при від'ємних тисках в метастабільному стані, який може призвести до спіноїдального розпаду. В лінеаризованому вигляді залежність між температурою і тиском фазового переходу можна наближено представити так $T_m = T_{mk} + \alpha_{mk} P_n$ [149], де величини T_{mk}, α_{mk} залежать від технологічних режимів сушіння матеріалу. Рідина

в капілярах володіє різними температурами фазових переходів і їх розкид визначає температурну зону фазового переходу – двофазну зону, де співіснують рідина і пара. На зовнішній границі двофазної зони при $\rho = \rho_{\min}$ густина вологи дорівнює критичній, що відповідає максимальним від'ємним тискам капілярної вологи, яка знаходиться в зв'язаному стані. Це зумовлює міграцію вологи до границі області матеріалу. Зліва від цієї границі потік пари дорівнює нулеві. Енергія при цьому терпить стрибок на величину кількості тепла, яку необхідно підвести до границі, щоб перетворити потік рідини в пару. Температура фазового переходу у капілярно-пористому матеріалі залежить і від кривизни поверхні розділу, що визначається характерним розміром капіляра. Однак врахування цього впливу суттєво ускладнює математичні моделі. Якщо дисперсія розмірів капілярів і пор за радіусами мала, то має зміст поняття про поверхню розділу фаз між осушеною і капілярною зонами. В цьому випадку двофазна зона звужується до поверхні і в подальшому розглядається дві зони – осушена і волога.

Перенесення газоподібної речовини в осушеній зоні відбувається різними шляхами: молекулярним шляхом у вигляді дифузії і ефузії; молярно- фільтраційним рухом пароповітряної суміші всередині пор тіла під дією перепаду загального тиску. Рідка волога в пористому тілі може переміщатись шляхом дифузії через скелет (молекулярне перенесення), у вигляді фільтраційного руху під дією сил ваги або гідростатичного тиску (молярне або конвективне перенесення). Рух вологи у капілярно-пористому тілі досить повільний, тому температура вологи дорівнює температурі стінок капілярів. При неізотермічних умовах, характерних для періоду спадної швидкості сушіння, при наявності температурного градієнта всередині тіла виникають допоміжні види масоперенесення. З часом товщина осушеної зони збільшується і швидкість сушіння сповільнюється. При інтенсивному осушенні прогрів вологої зони відбувається досить швидко і процеси внутрішнього випаровування і перерозподілу плівкової води мають набагато менший вплив, ніж процеси видалення вологи внаслідок фазових переходів. Зміна вологовмісту в зв'язку з зміною температури в часі залежать від взаємозв'язку процесів зміни вологи і тепла всередині вологого матеріалу і процесів тепло і масообміну поверхні

тіла з навколишнім середовищем. Для розрахунку оптимального режиму сушіння, вибір якого визначається технологічними змінами в процесі осушення, важливим є вивчення законів перенесення вологи з метою керування ним. Зміна градієнта вологи при швидкісному високотемпературному режимі гідротермічної обробки вимагає строгого контролю жорсткості, збереження ефективності та безпечності режиму сушіння. Основною перешкодою для інтенсифікації процесу сушіння є деформування матеріалу, причиною якого є розвиток поверхневого напруженого стану, який перевищує гранично допустимий. Цей напружений стан створюється недопустимим всиханням, яке виникає в результаті нерівномірного розподілу вологовмісту і температури всередині матеріалу. Розвиток всихання пов'язаний також і з появою напружень. Якщо розтягувальні напруження на поверхні або всередині матеріалу перевищують міцність розтягувальних шарів, то появляються внутрішні або зовнішні тріщини. Рівномірність та симетрія двостороннього осушення матеріалів створюється циркуляцією сушильного агента.

Процеси гідротермічної обробки осушуваних матеріалів є енергомісткими і застосування тепловологообробки є головним заходом по створенню енергоощадної технології їх сушіння. Використання змінних в часі теплових режимів сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, може суттєво заощадити кількість теплової енергії, яка йде на процес, та підвищити показники якості матеріалу. При зменшенні температури сушильного агента знижується температура поверхневих шарів матеріалу, чим створюється додатковий температурний градієнт, який є рушійною силою переміщення вологи в осушуваному матеріалі. При охолодженні сушильного агента зростає його відносна вологість, відбувається вологообробка поверхні матеріалу, завдяки чому йде зменшення внутрішніх напружень. Важливими є час проведення тепловологообробки і її тривалість для різних матеріалів. Для цього потрібна розробка методів дослідження процесів тепломасоперенесення та діагностики напружено-деформованого стану матеріалів і знаходження за результатами діагностики оптимальних значень технологічних параметрів агента сушіння [9, 10, 27]. Питанням моделювання процесів сушіння з врахуванням зміни стану вологи в тілі з

часом, якісному аналізу утворення та динаміки зони осушених пор та двофазної зони присвячені роботи [9-11, 32, 38, 44]. В роботах [51, 137] досліджується ізотермічне осушення шаруватих об'єктів.

Зберегти матеріал від розтріскування у процесі сушіння можна пониженням розтягуючих напружень в результаті зменшення перепаду вологи по січенню. Для цього можна добитись пом'якшенням режиму на початку сушіння і проведенням термообробки в середині і в кінці процесу [10]. Перепад капілярного потенціалу в неізотермічному русі пропорційний перепаду температури, а швидкість руху рідини [69]
$$\bar{v} = -\frac{r \cos\theta}{4\mu_L} \frac{d\sigma}{dt} \frac{\Delta T}{l}$$
 прямо пропорційна температурному градієнту і

радіусу капіляра. До того ж виду термокапілярного потоку відноситься плівкове течіння рідини вздовж поверхні по стінці капіляра при наявності температурного градієнта. Швидкість плівкового руху рідини дорівнює [69]
$$v_{i\bar{e}} = -\frac{h_{i\bar{e}}^2 \varepsilon_T}{2\rho_L \mu_L} \frac{\Delta T}{l},$$
 тобто

лінійна швидкість пропорційна квадрату товщини плівки і температурному коефіцієнту поверхневого натягу ε_T . При наявності перепаду температури в капілярі, повністю заповненому рідиною, може мати місце рух пристінкової рідини. Це явище аналогічне явищу теплового ковзання газу в макрокапілярах. Рух пристінкової рідини обумовлений різними термодинамічними властивостями рідини в дуже тонкому шарі h_{ni} в порівнянні з рідиною в об'ємі, тобто зумовлене взаємодією молекул рідини з молекулами твердого тіла. Швидкість такого руху пристінкового шару не залежить від радіуса $v = \frac{\tilde{\chi}}{T} \frac{\Delta T}{l}$ (термоосмотичний ефект), де $\tilde{\chi}$

– стала, яка залежить від властивостей рідини і товщини пристінкового шару. В дослідях з пористими пластинками з середнім радіусом капілярів 10^{-4} см при перепадах температури від 10 до 40⁰С стала для води $\tilde{\chi} = 5 \cdot 10^{-6}$ см³/сек, а швидкість руху рідини – $0,7 \cdot 10^{-6}$ см/сек. Так як швидкість пристінкового руху рідини, що тече проти потоку тепла, не залежить від радіуса капіляра, а швидкість руху рідини, обумовлена перепадом капілярного потенціалу пропорційна радіусу, то капілярне ковзання рідини буде помітне тільки для мікрокапілярів. Спостереження [13]

показали, що швидкість руху пристінкової рідини в капілярі радіуса $3-5 \cdot 10^{-4}$ см. в 2500 раз менша швидкості руху рідини, викликаної різницею капілярного потенціалу в капілярах радіуса $3-5 \cdot 10^{-2}$ см ($\Delta t = 5$ град/см). Отже, дослідні дані підтверджують незначність теплового ковзання для макрокапілярів в загальному балансі переносу рідини [18].

Підтримання процесу сушіння на рівні, який забезпечує максимальну інтенсивність при мінімальних енергетичних і трудових ресурсах є задачею його оптимізації. При оптимізації приймаються до уваги геометричні параметри осушуваного матеріалу, його початкова вологість, температура середовища і матеріалу. Найефективнішими являються режими, які забезпечують високу якість висушуваного продукту із збереженням його міцності при найбільш високій інтенсивності процесу. В таких режимах параметри сушильного агента координуються станом матеріалу, при якому враховуються особливості будови і властивості матеріалу, його густина, початкова вологість, характер розподілу вологості по перетину матеріалу. В останні роки регламентовані державними стандартами є триступеневі режими, режими з регулярним тепловим потоком, осцилюючі з періодичними циклами підвищення і пониження температури, переривисті, переривчаста робота циркулюючої системи, різноступеневі (для твердих листяних порід деревини, та з безперервною зміною параметрів регулювання за допомогою мікропроцесорної та комп'ютерної техніки).

Процес конвективного сушіння треба організувати так, щоб при достатньо високій інтенсивності внутрішні напруження не перевищували границі міцності. Зберегти цілісність матеріалу можна періодичним зняттям накопичених напружень шляхом проміжкових тепловологообробок водою або розбризканою водою у зваженому стані, або насиченою парою.

При сушінні в першому періоді поверхневі шари матеріалу швидко набувають вологості, значення якої прямує до рівноважного стану. В них розвиваються розтягуючі напруження. В другому періоді, коли поверхневі шари вимушено висохли в розтягнутому стані, можливе виникнення внутрішніх тріщин, тобто у внутрішніх шарах розвиваються напруження розтягу. При проведенні тепловологообробок поверхневі

шари зволожуються, а висока температура ще більше допомагає пластифікації матеріалу. Крім того вирівнюється вологість по товщині матеріалу. Температурно-вологісні режимні параметри середовища диктуються ступенем режиму сушіння. Складним питанням є визначення необхідної тривалості проміжкових тепловологообробок. Її встановлюють на підставі експериментальних даних.

2.2. Побудова математичної моделі сушіння капілярно-пористих тіл для нестационарного режиму

Побудова математичної моделі сушіння капілярно-пористих тіл, зокрема деревини є важливою задачею. На основі розв'язку та дослідження отриманої системи рівнянь можна давати відповідь щодо питання раціоналізації нестационарного процесу сушіння капілярно-пористих тіл. Керуючими технологічними параметрами при цьому є температура сушильного агента, його відносна вологість та швидкість циркуляції.

Постановка задачі тепломасопереносу. Метою даного пункту є побудова математичної моделі процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини на прикладі пластини (шару) товщини $2L$ ($-L \leq z \leq L$). Процес сушіння (видалення вологи) з поверхонь здійснюється під дією конвективно-теплого нестационарного потоку сушильного агента для оцінки впливу на процес змінного в часі теплового режиму сушильної установки. Система диференціальних рівнянь у частинних похідних тепломасопереносу разом з початковими і граничними умовами відображає в аналітичній формі основні технологічні режими процесу сушіння і є його математичною моделлю.

Розглянемо задачу про сушіння капілярно-пористої пластини при дії на її поверхні конвективного потоку тепла. Деревна пориста пластинка віднесена до декартової системи координат. У випадку наявності дисперсії розмірів капіляр і пор слід враховувати наявність двофазної осушеної та рідинної зон.

Нехай капілярно-пориста пластинка обмежена гладкою поверхнею Σ . Пори та капіляри є відкриті і в початковий момент процесу насичені рідиною. Поверхня пластинки контактує з агентом – газовим середовищем, яке є сумішшю сухого повітря та пари. В процесі конвективного сушіння тепло, яке підводиться газом,

витрачається на випаровування рідини, нагрівання матеріалу і подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом. З випарованою вологою тепло частково повертається в газ. Швидкість обміну теплом і масою, якщо внутрішній дифузійний опір малий, залежить тільки від опору примежового шару газу. Товщина і гідродинамічний стан пластини залежать від відносної швидкості газу. Для низькотемпературних режимів сушіння зберігається подібність полів температури і концентрацій [149], що виражається формулою Льюїса.

Рівномірність та симетрія двостороннього процесу сушіння деревини може створювати циркуляцією сушильного агента. Математичну модель сформулюємо, як задачу визначення температури у деревній пластині $T(z, t)$ із змінною в часі границею фазового переходу. Тепломасоперенесення відбувається за товщиною тіла. Математична модель зводиться до розв'язування наступної системи рівнянь в осушеній зоні.

Рівняння перенесення енергії має вигляд [30, 33, 69]:

$$\left(\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F, \quad (2.1)$$

$$L_m \leq z \leq L, \quad 0 \leq L_m \leq L.$$

Тут λ – коефіцієнт теплопровідності, C_v, C_a, C_s – питомі теплоємності пари, повітря, деревного скелету, ρ_v, ρ_a, ρ_s – густини цих же компонентів вологого середовища шару (пластини), F – джерельний член; Π – пористість матеріалу, t – час, $0 \leq t \leq t_{\text{пов}}, t_{\text{пов}}$ – повний час сушіння, L – геометричний розмір деревної пластини.

Якщо водяна пара в зовнішньому середовищі не є насиченою, то відбувається процес випаровування з парового простору тіла та його сушіння від поверхні в глибину тіла. Прийmemo, що капіляри та пори мають однаковий розмір і знехтуємо процесом плівкового масоперенесення. Вважаємо, що умови на поверхнях пластини однакові і процес сушіння симетричний відносно серединної поверхні. В зв'язку з відсутністю дисперсії розмірів пор за радіусами процес сушіння йде однаково по всьому перерізу тіла. При відсутності дисперсії розмірів пор в процесі сушіння в тілі виникає зона осушених капілярів та пор, насичених рідиною. Межа контакту цих

зон у процесі конвективного сушіння поширюється в глибину пористого деревного матеріалу.

Відзначимо, що процес сушіння капілярно-пористих матеріалів не буває повним. В гідрофільних порах деревина залишається волога у вигляді пристінкового шару (зв'язана волога). Плівковий механізм перенесення вологи внаслідок градієнта розклинювального тиску і явища термоосмосу не враховуємо. Вважаємо, що ці процеси під час сушіння деревної пластини мають набагато менший вплив, ніж процеси фазового переходу. В зоні сушіння капілярно-пористих матеріалів присутні повітря та пара води. Надалі будемо вважати, що поперечний розмір капілярів та пор у деревині суттєво більший за середню довжину вільного пробігу наявних молекул. Це дозволяє вирази для потоків повітря \vec{j}_a та пари \vec{j}_v двокомпонентної суміші в осушеній зоні деревної пластини записати так [30, 54]: $\vec{j}_k = \rho_k \vec{v} - D' \vec{\nabla} \rho_k$, $k = a; v$, де ρ_a, ρ_v – густини повітря та пари відповідно; D' – ефективний коефіцієнт бінарної дифузії в порах.

Потік повітря всередину висушуваного матеріалу кількісно значно менший за потік пари назовні, породженої наявністю фазового переходу вода-пара. У зв'язку з цим надалі будемо нехтувати потоком повітря \vec{j}_a , покладаючи $\vec{j}_a = 0$. Будемо нехтувати також локальною зміною густини пари ρ_v , тобто покладемо $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$. Такі припущення приводять до такого рівняння балансу маси пари $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_v = 0$. Вплив капілярно-пористої структури у висушуваній деревині враховується введенням в рівняння Стефана-Максвелла ефективних коефіцієнтів бінарної взаємодії. Система рівнянь Стефана-Максвелла доповнюється рівнянням фільтрації Дарсі з ефективними в'язкістю μ_g та проникливістю K_g [69]

$$v = - \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial z}. \quad (2.2)$$

Прийmemo, що для газової суміші виконується рівняння стану ідеального газу

$$P_g = \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT, \quad (2.3)$$

де P_g – тиск газу в порах; M_a – молярна маса повітря; M_v – молярна маса пари; R – газова стала.

Рівняння для опису процесу конвективного масоперенесення в області $L_m < z < L$ капілярно-пористої пластини приймуть вигляд

$$\rho_a \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial \rho_a}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_v \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.4)$$

де L_m – координата межі контакту газ-рідина всередині пористої пластини.

Використовуючи рівняння стану для газової суміші та закон Дарсі (2.2), запишемо рівняння Стефана-Максвелла відносно ключових функцій ρ_a, ρ_v – густин повітря та пари

$$\rho_a \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_a = 0, \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \left(\rho_v \frac{K_g}{\mu_g} \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_a}{M_a} + \frac{\rho_v}{M_v} \right) RT + D' \vec{\nabla} \rho_v \right) = 0,$$

де K_g – коефіцієнт проникливості, залежний від радіуса та форми пор, μ_g – коефіцієнт динамічної в'язкості газу.

Записані диференціальні рівняння (2.5) чинні в області сушіння деревної пластини, яка обмежена поверхнями (S) та (S^*) . Відзначимо нелінійність системи диференціальних рівнянь (2.5).

На рухомій поверхні зони випаровування (S^*) , $z = L_m$ густину пари можна вважати рівною густині насиченої пари [10]

$$\rho_v = \rho_{v_n} \text{ на поверхні } z = L_m, \quad (2.6)$$

Умови на поверхнях $z = L$ газової зони запишемо так:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + D' \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = -j, \quad \rho_a = \rho_{a_0} \text{ на поверхні } z = L, \quad (2.7)$$

де $j = \tilde{\beta}(\rho_v - \rho_{v,0})$, де $\tilde{\beta}$ – коефіцієнт масообміну. Оскільки задача масоперенесення в подальшому розв'язується в квазістаціонарній постановці (при атмосферному

тиску сушильного середовища) і T_m – температура фазового переходу, залежна від тиску насичення, то вважатимемо $T_m = f(P_n)$, де P_n – тиск насиченої пари.

Рівняння балансу енергії на рухомій межі фазового переходу $z = L_m$ запишемо у вигляді:

$$-\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0} = r_k \frac{K_g}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial z} \Big|_{z=L_m+0}, \quad (2.8)$$

а на межі фазового переходу $z = L_m$:

$$T = T_m, \quad (2.9)$$

де λ_c – теплопровідність осушеної зони, T_m – поки що невідома температура фазового переходу, залежна від тиску насиченої пари P_n .

Лінеаризоване рівняння стану на рухомій межі фазових переходів $z = L_m$ можна представити у вигляді [149]:

$$T_m = T_{mk} + \alpha_{mk} P_n,$$

де $T_{mk} = \frac{9T_k V_k}{8V}$, $\alpha_{mk} = \frac{3T_k V}{8V_k}$, T_k, V_k критична температура та тиск. Зокрема, в роботі

[19] $T_m = 83 + 16 \cdot 10^{-5} P_n$. В інших випадках коефіцієнти T_{mk}, α_{mk} визначаються з температурних режимів сушіння конкретного матеріалу. Граничні умови на границі $z = L$ виражають теплообмін між поверхнями деревної пластини і сушильним агентом за законом Ньютона

$$\lambda_c \frac{\partial T}{\partial z} + \tilde{\alpha}(T - u(t)) = 0, \quad (2.10)$$

де $\tilde{\alpha}$ – коефіцієнт теплообміну; $u(t)$ – температура сушильного агента, змінна в часі. Для моделювання нестационарних різноетапних технологічних процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, представимо температуру агента сушіння у вигляді полінома від експоненціальних функцій

$$u(\tau) = T_1 + (T_2 - T_1) \sum_{i=1}^N (a_i e^{-b_i \tau}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N (\alpha_i e^{-b_i \tau}). \quad (2.11)$$

Зазначимо, що вираз (2.11) дозволяє моделювати змінні багатоступеневі режими агента сушіння для сталої і спадної швидкостей сушіння шляхом апроксимації та

необхідним вибором параметрів α_i і β_i ($i=1, N$). Параметр N може задавати задану кількість необхідних ступеней режимних параметрів агента сушіння. Тут для зручності введемо такі позначення:

$$\alpha_0 = T_1, \alpha_i = (T_2 - T_1) a_i; \quad (2.12)$$

$$D' = D_{ij}^1 = \left(1/D_i^\infty + (1 - \alpha_{ij} z_i) / D_{ij} \right)^{-1},$$

$D_{va}^1 = D_{av}^1 = D'$ – ефективний коефіцієнт дифузії; $D_{va} = D_{av} = D_{ij}$ – ефективний бінарний коефіцієнт дифузії в макропорах; другий доданок в виразі $D_v^\infty = D^\infty$ враховує ефект течіння Кнудсена пари в мікропорах.

В початковий момент процесу сушіння температура деревної пластини задовольняє умові

$$T(t=0) = f(z). \quad (2.13)$$

Визначимо відносну вологість α_m пористого матеріалу як відношення маси m_L рідини в ньому в момент часу t до маси m_{L_n} рідини в момент часу $t=0$ (насичений вологою шар). Тоді отримаємо

$$\alpha_m = \frac{m_L}{m_{L_n}} = \frac{\Pi L_m S \rho_L}{\Pi L S \rho_L} = \frac{L_m}{L} = \bar{z}_m, \quad (2.14)$$

де S – площа пор; ρ_L – густина води; Π – пористість матеріалу. Втрачена під час сушіння маса Δm рідини визначається так

$$\Delta m = m_{L_n} - m_L = \Pi S \rho_L L (1 - \bar{z}_m). \quad (2.15)$$

Таким чином, відносна насиченість пор рідиною для випадку циліндричних капілярів у деревній пластині без врахування дисперсії розмірів капілярів і пор співпадає з безрозмірною координатою межі розділу фаз рідина-газ.

Швидкість зміни маси рідини в деревній пластині визначається потоком j пари з нього

$$\frac{d\Delta m}{dt} = j S. \quad (2.16)$$

Тоді рівняння руху межі розділу фаз у процесі сушіння деревної пластини має вигляд:

$$\frac{d\bar{z}_m}{d\tau} = -\frac{j(\bar{z}_m)}{\Pi\rho_L L} \quad (2.17)$$

при початковій умові $\bar{z}_m = 1$.

Таким чином, рівняння (2.1)-(2.17) складають нелінійну математичну модель, яка описує процес сушіння капілярно-пористого матеріалу (деревної пластини) в сушильній установці. Відзначимо нелінійність сформульованої задачі.

2.3. Побудова розв'язку задачі теплопровідності при нестационарному режимі сушильного агента

Для низькотемпературних процесів сушіння капілярно-пористих матеріалів спочатку розглянемо побудову розв'язку задачі теплопровідності для нестационарних режимів агента сушіння (2.11). У математичні моделі будемо виходити з рівняння (2.1) В рівнянні теплопровідності (2.1) перейдемо до безрозмірної системи координат, використавши заміну $\tau = a_T t / L^2$, $\bar{z} = z / L$, $\bar{z}_m = L_m / L$, де \bar{z}_m – безрозмірна координата межі фазового переходу. Рівняння теплопровідності у процесі конвективного сушіння деревної пластини прийме вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}(\bar{z}, \tau) = \frac{\partial^2 T(\bar{z}, \tau)}{\partial \bar{z}^2} + F, \quad (2.18)$$

де $F = \frac{L^2 W_1}{a_T C \rho}$ – додаток, який характеризує внутрішні джерела;

$a_T = \lambda_c / (\Pi((1 - \bar{z}_m)(C_v \rho_v + C_a \rho_a)) + (1 - \Pi)C_s \rho_s)$. Граничні умови на границі $\bar{z} = 1$ для нестационарних режимів процесу сушіння будуть такі:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} + H_T (T - u(\tau)) = 0, \quad H_T = \tilde{\alpha} L / \lambda, \quad (2.19)$$

$\tilde{\alpha}$ – коефіцієнт теплообміну, а на межі фазового переходу $\bar{z} = \bar{z}_m$ приймаємо, що

$$T = T_m. \quad (2.20)$$

Побудуємо розв'язок задачі при початковій умові:

$$T(\bar{z}, 0) = f(\bar{z}).$$

Розв'язок рівняння теплоперенесення шукаємо у вигляді

$$T = T_1 + T^* = \chi_0 + \sum_{i=1}^N \chi_i e^{-b_i \tau} + T^*,$$

де $T_1 = \chi_0 + \sum_{i=1}^N \chi_i e^{-b_i \tau}$ представляє розв'язок рівняння теплопровідності, який задовольняє граничним умовам задачі, але не задовольняє початковій умові. T^* є розв'язком задачі теплопровідності, який задовольняє початковій умові і однорідним граничним умовам.

Підставимо даний вираз в рівняння (2.18) і прирівняємо подібні члени в рівнянні та крайових умовах (2.19), (2.20) так, щоб χ_0, χ_i задовольняли рівняння та крайові умови, а T^* – нульовим граничним умовам. Тоді отримаємо рівняння для визначення χ_0 і $\chi_i = (i = \overline{1, n})$ у такому вигляді:

$$\frac{d^2 \chi_0}{d\bar{z}^2} = 0, \quad \frac{d^2 \chi_i}{d\bar{z}^2} + b_i \chi_i = 0, \quad (i = \overline{1, \dots, n}); \quad (2.21)$$

Функції χ_0 і $\chi_i = (i = \overline{1, n})$ задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_0(1)}{\partial \bar{z}} + H_T (\chi_0(1) - \alpha_0) &= 0, \quad \chi_0(\bar{z}_m) = T_m; \\ \frac{\partial \chi_i(1)}{\partial \bar{z}} + H_T (\chi_i(1) - \alpha_i) &= 0, \quad \chi_i(\bar{z}_m) = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для визначення T^* отримаємо крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 T^*(\bar{z}, \tau)}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial T^*(\bar{z}, \tau)}{\partial \tau}; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial T^*(1, \tau)}{\partial \bar{z}} + H_T T^*(1, \tau) = 0;$$

$$T^*(\bar{z}_m, \tau) = 0;$$

$$T^*(\bar{z}, 0) = f(\bar{z}) - \chi_0(\bar{z}, 0) - \sum_{i=1}^n \chi_i(\bar{z}, 0). \quad (2.24)$$

Для побудови розв'язку крайової задачі (2.23)-(2.24) використаємо функцію впливу задачі (2.18)-(2.20) з однорідними граничними умовами при відсутності функції джерела ($F = 0$). Згідно [32] представимо її у вигляді:

$$G(\bar{z}, \bar{z}_m, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2H_T \frac{\left(\frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \right) \left(\cos \mu_n (1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n (1 - \xi)}{\mu_n} \right) e^{-\mu_n^2 \tau}}{\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) (\mu_n^2 + H_T^2) (1 - \bar{z}_m) + H_T}, \quad (2.25)$$

де μ_n – корені трансцендентного рівняння $tg \mu_n (1 - \bar{z}_m) = -\mu_n / H$.

Вирази для χ_0 , χ_i шукаємо у вигляді

$$\chi_0 = c_0 + d_0 \bar{z}; \quad \chi_i = c_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z} + d_i \sin \sqrt{b_i} \bar{z}.$$

Задовольнивши вирази для χ_i крайовим умовам, отримаємо формули для визначення c_0 і $c_i, d_i (i = \overline{0, N})$ у вигляді:

$$\begin{aligned} c_0 &= T_m - H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1} \bar{z}_m, \quad d_0 = H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1}, \\ c_i &= \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m) \sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i} \cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m}, \\ d_i &= -\frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i} \cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Слід зазначити, що величини $c_i, d_i (i = \overline{0, N})$ є функціями рухомої координати \bar{z}_m фазового переходу.

Тоді з урахуванням формул для знаходження $c_i, d_i (i = \overline{0, N})$ отримаємо співвідношення для визначення функцій χ_0 і $\chi_i = (i = \overline{1, n})$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= T_m - H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1} \bar{z}_m + H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1} \bar{z} = \\ &= T_m + H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1} (\bar{z} - \bar{z}_m), \\ \chi_i &= \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m) \sin \sqrt{b_i} \bar{z}_m \cos \sqrt{b_i} \bar{z} -}{\sqrt{b_i} \cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m} - \\ &\quad - \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i} \cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m)} \sin \sqrt{b_i} \bar{z} = \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$= \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i} \cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m)} \cdot \frac{\sin \sqrt{b_i} \bar{z}_m \cos \sqrt{b_i} \bar{z} - \sin \sqrt{b_i} \bar{z} \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m}{\cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m} = C_i \frac{\sin \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}},$$

де $(i = \overline{1, n})$.

З (2.27) слідує, що $\chi_i(\bar{z}_m) = 0$, якщо $i = 1, 2, \dots, N$.

Функцію $\sum_{i=1}^N \chi_i(\xi)$ запишемо у вигляді $\sum_{i=1}^N \chi_i(\xi) = \sum_{i=1}^N C_i \frac{\sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}}$, де

$$C_i(\sqrt{b_i}, \bar{z}_m) = \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) - \alpha_i \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m)}{\cos \sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m) \cos \sqrt{b_i} \bar{z}_m}.$$

Для знаходження $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m, \tau)$ використаємо функцію (2.25), що задовольняє умовам $T_m(\bar{z}_m, \tau) = 0$, $u(1, \tau) = 0$. Розв'язок крайової задачі (2.23), (2.24) отримаємо з допомогою функції впливу (2.25), якщо замість $f(\bar{z})$ взяти

$$f_1(\bar{z}) = f(\bar{z}) - \bar{T}_0,$$

де $\bar{T}_0 = \sum_{i=0}^N \chi_i(\bar{z})$.

Тоді згідно з (2.21)-(2.22) функцію $T^*(\bar{z}, \tau)$ запишемо у вигляді:

$$T^*(\bar{z}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (2.28)$$

де

$$A_n = \frac{1}{\Delta_n(\mu_n, \bar{z}_m)} \int_{\bar{z}_m}^1 f_1(\bar{z}) \left(\cos \mu_n (1 - \bar{z}) + \frac{H}{\mu_n} \sin \mu_n (1 - \bar{z}) \right) d\bar{z},$$

$$\Delta_n(\mu_n, \bar{z}_m) = \cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) ((\mu_n^2 + H^2)(1 - \bar{z}_m) + H).$$

Для знаходження $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m, \tau)$ використаємо розв'язок (2.21), що задовольняє $T_m(\bar{z}_m, \tau) = 0$, $u(1, \tau) = 0$. Якщо початковий розподіл температури деревної пластини на початку процесу сушіння є рівномірний, тобто $T(\bar{z}, 0) = T_0$, а це відповідає періоду сталої швидкості сушіння, то з врахуванням (2.21), вклад початкової температури в $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m, \tau)$ матиме вигляд

$$T_0^*(\bar{z}, \bar{z}_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} A_n^*(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (2.29)$$

де

$$A_n^* = \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left(\frac{\sin \mu_n (1 - \bar{z}_m)}{\mu_n} - \frac{H_T}{\mu_n^2} (\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) - 1) \right) \quad (2.30)$$

Вклад в $T^*(\bar{z}, \bar{z}_m)$ від суми $\sum_{i=1}^N \chi_i(\bar{z})$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} T_\varphi^* &= - \int_{\bar{z}_m}^1 \sum_{i=1}^N \chi_i(\xi) \times G(\bar{z}, \bar{z}_m, \xi, \tau) d\xi = - \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} 2H_T \frac{e^{-\mu_n^2 \tau} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \int_{\bar{z}_m}^1 \left(\cos \mu_n (1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n (1 - \xi)}{\mu_n} \right) \sum_{i=1}^N C_i \sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m)}{\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) (\mu_n^2 + H_T^2) (1 - \bar{z}_m) + H_T} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 \tau} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} \int_{\bar{z}_m}^1 \left(\cos \mu_n (1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n (1 - \xi)}{\mu_n} \right) \sum_{i=1}^N C_i \sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m) d\xi, \quad (2.31) \end{aligned}$$

де

$$B_n = \frac{2H_T}{\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) (\mu_n^2 + H_T^2) (1 - \bar{z}_m) + H_T}.$$

Визначимо величину підінтегрального виразу у (2.32). Після деяких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{z}_m}^1 \left(\cos \mu_n (1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n (1 - \xi)}{\mu_n} \right) \sum_{i=1}^N C_i \sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m) d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^N C_i \left(\int_{\bar{z}_m}^1 \cos \mu_n (\xi - 1) \sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m) - \frac{H_T}{\mu_n} \int_{\bar{z}_m}^1 \sin \mu_n (\xi - 1) \sin \sqrt{b_i} (\xi - \bar{z}_m) \right) d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^N C_i \left(- \frac{\cos((\sqrt{b_i} - \mu_n)\xi - (\sqrt{b_i} \bar{z}_m - \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos((\sqrt{b_i} + \mu_n)\xi - (\sqrt{b_i} \bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) \Bigg|_{\bar{z}_m}^1 - \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin((\sqrt{b_i} - \mu_n)\xi + (-\sqrt{b_i} \bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\sin((\sqrt{b_i} + \mu_n)\xi + (-\sqrt{b_i} \bar{z}_m - \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) \Bigg|_{\bar{z}_m}^1 = \\ &= \sum_{i=1}^N C_i \left(- \frac{\cos((\sqrt{b_i} - \mu_n) - (\sqrt{b_i} \bar{z}_m - \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos((\sqrt{b_i} + \mu_n) - (\sqrt{b_i} \bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N C_i \left(\frac{\cos((\sqrt{b_i} - \mu_n)\bar{z}_m - (\sqrt{b_i}\bar{z}_m - \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos((\sqrt{b_i} + \mu_n)\bar{z}_m - (\sqrt{b_i}\bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) - \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin((\sqrt{b_i} - \mu_n) + (-\sqrt{b_i}\bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \sin \frac{(\sqrt{b_i} + \mu_n) + (-\sqrt{b_i}\bar{z}_m - \mu_n)}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin((\sqrt{b_i} - \mu_n)\bar{z}_m + (-\sqrt{b_i}\bar{z}_m + \mu_n))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \sin \frac{(\sqrt{b_i} + \mu_n)\bar{z}_m + (-\sqrt{b_i}\bar{z}_m - \mu_n)}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) = \\
& = \sum_{i=1}^N C_i \left\{ -\frac{\cos(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right\} + \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left\{ \frac{\sin(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \sin \frac{(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right\}.
\end{aligned}$$

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned}
Z_{n1} &= \sum_{i=1}^N C_i \left(-\frac{\cos(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right), \\
Z_{n2} &= \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \sin \frac{(\sqrt{b_i}(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin(\mu_n(1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right).
\end{aligned}$$

Тоді $\int_{\bar{z}_m}^1 \left(\cos \mu_n(1 - \xi) + H_T \frac{\sin \mu_n(1 - \xi)}{\mu_n} \right) \sum_{i=1}^N C_i \sin \sqrt{b_i}(\xi - \bar{z}_m) d\xi = Z_{n1} - Z_{n2}$.

Після завершення процесу сушіння деревної пластини фізично обґрунтованою є умова, яка характеризує відсутність вологої зони матеріалу $\bar{z}_m = 0$. Тоді отримаємо

$$Z_n(0) = Z_{n1}(0) - Z_{n2}(0),$$

де

$$\begin{aligned}
Z_{n1}(0) &= \sum_{i=1}^N C_i \left\{ -\frac{\cos \sqrt{b_i}}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos \sqrt{b_i}}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{\cos \mu_n}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos \mu_n}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right\}, \\
Z_{n2}(0) &= \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin \sqrt{b_i}}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \sin \frac{\sqrt{b_i}}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin \mu_n}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin \mu_n}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right).
\end{aligned}$$

Однак величина $Z_n(1) = Z_{n1}(1) - Z_{n2}(1) = 0$, оскільки

$$Z_{n1}(1) = \sum_{i=1}^N C_i \left(-\frac{1}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{1}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{1}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{1}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) = 0;$$

$$Z_{n2}(1) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left(\frac{\sin 0}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\sin 0}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin 0}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin 0}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right) = 0.$$

У процесі сушіння деревної пластини функцію для визначення T^* можна представити у вигляді

$$T_{\chi}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n \tau}, \quad (2.32)$$

$$Z_n(\bar{z}_m) = Z_{n1} - Z_{n2},$$

Таким чином, температуру деревної пластини при нестационарному конвективному процесі сушіння для змінної температурних режимів агента сушіння (2.11) можна записати у вигляді:

$$T(\bar{z}, \tau) = \chi_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^N \chi_i(\bar{z}) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (2.33)$$

де

$$Z_n(\bar{z}_m) = \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left(\frac{\sin \mu_n (1 - \bar{z}_m)}{\mu_n} - \frac{H_T}{\mu_n^2} (\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) - 1) \right) + (Z_{n1} - Z_{n2}). \quad (2.34)$$

При цьому $T^* = T_0^* + T_{\chi}^*$ задовольняє умовам $T^*(\bar{z}_m, \bar{z}_m) = T^*(\bar{z}_m, 1) = 0$.

Отримана формула (2.33) дозволяє обчислити температуру в довільній точці за товщиною деревної пластини і в довільний момент часу процесу конвективного сушіння залежно від координати площини фазового переходу за наявності відповідних теплофізичних характеристик матеріалу та залежних параметрів агента сушіння.

2.4. Математична модель масоперенесення в процесі симетричного конвективного сушіння деревної пластини

Вважаємо, що температурні умови на поверхнях деревної пластини є однаковими і процес сушіння характеризується симетричністю відносно середньої поверхні. У зв'язку з симетрією задачі приведемо дослідження для однієї з половинок деревної пластини. При дослідженні процесу масоперенесення будемо

виходити з рівняння математичної моделі (2.5-2.7). Введемо безрозмірні змінні $\rho_a = \rho_{a0} \bar{\rho}_a$, $\rho_v = \rho_n \bar{\rho}_v$, $z = L\bar{z}$ при заданій зміні температури сушильного середовища $T_c = \frac{1}{\tau_{\Pi}} \int_0^1 \int_0^1 T d\bar{z} d\tau$, де ρ_{a0} – густина повітря на зовнішніх границях деревної пластини.

Проінтегрувавши друге рівняння системи (2.5), отримаємо:

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + a \frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = 0, \quad (2.35)$$

$$\bar{\rho}_v \left(\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} \right) + a \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \beta^* a (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) = 0, \quad (2.36)$$

Крайові умови (2.6), (2.7), з врахуванням (2.33), (2.34) приймуть вигляд:

$$j = \beta' \rho_n (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}),$$

$$\bar{\rho}_a = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = 1, \quad (2.37)$$

$$\bar{\rho}_v = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = \bar{z}_m \quad (2.38)$$

Тут введені такі позначення: $a = \frac{D' M_a \mu_g}{K_g \rho_{a0} R T_c}$, $b = \frac{\rho_n}{\rho_{a0}} \frac{M_a}{M_v}$, $\beta^* = \frac{L \beta'}{D'}$.

Інтегруючи рівняння (2.35) по \bar{z} , отримуємо $\bar{\rho}_a + b \bar{\rho}_v + a \ln \bar{\rho}_a = C_1$.

Сталу інтегрування $C_1 = 1 + b \bar{\rho}_{v1}$ знайдено з другої умови (2.37), де $\bar{\rho}_{v1}$ – невідоме безрозмірне значення густини пари на поверхні пластини $\bar{z} = 1$. Провівши лінеаризацію з врахуванням того, що потоком повітря в капілярно-пористому середовищі знехтувано, і в зв'язку з цим безрозмірна густина повітря в капілярах і порах деревної пластини мало відрізняється від одиниці, отримуємо, що:

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = - \frac{b}{1+a} \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}}.$$

Рівняння (2.36) з врахуванням (2.38) запишеться так:

$$\frac{b}{(1+a)} \bar{\rho}_v \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \beta^* (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{\bar{\rho}_v^2}{2} + \bar{\rho}_v + \beta^* (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) \bar{z} = C_2, \quad (2.39)$$

де $C_2 = \frac{b}{(1+a)} \frac{1}{2} + 1 + \beta^* (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) \bar{z}_m$ – стала інтегрування, яка визначена з умови (2.38).

Безрозмірна густина пари за товщиною деревної пластини визначиться за формулою

$$\bar{\rho}_v(\bar{z}, \bar{z}_m) = -A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m)}, \quad (2.40)$$

де $A = (1+a)/b$; $A_1 = -\beta^* A$; $A_2 = (A+1)^2$.

Тиск пари в довільній точці \bar{z} за товщиною деревної пластини визначиться за формулою

$$P(\bar{z}, \bar{z}_m) = \left(-A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m)} \right) \rho_n \frac{RT}{M_v}. \quad (2.41)$$

Тоді на поверхні деревної пластини $\bar{z} = 1$ має місце

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{(\bar{\rho}_{v1}^2 - 1)}{2} + \bar{\rho}_{v1} - 1 + \beta^* (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(1 - \bar{z}_m) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння визначає величину безрозмірної густини пари у деревній пластині. Позначимо $\bar{z}_m^* = 1 - \bar{z}_m$. $\bar{z}_m^* = \alpha_m^*$ – зміна відносної вологості в процесі сушіння. Фізично прийнятна вітка розв'язку отриманого рівняння має вигляд

$$\bar{\rho}_{v1} = -(A + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2}}, \quad (2.42)$$

де $A_3 = 2A_1(A + \bar{\rho}_{v0})$.

При відомій густині пари на поверхні деревної пластини величину потоку j подамо так:

$$j = H_m \left(-(a_1 + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2}} \right), \quad (2.43)$$

де $a_1 = A + \eta_0$; $H_m = \beta' \rho_n$.

Визначимо відносну вологість α_m пористого матеріалу деревини згідно формули (2.14), (2.15), де

$$\Delta m_L = \Pi S \rho_L L (1 - \bar{z}_m) = \Pi S \rho_L L \bar{z}_m^* \quad (2.44)$$

– втрачена під час сушіння маса вологи у деревній пластині.

З (2.43) отримуємо рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ у деревній пластині

$$\frac{d\bar{z}_m^*}{dt} = \frac{j(\bar{z}_m^*)}{\Pi\rho_L L} = \frac{\beta\rho_n}{\Pi\rho_L L} \left(- (a_1 + A_1\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}} \right) \quad (2.45)$$

Початкова умова, яка відповідає відсутності висушеної зони на початку процесу сушіння, має вигляд

$$\bar{z}_m^* = 0 \text{ для } \tau = 0. \quad (2.46)$$

Таким чином, отримано диференціальне рівняння (2.45) з початковою умовою (2.46) для визначення руху межі розподілу фаз у деревній пластині у процесі сушіння.

Для отримання розв'язку задачі Коші (2.45), (2.46) використаємо заміну змінних

$$\sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2}} = \phi + \bar{z}_m^* A_1. \quad (2.47)$$

З врахуванням того, що $\bar{z}_m^* = \frac{\phi^2 - U}{A_3 - 2\phi A_1}$; $\frac{d\bar{z}_m^*}{d\phi} = 2 \frac{(-A_1\phi^2 + A_3\phi - A_1A_2)}{(A_3 - 2A_1\phi)^2}$,

приведемо рівняння (2.45) до вигляду

$$2 \left(\frac{-A_1\phi^2 + A_3\phi - A_1A_2}{(A_3 - 2A_1\phi)^2} \right) \frac{d\phi}{d\tau} = H(\phi - a_1). \quad (2.48)$$

Приймаючи до уваги, що $\phi - a_1 = (2A_1\phi - A_3)/A_1$, останнє рівняння запишемо так:

$$4A_1 \left(\frac{A_1\phi^2 - A_3\phi + A_1A_2}{(2A_1\phi - A_3)^3} \right) d\phi = H d\tau. \quad (2.49)$$

Загальний інтеграл рівняння (2.49) має вигляд

$$\frac{1}{2A_1} \ln|-A_3 + 2A_1\phi| + \frac{A_3^2 - 4A_1^2A_2}{4A_1} \frac{1}{(-A_3 + 2A_1\phi)^2} = H_m\tau + A_5, \quad (2.50)$$

Сталу інтегрування A_5 знаходимо з умови (2.46):

$$A_5 = \frac{1}{2A_1} \ln|-A_3 + 2A_1\sqrt{A_2}| + \frac{A_3 + 2A_1\sqrt{A_2}}{4A_1(A_3 - 2A_1\sqrt{A_2})}. \quad (2.51)$$

У процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів надзвичайно важливою характеристикою є тривалість технологічного процесу. Запропонований підхід

дозволяє визначити час, при якому відносна насиченість, досягає значення \bar{z}_m^* . Отримана формула для визначення часу процесу сушіння деревної пластини з урахуванням рухомої межі фазового переходу

$$\tau \cdot 2H_m A_1 = \ln \left| \frac{2A_1 \phi - A_3}{2A_1 \sqrt{A_2} - A_3} \right| + \frac{1}{2} (A_3^2 - 4A_1^2 A_2) \left(\frac{1}{(2A_1 \phi - A_3)^2} - \frac{1}{(2A_1 \sqrt{\phi} A_2 - A_3)^2} \right). \quad (2.52)$$

Повний час сушіння капілярно-пористої деревної пластини визначиться за формулою

$$\tau_{\Pi} = \frac{1}{2H_m A_1^2} \left(\ln \left| \frac{\phi_0 - (A + \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2} - (A + \bar{\rho}_{v0})} \right| + \frac{1}{2} \left((A + \bar{\rho}_{v0})^2 - (A + 1)^2 \right) \left(\frac{1}{(\phi_0 - (A + \bar{\rho}_{v0}))^2} - \frac{1}{(\sqrt{A_2} - (A + \bar{\rho}_{v0}))^2} \right) \right), \quad (2.53)$$

де $\phi_0 = -A_1 + \sqrt{A_1^2 + A_2 + A_3} = -A_1 + \sqrt{A_1^2 + (A + 1)^2 + 2A_1(A + \bar{\rho}_{v0})}$.

З даного виразу видно, що час сушіння (2.52), та повний час осушення (2.53) залежать від відносної насиченості парю середовища $\bar{\rho}_{v0}$ та приведенного коефіцієнта масообміну A_1 . Мінімізуючи повний час сушіння за цими параметрами та знаючи залежність коефіцієнтів масообміну від критерію Рейнольдса, можна визначити технологічні режими процесу сушіння, а саме швидкість та насиченість вологою сушильного агента, які мінімізують час сушіння пористого тіла.

2.5. Числовий аналіз моделювання температури і вологості у деревній пластині

Для чисельного дослідження процесів тепловологоперенесення і деформування деревини розробленими за математичними моделями використані наступні параметри зовнішнього середовища і тепловологообміну: для $U > 0.35$, $t_c = 79$ °C, $\phi = 0.77$, коефіцієнт теплообміну $\alpha = 23$ Вт/(м²·К), коефіцієнт волого обміну $\beta = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с; для $U = 0.35 \div 0.25$, відповідно $t_c = 84$ °C, $\phi = 0.62$, $\alpha = 22.5$ Вт/(м²·К), $\beta = 3 \cdot 10^{-6}$ м/с; для $U < 0.25$, відповідно $t_c = 102$ °C, $\phi = 0.27$, $\alpha = 22$ Вт/(м²·К), $\beta = 4.5 \cdot 10^{-6}$ м/с.

Теплофізичні параметри деревини у процесі сушіння визначаються за апроксимаційними залежностями [10, 13, 102, 149, 164, 170] від вологості і температури. Формули для їх визначення наведені у таблиці 2.1.

Однак деякі теплофізичні параметрів потребують уточнення. Зокрема, коефіцієнти вологопровідності деревини за даними [149] залежать лише від температури. Дані досліджень [164, 184] свідчать про суттєву залежність a_m від вологості. Тому для визначення залежності a_m як функції $a_m(U, t)$ використані результати експериментальних досліджень [164, 184]. Отримані залежності $a_m(t)$ мають вигляд: $a_m(t) = (a_{t1}t^3 + a_{t2}t^2 + a_{t3}t + a_{t0}) \cdot 10^{-10}$ (м/с), де коефіцієнти моделі для різних порід наведені у табл. 2.2.

На основі оброблення експериментальних даних [27, 164, 184] отримана залежність коефіцієнта вологопровідності деревини від вологості для сталої температури:

$$a_m(U) = -274,391u^5 + 634,908u^4 - 526,7u^3 + 181,864u^2 - 22,655u + 1,905. \quad (2.55)$$

Тоді $a_m(t, u) = a_n(t) \cdot a_m(u)$.

Таблиця 2.1

Залежності для розрахунку теплофізичних властивостей матеріалу [149]

№ п/п	Назва параметра, розмірність	Формула для визначення параметра
1	2	3
1	Питома теплоємність, C , Дж/(кг·град)	$C = 3,5t + 3200 - 2,18 \cdot 10^2 (130 - 100u)^{2,28}$
2	Коефіцієнт теплопровідності, λ , Вт/(м·град) (при $\rho_0 = 500$ кг/м ³)	$\lambda = (0,00131u + 0,0009)t + 10^{0,2951 \lg 100u - 1,022}$
3	Термоградиєнтний коефіцієнт, δ , град ⁻¹	$\delta = ((5,55 - 0,013t) - 2,42 \cdot 10^{-3} (100u - (72 - 0,35t)))^2 \cdot 10^{-2}$
4	Коефіцієнт теплообміну, α , Вт/(м ² ·град)	$\alpha = 8,35(0,00625t_c + 2,1)(V_u / (0,0083t_c + 1,37))^{0,8} \cdot l^{0,2}$
5	Рівноважна вологість, W_p , %	$W_p = 10,6^p (0,0327 - 0,00015t_c) \cdot 100$
6	Коефіцієнт температуропровідності, a , м ² /с (при $\rho_0 = 500$ кг/м ³)	$a = ((0,523 \cdot 10^{-2}u - 0,0005)t + (1,76 - 0,6u)) \cdot 10^{-7}$
7	Поправка на густину при визначенні λ , $K_{\rho\lambda}$	$K_{\rho\lambda} = 1 / (1,864 - 0,00115\rho_a)$
8	Поправка на густину при визначенні a , $K_{\rho a}$	При $\rho_0 < 500$ кг/м ³ $K_{\rho a} = 1,9 - 0,00205\rho_0$ При $\rho_0 > 500$ кг/м ³ $K_{\rho a} = 0,98$

Примітка: v – швидкість агента сушіння, м/с, ρ_0 – базова густина деревини, кг/м³.

Таблиця 2.2

Значення коефіцієнтів моделі для різних порід деревини

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
Сосна	$1,273 \cdot 10^{-5}$	$9,74 \cdot 10^{-4}$	0,022	0,587
Листяні	$8,565 \cdot 10^{-5}$	$-2,361 \cdot 10^{-3}$	0,111	0,192
Дуб	$8,565 \cdot 10^{-5}$	$-5,704 \cdot 10^{-4}$	0,041	0,012

Для визначення коефіцієнта вологообміну використовується залежність та відома номограма [149]. Її аналіз свідчить про незалежність коефіцієнта вологообміну від породи деревини і вологості матеріалу, але він залежить від відносної вологості агента сушіння. Аналіз номограми свідчить про досягнення коефіцієнтом вологообміну однакових значень для $\varphi = 0,1$ і $\varphi = 0,75$ для швидкості повітря 2 м/с. Наявні при цьому різні значення рівноважної вологості зумовлюють певну неоднозначність. Тому для визначення коефіцієнта вологообміну використовувалась формула [27]:

$$\alpha_m = 0,95 \left(\frac{T}{(P/P_a)\varphi\varepsilon} \right) \cdot 10^{-9},$$

де ε – критерій фазового переходу, T – абсолютна температура середовища, K .

Відомо [10, 13], що у капілярах деревини знижується відносний тиск пари. Згідно формули Томсона тиск пари у капілярах визначається за формулою:

$$P = P_0 \exp(-2\sigma V_p / rTR), \text{ Па}, \quad (2.57)$$

де σ – поверхневий натяг рідини, $H/м$, V_p – молярний об'єм рідини, $м^3/моль$.

Тоді величини тиску (табл.2.3) пари P визначається так:

$$P/P_0 = \exp(-2\sigma V_p / rTR). \quad (2.58)$$

Таблиця 2.3

Значення тисків водяної пари залежно від зміни температури і вологості

$T, K \setminus U, кг/кг$	0,05	0,1	0,15	0,2
303	0,147	0,258	0,384	0,457
333	0,198	0,319	0,443	0,517
363	0,242	0,367	0,492	0,561

Величина r визначається за [143, 183] залежністю $r = r(U)$, яка отримана на основі моделювання структури деревини системою непостійних капілярів, сукупністю циліндрів радіуса r , який залежить від вологості.

Значення φ отримується шляхом логарифмування величини W_p з табл. 2.1. Отримаємо наступну формулу:

$$\varphi = 0,42 \ln \frac{100U_p}{7,36 - 0,015T}.$$

Зазначимо, що рівноважна вологість U_p є функцією від температури t_c і відносної вологості φ агента сушіння.

Для чисельної реалізації моделі використовувалися такі дані: $U_0 = 0,40$; $r = 2500$ кДж/кг; $\rho_0 = 460$ кг/м³; $\rho_6 = 430$ кг/м³; $v = 2$ м/с.

Враховуючи симетричність граничних умов, на рис. 2.1-2.5 наведені розподіли температури $T = (T - T_0)/(T_{сер} - T_0)$ і вологовмісту $U = (U - U_0)/U_0$ з безрозмірною координатою для різних значень критерія Фур'є $F_0 = \alpha_m \tau / l^2$. Застосування критеріальних залежностей дозволяє узагальнювати результати аналізу чисельного експерименту щодо технологічного процесу сушіння деревини. Процес нагрівання зумовлює зростання температури деревини до температури агента сушіння. Випаровування вологи спонукає її наближення до рівноважного значення. Процес дифузії вологи у деревині є менш інтенсивнішим під час вологообміну поверхні матеріалу з навколишнім середовищем. Тому значення вологості на поверхні зменшується і прямує до рівноважного, а максимальні градієнти вологовмісту утворюються в середині матеріалу ($F_0 = 1,2 - 1,5$).

Крива 1 відповідає значенню $F_0=0,1$ що відповідає завершенню нерегулярного режиму. Крива 2 – $F_0=0,15$; крива 3 – $F_0=0,2$; крива 4 – $F_0=0,5$; крива 5 – $F_0=0,7$; крива 6 – $F_0=1,0$; крива 7 – $F_0=1,2$; крива 8 – $F_0=1,5$. Отримані значення відповідають критеріям Лу=4,25 і Нусельта Nu=0,33.

Рис. 2.2 характеризує розподіл $(U - U_0)/U_0$ для тих же значень критерію Фур'є з врахуванням межі розподілу між сухою і вологою зонами деревної пластини. Для початкового періоду процесу всихання $F_0 < 0,1$ вміст вологи інтенсивніше знижується

та утворюється градієнт вологи між поверхнею деревини та при поверхневими і центральними шарами. Процес дифузії вологи у матеріалі є менш інтенсивнішим від процесу вологообміну поверхні взірця з навколишнім середовищем. Тому, процес висушування супроводжується всиханням. Зі збільшенням критерію F_0 волога зона зменшується. Важливими у цьому аспекті є залежності кривих вологовмісту деревної пластини для різних значень початкової вологості (рис. 2.3). Криві 1-5 відповідають таким значенням: крива 1 – 0,5, 2 – 0,4, 3 – 0,3. Згідно аналізу попереднього графіка, ці криві в основному відносяться до вологої зони, яка характеризується лінійним всиханням. Однак, інший характер мають криві 4 і 5, які відповідають $U_0=0,2$ і $U_0=0,1$. Для цього випадку спостерігається нелінійний характер швидкості всихання, особливо в при поверхневих зонах.

Аналіз графічних залежностей відносної температури $(T - T_0)/(T_{сер} - T_0)$ залежно від координати x/l для різних значень безрозмірного часу F_0 наведено на рис. 2.4 та рис. 2.5. На них повторне обчислення проводилося для таких критеріальних залежностей ($Lu=4,25$, $Nu=0,33$). На початку процесу сушіння спостерігається рівномірний розподіл температури. У подальшому є наявним зменшення температурного градієнта між центральним шаром пластини і поверхнею. Аналіз графіків свідчить про інтенсивність зростання температури для $F_0 < 0,35$. Це зумовлюється більш суттєвішою різницею між температурою агента сушіння і температурою поверхні. Однак для періоду спадаючої швидкості сушіння, зокрема для $0,3 < F_0 \leq 1,3$, спостерігається зменшення температурного градієнта, оскільки згідно аналізу залежностей вологості U , на поверхні деревного взірця спостерігається підвищена вологість, а значна частина тепла випаровується у при поверхневих зонах. Після $F_0 > 1,3$ збільшення температури є інтенсивнішим, оскільки зменшується вологість на поверхні та у при поверхневих зонах. У кінці спадаючої швидкості процес сушіння для видалення зв'язаної вологи використовується менша кількість тепла, а власне, збільшення теплового потоку зумовлює підвищення температури.

Графічні залежності температури у процесі сушіння деревної пластини залежать від F_0 з урахуванням утворення висушеної зони наведені на рис. 2.5.

відповідність між кривими і критерієм F_0 є такою ж, як і на графіках рис. 2.4. Збільшення температури для $F_0 < 0,35$ та збільшення зони осушення впродовж часу сушіння зумовлюється зменшенням кількості тепла для випаровування.

Рис. 2.6 характеризує зміну межі випаровування у деревній пластині у процесі сушіння для різних значень температури агента сушіння. Крива 1 відповідає $t_c = 50$ °C, крива 2 – $t_c = 60$ °C, крива 3 – $t_c = 70$ °C, крива 4 – $t_c = 80$ °C, крива 5 – $t_c = 90$ °C.

Графічні залежності зміни вологовмісту у деревній пластині у процесі сушіння залежно від різних значень температури агента сушіння наведені на рис. 2.7 (крива 1 – відповідає $t_c = 50$ °C, крива 2 – $t_c = 60$ °C, крива 3 – $t_c = 70$ °C, крива 4 – $t_c = 80$ °C, крива 5 – $t_c = 90$ °C). Рис. 2.8 характеризує температуру (криві 3, 4) і вологість (криві 1,2) у процесі сушіння деревної пластини для центрального шару з урахуванням зони випаровування ($z_* = 0,1$) (криві 1, 3) та без врахування (криві 2, 4). Аналіз графічних залежностей свідчить про те, що значення температури матеріалу з врахуванням зони осушування (крива 4), особливо для $F_0 \leq 1,3$ є більшою у порівнянні із залежністю t (крива 3) для наявності межі фазового переходу. Тому, врахування залежності $z_*(\tau)$ дозволяє скоротити тривалість сушіння. Якісний характер отриманих результатів узгоджується експериментальними даними [10, 25] та результатами моделювання [136, 149] деревних матеріалів (на прикладі деревини сосни $\rho_0 = 460$ кг/м³) для часткових випадків.

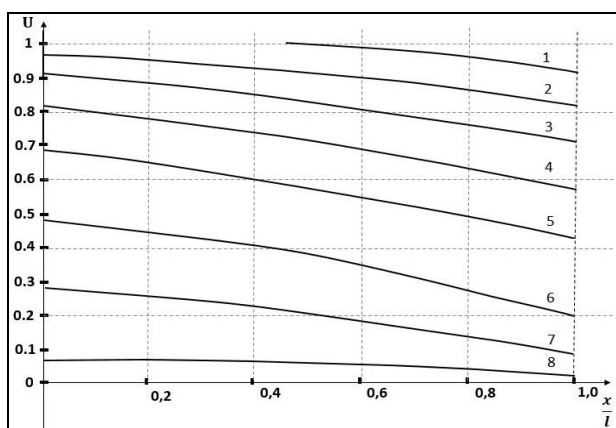


Рис. 2.1. Зміна вологовмісту у процесі сушіння деревної пластини залежно від безрозмірного часу F_0

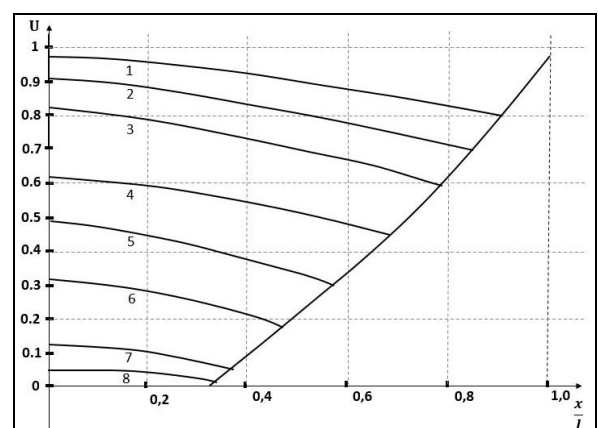


Рис. 2.2. Зміна вологовмісту у процесі сушіння деревної пластини залежно від безрозмірного часу F_0

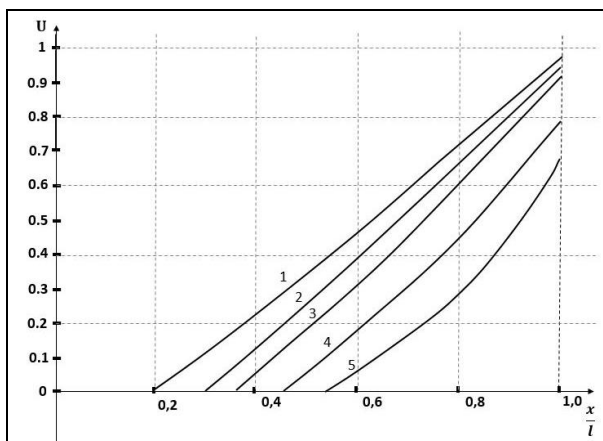


Рис. 2.3 Зміна вологовмісту у процесі сушіння деревної пластини для різних значень початкової вологості

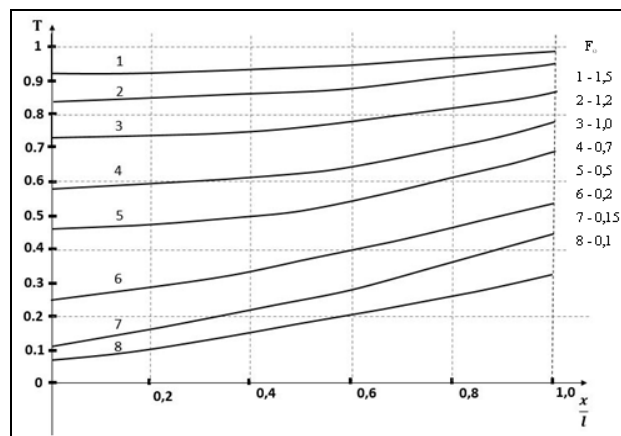


Рис. 2.4 Зміна відносної температури у процесі сушіння деревної пластини залежно від безрозмірного часу F_0

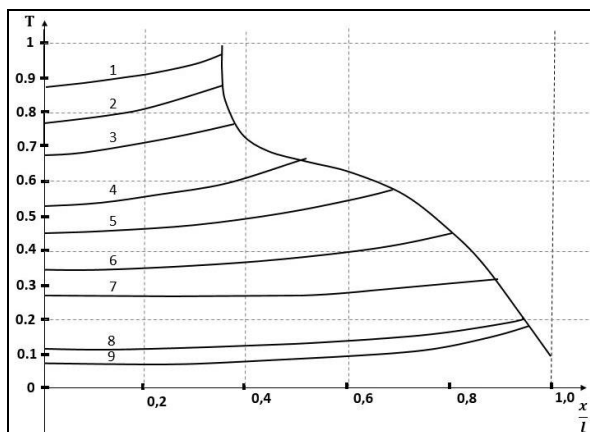


Рис. 2.5 Зміна відносної температури у процесі сушіння деревної пластини залежно від безрозмірного часу

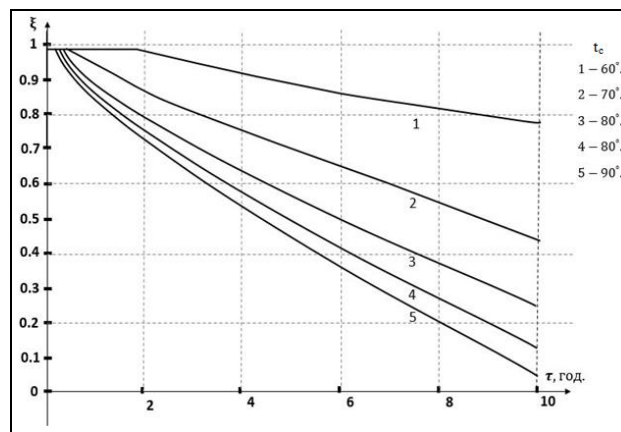


Рис. 2.6 Зміна межі випаровування у деревній пластині у процесі сушіння для різних значень температури середовища t_c

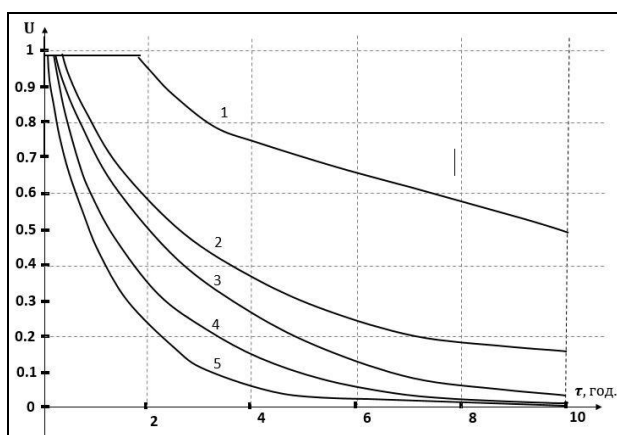


Рис. 2.7 Зміна вологовмісту у деревній пластині залежно від температури середовища t_c

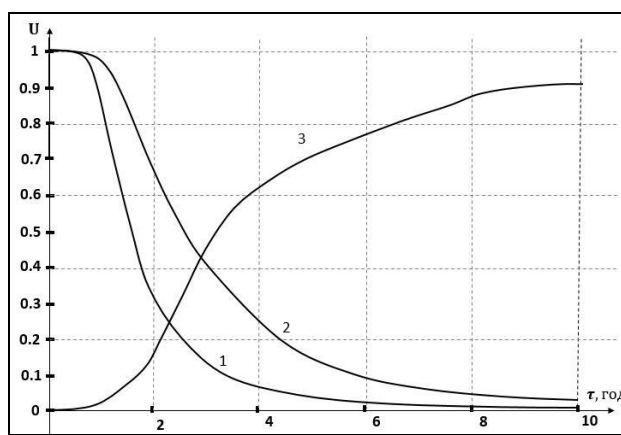


Рис. 2.8 Зміна вологовмісту і температури у деревній пластині для $z_* = 0,1$

Графічні залежності зміни температури на поверхні та в центрі пластини для різних порід деревини, середнього вологовмісту критерію Косовича, поверхневого теплового потоку та координати поверхні випаровування від узагальненого часу (критерію Фур'є) наведені на рис.2.9-2.16. Початковими даними є півтовщина деревної пластини $L_0=0,016$ м, температура середовища $t_c=100$ та відносна вологість $\varphi=50\%$.

На рис. 2.17-2.18 наведено швидкість видалення вологи з матеріалу для різних порід деревини. Аналіз графічних залежностей свідчить про те, що швидкість видалення вологи під час сушіння для сосни є більшою порівняно із наведеними зразками інших порід.

Графічні залежності зміни температури $T(\bar{z}, \tau) = T_1(\bar{z}, \tau) + T^*(\bar{z}, \tau)$ в часі, величини потоку пари від координати та тиску $P(\bar{z}, \bar{z}_m)$ в точках перерізу при зміні координати границі фазового переходу наведені на рис. 2.19-2.21. Отримані числові результати вказують на те, що вплив складової температури $T^*(\bar{z}, \tau)$ при м'яких режимах сушіння деревини (за зміни температури агента сушіння від 20^0C до 40^0C) є порівняно малим і зміна режиму нагрівання й охолодження мало впливає на тепломасоперенесення у пластині (рис. 2. 19), а інтенсивність фазових переходів залежить від різниці тисків у порах та в агенті сушіння (рис. 2.21).

Перевірка адекватності математичних моделей здійснювалася за допомогою порівняння результатів чисельного моделювання з наявними експериментальними даними перенесення вологості у висушуваній деревині. Також результати моделювання співставленні з відомими розрахунковими моделями на початковому етапі нагрівання деревини [дод. Б]. Аналіз результатів свідчить про задовільну збіжність чисельних та експериментальних значень.

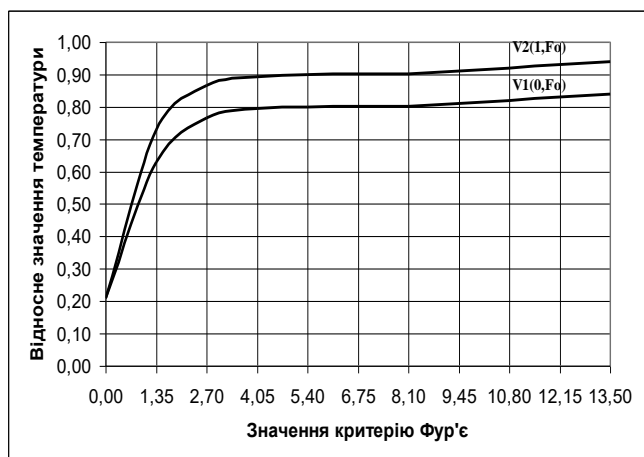


Рис. 2.9 Залежність температури на поверхні та в центрі пластини для сосни

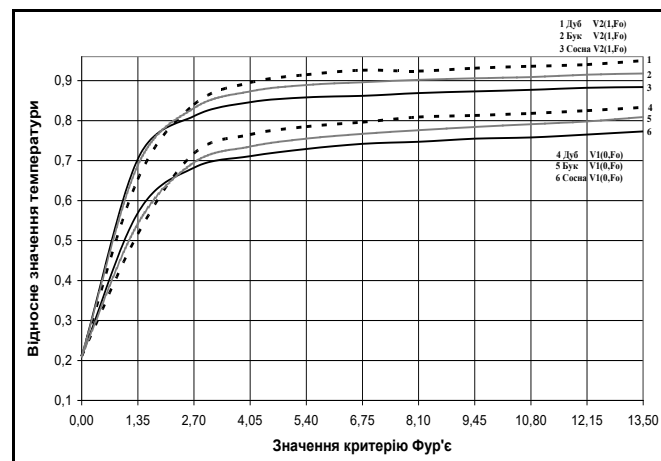


Рис. 2.10 Залежність температури на поверхні та в центрі пластини для різних порід деревини



Рис. 2.11 Залежність функції середньоб'ємного вологовмісту для сосни

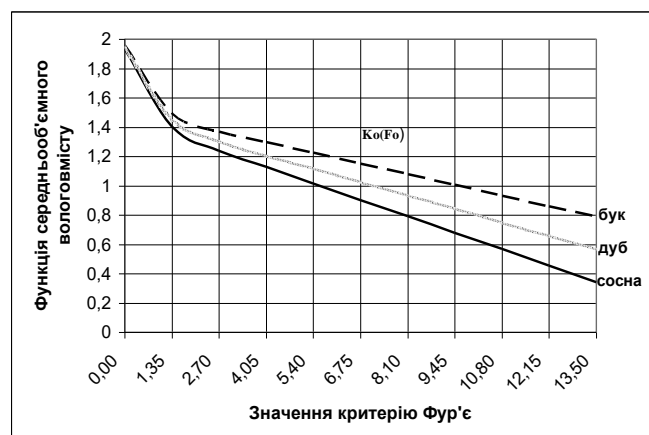


Рис. 2.12 Залежність функції середньоб'ємного вологовмісту для різних порід деревини



Рис. 2.13 Залежність поверхневого теплового потоку від критерію Фур'є для сосни

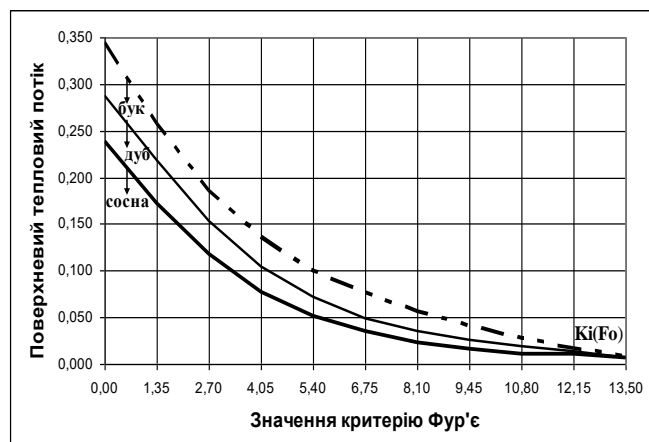


Рис. 2.14 Залежність поверхневого теплового потоку від критерію Фур'є для різних порід деревини

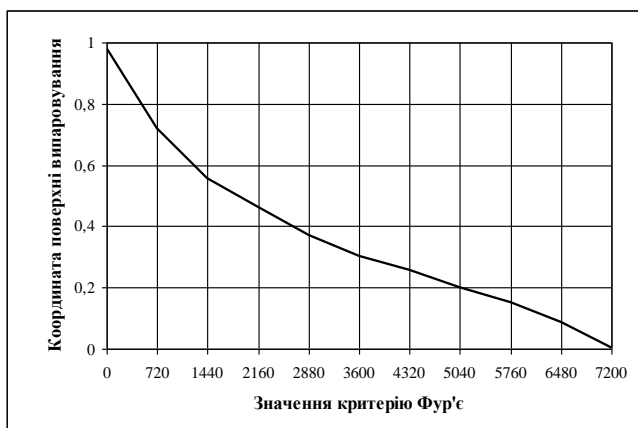


Рис. 2.15 Залежність функції координати поверхні випаровування для сосни

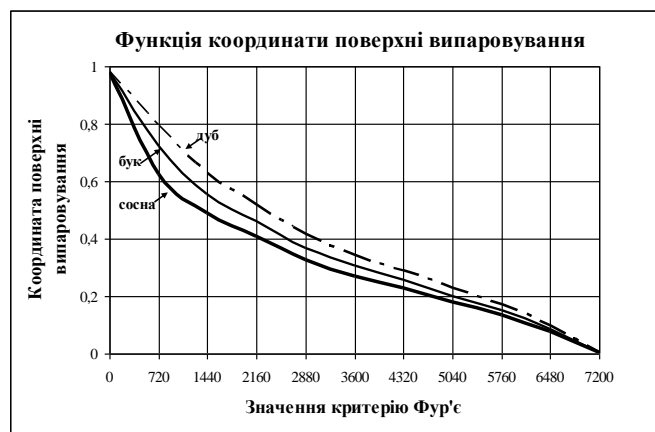


Рис. 2.16 Залежність функції координати поверхні випаровування для різних порід деревини

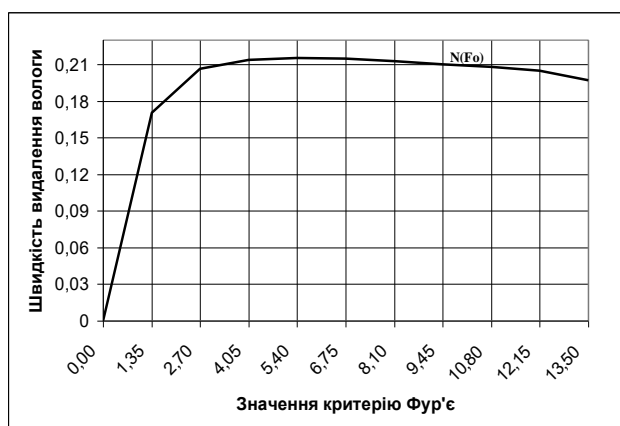


Рис. 2.17 Швидкість видалення вологи з матеріалу для сосни

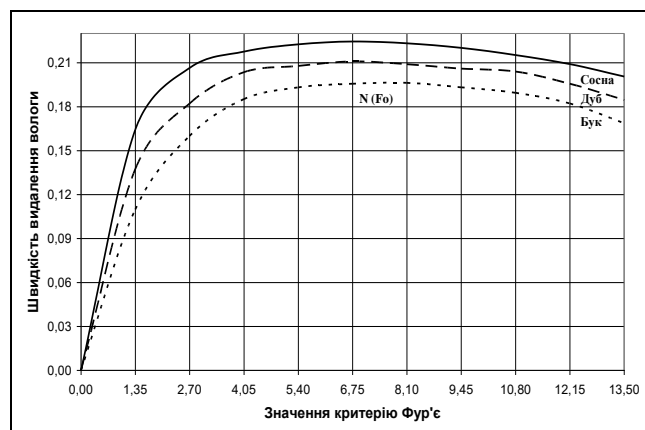


Рис. 2.18 Швидкість видалення вологи з матеріалу для різних порід деревини

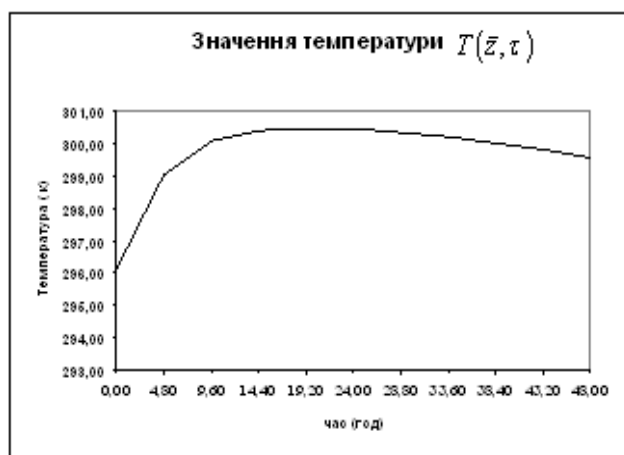


Рис. 2.19 Залежність зміни величини $T(\bar{z}, \tau) = T_1(\bar{z}, \tau) + T^{*}(\bar{z}, \tau)$ в часі

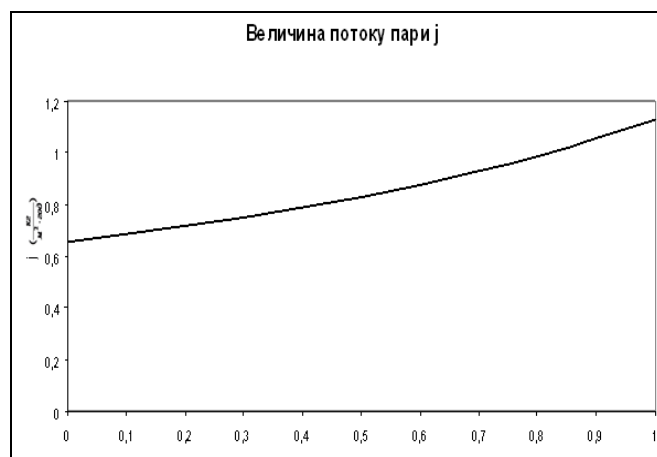


Рис. 2.20 Залежність величина потоку пари від координати

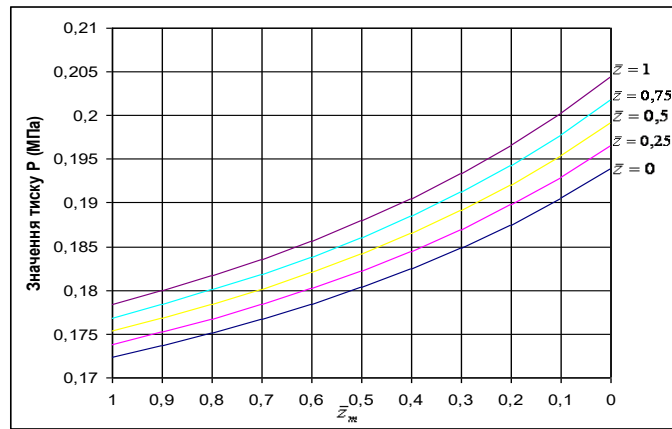


Рис. 2.21 Залежність тиску $P(\bar{z}, \bar{z}_m)$ в точках перерізу при зміні координати границі фазового переходу (в МПа)

Висновки до розділу 2

1. Побудовано нову нелінійну математичну модель вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів для нестационарних режимів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи, яка, на відміну від інших, дозволяє отримати аналітичні залежності для дослідження температурно-вологісних полів у висушуваній деревині у довільний момент часу сушіння залежно від координати фазового переходу.

2. Отримано аналітичний розв'язок диференціальних рівнянь нелінійної математичної моделі вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи. Отримані аналітичні залежності для дослідження температурно-вологісних полів у висушуваній деревині у довільний момент часу сушіння залежно від координати фазового переходу.

3. Досліджено вплив термодифузії, теплофізичних характеристик матеріалу, режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів. Встановлено, що температура фазового переходу є нелінійною функцією від коефіцієнтів теплообміну та масообміну матеріалу, коефіцієнта проникності, динамічної в'язкості газової суміші, теплопровідності, відносної насиченості та функції керування температурою агента сушіння, питомої теплоти пароутворення. Отримані аналітичні залежності для визначення часу, при якому відносна насиченість досягає зони випаровування вологи та повного часу сушіння.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕРМОДИФУЗІЇ НА МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ ВОЛОГИ ПРИ СУШІННІ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ

У третьому розділі здійснено математичне моделювання впливу термодифузії на масоперенесення вологи при сушінні деревної пластини при врахуванні дифузійного, конвективного та теплового потоків. Встановлено співвідношення для визначення густини пари і тиску в довільній точці пластини. Отримано рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ. Встановлено залежність для часу, при якому відносна насиченість досягає значення \bar{z}_m^* при умові $(\partial(T_1 - T_m))/\partial\bar{z}_m^* \ll 1$, але з врахуванням термоградієнтної складової. Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологою поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури скелету. Результати третього розділу опубліковані у [2, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 17].

3.1. Математична модель з урахуванням рухомої границі фазового переходу

Розглянемо математичну модель масоперенесення в процесі конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів при більш жорстких температурних режимах. Для цього необхідно врахувати вплив температури на масоперенесення у висушуваному матеріалі. Рівняння масоперенесення в осушеній зоні матеріалу при врахуванні дифузійного, ефузійного, конвективного та теплового потоків згідно [31, 32] представимо у вигляді:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(D + 1,064 \sqrt{\frac{RT}{M_v}} \varepsilon \right) \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_a \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial z^2} = 0,$$

де ε – коефіцієнт молекулярного течіння пари. Тут вважаємо, що густина повітря зв'язана з температурою безпосередньо через густину пари.

При сушінні деревини нагрітим газом температура сушильного агента змінюється в границях 50-80 °С, а при сушінні перегрітою парою – в границях 120-150 °С. У процесі сушіння інших капілярно-пористих матеріалів, зокрема кераміки, температура в сушильних камерах є вищою.

Оскільки розглядається конвективних процес сушіння, то на поверхнях деревної пластини мають місце умови конвективного масообміну. У подальшому розглядаємо симетричність теплових режимів процесу сушіння. В зв'язку з симетрією задачі приведемо граничні умови для однієї з половинок пластини. Зокрема, умови на поверхнях $y = L$ та $y = L_m$ газової зони запишемо так:

$$\rho_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial z} + \left(D + 1,064\varepsilon \sqrt{\frac{RT}{M_v}} \right) \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -j, \quad (3.2)$$

$$\rho_a = \rho_{a0} \text{ на поверхні } z = L,$$

$$\rho_v = \rho_n \text{ на поверхні } z = L_m,$$

$$j = \beta(\rho_v - \rho_0),$$

де β – коефіцієнт масообміну, ρ_n – густина насиченої пари за даної температури, ρ_0 – густина пари в середовищі агента сушіння [10].

Позначимо при заданій зміні температури сушильного агента

$$D_1 = (D + 1,064\varepsilon \sqrt{RT_s/M_v}), \text{ де } T_s = \frac{1}{\tau_{II}} \int_0^1 \int_0^1 T d\bar{z} d\tau - \text{деяка середня температура. Тут } \rho_{a0}$$

– густина повітря на зовнішніх стінках пластини. Позначимо також через

$\beta' = L_0 \beta / D_1$, $\delta' = \delta / \rho_n$ – відносний коефіцієнт термодифузії. Лінеаризуємо вихідну

систему рівнянь (3.1). Якщо проінтегрувати рівняння системи (3.1), то вони

запишуться так:

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + a \frac{1}{\bar{\rho}_a} \frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = 0;$$

$$\eta \left(\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} + b \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} \right) + a \left(\frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \delta' \frac{dT}{d\bar{z}} \right) + \beta' a (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) = 0 \quad (3.3)$$

Крайові умови приймуть вигляд

$$j = \beta' \rho_n (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})$$

$$T = T_1, \rho_{a0} = 1 \text{ на поверхні } \bar{z} = 1, \quad (3.4)$$

$$T = T_m, \bar{\rho}_v = 1, \text{ на поверхні } \bar{z} = \bar{z}_m. \quad (3.5)$$

Тут T_m – температура на межі розділу фаз рідина-газ, T_1 – температура, отримана в результаті розв'язку задачі про конвективний теплообмін деревної пластини в умовах взаємодії з агентом сушіння, температура якого змінюється з часом в процесі сушіння. Вираз $\delta' \frac{dT}{d\bar{z}}$ визначатиме вплив градієнта температури за товщиною пластини на масоперенесення вологи в пластині.

3.2. Дослідження математичної моделі

Інтегруючи перше рівняння (3.3) по \bar{z} , отримуємо

$$\bar{\rho}_a + b\bar{\rho}_v + a \ln \bar{\rho}_a = C_1. \quad (3.6)$$

Стала інтегрування C_1 визначається з умови (3.4). отримаємо $C_1 = 1 + b\bar{\rho}_{v1}$.

Провівши лінеаризацію з врахуванням того, що потоком повітря у капілярно-пористому середовищі знехтувано, і в зв'язку з цим безрозмірна густина повітря капілярах і порах мало відрізняється від одиниці, отримуємо

$$\frac{d\bar{\rho}_a}{d\bar{z}} = -\frac{b}{1+a} \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}}. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.3) з врахуванням (3.7) запишеться у такому вигляді

$$\frac{b}{(1+a)} \bar{\rho}_v \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \frac{d\bar{\rho}_v}{d\bar{z}} + \beta'(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) + \delta' \frac{dT}{d\bar{z}} = 0. \quad (3.8)$$

Загальний інтеграл рівняння (3.8) має вигляд

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{\bar{\rho}_v^2}{2} + \bar{\rho}_v + \beta'(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})\bar{z} + \delta'T = C_2, \quad (3.9)$$

де $C_2 = \frac{b}{(1+a)} \frac{1}{2} + 1 + \beta'(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})\bar{z}_m + \delta'T_m$ – стала інтегрування, яка визначена з умови (3.5). Безрозмірна густина пари в довільній точці за товщиною пластини у процесі сушіння визначається співвідношенням

$$\bar{\rho}_v = -A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A\delta'(T - T_m)}.$$

Визначимо величину тиску у деревній пластині. Отримаємо

$$P(\bar{z}, \bar{z}_m) = \frac{\rho_n \bar{\rho}_v}{M_v} RT(\bar{z}) = \\ = \left(-A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m) - 2A\delta'(T(\bar{z}, \bar{z}_m) - T_m)} \right) \frac{\rho_n}{M_v} RT(\bar{z}, \bar{z}_m).$$

Тоді на поверхні деревної пластини $\bar{z} = 1$ має місце рівняння

$$\frac{b}{(1+a)} \frac{(\bar{\rho}_{v1}^2 - 1)}{2} + \bar{\rho}_{v1} - 1 + \beta'(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(1 - \bar{z}_m) + \delta'(T_1 - T_m) = 0. \quad (3.10)$$

Розв'язок рівняння (3.10) визначає величину безрозмірної густини пари на поверхні пластини. Значення температури T_1 при $\bar{z} = 1$, визначене в результаті розв'язку задачі теплоперенесення. Позначимо $\bar{z}_m^* = 1 - \bar{z}_m$, \bar{z}_m – зміна відносної вологості в процесі сушіння. Фізично прийнятна вітка розв'язку рівняння (3.10) має вигляд

$$\bar{\rho}_{v1} = -(A + A_1 \bar{z}_m) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m + A_1^2 \bar{z}_m^2 - 2A\delta'(T_1 - T_m)}. \quad (3.11)$$

З рівняння стану тиск на поверхні деревної пластини $\bar{z} = 1$ визначається формулою

$$P_1(1, \bar{z}_m) = \frac{\rho_n RT_1(1, \bar{z}_m^*)}{M_v} \left(-(A + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A\delta'(T_1 - T_m)} \right)$$

Маючи значення густини пари на поверхні пластини, згідно умови (3.4), величину потоку j у процесі сушіння представимо в вигляді

$$j = H \left(-(a_1 + A_1 \bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3 \bar{z}_m^* + A_1^2 \bar{z}_m^{*2} - 2A\delta'(T_1 - T_m)} \right), \quad (3.12)$$

де $a_1 = A + \eta_0$, $H = \beta \rho_n$.

Втрачена під час сушіння маса вологи деревної пластини визначається за допомогою залежностей

$$\Delta m_L = \Pi S \rho_L L (1 - \bar{z}_m) = \Pi S \rho_L L \bar{z}_m^*$$

Використовуючи (3.12), отримуємо рівняння для визначення зміни відносної вологості в часі у процесі сушіння деревної пластини та рівняння руху межі розділу фаз рідина-газ

$$\frac{d\bar{z}_m^*}{d\tau} = \frac{j(\bar{z}_m^*)}{\Pi\rho_L L} = \frac{\beta\bar{z}_m^*}{\Pi\rho_L L} \left(-(a_1 + B\bar{z}_m^*) + \sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2} - 2A\delta'(T_1 - T_m)} \right) \quad (3.13)$$

Початкова умова ($\tau = 0$) відповідає відсутності висушеної зони у деревній пластині на початку процесу сушіння, тобто

$$\bar{z}_m^* = z_m = 0. \quad (3.14)$$

Для отримання розв'язку задачі Коші (3.13), (3.14) використаємо заміну змінних

$$\sqrt{A_2 + A_3\bar{z}_m^* + A_1^2\bar{z}_m^{*2} - 2A\delta'(T_1 - T_m)} = \phi + \bar{z}_m^* A_1. \quad (3.15)$$

Поступивши аналогічно, як у п. 2.4, отримаємо залежність для визначення часу, при якому відносна насиченість у деревній пластині досягає значення \bar{z}_m^* при умові $\frac{\partial(T_1 - T_m)}{\partial\bar{z}_m^*} \ll 1$, але з врахуванням термоградієнтної складової. Така залежність

описується формулою

$$\tau \cdot 2H_1 A_1 = \ln \left| \frac{2A_1\phi - (A + \rho_0)}{2A_1\sqrt{A_2} - A_3} \right| + \frac{1}{2} \left(A_3^2 - 4A_1^2 (A_2 - 2A\delta'(T_1 - T_m)_{z_m=1}) \right) \frac{1}{(2A_1\phi - A_3)^2} - \frac{1}{(2A_1A_2\sqrt{\phi} - A_3)^2},$$

де $H_1 = \frac{H}{\Pi\rho_L L_0}$.

Повний час конвективного сушіння τ_{Π} деревної пластини визначається за допомогою формули

$$\tau_{\Pi} = \frac{1}{2\alpha^* A_1^2} \left(\ln \left| \frac{\phi_0 - (A + \eta_0)}{(A + 1) - (A + \eta_0)} \right| + \frac{1}{2} \left((A + \bar{\rho}_{v0})^2 - (A + 1)^2 + A\delta'(T_1 - T_m(P_m))_{\bar{z}_m=0} \right) \left(\frac{1}{(\phi_0 - (A + \bar{\rho}_{v0}))^2} - \frac{1}{((A + 1) - (A + \bar{\rho}_{v0}))^2} \right) \right). \quad (3.16)$$

3.3. Визначення температури фазового переходу з врахуванням градієнта температури у деревній пластині

Температуру деревної пластини при нестационарному конвективному процесі сушіння згідно п. 2.3 можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
T(\bar{z}, \tau) &= \chi_0(\bar{z}) + \sum_{i=1}^N \chi_i(\bar{z}) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau} = \\
&= T_m + H_T \frac{\alpha_0 - T_m}{H_T (1 - \bar{z}_m) + 1} (\bar{z} - \bar{z}_m) + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\sin \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\sqrt{b_i}} e^{-b_i \tau} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n (\bar{z} - \bar{z}_m)}{\mu_n} Z_n(\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

де

$$\begin{aligned}
Z_n(\bar{z}_m) &= \frac{2T_0 H_T}{\Delta_n} \left(\frac{\sin \mu_n (1 - \bar{z}_m)}{\mu_n} - \frac{H_T}{\mu_n^2} (\cos \mu_n (1 - \bar{z}_m) - 1) \right) + (Z_{n1} - Z_{n2}), \\
Z_{n1} &= \sum_{i=1}^N C_i \left\{ -\frac{\cos(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\cos(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\cos(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right\}, \\
Z_{n2} &= \sum_{i=1}^N \frac{C_i H_T}{\mu_n} \left\{ \frac{\sin(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} - \frac{\sin(\sqrt{b_i} (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} - \frac{\sin(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} - \mu_n)} + \frac{\sin(\mu_n (1 - \bar{z}_m))}{2(\sqrt{b_i} + \mu_n)} \right\}.
\end{aligned}$$

Продиференціюємо вираз (3.17) за координатою. Отримаємо

$$\begin{aligned}
T'_z(\bar{z}, \tau) &= (\alpha_0 - T_m) \frac{H_T}{1 + H_T (1 - \bar{z}_m)} + \sum_{i=1}^n C_i \cos \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cos \sqrt{b_i} (\bar{z} - \bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

При $\bar{z} = \bar{z}_m$ співвідношення (3.18) має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_m, \tau) &= \frac{-T_m H_T}{1 + H_T (1 - \bar{z}_m)} + \frac{H_T \alpha_0}{1 + H_T (1 - \bar{z}_m)} + \sum_{i=1}^n C_i (\bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \\
\sum_{n=1}^{\infty} Z_n (\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau} &= \frac{-T_m H_T}{1 + H_T (1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Через $\Psi(\bar{z}_m, \tau)$ представимо частину градієнта температури деревної пластини, залежну від коефіцієнтів розкладу функції температури агента сушіння, коефіцієнтів теплообміну та теплофізичних характеристик матеріалу у вигляді

$$\frac{H_T \alpha_0}{1 + H_T (1 - \bar{z}_m)} + \sum_{i=1}^n C_i (\bar{z}_m) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n (\bar{z}_m) e^{-\mu_n^2 \tau} = \Psi(\bar{z}_m).$$

Після завершення процесу сушіння $\bar{z}_m = 0$. Тоді отримаємо

$$\Psi(0) = \frac{H_T \alpha_0}{1 + H_T} + \sum_{i=1}^n C_i(0) e^{-b_i \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (3.20)$$

$$C_i(0) = \frac{H_T (\sin \sqrt{b_i} - \alpha_i)}{\cos \sqrt{b_i}}.$$

Врахуємо залежність між тиском пари і температурою у деревній пластині. З урахуванням (2.40) отримаємо вираз

$$P(\bar{z}, \bar{z}_m) = \left(-A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m)} \right) \rho_n \frac{RT}{M_v}. \quad (3.21)$$

Продиференціювавши (3.21) за координатою, знайдемо градієнт тиску у деревній пластині у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\rho_n R}{M_v} \left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m)}} \cdot T + \right. \\ &\quad \left. + \left(-A + \sqrt{A_2 - 2A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})(\bar{z} - \bar{z}_m)} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

На межі фазового переходу з (3.22) отримаємо залежність

$$\left. \frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} \right|_{z=\bar{z}_m} = -\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} \Big|_{z=\bar{z}_m} P_n + \frac{\rho_n R}{M_v} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=\bar{z}_m}. \quad (3.23)$$

На межі фазового переходу врахуємо залежність (2.8)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=\bar{z}_m} = -\frac{r_k K_g}{\lambda_c \mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_m} \text{ та лінеаризовану залежність між тиском насичення та}$$

температурою фазового переходу у вигляді $T_m = T_{mk} + \alpha_{mk} P_n$.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P(\bar{z}, \bar{z}_m)}{\partial \bar{z}} \right|_{z=\bar{z}_m} &= -\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} \Big|_{z=\bar{z}_m} P_n + \frac{\rho_n R}{M_v} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=\bar{z}_m} = \\ &= -\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} \Big|_{z=\bar{z}_m} P_n + \frac{\rho_n R T_m}{M_v T_m} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \Big|_{z=\bar{z}_m} = \\ &= \left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{T_m} \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right) P_n = \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{T_m} \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right) \frac{T_m - T_{mk}}{\alpha_{mk}}.$$

Тоді для $\bar{z} = \bar{z}_m$ праву частину виразу (3.19) для градієнта температури можна представити таким чином

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) = \\ & = -\frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g} \left(\left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{T_m} \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right) \frac{T_m - T_{mk}}{\alpha_{mk}} \right). \\ & \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) T_m = \\ & = -\frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g} \left(\left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} T_m + \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right) \frac{T_m - T_{mk}}{\alpha_{mk}} \right). \end{aligned}$$

З урахуванням співвідношення (2.8) отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-T_m^2 H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) T_m \right) = \tag{3.24} \\ & = -\frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g} \left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} T_m^2 + \left(\frac{-T_m^2 H_T}{(1 + H_T(1 - \bar{z}_m))\alpha_{mk}} + \frac{T_m}{\alpha_{mk}} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right) + \\ & + \frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g T_{mk}}{\mu_g \alpha_{mk}} \left(-\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} T_m + \left(\frac{-T_m H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \Psi(\bar{z}_m, \tau) \right) \right). \end{aligned}$$

Отже, для визначення температури фазового переходу у деревній пластині у процесі сушіння з врахуванням градієнта температури отримано рівняння

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} + \frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g} \left(\frac{H_T}{(1 + H_T(1 - \bar{z}_m))\alpha_{mk}} + \frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} \right) \right) T_m^2 + \tag{3.25} \\ & + \left(\left(1 - \frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g \alpha_{km}} \right) \Psi(\bar{z}_m, \tau) - \frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g \alpha_{km}} T_{mk} \right) \left(\frac{A_1(\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0})}{\sqrt{A_2}} - \frac{H_T}{1 + H_T(1 - \bar{z}_m)} \right) T_m + \\ & + \frac{r_k}{\lambda_c} \frac{K_g}{\mu_g \alpha_{km}} T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Після деяких перетворень маємо

$$\left(\frac{-H_T \lambda_c \mu_g \alpha_{mk} \sqrt{A_2} + r_k K_g (H_T \sqrt{A_2} + A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk})}{(1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk} \lambda_c \mu_g \sqrt{A_2}} \right) T_m^2 + \quad (3.26)$$

$$+ \left(\frac{(\lambda_c \mu_g \alpha_{km} - r_k K_g) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} - r_k K_g T_{mk} (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) - H_T \sqrt{A_2})}{\lambda_c \mu_g \alpha_{km} \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))} \right) \cdot T_m + \frac{r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))}{\lambda_c \mu_g \alpha_{km} \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))} = 0.$$

Представимо отримане рівняння для визначення T_m у такому виді:

$$\left\{ \frac{H_T \sqrt{A_2} (-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g) + r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk})}{(1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk} \lambda_c \mu_g \sqrt{A_2}} \right\} T_m^2 + \quad (3.27)$$

$$+ \frac{(\lambda_c \mu_g \alpha_{km} - r_k K_g) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} - r_k K_g T_{mk} (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) - H_T \sqrt{A_2})}{\lambda_c \mu_g \alpha_{km} \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))} \cdot T_m + \frac{r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))}{\lambda_c \mu_g \alpha_{km} \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))} = 0.$$

Введемо позначення:

$$-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g = x_1; \quad r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk}) = x_2;$$

$$-r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2} = x_3.$$

Тоді дане рівняння запишемо таким чином:

$$\left(H_T \sqrt{A_2} (-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g) + r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk}) \right) T_m^2 + \quad (3.28)$$

$$+ \left((\lambda_c \mu_g \alpha_{km} - r_k K_g) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} - \right.$$

$$\left. - r_k K_g T_{mk} (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) - H_T \sqrt{A_2}) \right) T_m +$$

$$+ r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) = 0.$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\left(H_T \sqrt{A_2} x_1 + x_2 \right) T_m^2 + \left(x_1 (1 + H_T \Psi) \sqrt{A_2} - x_2 T_{mk} / \alpha_{mk} + r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2} \right) T_m + \quad (3.29)$$

$$+ r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) = 0.$$

Коефіцієнти отриманого рівняння (3.29) для визначення температури фазового переходу є функціями координати фазового переходу, питомої температури

пароутворення, коефіцієнтів тепло та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів технологічного режиму сушіння, відносних насиченостей вологою поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури пластини.

Таким чином, у явному вигляді значення температури T_m у процесі сушіння деревної пластини можна представити у вигляді

$$T_m = -\frac{x_1(1 + H_T \Psi) \sqrt{A_2} - x_2 T_{mk} / \alpha_{mk} + r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2}}{H_T \sqrt{A_2} x_1 + x_2} + \sqrt{\frac{(x_1(1 + H_T \Psi) \sqrt{A_2} - x_2 T_{mk} / \alpha_{mk} + r_k K_g T_{mk} H_T \sqrt{A_2})^2}{(H_T \sqrt{A_2} x_1 + x_2)^2} - r_k K_g T_{mk} \Psi(\bar{z}_m, \tau) \sqrt{A_2} (1 + H_T (1 - \bar{z}_m))}. \quad (3.30)$$

Якщо в даній формулі (3.30) знехтувати впливом градієнта фазового переходу, то отримаємо залежність температури фазового переходу від технологічних і тепло-фізичних параметрів для м'яких режимів в процесі сушіння.

$$T_m = \frac{r_k K_g T_{mk} (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) - H_T \sqrt{A_2})}{H_T \sqrt{A_2} (-\lambda_c \mu_g \alpha_{mk} + r_k K_g) + r_k K_g (A_1 (\bar{\rho}_{v1} - \bar{\rho}_{v0}) (1 + H_T (1 - \bar{z}_m)) \alpha_{mk})}. \quad (3.31)$$

З даної формули випливає, що температура фазового переходу є нелінійною функцією від коефіцієнта теплообміну та масообміну матеріалу, коефіцієнта проникності, динамічної в'язкості газової суміші, теплопровідності, відносної насиченості та функції керування температурою агента сушіння, питомої теплоти пароутворення, місцезнаходження координати фазового переходу.

3.4. Чисельний аналіз процесів тепломасоперенесення у деревині під час сушіння

Графічні залежності перенесення вологи $(U_p - U_{p0})/U_{p0}$ за товщиною деревної пластини у різні моменти часу для температури агента сушіння $t_c = 65$ °C, відносній вологості $\varphi = 0,8$ та швидкості $v = 2$ м/с, густина $\rho = 581$ кг/м³, густина абсолютно сухого тіла $\rho_0 = 457$ кг/м³, густина базисна $\rho_b = 415$ кг/м³, пористість $\Pi = 0,6$, густина насиченої пари $\rho_n = 0,013188$ кг/м³, $\rho_{\alpha_0} = 1,29$ кг/м³, $\rho_L = 1000$ кг/м³, коефіцієнт вологообміну $\beta = 0,000976$ м/с, коефіцієнт масообміну $\alpha = 22,32599$

Вт/(м²·град), коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,299993$ Вт/(м·град) наведені на рис. 3.1. Крива 1 відповідає $F_0=0,1$; крива 2 – $F_0=0,63$; крива 3 – $F_0=0,6$; крива 4 – $F_0=1,15$; крива 5 – $F_0=2,15$. Оскільки для початкового моменту часу випаровування є інтенсивним у приграничних шарах, то зміна величини $U_p(x, \tau)$ спостерігається поблизу граничної поверхні. Сповільнення та наближення кінетичної кривої до рівноважного значення U_p зумовлює значення перенесення вологи у рідкій фазі. Менші значення вологовмісту U у насиченій зоні зумовлене сповільненням дифузії в середніх шарах деревної пластини, пов'язаної з вирівнюванням температури.

Швидке зменшення вологовмісту на поверхні висушуваного матеріалу пов'язане не лише з описаним вище фактом про менший вплив дифузії у порівнянні з зовнішнім вологообміном, але з ефектом термовологопровідності. В початковий момент осушування наявний температурний градієнт створює термодифузійний потік вологи від поверхні до середніх шарів деревного взірця. Це суттєво впливає на величину перепаду вологовмісту. Аналіз графічних залежностей розподілу температури і вологовмісту свідчить про те, що процес термодифузії впливає на термовологоперенесення. Зокрема, для випадку лише дифузійного перенесення криві вологоперенесення мають монотонний характер і рівномірно зменшуються від максимального значення у центральному шарі до мінімального значення на поверхні деревного взірця. Наявність перенесення вологи з врахування термодифузії величина вологовмісту у деревині може бути більша від початкового значення. Це зумовлює появу максимальних значень вологовмісту не лише «у середньому» шарі, але і в інших «присередніх» шарах деревного взірця. Зменшення коефіцієнта вологообміну та збільшення коефіцієнта дифузії обумовлює збільшення впливу термодифузійного потоку. Збільшення вологості у середині деревини та зменшення її на поверхні лімітується градієнтом температури, а потік вологості, що випаровується з поверхні є більшим за потік вологості, який підводиться із середини матеріалу до поверхні.

Аналіз розподілу температури $(T(x, \tau) - T_0)T_0$ у деревній пластині від безрозмірної координати x/l наведені на рис. 3.2. Початковий період процесу

сушіння характеризується інтенсивним нагріванням поверхні пластини. З плином часу сушіння температура наближається до значення температури мокрого термометра t_m . У кінці процесу сушіння температура наближається до температури агента сушіння. Відмінність розподілу температурних полів з плином тривалості сушіння деревини посилюється, а саме температура твердої фази сповільнюється і не перевищує температури насиченої пари.

Зменшення градієнта температури зумовлює зниження термодифузійного потоку, а зменшення вологості на поверхні U_n сповільнює вологообмін з навколишнім середовищем. Якщо дифузійний потік є більшим від сумарного потоку, а саме термодифузійного від поверхні і вологообміну з агентом сушіння, то вологовміст поверхневих шарів збільшується. Це зростання спостерігається до моменту вирівнювання описаних потоків.

Рис. 3.3 характеризує розподіл відносної концентрації тиску пари $\bar{P}(x) = P(x)/P_0$ у деревній пластині. Інтенсивне прогрівання матеріалу на початковому етапі процесу сушіння зумовлює наявність залишкового тиску, який зростає у початковий момент. Це пов'язано з особливостями періоду процесу сушіння. Зокрема тим, що температура деревини дорівнює температурі мокрого термометра t_m , яка є незначною.

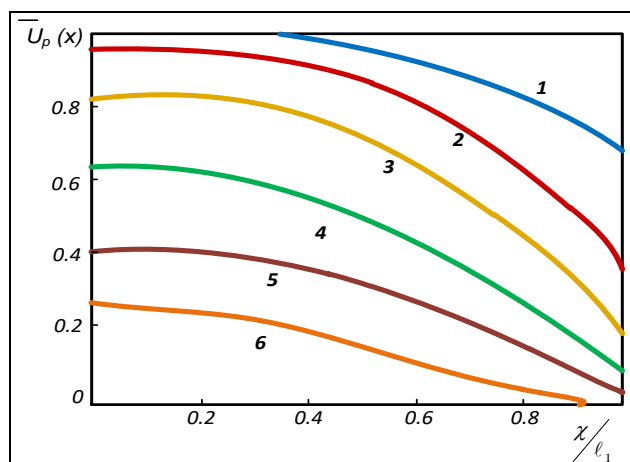


Рис. 3.1 Зміна об'ємної концентрації $\bar{U}_p(x) = (U_p(x) - U_0)/U_{p0}$ для деревини для різних моментів часу (крива 1 – 20 хв.; 2 – 100 хв.; 3 – 200 хв.; 4 – 284 хв.; 5 – 400 хв.; 6 – 540 хв.)

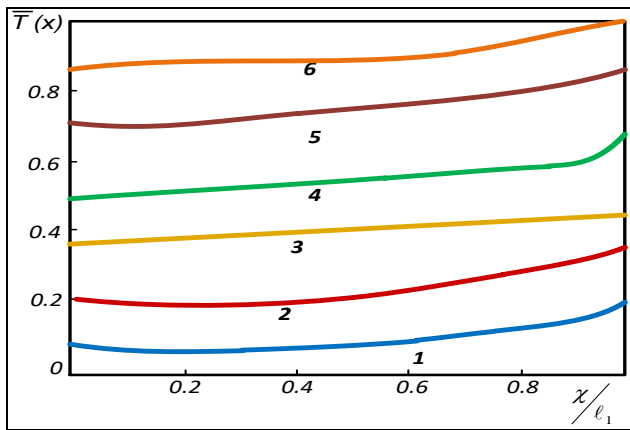


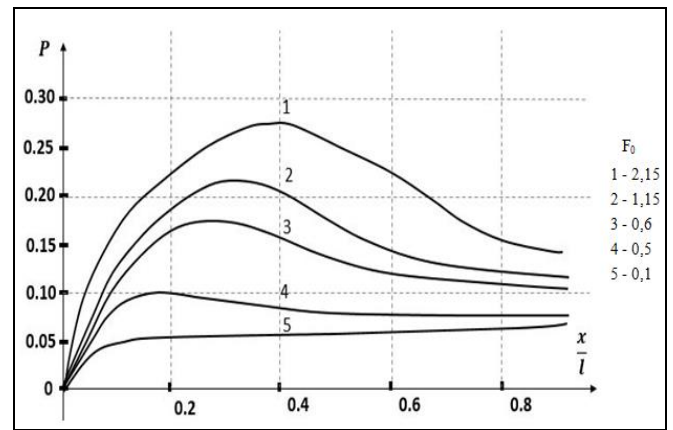
Рис. 3.2 Зміна відносних температур

$$\bar{T}(x) = (T(x) - T_0) / (T_c - T_0)$$

для деревини сосни у різні моменти часу

(крива 1 – 5 хв.; 2 – 20 хв.; 3 – 160 хв.;

4 – 400 хв.; 5 – 500 хв.; 6 – 600 хв.)

Рис. 3.3 Зміна тиску пари у процесі сушіння
деревної пластини для різних значень часу
сушіння

Таблиця 3.1

Залежність тиску $P(\bar{z}, \bar{z}_m)$ в довільній точці перерізу
при зміні координати границі фазового переходу (в МПа)

$P(\bar{z}_m, \bar{z})$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,1650	0,1666	0,1681	0,1696	0,1711	0,1727	0,1742	0,1757	0,1772	0,1788	0,1803
0,9	0,1676	0,1692	0,1708	0,1724	0,1740	0,1757	0,1773	0,1789	0,1805	0,1821	0,1837
0,8	0,1692	0,1709	0,1726	0,1743	0,1760	0,1776	0,1793	0,1810	0,1827	0,1844	0,1861
0,7	0,1705	0,1723	0,1741	0,1758	0,1776	0,1794	0,1811	0,1829	0,1847	0,1865	0,1882
0,6	0,1718	0,1737	0,1755	0,1774	0,1792	0,1811	0,1830	0,1848	0,1867	0,1885	0,1904
0,5	0,1731	0,1751	0,1771	0,1790	0,1810	0,1829	0,1849	0,1869	0,1888	0,1908	0,1927
0,4	0,1746	0,1767	0,1787	0,1808	0,1829	0,1849	0,1870	0,1891	0,1912	0,1932	0,1953
0,3	0,1762	0,1784	0,1806	0,1828	0,1850	0,1872	0,1894	0,1916	0,1938	0,1959	0,1981
0,2	0,1780	0,1803	0,1827	0,1850	0,1873	0,1897	0,1920	0,1943	0,1967	0,1990	0,2013
0,1	0,1801	0,1825	0,1850	0,1875	0,1900	0,1925	0,1950	0,1975	0,1999	0,2024	0,2049
0	0,1824	0,1850	0,1877	0,1904	0,1930	0,1957	0,1984	0,2010	0,2037	0,2064	0,2090

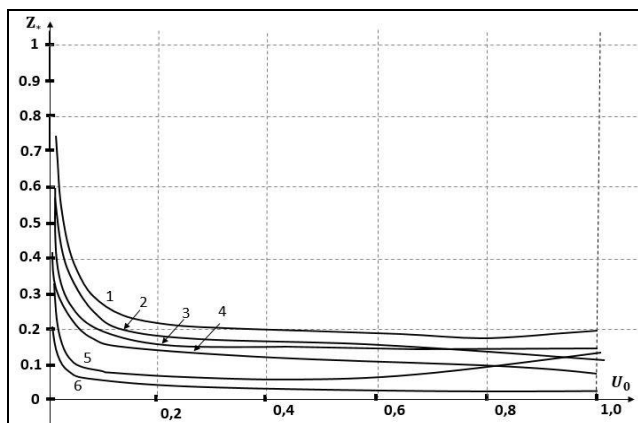


Рис. 3.4 Залежність координати фазового переходу у процесі сушіння деревної пластині від зміни вологовмісту для різних значень температури середовища

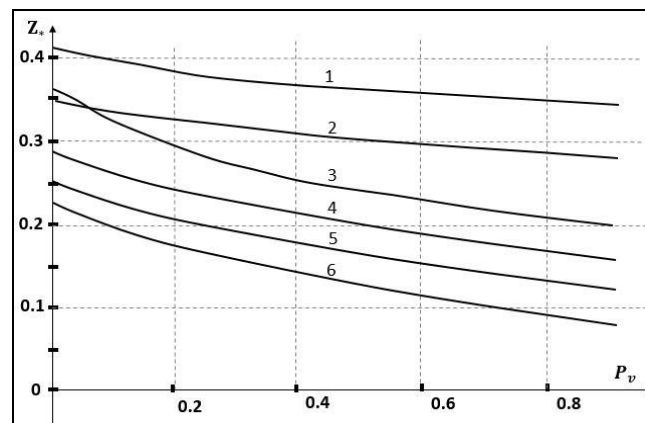


Рис. 3.5 Залежність координати фазового переходу у процесі сушіння деревної пластині залежно від температури для різних значень температури середовища

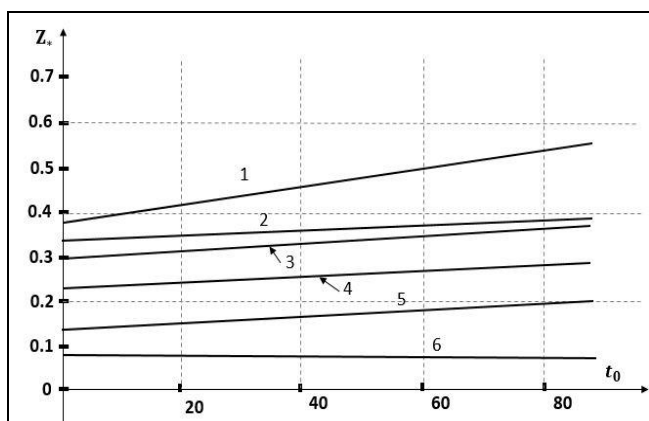


Рис. 3.6 Залежність координати фазового переходу у процесі сушіння деревної пластині залежно від температури для різних значень температури середовища

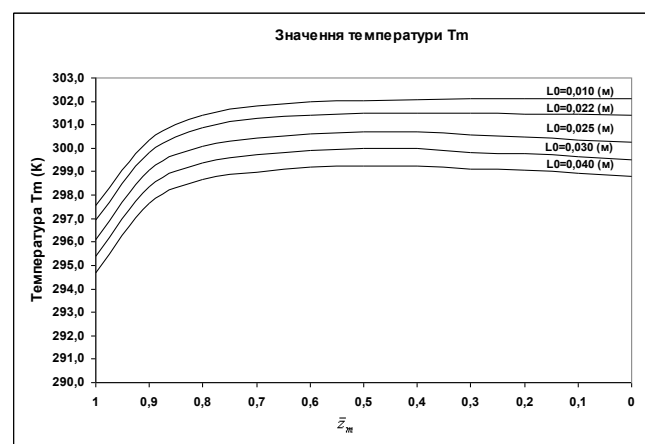


Рис. 3.7 Залежність температури фазового переходу $T_m(\bar{z}_m)$ від товщини пластини

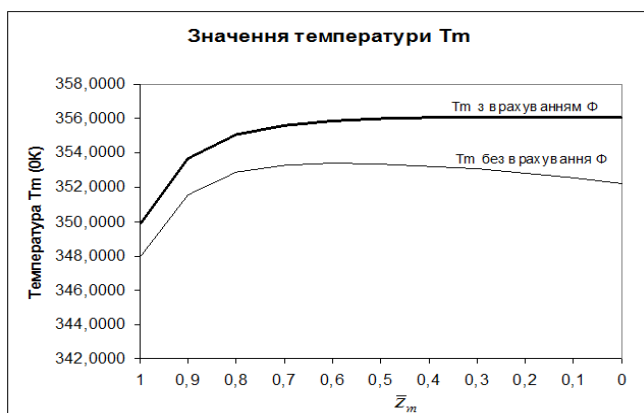


Рис. 3.8 Залежність температури фазового переходу з врахуванням і без врахування температурного градієнта

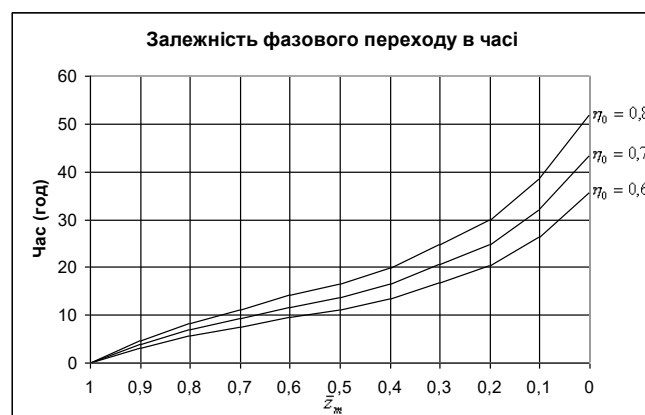


Рис. 3.9 Зміна координати фазового переходу в часі

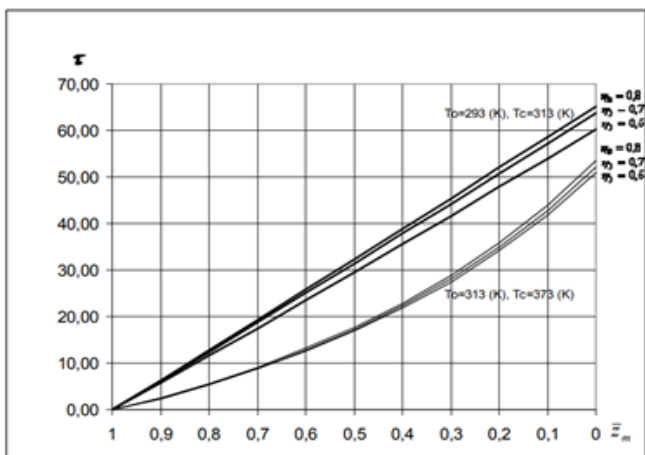


Рис. 3.10 Зміна координати фазового переходу в часі

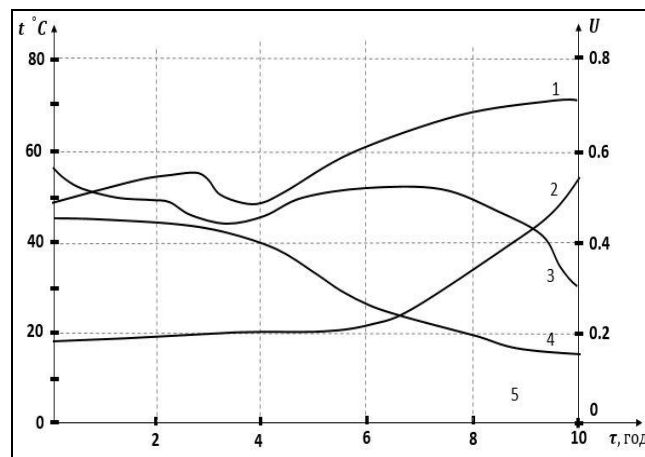


Рис. 3.11 Зміна температури на рухомій границі розподілу фаз (криві 1,3) деревної пластини залежно від часу сушіння для різних значень зовнішнього середовища (крива 2 характеризує температуру, крива 4 – вологість пластини)

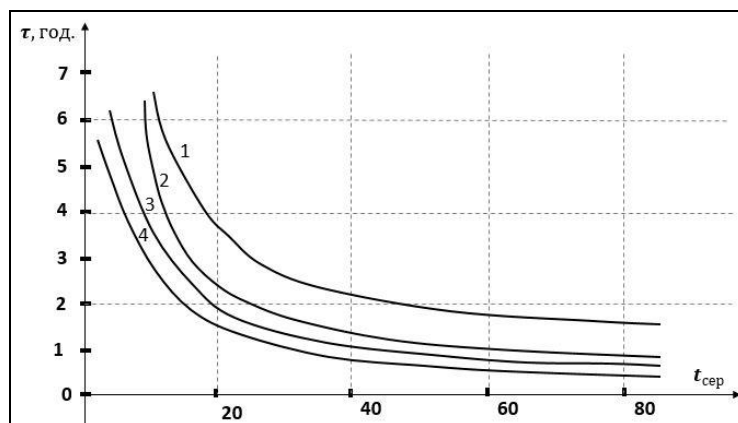


Рис. 3.12 Залежність часу сушіння деревної пластини для різних значень температури середовища

Визначальною причиною виникнення у деревині внутрішнього тиску та його градієнтів є процес інтенсивного розширення паро газової суміші у матеріалі, зумовлений нагріванням та неоднорідністю капілярно-пористої структури. Підвищення температури матеріалу інтенсифікує внутрішній процес пароутворення перенесення вологи до поверхні матеріалу.

Аналіз графічних залежностей свідчить про те що у процесі сушіння деревини ($\rho_0 = 460$ кг/м³) з початковою вологістю $U_0 = 0,6$ кг/кг є характерні три періоди: період прогрівання, період сталої швидкості сушіння і період спадаючої швидкості

сушіння. Для першого періоду у деревині здійснюється інтенсивне прогрівання, яке зумовлює швидке пароутворення. Температура поверхневих шарів деревини впродовж усього періоду є більшою, ніж у центральних шарах. У найбільш нагрітих шарах деревини до кінця першого періоду процесу сушіння виникає максимальний залишковий тиск. Даний тиск виникає для температури матеріалу, що є нижчою від температури насичення для заданого атмосферного тиску.

Другий період процесу сушіння характеризується відносною стабілізацією росту температурного поля. Це зумовлено поглинанням значної кількості тепла процесом внутрішнього пароутворення, яке у свою чергу зумовлює швидкий ріст залишкового внутрішнього тиску. Наявність градієнта такого тиску скерованого у внутрішніх шарів деревини, інтенсифікує процес виділення вологи. На початку періоду сталої швидкості сушіння спостерігається поєднання фронтів максимальних значень внутрішнього залишкового тиску. У середині цього періоду його значення досягають максимальних значень і після цього спостерігається їх поступове зменшення. Збільшення значень тиску у деревині в процесі сушіння зумовлюються у структурі матеріалу впродовж тривалого часу повітряної суміші.

Аналіз температурних полів для періоду спадаючої швидкості сушіння свідчить про їх зростання у всьому об'ємі матеріалу до тих пір, поки температура центрального шару не зрівняється з температурою поверхневих шарів. Оскільки для цього періоду є характерним виділення зв'язаної вологи, то тривалістю цього періоду є досить значною. Однак інтенсивність спадання внутрішнього залишкового тиску є більшою у порівнянні з попередніми періодами.

Капілярно-пористе середовище деревини у процесі сушіння окрім вологи заповнюється і пароповітряною сумішшю. У процесі нагрівання деревини рідина (вода), а також пара і повітря намагаються збільшити свій об'єм. Однак зміна об'єму деревинної та рідкої фаз деревини зі збільшенням температури є незначною у порівнянні зі збільшенням об'єму пароповітряної суміші. Ця обставина, а також наявність пари і повітря у деревині впродовж усього процесу сушіння зумовлюють наявність залишкового тиску у матеріалі. Збільшення температури та зменшення

вологості деревини у процесі сушіння, збільшення газопроникливості у матеріалі. Тобто кількість пароповітряної суміші змінюється у процесі сушіння.

На рис. 3.13 наведені результати дослідження зміни внутрішнього залишкового тиску парогазової суміші. На початку процесу нагрівання деревини тиск на поверхні деревних взірців є більшим ніж у центрі. Однак, після початку нагрівання значення тиску у центральних шарах збільшується інтенсивніше, ніж на поверхні матеріалу. Це зумовлено більш інтенсивнішим відділенням повітря з поверхневих шарів. У процесі сушіння значення тиску у деревині збільшуються, досягаючи максимальних значень.

Аналіз полів тиску у деревині в процесі сушіння свідчить про те, що деревина є проникаючою як для пари, так і для повітря. Оскільки, у процесі сушіння впродовж тривалого періоду зберігається повітря, то це зумовлює зменшення тиску у матеріалі, величина якого є більшою за тиск водяної пари за заданої температури.

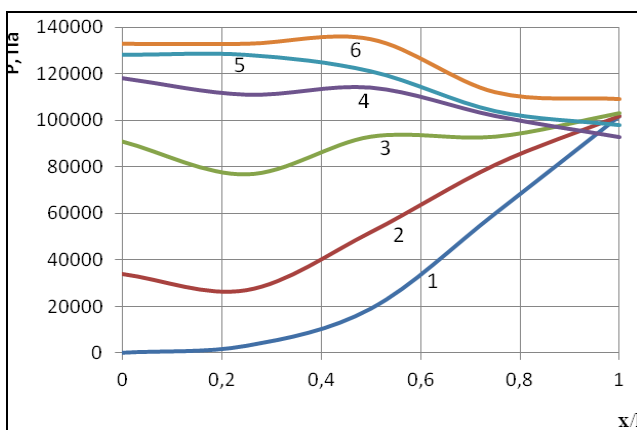


Рис. 3.13 Розподіл тиску пароповітряної суміші у деревній пластині (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

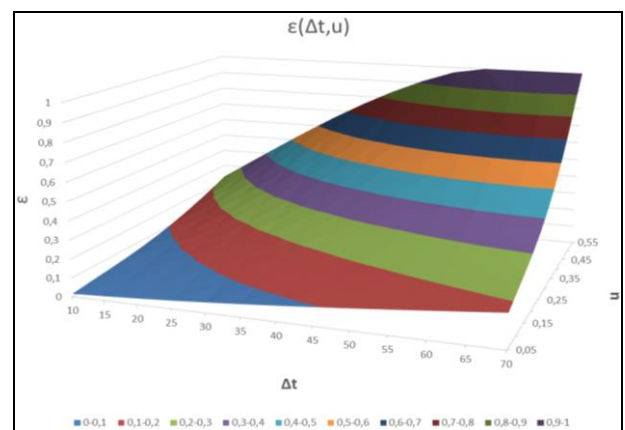


Рис. 3.14 Розподіл тиску пароповітряної суміші у деревній пластині (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

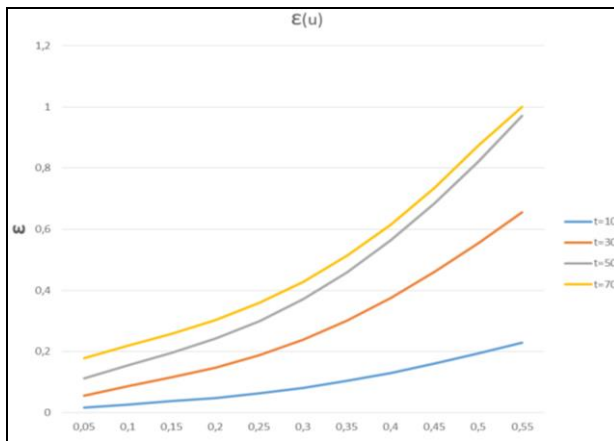


Рис. 3.15 Розподіл тиску пароповітряної суміші у деревній пластині (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

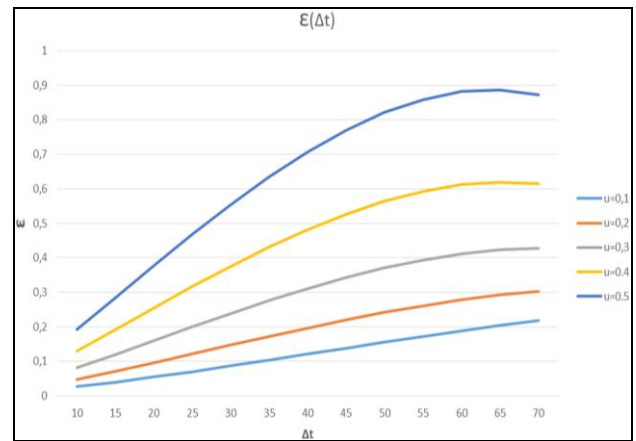


Рис. 3.16 Розподіл тиску пароповітряної суміші у деревній пластині (крива 1 – 10 год; 2 – 20 год; 3 – 30 год; 4 – 40 год; 5 – 50 год; 6 – 60 год)

Висновки до розділу 3

1. Запропонований підхід та встановлені закономірності впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у висушуваних матеріалах можуть бути використані для розроблення раціональних технологій сушіння капілярно-пористих матеріалів із забезпеченням необхідних показників якості.

2. Дістав подальший розвиток аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу.

3. Встановлені розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу. Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло та масообміну коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологою поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури скелету.

РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ ПРИ СУШІННІ АІЗОТРОПНИХ КАПІЛЯРНО–ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЦІ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ

У цьому розділі побудовано двовимірну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів. Визначено вплив головних компонентів та орієнтації головних осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному брусі прямокутного поперечного перерізу з урахуванням руху границь фазових переходів. Розроблено аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазових переходів та встановлення рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням головних осей анізотропії. Побудовані алгоритми нелінійної математичної моделі при змінних температурних режимах середовища. Інтеграл по межі фазового переходу визначаються числовим методом. Всі інші величини, які входять в дане рівняння обчислюються за даними фізико-тепловими характеристиками конкретного матеріалу. Результати четвертого розділу опубліковані у [3, 23, 24].

4.1. Математична модель сушіння ортотропного призматичного бруса прямокутного поперечного перерізу

В роботі досліджується процес теплоперенесення та визначається час повного сушіння капілярно-пористого ортотропного призматичного бруса при заданій температурі на його бічних поверхнях, з урахуванням границі фазового переходу. Визначено головні напрямки та головні коефіцієнти теплопровідності в деревині певного типу. За коефіцієнтом пористості, відносної насиченості вологою гомогенізовано осушуваний матеріал. Задача розв'язана як задача Стефана з рухомою границею.

Метою даного дослідження є побудова двовимірної математичної моделі процесу конвективного сушіння капілярно-пористого ортотропного призматичного бруса прямокутного поперечного перерізу $\{2L_1, 2L_2\}$ ($-L_1 \leq x_1 \leq L_1, -L_2 \leq x_2 \leq L_2$),

(рис. 4.1). З урахуванням границі фазового переходу процес сушіння здійснюється з поверхонь під дією агента сушіння – нагрітого циркулюючого повітря. Керуючим параметром при сушінні є температура сушильного агента. Вважаємо, що умови технологічного процесу сушіння по довжині бруса однакові. Оскільки коефіцієнт теплопровідності деревини вздовж волокон суттєво перевищує такі ж коефіцієнти у поперечному перетині, тому в подальшому будемо розглядати задачу розподілу тепла і утворення осушеної зони в поперечному перетині бруса. Зовнішній контур такого бруса в змінних x_1, x_2 описується рівнянням поверхні

$$F_0(x_1, x_2) = (x_1^2 - L_1^2)(x_2^2 - L_2^2) = 0. \quad (4.1)$$

В процесі теплообміну бруса з сушильним агентом утворюється осушена зона, яка поширюється від зовнішньої поверхні в глибину тіла. Вважатимемо, що осушену і вологу зони бруса розділяє циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі бруса, а замкнутий контур її поперечного перерізу є їх напрямною лінією. Рівняння такої поверхні представимо у вигляді

$$F_m(x, y, \tau) = F_0(x_1, x_2) - \varepsilon(\tau), \quad (4.2)$$

де $\varepsilon(\tau)$ – невідома функція часу.

Приймемо також, що в осушеній зоні волога видалена, а в решті об'єму вона збереглась. Вміст вологи, що залишається в бруску, визначиться за формулою $W = \rho_L((V - V_m)/V)$, де V – об'єм тіла; V_m – об'єм осушеної зони; ρ_L – густина вологи .

Розподіл температури $T(x_1, x_2, \tau)$ пористого призматичного ортотропного бруса в осушеній зоні, згідно [30, 33, 69], описується рівнянням:

$$(\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} + F(x_1, x_2, \tau), \quad (4.3)$$

Тут індексами v, a, s позначимо компоненти пари, повітря та скелету, а $\Pi, C_v, C_a, C_s, \rho_v, \rho_a, \rho_s$ – пористість, теплоємність, густина пари, повітря, скелету відповідно; λ_{ij} – компоненти тензора теплопровідності; T – температура; $F(x_1, x_2, \tau)$ – доданок, що характеризує внутрішнє джерело.

На поверхнях тіла можуть мати місце граничні умови першого, другого або третього роду.

Рівняння теплопровідності (4.1) для приведеної об'ємної теплоємності $c\rho$ та усередненої теплопровідності λ_{ij} при $F(M, t) = 0$ в квазіізогенному наближенні можна записати так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

В даному рівнянні перейдемо до змінних (x'_1, x'_2) , які співпадають з головними напрямками коефіцієнтів теплопровідності ортотропного матеріалу. В результаті отримаємо:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1'^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2'^2}, \quad (4.4)$$

де λ_1, λ_2 – головні коефіцієнти теплопровідності ортотропного матеріалу. Зв'язок між системою координат (X'_1, X'_2) початкового (X_1, X_2) описується залежностями [52]

$$x_1 = l_1 x'_1 + l_2 x'_2, \quad x_2 = m_1 x'_1 + m_2 x'_2, \quad (4.5)$$

де $l_i = \cos \alpha_i$, $m_i = \cos \beta_i$ ($i = 1, 2$), $l_i^2 + m_i^2 = 1$; $\cos \alpha_i, \cos \beta_i$ ($i = 1, 2$) – направляючі косинуси нових змінних x'_1, x'_2 в старій системі координат.

Якщо перейти до змінних $\xi_1 = (\lambda/\lambda_1)^{1/2} x'_1$, $\xi_2 = (\lambda/\lambda_2)^{1/2} x'_2$, то рівняння (4.4) буде таким:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \bar{a} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} \right), \quad (4.6)$$

де $\bar{a} = \lambda / (\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s)$. Тут λ довільне, відмінне від нуля [1].

Головні коефіцієнти теплопровідності визначаються через коефіцієнти теплопровідності ортотропного матеріалу наступним чином:

$$\lambda_1 = \frac{(\lambda_{11} + \lambda_{22})}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_{11} + \lambda_{22})^2}{4} + \lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{11}\lambda_{22}}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_2 = \frac{(\lambda_{11} + \lambda_{22})}{2} - \sqrt{\frac{(\lambda_{11} + \lambda_{22})^2}{4} + \lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{11}\lambda_{22}}.$$

Зв'язок між змінними ξ_1 і ξ_2 та x'_1, x'_2 описується залежностями:

$$\xi_1 = (\lambda / \lambda_1)^{1/2} x'_1 = (\lambda / \lambda_1)^{1/2} \frac{m_2 x_1 - l_2 x_2}{\Delta}, \quad \xi_2 = (\lambda / \lambda_2)^{1/2} x'_2 = (\lambda / \lambda_2)^{1/2} \frac{l_1 x_2 - m_1 x_1}{\Delta}, \quad (4.8)$$

$$\Delta = l_1 m_2 - m_1 l_2$$

$$l_1 = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_1)^2 + \lambda_{12}^2}}, \quad m_1 = \frac{(\lambda_{11} - \lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_1)^2 + \lambda_{12}^2}},$$

$$l_2 = \frac{(\lambda_{22} - \lambda_2)}{\sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_2)^2 + \lambda_{21}^2}}, \quad m_2 = \frac{\lambda_{21}}{\sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_2)^2 + \lambda_{21}^2}}.$$

Таким чином враховуючи (4.5), (4.7), (4.8), встановлено взаємно однозначне перетворення координат:

$$x_1 = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_1)^2 + \lambda_{12}^2}} x'_1 + \sqrt{\frac{(\lambda_{22} - \lambda_2)}{(\lambda_{22} - \lambda_2)^2 + \lambda_{21}^2}} x'_2, \quad (4.9)$$

$$x_2 = \frac{(\lambda_{11} - \lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_{11} - \lambda_1)^2 + \lambda_{12}^2}} x'_1 + \frac{\lambda_{21}}{\sqrt{(\lambda_{22} - \lambda_2)^2 + \lambda_{21}^2}} x'_2.$$

Розглянемо поперечний перетин бруска BDD_1B_1 (рис. 4.2 а). В системі координат Ox_1x_2 точки вершини прямокутника BDD_1B_1 будуть такі:

$$B(L_1, L_2), D(-L_1, L_2), D_1(-L_1, -L_2), B_1(L_1, -L_2).$$

Важливим є визначення граничних умов 3-го роду на поверхнях бруса, які характеризують процес сушіння деревного бруса в змінних ξ_1, ξ_2 . Розглянемо умову на контурі BB_1

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{BB_1} = H_1(T - u(\tau)),$$

де $u(\tau)$ – температура середовища, яка характеризує технологічні параметри агента сушіння, H_1 – коефіцієнт теплообміну.

На контурі BB_1 можна записати наступні співвідношення

$$L_1 = l_1 \sqrt{\lambda_1 / \lambda} \xi_1 + l_2 \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \xi_2.$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{BB_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = H_1(T - u(\tau)),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1} \left(m_2 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} + m_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \frac{l_2}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \left(\frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{l_1} \right).$$

Аналогічно визначимо граничну умову на контурі BD :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_2} \Big|_{BD} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \left(\frac{m_2}{l_1 m_2 + l_2 m_1} \right) = H_2 (T|_{BD} - u(\tau)).$$

Нова система координат отримується поворотом старої системи координат на кут α , який визначається коефіцієнтами анізотропії теплопровідності так: $\operatorname{tg} 2\alpha = (\lambda_{12} + \lambda_{21}) / (\lambda_{11} - \lambda_{22})$. Ця залежність визначає кут α , на який необхідно повернути вихідну систему координат для $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$.

Таким чином, граничні умови на поверхні ортотропного бруса у змінних ξ_1, ξ_2 запишемо так:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = \pm \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Delta} H_i (T|_{\xi_i} - u(\tau)), \quad \tilde{\Delta} = \frac{l_1}{l_1 m_2 + m_1 l_2},$$

Представимо граничні умови у такому вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} \pm H_i^* (T|_{\xi_i} - u(t)) = 0,$$

де $H_i^* = \sqrt{\lambda_i / \lambda} \cdot \frac{l_1}{m_1 l_2 + m_2 l_1} H_i$, $H_i = \tilde{\alpha}_i / \lambda_i$, $\tilde{\alpha}_i$ – коефіцієнти теплообміну.

Оскільки процес сушіння деревного бруса є довготривалим, то знайдемо об'єм осушеної зони як функцію часу. Прямокутний перетин бруса BDD_1B_1 в системі координат ξ_1, ξ_2 перейде в паралелограм BDD_1B_1 (рис. 4.1), координати його вершин знайдемо з формул (4.9):

$$\bar{B}(\Delta_2, \Delta_4), \quad \bar{D}(-\Delta_1, \Delta_3), \quad \bar{D}_1(-\Delta_2, -\Delta_4), \quad \bar{B}_1(\Delta_1, -\Delta_3),$$

де

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda / \lambda_1} \cdot \frac{m_2 L_1 + l_2 L_2}{\Delta}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\lambda / \lambda_1} \cdot \frac{m_2 L_1 - l_2 L_2}{\Delta}, \quad \Delta_3 = \sqrt{\lambda / \lambda_2} \cdot \frac{m_1 L_1 + l_1 L_2}{\Delta},$$

$$\Delta_4 = \sqrt{\lambda / \lambda_2} \cdot \frac{-m_1 L_1 + l_1 L_2}{\Delta}, \quad \Delta = l_1 m_2 - l_2 m_1.$$

В зоні сушіння бруса процес опишеться рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial \tau^*} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} \right), \quad (4.10)$$

Контур поперечного перерізу BDD_1B_1 бруса в змінних ξ_1, ξ_2 описується

$$F_0(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) = 0. \quad (4.11)$$

Від цієї поверхні йде осушення всередину бруса. На бокових поверхнях бруса задані граничні умови теплообміну, що впливають із характеристик агента сушіння у технологічному процесі. Згодом утворюється приповерхнева осушена зона. Поверхня, що розділяє суху і вологу зони бруса для малого проміжку часу взаємодії з агентом сушіння матиме овальну циліндричну форму. Допускаємо, що після завершення процесу сушіння поверхня поділу на суху і вологу зони стягнеться в лінію, яка співпадає з віссю бруса. Тоді рівняння межі осушеної і вологої зон бруса можна записати

$$F_m(\xi_1, \xi_2, \tau) = (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta\varepsilon(\tau) = 0, \quad (4.12)$$

де $\delta = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2$, $\varepsilon(\tau)$ – поки що невідома функція часу τ . В зв'язку з симетрією задачі відносно змінної z , будемо розглядати поперечний переріз бруса (рис. 4.1).

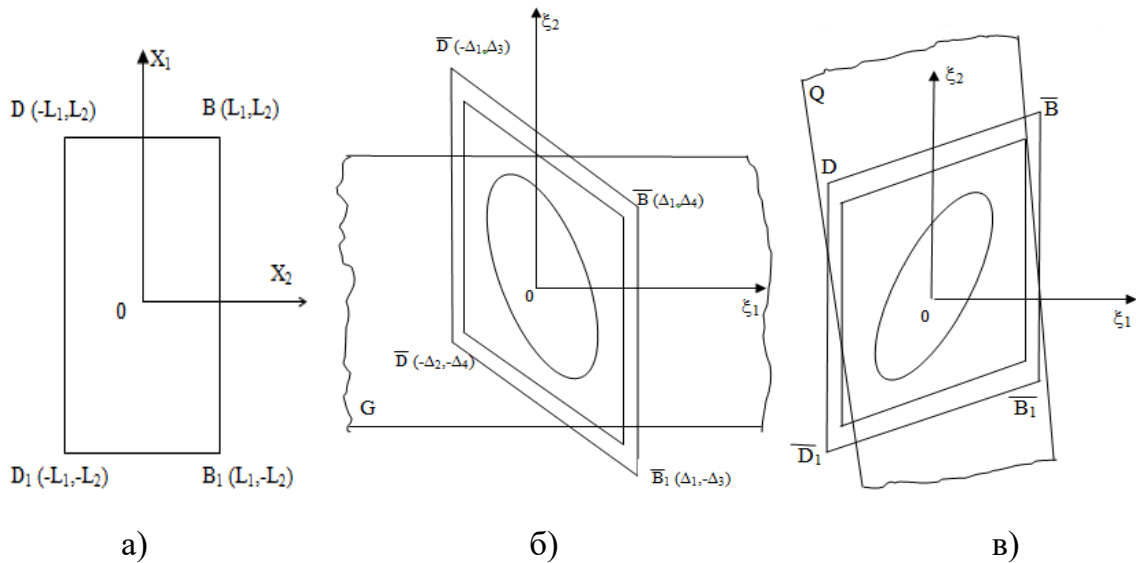


Рис. 4.1 Поперечний переріз бруса

Поперечний переріз бруса в площині x_1x_2 (рис. 4.1 (а)), в площині $\xi_1\xi_2$ ($\alpha > 0$), (рис. 4.1 (б)) та $\xi_1\xi_2$ ($\alpha < 0$), (рис. 4.1 (в)).

Введемо такі величини та змінні:

$$\frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m}{T_{\Pi} - T_m} = \eta, \quad \beta = \frac{\rho_m c_m \bar{a}}{\lambda_m} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_m}, \quad \tau^* = \tau \bar{a}, \quad \frac{\rho_m c_m}{\lambda_m} = \frac{1}{\bar{a}_m},$$

де T_{Π}, T_m – температура на контурі поперечного перерізу бруса та на межі фазового переходу відповідно.

Враховуючи умови неперервності теплового потоку між поверхнями F_0 і F_m , отримаємо вираз для величини η :

$$\eta = \frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m}{T_{\Pi} - T_m} = \frac{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_2^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta\varepsilon(\tau)}{-\delta\varepsilon(\tau)}, \quad (4.13)$$

Різниця $T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m$ у (4.13) відповідає різниці температури в довільний момент часу сушіння і температури на межі фазового переходу, а $T_{\Pi} - T_m$ відповідає різниці температур між зовнішньою границею контура поперечного перерізу бруса і межею фазового переходу.

На зовнішньому контурі бруса

$$\eta = \frac{T_{\Pi}(\xi_1, \xi_2) - T_m}{T_{\Pi} - T_m} = 1.$$

Значення поки невідомої функції часу $\varepsilon(\tau)$ в початковий момент процесу сушіння дорівнює нулеві ($\varepsilon(0) = 0$). Після завершення процесу маємо $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \varepsilon(\tau) = 1$. Таким чином, для прийнятих позначення отримаємо, що $\eta = 1$ при $\tau^* = \bar{\alpha}\tau = 0$ і $\eta = 0$ на лінії фазового переходу F_m .

Для подальших досліджень рівняння контура поперечного перерізу бруса (4.11) і лінії, що розділяє суху і вологу зони (4.12), запишемо у вигляді:

$$F_0 = ((\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2)((\xi_2^2 - \delta_3)^2 - \delta_4^2) = 0, \quad (4.14)$$

$$F_m = ((\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2)((\xi_2^2 - \delta_3)^2 - \delta_4^2) - \delta\varepsilon(\tau) = 0, \quad (4.15)$$

де $\delta_1 = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/2, \delta_2 = (\Delta_1^2 - \Delta_2^2)/2, \delta_3 = (\Delta_3^2 + \Delta_4^2)/2, \delta_4 = (\Delta_3^2 - \Delta_4^2)/2$.

З (4.15) визначимо в явному вигляді рівняння кривої фазового переходу в перерізі бруса:

$$\xi_2 = \pm \sqrt{\delta_3 \pm \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta\varepsilon(\tau)}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}}. \quad (4.16)$$

Знаки “+” і “-” перед коренем відносяться до випадків $\xi_2 > 0$ і $\xi_2 < 0$ відповідно. Знак “+” під коренем відповідає випадку $\xi_2^2 - \delta_3 > 0$, а знак “-” для $\xi_2^2 - \delta_3 < 0$.

Якщо кут $\alpha > 0$, то в формулі (4.16), що описує границю вологої і осушеної зон бруса у процесі сушіння, подвійний знак “±” під знаком кореня замінюємо на знак “-” для точок, які задовольняють умову $\xi_2^2 - \delta_3 < 0$, тобто належать області G , для якої виконується умова $\xi_2^2 < \delta_3$. Якщо кут $\alpha < 0$, то в цій формулі подвійний знак під коренем замінюємо на знак “-” для тих точок, які належать області Q ($\xi_1^2 < \delta_1$) і відповідно на знак “+” для точок, які області Q не належать.

Для початкового моменту часу сушіння крива фазового переходу знаходиться в площині поперечного перерізу бруса, але виходить за межі областей G і Q , а це ускладнює дослідження, так як у виразах (4.16) змінюються знаки залежно від положення точки на кривій. Згідно наших міркувань, крива фазового переходу (4.16) у процесі сушіння бруса повністю належить області G при $\alpha > 0$, або області Q при $\alpha < 0$ (рис. 4.1 (б) і 4.1 (в)) і від цього моменту часу немає зміни знаків під коренем у формулі (4.16). Такий підхід дозволяє визначити повний час завершення технологічного процесу сушіння бруса.

4.2. Побудова аналітико-числового методу реалізації математичної моделі.

Ідентифікація рухомих границь фазових переходів

Для побудови аналітико-числового методу реалізації побудованої математичної моделі ортотропного деревного бруса з урахування зони випаровування вологи важливу роль відіграє рівняння теплового балансу в області, обмеженій зовнішнім контуром поперечного перерізу бруса і контуром границі фазового переходу [54, 140]:

$$\int_{F_m=0}^{F_0=0} \int \frac{d\eta}{d\tau} ds = \oint_{F_0=0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl - \oint_{F_m=0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl. \quad (4.17)$$

Якщо за час $\Delta\tau$ об'єм осушеної зони бруса у процесі конвективного сушіння збільшиться на ΔV , то кількість тепла, поглинутого за рахунок фазового переходу визначається залежністю

$$\Delta Q = \rho_m c_m (T - T_m) \Delta V(F_m, F_0), \quad (4.18)$$

де $V(F_m, F_0)$ – об'єм осушеної зони, віднесений до одиниці довжини бруса, S_{Π} – площа поверхні поперечного перерізу зразка, S_{ϕ} – площа перетину вологої зони, оточеної контуром $F_m = 0$; індексом m позначені різні ідентифіковані раніше технологічні характеристики деревного бруса на межі фазового переходу.

Даний потік ΔQ визначимо через потік на поверхні фазового переходу

$$\Delta Q = -\lambda_m \left(\int_{F_m=0} \frac{\partial T}{\partial n} ds \right) \Delta\tau^*. \quad (4.19)$$

Перейдемо до границі при $\Delta\tau^* \rightarrow 0$. Тоді з виразів (4.18), (4.19) отримаємо

$$\lambda_m \left(\int_{F_m=0} \frac{\partial T}{\partial n} ds \right) = -\rho_m c_m (T - T_m) \frac{\partial V(F_m, F_0)}{\partial \tau^*}, \quad (4.20)$$

На основі (4.17), (4.19), (4.20) отримаємо рівняння балансу тепла з врахуванням рухомої межі фазового переходу

$$\int_{F_m}^{F_0=0} \int \frac{d\eta}{d\tau^*} ds = \int_{F_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl + \beta \eta \frac{\partial V}{\partial \tau^*}, \quad (4.21)$$

де $V(F_m, F_0) = \int_{F_m=0}^{F_0=0} \int ds = \iint_{S_{\Pi}} ds - \iint_{S_{\phi}} ds$.

Це і є основне рівняння для побудови аналітико-числового методу реалізації математичної моделі з урахуванням рухомої межі вологої і осушеної зони бруса у процесі конвективного сушіння.

Для обчислення інтегралів, які входять в формулу (4.21), необхідно мати в явному вигляді рівняння лінії контура фазового переходу, а також встановити межі відповідних інтегралів. Зокрема, враховуючи рівняння межі вологої і осушеної зон бруса (4.12), знаходимо

$$(\xi_1)_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \frac{\delta \varepsilon(\tau)}{(\delta_3^2 - \delta_4^2)}}} = \pm \sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2 \varepsilon(\tau)}},$$

$$(\xi_2)_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta\varepsilon(\tau)}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}} = \pm \Gamma(\xi_1).$$

Оскільки у початковий момент часу сушіння $\varepsilon(0)=0$, то отримуємо:

$$(\xi_1)_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1 \pm \delta_2}, (\xi_2)_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_3 \pm \delta_4}.$$

Причому тут подвійний знак "±" під коренем при $\alpha > 0$ слід замінити на знак "-" для тих точок перерізу бруса, для яких $\xi_2^2 - \delta_3 < 0$, а при $\alpha < 0$ знак "-" відповідає тим точкам, для яких $\xi_1^2 - \delta_1 < 0$.

Слід замінити на знак залежно від положення точки в областях G або Q . Тоді отримуємо наступні залежності

$$(\delta_3^2 - \delta_4^2)(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) = \delta\varepsilon(\tau),$$

$$(\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2 = \frac{\delta\varepsilon(\tau)}{(\delta_3^2 - \delta_4^2)} = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \varepsilon(\tau),$$

$$(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) = (\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2 = \xi_1^4 - 2\delta_1 \xi_1^2 + (\delta_1^2 - \delta_2^2),$$

$$(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) = (\xi_2^2 - \delta_3)^2 - \delta_4^2 = \xi_2^4 - 2\delta_3 \xi_2^2 + (\delta_3^2 - \delta_4^2).$$

Подвійні інтеграли у рівнянні балансу тепла (4.21) по поверхні між замкнутим контуром F_m і зовнішнім контуром F_0 будемо знаходити як різницю між інтегралом по поверхні повного перерізу бруса і інтегралом по поверхні S_ϕ , обмеженій контуром F_m .

Обчислимо інтеграл по зовнішньому контуру. Отже, маємо

$$\int_{L_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = 2 \left(\int_{B_1 B} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl + \int_{BD} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl \right), \quad (4.22)$$

$$\eta = \frac{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) - \delta\varepsilon(\tau)}{-\delta\varepsilon(\tau)}.$$

Тут $\delta = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2 = (\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_3^2 - \delta_4^2)$; $(\delta_1^2 - \delta_2^2) = \Delta_1^2 \Delta_2^2$; $(\delta_3^2 - \delta_4^2) = \Delta_3^2 \Delta_4^2$.

На стороні бруса $B_1 B$ з рівняння $L_1 = l_1 \sqrt{\lambda_1 / \lambda} \xi_1 + l_2 \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \xi_2$ отримуємо залежності між ξ_1 і ξ_2

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda / \lambda_1} \cdot 1/l_1 \cdot (L_1 - l_2 \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \xi_2), \quad \xi_2 = \sqrt{\lambda / \lambda_2} \cdot 1/l_2 (L_1 - l_1 \sqrt{\lambda_1 / \lambda} \xi_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial n} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \left(m_2 \sqrt{\lambda/\lambda_1} + l_2/l_1 \cdot \sqrt{\lambda_2/\lambda_1} m_1 \sqrt{\lambda/\lambda_2} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} \left((m_2 l_1 + l_2 m_1)/l \right) \sqrt{\lambda/\lambda_1} \end{aligned}$$

Врахуємо надалі, що

$$\begin{aligned} d\xi_2 &= -\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} d\xi_1 = -\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \frac{l_1}{l_2} d\xi_1, \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2) \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 = m_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} d\xi_1 + m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} d\xi_2 = d\xi_1 \left(m_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \frac{l_1}{l_2} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \left(m_1 - m_2 \frac{l_1}{l_2} \right) d\xi_1 = -\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{\Delta}{l_2} d\xi_1, \quad dx_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{\Delta}{l_2} d\xi_1. \end{aligned}$$

Таким чином, на основі приведених математичних перетворень на $B_1 B$ ($dl = dx_2$) отримаємо вираз для визначення першого доданку інтегралу по зовнішньому контуру (4.22).

Після громістких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{B_1 B} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl &= -\frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{l_1 l_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \left(4\xi_1 (\xi_1^2 - \delta_1) \left(\left(\frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \xi_1 \right)^2 - \delta_3 \right) - \delta_4^2 \right) - \right. \\ &- 4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(\frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)^3 - \delta_3 \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right) \left((\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2 \right) \right) d\xi_1. \quad (4.23) \\ &\left(\left(\frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \xi_1 \right)^2 - \delta_3 \right) - \delta_4^2 \right) \left(4(\xi_1^3 - \delta_1 \xi_1) \right) = \\ &= (A_0^0 + A_1^0 \xi_1 + A_2^0 \xi_1^2 + A_3^0 \xi_1^3 + A_4^0 \xi_1^4) \left(4(\xi_1^3 - \delta_1 \xi_1) \right) = \\ &= B_1^0 \xi_1 + B_2^0 \xi_1^2 + B_3^0 \xi_1^3 + B_4^0 \xi_1^4 + B_5^0 \xi_1^5 + B_6^0 \xi_1^6 + B_7^0 \xi_1^7. \end{aligned}$$

Тут введено такі позначення

$$A_0^0 = \frac{1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 L_1^4 - 2 \frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \delta_3 L_1^2 + (\delta_3^2 - \delta_4^2); \quad A_1^0 = -4 \frac{1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} L_1^3 + 4 \delta_3 \frac{l_1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} L_1;$$

$$A_2^0 = 6 \frac{1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \right)^2 L_1^2 - 2 \frac{\delta_3}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \left(l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \right)^2; A_3^0 = -4 \frac{1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(l_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \right)^3 L_1;$$

$$A_4^0 = \frac{l_1^4}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2; B_1^0 = -A_0^0 4\delta_1 \xi_1; B_2^0 = A_1^0 4\delta_1 \xi_1^2; B_3^0 = 4(A_0^0 - \delta_1 A_2^0) \xi_1^3;$$

$$B_4^0 = (A_1^0 + \delta_1 A_3^0) 4\xi_1^4; B_5^0 = (A_2^0 - \delta_1 A_4^0) 4\xi_1^5; B_6^0 = A_3^0 4\xi_1^6; B_7^0 = -A_4^0 4\xi_1^7.$$

Розглянемо другий доданок інтеграла по контуру $B_1 B$ (4.23). Після відповідних перетворень представимо його у такому виді:

$$-4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(\frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)^3 - \delta_3 \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right) \right) \left((\xi_1^2 - \delta_1)^2 - \delta_2^2 \right) d\xi_1 =$$

$$= (A_0^1 + A_1^1 \xi_1 + A_2^1 \xi_1^2 + A_3^1 \xi_1^3) (\xi_1^4 - 2\xi_1^2 \delta_1 + (\delta_1^2 - \delta_2^2)) =$$

$$= B_0^1 + B_1^1 \xi_1 + B_2^1 \xi_1^2 + B_3^1 \xi_1^3 + B_4^1 \xi_1^4 + B_5^1 \xi_1^5 + B_6^1 \xi_1^6 + B_7^1 \xi_1^7. \quad (4.24)$$

Введено такі позначення:

$$B_0^1 = A_0^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); B_1^1 = -A_1^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); B_2^1 = -A_0^1 2\delta_1 + A_2^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2);$$

$$B_3^1 = A_1^1 2\delta_1 - A_3^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); B_4^1 = A_0^1 - 2A_2^1 \delta_1; B_5^1 = A_1^1 + 2A_3^1 \delta_1; B_6^1 = A_2^1 \xi_1^6; B_7^1 = -A_3^1 \xi_1^7,$$

$$A_0^1 = -4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(\frac{1}{l_2^2} \frac{\lambda}{\lambda_2} L_1^3 - \delta_3 L_1 \right); A_1^1 = -4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(3 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} L_1^2 l_1 - \delta_3 l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \right);$$

$$A_2^1 = -4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2 \left(3 \left(l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \right)^2 L_1 \right); A_3^1 = -4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \frac{l_1}{l_2^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^2.$$

Таким чином, з урахуванням вищенаведених перетворень, вираз для визначення одного з інтегралів по замкнутому контуру (4.22)

$$\int_{B_1 B} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = - \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{l_1 l_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \left(-B_0^1 + (B_1^0 - B_1^1) \xi_1 + (B_2^0 - B_2^1) \xi_1^2 + (B_3^0 - B_3^1) \xi_1^3 + \right.$$

$$\left. + (B_4^0 - B_4^1) \xi_1^4 + (B_5^0 - B_5^1) \xi_1^5 + (B_6^0 - B_6^1) \xi_1^6 + (B_7^0 - B_7^1) \xi_1^7 \right) d\xi_1 =$$

$$= - \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{l_1 l_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left(-B_0^1 \Delta_2 - \Delta_1 + (B_1^0 - B_1^1) \frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{2} + \right.$$

$$\left. + (B_2^0 - B_2^1) \frac{\Delta_2^3 - \Delta_1^3}{3} + (B_3^0 - B_3^1) \frac{\Delta_2^4 - \Delta_1^4}{4} + (B_4^0 - B_4^1) \frac{\Delta_2^5 - \Delta_1^5}{5} + \right.$$

$$+ (B_5^0 - B_5^1) \frac{\Delta_2^6 - \Delta_1^6}{6} + (B_6^0 - B_6^1) \frac{\Delta_2^7 - \Delta_1^7}{7} + (B_7^0 - B_7^1) \frac{\Delta_2^8 - \Delta_1^8}{8}. \quad (4.25)$$

Аналогічно до вищенаведених міркувань та математичних перетворень представимо інтеграл по контуру BD ($dl = dx_1$) у (4.22). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{BD} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl &= \frac{1}{\delta \varepsilon} \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{m_1 m_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_4} \left(4 \xi_2 (\xi_2^2 - \delta_3) \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{1}{m_1^2} \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right)^2 - \delta_1 \right) - \delta_2^2 \right) - \right. \\ &- 4 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \frac{m_2}{m_1^4} \left(\frac{1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right)^3 - \delta_1 \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right) \right) \left((\xi_2^2 - \delta_3)^2 - \delta_4^2 \right) d \xi_2. \quad (4.26) \\ &\left. \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{1}{m_1^2} \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right)^2 - \delta_1 \right) - \delta_2^2 \right) \right). \\ &\cdot \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{1}{m_1^2} \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right)^2 - \delta_1 \right) - \delta_2^2 \right) (4 (\xi_2^3 - \delta_3 \xi_2)) = \\ &= (A_0^2 + A_1^2 \xi_2 + A_2^2 \xi_2^2 + A_3^2 \xi_2^3 + A_4^2 \xi_2^4) (4 (\xi_2^3 - \delta_3 \xi_2)) = \\ &= B_1^2 \xi_2 + B_2^2 \xi_2^2 + B_3^2 \xi_2^3 + B_4^2 \xi_2^4 + B_5^2 \xi_2^5 + B_6^2 \xi_2^6 + B_7^2 \xi_2^7. \end{aligned}$$

Тут введені наступні позначення:

$$A_0^2 = \frac{1}{m_1^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 L_2^4 - 2 \frac{1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \delta_1 L_2^2 + (\delta_1^2 - \delta_2^2); \quad A_1^2 = -4 \frac{1}{m_1^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} L_2^3 + 4 \delta_1 \frac{m_2}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} L_2;$$

$$A_2^2 = 6 \frac{1}{m_1^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \left(m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \right)^2 L_2^2 - 2 \frac{\delta_1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} m_2^2 \frac{\lambda_2}{\lambda}; \quad A_3^2 = -4 \frac{1}{m_1^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \left(m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \right)^3 L_2;$$

$$A_4^2 = \frac{m_2^4}{m_1^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right)^2; \quad B_1^2 = -A_0^2 4 \delta_3 \xi_2; \quad B_2^2 = A_1^2 4 \delta_3 \xi_2^2; \quad B_3^2 = 4 (A_0^2 - \delta_3 A_2^2) \xi_2^3;$$

$$B_4^2 = (A_1^2 + \delta_3 A_3^2) 4 \xi_2^4; \quad B_5^2 = (A_2^2 - \delta_3 A_4^2) 4 \xi_2^5; \quad B_6^2 = A_3^2 4 \xi_2^6; \quad B_7^2 = -A_4^2 4 \xi_2^7.$$

Другий доданок виразу (4.26), який стосується інтегрального виразу по контурі BD бруса, представимо аналогічно до попередніх перетворень інтегральних виразів на контурі B_1B . Після деяких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
& -4 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \frac{m_2}{m_1^4} \left(\frac{1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right) - \delta_1 \left(L_2 - m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \xi_2 \right) \right) \left((\xi_2^2 - \delta_3)^2 - \delta_4^2 \right) d\xi_2 = \\
& = \left(A_0^3 + A_1^3 \xi_2 + A_2^3 \xi_2^2 + A_3^3 \xi_2^3 \right) \left(\xi_2^4 - 2\xi_2^2 \delta_3 + (\delta_3^2 - \delta_4^2) \right) = B^3 + B_1^3 \xi_2 \\
& \quad + B_2^3 \xi_2^2 + B_3^3 \xi_2^3 + B_4^3 \xi_2^4 + B_5^3 \xi_2^5 + B_6^3 \xi_2^6 + B_7^3 \xi_2^7.
\end{aligned}$$

Тут введені такі позначення

$$\begin{aligned}
& B_0^1 = A_0^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); \quad B_1^1 = -A_1^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); \quad B_2^1 = -A_0^1 2\delta_1 + A_2^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); \quad B_3^1 = A_1^1 2\delta_1 - A_3^1 (\delta_1^2 - \delta_2^2); \\
& B_4^1 = A_0^1 - 2A_2^1 \delta_1; \quad B_5^1 = A_1^1 + 2A_3^1 \delta_1; \quad B_6^1 = A_2^1 \xi_1^6; \quad B_7^1 = -A_3^1 \xi_1^7; \quad B_0^3 = A_0^3 (\delta_3^2 - \delta_4^2); \\
& B_1^3 = -A_1^3 (\delta_1^2 - \delta_2^2); \quad B_2^3 = -A_0^3 2\delta_3 + A_2^3 (\delta_3^2 - \delta_4^2); \quad B_3^3 = A_1^3 2\delta_1 - A_3^3 (\delta_3^2 - \delta_4^2); \quad B_4^3 = A_0^3 - 2A_2^3 \delta_3; \\
& B_5^3 = A_1^3 + 2A_3^3 \delta_3; \quad B_6^3 = A_2^3; \quad B_7^3 = -A_3^3; \quad A_0^3 = -4 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \right)^2 \frac{m_2}{m_1^4} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \left(\frac{1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} L_2 - \delta_1 L_2 \right); \\
& A_1^3 = 4 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \right)^2 \frac{m_2}{m_1^4} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \left(3 \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} L_2 \frac{m_2}{m_1^2} - \delta_1 m_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \right); \quad A_2^3 = -4 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{m_2}{m_1^4} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right)^2 \left(3 \left(\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_1} L_2 \right); \\
& A_3^3 = -4 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{m_2}{m_1^4} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{m_1^2} \frac{\lambda}{\lambda_1} \left(m_2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \right)^3.
\end{aligned}$$

Таким чином, на основі проведених математичних викладень та з урахуванням (4.26), отримаємо вираз для знаходження другого інтегралу на контурі бруса BD у формулі (4.22) для обчислення інтегралу по зовнішньому контуру. Після деяких перетворень представимо його у виді:

$$\begin{aligned}
& \int_{BD} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = - \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{m_1 m_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} \int_{\Delta_3}^{\Delta_4} \left(-B_0^3 + (B_1^2 - B_1^3) \xi_2 + (B_2^2 - B_2^3) \xi_2^2 + (B_3^2 - B_3^3) \xi_2^3 + \right. \\
& \quad \left. + (B_4^2 - B_4^3) \xi_2^4 + (B_5^2 - B_5^3) \xi_2^5 + (B_6^2 - B_6^3) \xi_2^6 + (B_7^2 - B_7^3) \xi_2^7 \right) d\xi_2 = \\
& = - \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{m_1 m_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left(-B_0^3 (\Delta_3 - \Delta_4) + (B_1^2 - B_1^3) \frac{\Delta_3^2 - \Delta_4^2}{2} + (B_2^2 - B_2^3) \frac{\Delta_3^3 - \Delta_4^3}{3} + \right. \\
& \quad \left. + (B_3^2 - B_3^3) \frac{\Delta_3^4 - \Delta_4^4}{4} + (B_4^2 - B_4^3) \frac{\Delta_3^5 - \Delta_4^5}{5} + \right. \\
& \quad \left. + (B_5^2 - B_5^3) \frac{\Delta_3^6 - \Delta_4^6}{6} + (B_6^2 - B_6^3) \frac{\Delta_3^7 - \Delta_4^7}{7} + (B_7^2 - B_7^3) \frac{\Delta_3^8 - \Delta_4^8}{8} \right). \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Отже, повний інтеграл по замкнутому контуру L_0 обчислюється за формулою (4.22) шляхом підстановки співвідношень (4.25) і (4.27).

Тепер перейдемо до знаходження об'єму осушеної зони бруска, який віднесений до одиниці довжини, що знаходиться між площинами $F_0 = 0, F_m = 0$. Цей об'єм визначається за формулами:

$$\begin{aligned}
 V(F_0, F_m) &= \int_{F_m=0}^{F_0=0} \int dx_1 dx_2 = \iint_{S_{\Pi}} dx_1 dx_2 - \iint_{S_{\Phi}} dx_1 dx_2 = 4L_1 L_2 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \iint_{S_{\Phi}} d\xi_1 d\xi_2 = \\
 &= 4L_1 L_2 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \int_{-\Gamma(\xi_1)}^{\Gamma(\xi_1)} \int_{-\Gamma(\xi_1)}^{\Gamma(\xi_1)} d\xi_2 d\xi_1 = 4L_1 L_2 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \int_{-\Gamma(\xi_1)}^{\Gamma(\xi_1)} (\xi_2 |_{-\Gamma(\xi_1)}^{\Gamma(\xi_1)}) d\xi_1 = \\
 &= 4L_1 L_2 - 2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \int_{-\Gamma(\xi_1)}^{\Gamma(\xi_1)} \sqrt{\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta \varepsilon}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}} d\xi_1 = 4L_1 L_2 - \\
 &- 4 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \int_0^1 \frac{\left[\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta \varepsilon} \right]^2}{[(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)]^4} d\xi_1, \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

$$\text{де } \gamma = \sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \delta \varepsilon / (\delta_3^2 - \delta_4^2)}} = \sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2 \varepsilon}},$$

$$\Gamma(\xi_1) = \sqrt{\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \delta \varepsilon / ((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2))}}.$$

Визначимо похідну від об'єму осушеної зони бруска по часу, враховуючи залежність від часу величини $\varepsilon(\tau^*)$ та залежність від часу верхньої границі інтегралу. Якщо границі інтегрування є функціями від α то застосувавши правило диференціювання складної функції від декількох змінних [75], визначимо

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'(x, \alpha) dx + f(b(\alpha), \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha}.$$

На основі цього отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial \tau^*} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \left(\int_0^\gamma \frac{\delta}{0 \sqrt{\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta \varepsilon}}} \right).$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\delta_4^2(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta\varepsilon} \cdot \sqrt[4]{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}} d\xi_1 - \\ & \frac{(\delta_3 \sqrt{(\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2(\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2) + \delta\varepsilon})^{1/2}}{\sqrt[4]{(\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2)} \sqrt{\delta_1^2 - \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \Delta_1^2 \Delta_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Представимо похідну від об'єму осушеної зони у такому виді

$$\frac{\partial V}{\partial \tau^*} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} (J_v + J(\varepsilon) + A(\varepsilon)), \quad (4.30)$$

де $J(\varepsilon)$ являє собою інтеграл у (4.29), $A(\varepsilon)$ – другий доданок у (4.29),

$A = f(\gamma(\tau^*), \tau^*) \frac{d\gamma(\tau^*)}{d\tau^*}$ – функціональна залежність, що визначається другим

доданком (4.29). Через J_v – інтеграл, що являє собою перший доданок (4.29). Тут

функціями часу є межа інтегрування

$$\gamma = \sqrt{\delta_1^2 + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}}.$$

Похідна від $\gamma(\tau^*)$ по часу має вигляд

$$\begin{aligned} \gamma'_{\tau^*} &= \left(\sqrt{\delta_1^2 + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \right)' \tau^* = \left(2\sqrt{\delta_1^2 + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \right)^{-1} \cdot \\ & \cdot \Delta_1^2 \Delta_2^2 / \left(2\sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2^2} \right) \frac{d\varepsilon}{d\tau^*}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

У подальшому згідно (4.21) необхідно визначити інтеграл по області S_ϕ , яка обмежена лінією фазового переходу. Після громістких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{S_\phi} \frac{\partial \eta}{\partial \tau^*} ds &= I \frac{\varepsilon'}{\delta \varepsilon^2} \frac{\sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2 \varepsilon}}}{\sqrt{\delta_1 - \sqrt{\delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2 \varepsilon}}} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\sqrt{\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta \varepsilon}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}}}{\sqrt{\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\varepsilon}{\delta (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}}}} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 \right) d\xi_1 = \\ & = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \frac{\varepsilon'}{\delta \varepsilon^2} \int_{-\gamma}^{\gamma} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \left(\int_{-\Gamma}^{\Gamma} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 \right) d\xi_1 = \\ & = 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta \varepsilon^2} \int_{-\gamma}^{\gamma} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \left(\frac{1}{5} \left(\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta \varepsilon}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}} \right) \right)^{\frac{5}{2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\delta_3}{3} \left(\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta\varepsilon}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}} \right)^{\frac{3}{2}} + \Delta_3^2 \Delta_4^2 \left(\delta_3 - \sqrt{\delta_4^2 + \frac{\delta\varepsilon}{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)}} \right)^{\frac{1}{2}} \Big) d\xi_1 = \\
& = 4\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta\varepsilon^2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{\left(\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta\varepsilon} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \right)^{\frac{1}{4}}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{2\delta_3}{3} \left(\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta\varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} \left((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \right)^{\frac{1}{4}} + \right. \\
& \left. + \Delta_3^2 \Delta_4^2 \left(\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) + \delta\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \right)^{\frac{3}{4}} \right) d\xi_1, \quad (4.32)
\end{aligned}$$

де $I = \sqrt{\lambda_1/\lambda} \sqrt{\lambda_2/\lambda}$ – якобіан переходу від змінних x_1, x_2 до ξ_1, ξ_2 .

Визначимо інтеграл $\iint_{s_{\text{н}}} \frac{\partial \eta}{\partial \tau^*} ds$ по зовнішній поверхні контура ортотропного

бруса

$$\begin{aligned}
& \iint_{s_f} \frac{\partial \eta}{\partial \tau^*} ds = \sqrt{\lambda_1/\lambda} \sqrt{\lambda_2/\lambda} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta\varepsilon^2} \iint_{s_f} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)(\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 d\xi_1 = \\
& = 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta\varepsilon^2} \int_{-\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\sqrt{\lambda_1} l_1}}^{\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\sqrt{\lambda_1} l_1}} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \left(\int_0^{-\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_1 + l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 \right) d\xi_1 = \\
& = 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta\varepsilon^2} \left(\left(\int_{-\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\sqrt{\lambda_1} l_1}}^{-\Delta_1} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \int_0^{-\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_1 + l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{-\Delta_1}^{\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\sqrt{\lambda_1} l_1}} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \int_0^{-\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_2 - m_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\sqrt{\lambda_1} l_1}}^{\Delta_2} (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2) \int_{\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_1 - l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)} (\xi_2^2 - \Delta_3^2)(\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 \right) d\xi_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \Delta \frac{\varepsilon'}{\delta\varepsilon^2} (J_1 + J_2 + J_3). \quad (4.33)
\end{aligned}$$

В результаті складних обчислень даних інтегралів отримуємо вирази для визначення J_1, J_2, J_3 . Зокрема для визначення J_1 отримаємо вираз:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} L_1}}^{-\Delta_1} (\xi_1^2 - \Delta_1^2) (\xi_1^2 - \Delta_2^2) \frac{1}{l_2 \sqrt{\lambda_2}} \left(L_1 + l_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right) \int_0^{\xi_2} (\xi_2^2 - \Delta_3^2) (\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= B_1 \left(-\Delta_1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right) + B_2 \left(\Delta_1^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^2 \right) + B_3 \left((-\Delta_1)^3 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^3 \right) + \\
&\quad + B_4 \left((-\Delta_1)^4 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^4 \right) + B_5 \left((-\Delta_1)^5 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^5 \right) + \\
&\quad + B_6 \left((-\Delta_1)^6 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^6 \right) + B_7 \left((-\Delta_1)^7 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^7 \right) + B_8 \left((-\Delta_1)^8 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^8 \right) + \\
&\quad + B_9 \left((-\Delta_1)^9 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^9 \right) + B_{10} \left((-\Delta_1)^{10} + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^{10} \right), \tag{4.34}
\end{aligned}$$

де $B_1 = A_0 \Delta_1^2 \Delta_2^2$; $B_2 = A_1 \Delta_1^2 \Delta_2^2 / 2$; $B_3 = (-A_0^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_2 \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 3$;

$B_4 = (-A_1 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_3 \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 4$; $B_5 = (-A_2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_4 \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_0) / 5$;

$B_6 = (-A_3 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_5 \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_1) / 6$; $B_7 = (-A_4 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_2) / 7$;

$B_8 = (-A_5 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_3) / 8$; $B_9 = A_4 / 9$; $B_{10} = A_5 / 10$;

$$A_0 = -1/5 \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^5 + \frac{\Delta_4^2 + \Delta_3^2}{3} \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^3 - \Delta_4^2 \Delta_3^2 \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right);$$

$$A_1 = \left(- \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^4 + (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^2 - \Delta_4^2 \Delta_3^2 \right) \left(\frac{l_i}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right);$$

$$A_2 = \left(-2 \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^3 + (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right) \right) \left(\frac{l_i}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right)^2;$$

$$A_3 = \left(-2 \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^2 + \left(\frac{\Delta_4^2 + \Delta_3^2}{3} \right) \right) \left(\frac{l_i}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right)^3; \quad A_4 = - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right) \left(\frac{l_i}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right)^4;$$

$$A_5 = - \frac{1}{5} \left(\frac{l_i}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right)^5.$$

Інтеграл J_2 визначається наступним чином

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{-\Delta_1}^{\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}}} (\xi_1^2 - \Delta_1^2) (\xi_1^2 - \Delta_2^2) \frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_2 - m_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right) \int_0^{\xi_2} (\xi_2^2 - \Delta_3^2) (\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 d\xi_1 = \\
&= B_{11} \left(\Delta_1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right) + B_{21} \left(-\Delta_1^2 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^2 \right) + B_{31} \left((\Delta_1)^3 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^3 \right) + \\
&+ B_{41} \left(-(\Delta_1)^4 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^4 \right) + B_{51} \left((\Delta_1)^5 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^5 \right) + B_{61} \left(-\Delta_1^6 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^6 \right) + \\
&\quad + B_{71} \left((\Delta_1)^7 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^7 \right) + B_{81} \left(-(\Delta_1)^8 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^8 \right) + \\
&\quad + B_{91} \left((\Delta_1)^9 + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^9 \right) + B_{101} \left(-(\Delta_1)^{10} + \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{L_1}{l_1}} \right)^{10} \right), \tag{4.35}
\end{aligned}$$

де $B_{11} = A_{01} \Delta_1^2 \Delta_2^2$; $B_{21} = A_{11} \Delta_1^2 \Delta_2^2 / 2$; $B_{31} = (-A_{01}^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{21} \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 3$;

$B_{41} = (-A_{11} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{31} \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 4$; $B_{51} = (-A_{21} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{41} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_{01}) / 5$;

$B_{61} = (-A_{31} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{51} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_{11}) / 6$; $B_{71} = (-A_{41} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{21}) / 7$;

$B_{81} = (-A_{51} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{31}) / 8$; $B_{91} = A_{41} / 9$; $B_{101} = A_{51} / 10$;

$$A_{01} = 1/5 \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^5 - \frac{\Delta_4^2 + \Delta_3^2}{3} \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^3 + \Delta_4^2 \Delta_3^2 \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right);$$

$$A_{11} = \left(- \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^4 + (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^2 - \Delta_4^2 \Delta_3^2 \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right);$$

$$A_{21} = \left(2 \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^3 - (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right) \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2;$$

$$A_{31} = \left(-2 \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^2 + \left(\frac{\Delta_4^2 + \Delta_3^2}{3} \right) \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^3; \quad A_{41} = \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^4;$$

$$A_{51} = -\frac{1}{5} \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^5.$$

Отримані співвідношення для визначення J_3 мають вигляд

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{\frac{\sqrt{\lambda} L_1}{\lambda_1 l_1}}^{\Delta_2} (\xi_1^2 - \Delta_1^2) (\xi_1^2 - \Delta_2^2)^{\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \left(L_2 - m_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1 \right)} (\xi_2^2 - \Delta_3^2) (\xi_2^2 - \Delta_4^2) d\xi_2 d\xi_1 = \\
&= B_{12} \left(\Delta_2 - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right) + B_{22} \left(\Delta_2^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^2 \right) + B_{32} \left((\Delta_2)^3 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^3 \right) + \\
&\quad + B_{42} \left((\Delta_2)^4 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^4 \right) + B_{52} \left((\Delta_2)^5 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^5 \right) + \\
&\quad + B_{62} \left((\Delta_2)^6 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^6 \right) + B_{72} \left((\Delta_2)^7 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^7 \right) + B_{82} \left((\Delta_2)^8 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^8 \right) + \\
&\quad + B_{92} \left((\Delta_2)^9 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^9 \right) + B_{102} \left((\Delta_2)^{10} - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \frac{L_1}{l_1} \right)^{10} \right), \tag{4.36}
\end{aligned}$$

де $B_{12} = A_{02} \Delta_1^2 \Delta_2^2$; $B_{22} = A_{12} \Delta_1^2 \Delta_2^2 / 2$; $B_{32} = (-A_{02}^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{22} \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 3$;

$B_{42} = (-A_{12} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{32} \Delta_1^2 \Delta_2^2) / 4$; $B_{52} = (-A_{22} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{42} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_{02}) / 5$;

$B_{62} = (-A_{32} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{52} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + A_{12}) / 6$; $B_{72} = (-A_{42} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{22}) / 7$;

$B_{82} = (-A_{52} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + A_{32}) / 8$; $B_{92} = A_{42} / 9$; $B_{102} = A_{52} / 10$;

Позначимо $a = \frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2$, $b = \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$, $a_1 = \frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2$, $b_1 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$

$$\begin{aligned}
A_{02} &= 1/5 \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^5 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^5 \right) - \frac{\Delta_4^2 + \Delta_3^2}{3} \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^3 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^3 \right) + \\
&\quad + \Delta_4^2 \Delta_3^2 \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right) - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right) \right); \\
A_{12} &= - \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^4 \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^4 \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) + \\
&\quad + (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^2 \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^2 \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) - \Delta_4^2 \Delta_3^2 \left(\left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right) - \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= 2 \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^3 \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^3 \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 \right) - \\
&\quad - (\Delta_4^2 + \Delta_3^2) \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^3 \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^3 \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^2 \right); \\
A_{32} &= -2 \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right)^2 \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^3 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right)^2 \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^3 \right) + \frac{(\Delta_4^2 + \Delta_3^2)}{3} \left(\left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^3 - \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^3 \right); \\
A_{42} &= \left(\left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_2 \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^4 - \left(\frac{1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} L_1 \right) \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^4 \right); \\
A_{52} &= -\frac{1}{5} \left(\left(\frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \right)^5 - \left(\frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right)^5 \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, визначені всі складові, які входять у рівняння балансу тепла (4.21) з урахуванням рухомої межі фазового переходу. Аналіз залежностей (4.23)-(4.33) свідчить про те, що інтеграли по межі фазового переходу (4.29), (4.32) необхідно обчислити числовим методом. Всі інші величини (4.25), (4.27) обчислюються за даними фізико-тепловими характеристиками конкретного матеріалу, а саме розмірами перерізу, головними коефіцієнтами теплопровідності, головними напрямками, які обчислені за коефіцієнтами теплопровідності конкретного ортотропного матеріалу, якобіанами переходу при перетворенні рівняння теплопровідності до канонічного виду. Тому, для отримання співвідношення щодо визначення рухомої межі фазового переходу введемо деякі позначення та здійснимо такі перетворення

$$\int_{B_1 B} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = c_1 J_{BB}, \quad (4.37)$$

$$\int_{BD} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = c_2 J_{BD}, \quad (4.38)$$

$$\text{де } c_1 = -\frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{\delta \varepsilon l_1 l_2}; \quad c_2 = -\frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{\delta \varepsilon m_1 m_2}.$$

$$J_{BB} = (-B_0^1 (\Delta_2 - \Delta_1) + (B_1^0 - B_1^1) \frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{2} + (B_2^0 - B_2^1) \frac{\Delta_2^3 - \Delta_1^3}{3} + (B_3^0 - B_3^1) \frac{\Delta_2^4 - \Delta_1^4}{4} +$$

$$+ (B_4^0 - B_4^1) \frac{\Delta_2^5 - \Delta_1^5}{5} + (B_5^0 - B_5^1) \frac{\Delta_2^6 - \Delta_1^6}{6} + (B_6^0 - B_6^1) \frac{\Delta_2^7 - \Delta_1^7}{7} + (B_7^0 - B_7^1) \frac{\Delta_2^8 - \Delta_1^8}{8}.$$

Запишемо вирази для $J(\varepsilon)$ та $A(\varepsilon)$ у формулі (4.29) у такому вигляді

$$J_V(\varepsilon) = \int \frac{\gamma}{0 \sqrt{\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon} d\xi_1; \quad (4.39)$$

$$A(\varepsilon) = \frac{(\delta_3 \sqrt{(\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon)^{1/2}}{4 \sqrt{(\gamma^2 - \Delta_1^2)(\gamma^2 - \Delta_2^2)} \sqrt{\delta_1^2 - \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1 \Delta_2}} \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon \Delta_1 \Delta_2}} \Delta_1^2 \Delta_2^2.$$

Згідно (4.33)-(4.35), інтеграл по зовнішній поверхні контура запишемо у вигляді

$$\iint_{S_f} \frac{\partial \eta}{\partial \tau^*} ds = I \frac{\Delta \varepsilon'}{\delta \varepsilon^2} J'_{S_f}, \quad (4.40)$$

де $J'_{S_f} = J_1 + J_2 + J_3$.

Інтеграл (4.32) по області S_ϕ , яка обмежена лінією фазового переходу представимо у вигляді:

$$\iint_{S_\phi} \frac{\partial \eta}{\partial \tau^*} ds = I \frac{\varepsilon'}{\delta \varepsilon^2} J'_\phi, \quad (4.41)$$

де

$$J'_\phi = \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{(\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon)^{5/2}}{((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2))^{1/4}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\delta_3}{3} (\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon)^{3/2} ((\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2))^{1/4} + \right.$$

$$\left. + \Delta_3^2 \Delta_4^2 (\delta_3 \sqrt{(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} - \sqrt{\delta_4^2 (\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)} + \delta \varepsilon)^2 [(\xi_1^2 - \Delta_1^2)(\xi_1^2 - \Delta_2^2)]^{3/4} \right) d\xi_1.$$

Враховуючи вищенаведені співвідношення (4.37)-(4.39), а також рівняння балансу тепла (4.21) з урахування рухомої межі фазового переходу, отримаємо

$$\int_{F_m=0}^{F_0=0} \frac{d\eta}{d\tau^*} ds - \beta \eta \frac{\partial V}{\partial \tau^*} = I \Delta \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{d\tau^*} (J_1 + J_2 + J_3) -$$

$$- I \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{d\tau^*} J'_\phi - \beta \eta(\tau^*) I \frac{d\varepsilon}{d\tau^*} (J_V(\varepsilon) - A(\varepsilon)) \quad (4.42)$$

Згідно (4.40), (4.41), інтеграл по зовнішньому контуру у рівнянні балансу (4.22) запишемо у вигляді

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = 2 \left(- \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{l_1 l_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} J_{BB_1} - \frac{l_1 m_2 + l_2 m_1}{m_1 m_2} \frac{1}{\delta \varepsilon} J_{BD} \right). \quad (4.43)$$

Отже, враховуючи (4.21), (4.42), (4.43) отримаємо

$$I \Delta \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \frac{d \varepsilon}{d \tau^*} (J_1 + J_2 + J_3) - I \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \frac{d \varepsilon}{d \tau^*} J_{\phi} - \beta \eta(\tau^*) I \frac{d \varepsilon}{d \tau^*} (J_V(\varepsilon) - A(\varepsilon)) = \frac{2}{\delta \varepsilon} (c_1 J_{BB_1} + c_2 J_{BD}). \quad (4.44)$$

Нехай $(J_1 + J_2 + J_3) \Delta = J_{S_f}$, тоді дане рівняння (4.44) з урахуванням межі фазового переходу $\eta(\tau^*) = 1$ прийме вигляд

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau^*} I |J_{Sf} - J_{\phi}| = \varepsilon (c_1 J_{BB_1} + c_2 J_{BD}) + \varepsilon^2 I \beta \eta (J_V - A). \quad (4.45)$$

Зазначимо, що величина $J_{\phi}(\varepsilon), A(\varepsilon), J_V(\varepsilon)$ є функціями від ε . Їх межі фазового переходу необхідно обчислити числовим методом. Всі інші величини, які входять у рівняння (4.44) обчислюються за даними фізико-тепловими характеристиками конкретного матеріалу, а саме розмірами перерізу, головними коефіцієнтами теплопровідності, головними напрямками, які обчислені за коефіцієнтами теплопровідності конкретного ортотропного матеріалу, якобіанами переходу при перетворенні рівняння теплопровідності до канонічного виду.

4.3. Двомірна математична модель процесу сушіння деревини з рухомою границею фазового переходу

Розробка континуально-термодинамічних підходів до математичного моделювання процесів тепломасоперенесення капілярно-пористих матеріалів при різних режимах агента сушіння з рухомою границею фазового переходу, розвиток методів розв'язання відповідних крайових задач, побудова алгоритмів дослідження цих процесів є важливою науково-прикладною задачею. Температура фазового переходу є функцією координат та часу, а переміщення границь є наслідком фазових переходів. Вважаємо, що приведені властивості матеріалу, а саме: теплоємність C , густина ρ , коефіцієнти теплопровідності λ_{ij} є функціями

пористості матеріалу, густин та теплоємностей компонент тіла. Розглянемо задачу конвективного сушіння вологого деревного бруска прямокутного поперечного перетину в сушильній установці. При дослідженні задачі будемо нехтувати дискретною будовою матеріалу на молекулярному рівні.

У процесі сушіння деревини має місце суттєва нерівномірність полів температури і вологості. Механічні напруження, які виникають в результаті цієї нерівномірності, можуть призводити до утворення різного роду тріщин. Вирішення питання щодо створення таких технологічних умов, при яких можливість появи тріщин мінімізується, є однією з важливих проблем осушення матеріалів. Експерименти показали, що сушіння тонкомірних брусків рідше зумовлює виникнення тріщин, ніж при сушінні брусків прямокутної форми. Тому для дослідження процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини при багатоетапних режимах сушильного агента важливо дослідити конфігурацію фронту фазового переходу в різні моменти технологічного процесу в тілах прямокутного поперечного перетину. Такий підхід дозволив визначити оптимальний розподіл температури, вологи та напружень у деревині.

Для встановлення закону зміни положення границь фазових переходів необхідно розв'язувати двомірні задачі типу Стефана, в яких рухомий фронт фазового переходу залежить від температури в тілі, обумовленої режимом роботи агента сушіння.

Метою даного дослідження є побудова математичної моделі задачі сушіння капілярно-пористого бруска деревини прямокутного поперечного перерізу $\{2L_1, 2L_2\}$ ($-L_1 \leq x_1 \leq L_1, -L_2 \leq x_2 \leq L_2,$). Процес сушіння здійснюється з поверхонь під дією конвективно-теплого нестационарного потоку сушильного агента. Модель враховує вплив на процес теплоперенесення змінного в часі теплового режиму у камерах сушіння періодичної дії. Керуючим параметром у процесі сушіння є температура агента сушіння. В процесі конвективного сушіння тепло, яке підводиться газом, витрачається на випаровування рідини, нагрів матеріалу і подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом. Вважаємо, що волога в осушеній зоні деревини повністю видалена, а в решту об'ємі вона відома і дорівнює ρ_L . Вміст

вологи, що залишається в тілі, обчислюється за формулою $W = \rho_L((V - V_m)/V)$, де V – об’єм тіла, V_m – об’єм осушеної зони.

Рівняння теплоперенесення в капілярно-пористому матеріалі в осушеній зоні для визначення $T(\tau, x_1, x_2)$, згідно [30, 33, 69], має вигляд:

$$(\Pi(C_v\rho_v + C_a\rho_a) + (1-\Pi)C_s\rho_s)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_{11}\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial x_2}\right), \quad (4.46)$$

де: $x_1 \in (-L_1, -L_{m1}) \cup (L_{m1}, L_1)$; $x_2 \in (-L_2, -L_{m12}) \cup (L_{m2}, L_2)$, T – час сушіння; L_{mi} – межа фазового переходу; індексами v, a, s позначено компоненти пари, повітря та скелету деревини відповідно; $\Pi, C_v, C_a, C_s, \rho_v, \rho_a, \rho_s$ – пористість, теплоємність, густина пари, повітря, скелету, λ_{ii} – приведені компоненти тензора теплопровідності, T – температура.

Граничні умови на границях $x_i = \pm L_i, (i = 1; 2)$ виражають теплообмін між поверхнями тіла і сушильним агентом за законом Ньютона

$$\lambda_{ii}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \tilde{\alpha}_i(T - u(t)) = 0, \quad (4.47)$$

де $\tilde{\alpha}_i$ – коефіцієнт теплообміну. Змінну у часі температури агента сушіння, представлено у вигляді розкладу в ряд Фур’є

$$u(\tau) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^p(\alpha_n \cos v_n^2 \tau + \beta_n \sin v_n^2 \tau), \quad (4.48)$$

де коефіцієнти α_n, β_n залежать від етапності функції керування температурою сушильного агента [30]. Зокрема, для триетапних технологічних режимах $U(\tau)$ є лінійною функцією на стадії нагрівання матеріалу, сталою на стадії сушіння і лінійною на стадії охолодження.

На межі фазового переходу $x_i = L_{mi}$:

$$T = T_{mi}, \quad (4.49)$$

де T_{mi} – поки що невідома температура фазового переходу, яка залежна як від координат, часу так і від функції керування агента сушіння.

Згідно рівняння (4.46), (4.47) для приведеної об'ємної теплоємності $c\rho$ та усередненої теплопровідності в квазігомогенному наближенні в змінних ξ_1, ξ_2 прийме вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} \right), \quad (4.50)$$

де $a = \lambda / (\Pi(C_v \rho_v + C_a \rho_a) + (1 - \Pi)C_s \rho_s)$, $\xi_1 = (\lambda / \lambda_1)^{1/2} x_1$, $\xi_2 = (\lambda / \lambda_2)^{1/2} x_2$.

Відомо [52], що розв'язок багатомірної задачі з однорідними граничними умовами за умови, що початкові умови виражаються у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить від однієї просторової координати, можна записати у вигляді добутку розв'язків одномірних задач. Граничними умовами при цьому повинні служити умови або нульової температури, або нульового потоку, або теплообміну з середовищем нульової температури. Використаємо цей підхід для реалізації математичної моделі (4.50), (4.47), (4.49). Шукаємо розв'язок задачі теплопровідності для випадку, коли його можна представити у вигляді добутку одномірних задач [52, 54, 140]:

$$T(\xi_1, \xi_2, \tau) = T_1(\xi_1, \tau) T_2(\xi_2, \tau), \quad (4.51)$$

Перетворимо до змінних ξ_1, ξ_2 граничні умови (4.47) на границях поперечного перерізу згідно викладок і позначень п. 4.1 та (4.51). Розглянемо поперечний перетин призми BDD_1B_1 (рис. 4.1). В системі координат Ox_1x_2 точки вершини прямокутника BDD_1B_1 будуть такі: $B(L_1, L_2), D(-L_1, L_2), D_1(-L_1, -L_2), B_1(L_1, -L_2)$.

Розглянемо умову (4.46) на контурі BB_1 . На лінії BB_1 маємо:

$$L_1 = \tilde{l}_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}, \quad x_1 = L_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \xi_1, \quad \xi_1 = \frac{1}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} x_1,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{BB_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = H_1(T - u(\tau)) \quad (4.52)$$

З урахуванням (4.51) граничну умову (4.52) запишемо у вигляді

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{BB_1} = \frac{\partial(T_1 T_2)}{\partial x_1} = T_2 \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = T_2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} H_1(T_1 - u(\tau)) = H_1^*(T_1 - u_1(\tau)), \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} H_1 \left(T_1 - \frac{u(\tau)}{T_2} \right) = H_1^* (T_1 - u_1(\tau)).$$

Аналогічно визначимо граничну умову (4.47) на контурі бруска BD :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = T_1 \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \quad (4.54)$$

$$x_2 = L_2 = \sqrt{\lambda_2 / \lambda} \cdot \xi_2$$

$$\left. \frac{\partial(T_1 T_2)}{\partial \xi_2} \right|_{BD} = T_1 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} H_2 (T_2 - u(\tau)) = T_1 H_2^* (T_2 - u(\tau))$$

$$\left. \frac{\partial(T_2)}{\partial \xi_2} \right|_{BD} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}} H_2 \left(T_2 - \frac{u(\tau)}{T_1} \right) = H_2^* (T_2 - u_2(\tau))$$

У формулах (4.53) і (4.54) введені такі позначення: $H_i^* = \sqrt{\lambda_i / \lambda} \cdot H_i$, $H_i = \tilde{\alpha}_i / \lambda_i$, $\tilde{\alpha}_i$ – коефіцієнти теплообміну. Тоді з урахуванням (4.51) шуканий розв'язок задачі визначення температури у процесі сушіння деревного бруска можна представити у вигляді

$$T_i(\xi_i, \tau) = \sum_{i=1}^2 T_{ii}(\xi_i, \tau) + T_i^*(\xi_i, \tau) \quad (4.55)$$

Перший доданок (4.55) характеризує розв'язок рівняння (4.50) з граничними умовами. Однак такий доданок не визначає початкові умови, зокрема для різних періодів процесу сушіння. Другий доданок (4.55) задовільняє однорідним граничним умовам та враховує початкові умови, зокрема для періодів сталої і падаючої швидкостей сушіння.

Кожна з функцій $T_{ii}(\xi_i, \tau)$ задовольнить граничні умови (4.52) і (4.53) на зовнішній границі $\xi_i = \pm \tilde{l}_i$.

Якщо підставити (4.51) в рівняння теплопровідності двовимірної задачі (4.50), що задовольняє однорідним граничним умовам $\left(\beta_{1i} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} + \beta_{2i} T \right)_{\xi_i = \tilde{l}_i} = 0, (i=1,2)$

$T(\xi_i) \Big|_{\xi_i = \xi_{mi}} = 0$ та початковим умовам $T(\xi_1, \xi_2, 0) = T_1(\xi_1, 0) \cdot T_2(\xi_2, 0) = f_1(\xi_1) \cdot f_2(\xi_2)$, то

розв'язок крайової задачі (4.50), (4.53), (4.54) з урахуванням рухомих меж випаровування можна виразити у вигляді добутку розв'язків одномірних задач [52, 54, 140] з відповідними початковими та граничними умовами:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_i}{\partial \tau}(\xi_i, \tau) = \frac{\partial^2 T_i(\xi_i, \tau)}{\partial \xi_i^2}, T_i(\xi_i) \Big|_{\xi_i = \xi_{mi}} = 0, \quad (4.56)$$

$$\left(\beta_{1i} \frac{\partial T_i}{\partial \xi_i} + \beta_{2i} T_i \right) \Big|_{\xi_i = \tilde{l}_i} = 0, (i=1,2), \text{ або } \left(\frac{\partial T_i}{\partial \xi_i} + H_i^* T_i \right) \Big|_{\xi_i = \tilde{l}_i} = 0, H_i^* = \frac{\beta_{2i}}{\beta_{1i}}. \quad (4.57)$$

Оскільки $T_{11}(\xi_1, \tau)$ залежить тільки від ξ_1 , а $T_{12}(\xi_2, \tau)$ від ξ_2 , то T_i представимо у вигляді [30]:

$$T_i = T_{li}(\xi_i, \tau) + T_i^*(\xi_i, \tau) \quad (4.58)$$

Рівнянню теплопровідності задовольняє добуток $T_1(\xi_1)T_2(\xi_2)$, де $T_i^*(\xi_i, \tau)$ задовольняє рівнянню теплопровідності, однорідним граничним умовам та підправляє виконання початкових умов. Представимо $T_{li}(\xi_i, \tau)$ з (4.56) у вигляді

$$T_{li}(\xi_i, \tau) = \varphi_{0i}(\xi_i) + \sum_{n=1}^p [\varphi_{ni}(\xi_i) \cos v_{ni}^2 \tau + \chi_n(\xi_i) \sin v_{ni}^2 \tau], (i=1,2) \quad (4.59)$$

$T_i^*(\xi_i, \tau)$ є розв'язками рівнянь теплопровідності (4.55), які запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{\partial^2 T_{11}(\xi_1, \tau)}{\partial \xi_1^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_{11}(\xi_1, \tau)}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T_{12}(\xi_2, \tau)}{\partial \xi_2^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_{12}(\xi_2, \tau)}{\partial \tau} \right) = 0,$$

які задовольняють граничним умовам задачі, але не задовольняють початкову умову.

Зазначимо, що зовнішні потоки тепла, спричинені сушильним агентом (4.48), залежать тільки від часу, не залежать від координат ξ_i та відповідають технологічному режиму сушіння.

Для визначення невідомих функцій $\varphi_{ni}(\xi_i), \chi_{ni}(\xi_i)$ ($n = 0, 1, \dots, p; \nu_0 = 0$) підставляємо розв'язок (4.59) в одномірне рівняння теплопровідності. Після деяких перетворень, згідно [30] отримаємо систему рівнянь

$$\frac{d^2 \varphi_{ni}}{d\xi_i^2} - \nu_{ni}^2 \chi_{ni} = 0 \quad (n_i = 0, 1, \dots, p_i; \nu_{0i} = 0), \quad (4.61)$$

$$\frac{d^2 \chi_{ni}}{d\xi_i^2} + \nu_{ni}^2 \varphi_{ni} = 0 \quad (n_i = 1, \dots, p_i).$$

Граничні умови (4.53), (4.54) тепер мають вигляд:

$$\frac{d\varphi_{ni}(\tilde{l}_i)}{d\tilde{\xi}_i} + H_i^* \varphi_{ni}(\tilde{l}_i) = H_i^* \alpha_{ni} \quad (n_i = 0, 1, \dots, p_i); \quad (4.62)$$

$$\varphi_{ni}(\xi_{mi}) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$\frac{d\chi_{ni}(\tilde{l}_i)}{d\tilde{\xi}_i} + H_i^* \chi_{ni}(\tilde{l}_i) = H_i^* \beta_{ni} \quad (n_i = 1, \dots, p_i) \quad i = 1, 2; \quad (4.63)$$

$$\chi_{ni}(\xi_{mi}) = 0 \quad (n_i = 0, 1, \dots, p_i).$$

Введемо комплексні функції для розв'язувань системи рівнянь (4.61) при ($n = 1, \dots, p$)

$$\Phi_{ni}(\xi_i) = \varphi_{ni}(\xi_i) - i\chi_{ni}(\xi_i), \quad i^2 = -1.$$

Тоді система диференціальних рівнянь (4.61) для визначення функцій $\varphi_{ni}(\xi_i), \chi_{ni}(\xi_i)$ зводиться до p_i рівнянь щодо знаходження комплексних функцій $\Phi_{ni}(\xi_i)$

$$\frac{d^2 \Phi_{ni}}{d\xi_i^2} - i\nu_{ni}^2 \Phi_{ni} = 0 \quad (n_i = 1, 2, \dots, p_i), \quad i^2 = -1, \quad (4.64)$$

Розв'язки рівнянь (4.64) є такі:

$$\Phi_{ni}(\xi_i) = C_{ni} ch\sqrt{i}\nu_{ni}\xi_i + D_{ni} sh\sqrt{i}\nu_{ni}\xi_i. \quad (4.65)$$

Використаємо алгебраїчну форму для представлення комплексних коефіцієнтів $C_{ni} = a_{ni} + ib_{ni}, D_{ni} = c_{ni} + id_{ni}$. Тоді отримаємо

$$ch\sqrt{i}\nu_{ni}\xi_i = ch\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} \cos\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} + ish\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} \sin\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \quad (4.66)$$

$$sh\sqrt{i}\nu_{ni}\xi_i = sh\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} \cos\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} + ich\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}} \sin\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}},$$

З урахуванням співвідношень (4.66) визначаємо невідомі функції $\varphi_{ni}(\xi_i)$ і $\chi_{ni}(\xi_i)$:

$$\varphi_{ni}(\xi_i) = a_{ni} Y_1\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - b_{ni} Y_2\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) + c_{ni} Y_3\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - d_{ni} Y_4\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right); \quad (4.67)$$

$$\chi_{ni}(\xi_i) = -a_{ni} Y_2\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - b_{ni} Y_1\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - c_{ni} Y_4\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - d_{ni} Y_3\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.68)$$

Тут $Y_m\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ki}\xi_i}{\sqrt{2}}\right)$ ($m=1, 2, 3, 4$) – гіперболо-тригонометричні функції вигляду [30, 52].

Коефіцієнти $a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni}$ є функціями рухомої координати ξ_{mi} . Їх представимо у вигляді:

$$a_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{\Delta_1(\xi_{mi})}{\Delta(\xi_{mi})}, \quad b_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{\Delta_2(\xi_{mi})}{\Delta(\xi_{mi})}, \quad c_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{\Delta_3(\xi_{mi})}{\Delta(\xi_{mi})}, \quad d_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{\Delta_4(\xi_{mi})}{\Delta(\xi_{mi})}, \quad (4.69)$$

$\Delta_i(\xi_{mi}), (i=1, 2, 3, 4)$ – детермінантами, які визначаємо на основі граничних умов.

Для подальших перетворень введемо позначення: $Y_m\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = Y_m\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right)$.

Мають місце наступні співвідношення:

$$Y_1'\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_3\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - Y_4\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad Y_2'\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_4\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) + Y_3\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (4.70)$$

$$Y_3'\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_1\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) - Y_2\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad Y_4'\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_2\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) + Y_1\left(\frac{v_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad \Delta(\xi_{mi}) = |\delta_{ij}|,$$

$$\text{де } \delta_{11i} = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_3\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) - Y_4\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right) + H_i^* Y_1\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\delta_{12i} = - \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_3\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) + Y_4\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right) + H_i^* Y_2\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

$$\delta_{13i} = \frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_1\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) - Y_2\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right) + H_i^* Y_3\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\delta_{14i} = - \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \left(Y_1\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) + Y_2\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right) + H_i^* Y_4\left(\frac{v_{ni}\tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right) \right),$$

$$\delta_{21i} = \delta_{12i}, \quad \delta_{22i} = \delta_{11i}, \quad \delta_{23i} = \delta_{14i}, \quad \delta_{24i} = \delta_{13i}, \quad \delta_{31i} = Y_1\left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi}\right), \quad \delta_{32i} = -Y_2\left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi}\right),$$

$$\delta_{33i} = Y_3 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right), \delta_{34i} = -Y_4 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right), \delta_{41i} = -Y_2 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right), \delta_{42i} = -Y_1 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right),$$

$$\delta_{43i} = -Y_4 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right), \delta_{44i} = -Y_2 \left(\frac{v_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi} \right)$$

Величини \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 відповідають граничним значенням в системі координат (ξ_1, ξ_2) , ξ_{mi} ($i=1,2$) – межі фазового переходу.

Після деяких перетворень з (4.69), (4.70) отримаємо систему рівнянь для визначення $a_{ni}(\xi_{mi}), b_{ni}(\xi_{mi}), c_{ni}(\xi_{mi}), d_{ni}(\xi_{mi})$ у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} [Y_1'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_1(\tilde{l}_i)] & -[Y_2'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_2(\tilde{l}_i)] & [Y_3'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_3(\tilde{l}_i)] & -[Y_4'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_4(\tilde{l}_i)] \\ -[Y_2'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_2(\tilde{l}_i)] & -[Y_1'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_1(\tilde{l}_i)] & -[Y_4'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_4(\tilde{l}_i)] & -[Y_3'(\tilde{l}_i) + H_i^* Y_3(\tilde{l}_i)] \\ Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) & -Y_4(\xi_{mi}) \\ -Y_2(\xi_{mi}) & -Y_1(\xi_{mi}) & -Y_4(\xi_{mi}) & -Y_3(\xi_{mi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ni} \\ b_{ni} \\ c_{ni} \\ d_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_i^* \alpha_{ni} \\ H_i^* \beta_{ni} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (4.71)$$

Представимо (4.71) у вигляді

$$\begin{pmatrix} \delta_{11i} & \delta_{12i} & \delta_{13i} & \delta_{14i} \\ \delta_{21i} & \delta_{22i} & \delta_{23i} & \delta_{24i} \\ \delta_{31i} & \delta_{32i} & \delta_{33i} & \delta_{34i} \\ \delta_{41i} & \delta_{42i} & \delta_{43i} & \delta_{44i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ni} \\ b_{ni} \\ c_{ni} \\ d_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_i^* \alpha_{ni} \\ H_i^* \beta_{ni} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо вирази для визначення невідомих

$$a_{ni} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H_i^* \alpha_{ni} & \delta_{12i} & \delta_{13i} & \delta_{14i} \\ H_i^* \beta_{ni} & \delta_{22i} & \delta_{23i} & \delta_{24i} \\ 0 & \delta_{32i} & \delta_{33i} & \delta_{34i} \\ 0 & \delta_{42i} & \delta_{43i} & \delta_{44i} \end{vmatrix}, b_{ni} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \delta_{11i} & H_i^* \alpha_{ni} & \delta_{13i} & \delta_{14i} \\ \delta_{21i} & H_i^* \beta_{ni} & \delta_{23i} & \delta_{24i} \\ \delta_{31i} & 0 & \delta_{33i} & \delta_{34i} \\ \delta_{41i} & 0 & \delta_{43i} & \delta_{44i} \end{vmatrix}, (4.72)$$

$$c_{ni} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \delta_{11i} & \delta_{12i} & H_i^* \alpha_{ni} & \delta_{14i} \\ \delta_{21i} & \delta_{22i} & H_i^* \beta_{ni} & \delta_{24i} \\ \delta_{31i} & \delta_{32i} & 0 & \delta_{34i} \\ \delta_{41i} & \delta_{42i} & 0 & \delta_{44i} \end{vmatrix}, d_{ni} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \delta_{11i} & \delta_{12i} & \delta_{13i} & H_i^* \alpha_{ni} \\ \delta_{21i} & \delta_{22i} & \delta_{23i} & H_i^* \beta_{ni} \\ \delta_{31i} & \delta_{32i} & \delta_{33i} & 0 \\ \delta_{41i} & \delta_{42i} & \delta_{43i} & 0 \end{vmatrix}.$$

Для випадку, коли температура агента сушіння (4.48) представляється рядом Фур'є за косинусами, то з системи (4.71) визначимо співвідношення для знаходження $a_{ni}(\xi_{mi}), b_{ni}(\xi_{mi}), c_{ni}(\xi_{mi}), d_{ni}(\xi_{mi})$:

$$a_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{H_i^* \alpha_{ni} \Delta_1^*(\xi_{mi}) + H_i^{*2} \alpha_{ni} \Delta_1^{**}(\xi_{mi})}{A_{10}(\xi_{mi}) + H_i^* A_{11}(\xi_{mi}) + H_i^{*2} A_{12}(\xi_{mi})}; \quad b_{ni}(\xi_{mi}) = \frac{H_i^* \alpha_{ni} \Delta_2^*(\xi_{mi}) + H_i^{*2} \alpha_{ni} \Delta_2^{**}(\xi_{mi})}{A_{10}(\xi_{mi}) + H_i^* A_{11}(\xi_{mi}) + H_i^{*2} A_{12}(\xi_{mi})};$$

$$c_n(\xi_{mi}) = \frac{H_i^* \alpha_{ni} \Delta_3^*(\xi_{mi}) + H_i^{*2} \alpha_{ni} \Delta_3^{**}(\xi_{mi})}{A_{10}(\xi_{mi}) + H_i^* A_{11}(\xi_{mi}) + H_i^{*2} A_{12}(\xi_{mi})}; \quad d_n(\xi_{mi}) = \frac{H_i^* \alpha_{ni} \Delta_4^*(\xi_{mi}) + H_i^{*2} \alpha_{ni} \Delta_4^{**}(\xi_{mi})}{A_{10i}(\xi_{mi}) + H_i^* A_{11i}(\xi_{mi}) + H_i^{*2} A_{12i}(\xi_{mi})},$$

$$\text{де } \Delta_1^*(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y'_1(\tilde{l}_i) & Y'_4(\tilde{l}_i) & Y'_3(\tilde{l}_i) \\ -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad \Delta_1^{**}(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_1(\tilde{l}_i) & Y_4(\tilde{l}_i) & Y_3(\tilde{l}_i) \\ -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2^*(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y'_2(\tilde{l}_i) & Y'_4(\tilde{l}_i) & Y'_3(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad \Delta_2^{**}(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_2(\tilde{l}_i) & Y_4(\tilde{l}_i) & Y_3(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3^*(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y'_2(\tilde{l}_i) & Y'_1(\tilde{l}_i) & Y'_3(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad \Delta_3^{**}(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_2(\tilde{l}_i) & Y_1(\tilde{l}_i) & Y_3(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) & \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4^*(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y'_2(\tilde{l}_i) & Y'_1(\tilde{l}_i) & Y'_4(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_1(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad \Delta_4^{**}(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_2(\tilde{l}_i) & Y_1(\tilde{l}_i) & Y_4(\tilde{l}_i) \\ Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_1(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) \end{vmatrix};$$

$$\text{Тут } Y_i(\xi_{mi}) = Y_i\left(\frac{\nu_{ni}}{\sqrt{2}} \xi_{mi}\right), Y_i(\tilde{l}_i) = Y_i\left(\frac{\nu_{ni} \tilde{l}_i}{\sqrt{2}}\right);$$

$$A_{10}(\xi_{mi}) = (Y_1'^2(\tilde{l}_i) + Y_2'^2(\tilde{l}_i))J_1(\xi_{mi}) - (Y_1'(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) - Y_2'(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i))J_2(\xi_{mi}) + (Y_1'(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i))J_3(\xi_{mi}) - \\ - (Y_2'(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) + Y_1'(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i))J_4(\xi_{mi}) + (Y_2'(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) - Y_1'(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i))J_5(\xi_{mi}) + (Y_3'^2(\tilde{l}_i) + Y_4'^2(\tilde{l}_i))J_6(\xi_{mi});$$

$$A_{11}(\xi_{mi}) = 2(Y_1'(\tilde{l}_i)Y_1(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_2(\tilde{l}_i))J_1(\xi_{mi}) - ((Y_1(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) + Y_1'(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i)) - (Y_2(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i)))J_2(\xi_{mi}) + \\ + ((Y_1(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_1'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i)) + (Y_2(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i)))J_3(\xi_{mi}) - ((Y_2(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i)) + \\ + (Y_1(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_1'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i)))J_4(\xi_{mi}) + ((Y_2(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i)) - \{Y_2(\tilde{l}_i)Y_3'(\tilde{l}_i) + Y_2'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i)\}) - \\ (Y_1(\tilde{l}_i)Y_4'(\tilde{l}_i) + Y_1'(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i)))J_5(\xi_{mi}) + 2(Y_3'(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i) + Y_4'(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i))J_6(\xi_{mi});$$

$$A_{12}(\xi_{mi}) = (Y_1^2(\tilde{l}_i) + Y_2^2(\tilde{l}_i))J_1(\xi_{mi}) - (Y_1(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i) - Y_2(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i))J_2(\xi_{mi}) + (Y_1(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i) + Y_2(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i))J_3(\xi_{mi}) - \\ - (Y_2(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i) + Y_1(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i))J_4(\xi_{mi}) + (Y_2(\tilde{l}_i)Y_3(\tilde{l}_i) - Y_1(\tilde{l}_i)Y_4(\tilde{l}_i))J_5(\xi_{mi}) + (Y_3^2(\tilde{l}_i) + Y_4^2(\tilde{l}_i))J_6(\xi_{mi}).$$

$$J_1(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_3(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) \\ Y_4(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad J_2(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} -Y_2(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad J_3(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} -Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \\ Y_1(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) \end{vmatrix};$$

$$J_4(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_1(\xi_{mi}) - Y_4(\xi_{mi}) \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad J_5(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_1(\xi_{mi}) & Y_3(\xi_{mi}) \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_4(\xi_{mi}) \end{vmatrix}; \quad J_6(\xi_{mi}) = \begin{vmatrix} Y_1(\xi_{mi}) & -Y_2(\xi_{mi}) \\ Y_2(\xi_{mi}) & Y_1(\xi_{mi}) \end{vmatrix}.$$

Тут позначено $Y_m\left(\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}, \frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right) = Y_m\left(\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right)$, $Y_m\left(\frac{\nu_{ni}\xi_i}{\sqrt{2}}\right)_{\xi_i=\tilde{l}_i} = Y_m(\tilde{l}_i)$.

Розв'язок однорідної двомірної задачі теплоперенесення у процесі сушіння деревного бруса (4.50) отримаємо з допомогою знайденого вище розв'язку одномірного рівняння (4.56), якщо у граничних умовах покласти $u_i(\tau) = F_i = 0$, а замість $f(\xi_i)$ взяти

$$f_{li}(\xi_i) = f_i(\xi_i) - \bar{T}_{0i}, \quad \bar{T}_{0i} = T_{li}(\xi_i, 0) = \sum_{n=0}^P \varphi_{ni}(\xi_i). \quad (4.73)$$

Другий доданок розв'язку (4.55) $T_i^*(\bar{z}, \tau)$ визначимо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T_i^*}{\partial \tau}(\xi_i, \tau) = \frac{\partial^2 T_i^*}{\partial \xi_i^2}(\xi_i, \tau), \quad (i=1,2) \quad (4.74)$$

з однорідними граничними умовами

$$\frac{\partial T_i^*}{\partial \xi_i}(\tilde{l}_i, \tau) + H_i^* T_i^*(\tilde{l}_i, \tau) = 0, \quad T_i^*(\xi_{mi}, \tau) = 0. \quad (4.75)$$

Початкова умова до рівняння (4.73) має бути такою, щоб сумарно задовольнялась початкова умова рівняння (4.50): $T^*(\xi_i, 0) = f_i(\xi_i) - T_{0i}(\xi_i)$, де $T_{0i}(\xi_i)$ – розв'язок задачі (4.61), (4.62) для $\tau = 0$.

З першого рівняння системи (4.61) для $n_i = 0$ знайдемо:

$$\varphi_{0i}(\xi_i) = a_{0i} + b_{0i}\xi_i, \quad a_{0i} = \frac{T_{mi}(1 + H_i^*\tilde{l}_i) - H_i^*\alpha_{0i}\xi_{mi}}{1 + H_i^*(\tilde{l}_i - \xi_{mi})}, \quad b_{0i} = \frac{H_i^*(\alpha_{0i} - T_{mi})}{1 + H_i^*(\tilde{l}_i - \bar{z}_m)}. \quad (4.76)$$

Тут T_{mi} – функція, яка підлягає визначенню. Тоді згідно з (2.28) вираз для знаходження $T_i^*(\xi_i, \tau)$ має вигляд:

$$T_i^*(\xi_i, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni} \frac{\sin \mu_{ni}(\xi_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} \exp(-\mu_{ni}^2 \tau), \quad (4.77)$$

де $A_{ni} = \frac{1}{\Delta_{ni}(\mu_{ni}, \xi_{mi})} \int_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i} f_{li}(\xi_i) \left[\cos \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_i) + \frac{H_i^*}{\mu_{ni}} \sin \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_i) \right] d\xi_i$,

$\Delta_{ni}(\mu_{ni}, \xi_{mi}) = \cos \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_{mi}) \left[(\mu_{ni}^2 + H_i^{*2})(\tilde{l}_i - \xi_{mi}) + H_i^* \tilde{l}_i \right]$, μ_{ni} – корені характеристичного рівняння $\operatorname{tg} \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_{mi}) = -\mu_{ni} / H_i^*$, $i=1,2$.

Для знаходження температури $T_i^*(\xi_i, \xi_{mi}, \tau)$ деревного бруса у процесі сушіння використаємо отримані розв'язки одномірної задачі теплопровідності при умовах, що $T_{mi}(\xi_{mi}, \tau) = 0$, $u_i(\tilde{l}_i, \tau) = 0$. Якщо початковий розподіл температури рівномірний, тобто $T(\xi_i, 0) = T_{0i}$, то з врахуванням [30], вклад початкової температури в $T_i^*(\xi_i, \xi_{mi}, \tau)$ матиме вигляд

$$T_{0i}^*(\xi_i, \xi_{mi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{ni}(\xi_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} A_{ni}^*(\xi_{mi}) e^{-\mu_{ni}^2 \tau}, \quad (4.78)$$

де

$$A_{ni}^* = \frac{2T_{0i} H_i^*}{\Delta_{ni}} \left\{ \frac{\sin \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} - \frac{H_i^*}{\mu_{ni}^2} [\cos \mu_{ni}(\tilde{l}_i - \xi_{mi}) - 1] \right\}.$$

Вклад в $T_i^*(\xi_i, \xi_{mi})$ від суми $\sum_{n=1}^p \varphi_{ni}(\xi)$ представимо у вигляді

$$T_{\varphi i}^* = - \int_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i} \sum_{n=1}^p \varphi_{ni}(\eta_i) \times G_i(\xi_i, \xi_{mi}, \eta, \tau) d\eta. \quad (4.79)$$

Тоді отримаємо

$$T_i^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{ni}(\xi_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} A_{ni}(\xi_{mi}) e^{-\mu_{ni}^2 \tau}, \quad (4.80)$$

де $A_{ni}(\xi_{mi}) = \sum_{k=1}^p (a_{ki} \tilde{Z}_{nk1i}^* - b_{ki} \tilde{Z}_{nk2i}^* + c_{ki} \tilde{Z}_{nk3i}^* - d_{ki} \tilde{Z}_{nk4i}^*)$, $\tilde{Z}_{nkji}^* = \frac{2H_i^*}{\Delta_{ni}} Z_{nkji}^*$, ($j=1,2,3,4$).

Тут Z_{nkij} описуються такими виразами:

$$\begin{aligned} Z_{nk1i}^*(\mu_{ni}, \nu_{ki}, \tilde{l}_i, \xi_{mi}) &= (\Delta_{1ni}) (g_{1kni} \Phi_{11kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i) + g_{2kni} \Phi_{12kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i} + \\ &+ (\Delta_{2ni}) (g_{1kni} \Phi_{21kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i) + g_{2kni} \Phi_{22kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i}; \\ Z_{nk2i}^*(\mu_{ni}, \nu_{ki}, \tilde{l}_i, \xi_{mi}) &= (\Delta_{1ni}) (g_{2kni} \Phi_{32kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i) - g_{1kni} \Phi_{31kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i} + \\ &+ (\Delta_{2ni}) (g_{2kni} \Phi_{42kni}[\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i] - g_{1kni} \Phi_{41kni}[\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i])_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^*_{nk3i}(\mu_n, \nu_k, \tilde{l}_i, \xi_{mi}) &= (\Delta_{1ni})(g_{1kni} \Phi_{41kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i) + g_{2kni} \Phi_{42kni}(\alpha_k \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i} - \\
&\quad - (\Delta_{2ni})(g_{2kni} \Phi_{32kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i) + g_{1kni} \Phi_{31kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i}; \\
Z^*_{nk4i}(\mu_n, \nu_k, l_i^*, \xi_{mi}) &= (\Delta_{1ni})(g_{1kni} \Phi_{21kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{1kni} \xi_i) - g_{2kni} \Phi_{22kni}(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{2kni} \xi_i))_{\xi_{mi}}^{\tilde{l}_i}; \\
\Delta_{1ni} &= \cos \mu_{ni} \tilde{l}_i + \frac{H_i^*}{\mu_{ni}} \sin \mu_{ni} \tilde{l}_i, \quad \Delta_{2ni} = \sin \mu_{ni} \tilde{l}_i - \frac{H_i^*}{\mu_{ni}} \cos \mu_{ni} \tilde{l}_i; \\
\alpha_{ki} Y_3(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) + \beta_{jkni} Y_4(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) &= \Phi_{1jkni}(\xi_i); \\
\alpha_{ki} Y_2(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) - \beta_{jkni} Y_1(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) &= \Phi_{2jkni}(\xi_i); \\
-\alpha_{ki} Y_4(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) + \beta_{jkni} Y_3(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) &= \Phi_{3jkni}(\xi_i); \\
\alpha_{ki} Y_1(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) + \beta_{jkni} Y_2(\alpha_{ki} \xi_i, \beta_{jkni} \xi_i) &= \Phi_{4jkni}(\xi_i); \\
\sqrt{2} \alpha_{ki} = \nu_{ki}, \sqrt{2} \beta_{1kni} = \nu_{ki} + \mu_{ni}, \sqrt{2} \beta_{2kni} = -\nu_{ki} + \mu_{ni}; & B_{ni}(\xi_{mi}) = A_{ni}(\xi_{mi}) + A_{ni}^*(\xi_{mi}), \\
g_{1kni} = 1 / \left(2 \left(\frac{\nu_{ki}^2}{2} + \left(\frac{\nu_{ki}}{\sqrt{2}} + \mu_{ni} \right)^2 \right) \right), & g_{2kni} = 1 / \left(2 \left(\frac{\nu_{ki}^2}{2} + \left(-\frac{\nu_{ki}}{\sqrt{2}} + \mu_{ni} \right)^2 \right) \right).
\end{aligned}$$

На основі (4.77) і (4.77) отримаємо

$$T_i^* + T_{0i}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{ni} (\xi_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} B_{ni}(\xi_{mi}) e^{-\mu_{ni}^2 \tau}, \quad (4.81)$$

де

$$\begin{aligned}
B_{ni}(\xi_{mi}) &= \frac{2T_{0i} H_i^*}{\Delta_n} \left(\frac{\sin \mu_{ni} (\tilde{l}_i - \xi_{mi})}{\mu_{ni}} - \frac{H_i^*}{\mu_{ni}^2} (\cos \mu_{ni} (\tilde{l}_i - \xi_{mi}) - 1) \right) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \left(a_{ki}(\xi_{mi}) \left(\tilde{Z}_{nk1i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \tilde{l}_i}{\sqrt{2}} \right) - \tilde{Z}_{nk1i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \xi_{mi}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \right. \\
&\quad - b_{ki}(\xi_{mi}) \left(\tilde{Z}_{nk2i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \tilde{l}_i}{\sqrt{2}} \right) - \tilde{Z}_{nk2i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \xi_{mi}}{\sqrt{2}} \right) \right) + c_{ki}(\xi_{mi}) \left(\tilde{Z}_{nk3i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \tilde{l}_i}{\sqrt{2}} \right) - \tilde{Z}_{nk3i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \xi_{mi}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \\
&\quad \left. - d_{ki}(\xi_{mi}) \left(\tilde{Z}_{nk4i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \tilde{l}_i}{\sqrt{2}} \right) - \tilde{Z}_{nk4i}^* \left(\frac{\nu_{ki} \xi_{mi}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Необхідно зазначити, що $B_{ni}(\xi_{mi} = \tilde{l}_i) = 0$.

Тоді добуток $T_i(\xi_i) = T_{1i}(\xi_i) + T_i^*(\xi_i)$ і температура $T(\xi_1, \xi_2) = T_1(\xi_1) \cdot T_2(\xi_2)$

задовольнить рівняння

$$\frac{\partial^2(T_1(\xi_1, \tau) \cdot T_2(\xi_2, \tau))}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2(T_1(\xi_1, \tau) \cdot T_2(\xi_2, \tau))}{\partial \xi_2^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial(T_1(\xi_1, \tau) \cdot T_2(\xi_2, \tau))}{\partial \tau}.$$

Таким чином, визначення температури деревного бруса у процесі конвективного сушіння з врахуванням змінних температурних режимів (4.48), можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} T(\xi_1, \xi_2, \tau) = & \left(\varphi_{01}(\xi_1, \tau) + \sum_{n1=1}^p (\varphi_{n1}(\xi_1) \cos v_{n1}^2 \tau + \chi_{n1}(\xi_1) \sin v_{n1}^2 \tau) + \sum_{n1=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n1}(\xi_1 - \xi_{m1})}{\mu_{n1}} B_{n1}(\xi_{m1}) e^{-\mu_{n1}^2 \tau} \right) \\ & \cdot \left(\varphi_{02}(\xi_2, \tau) + \sum_{n2=1}^p (\varphi_{n2}(\xi_2) \cos v_{n2}^2 \tau + \chi_{n2}(\xi_2) \sin v_{n2}^2 \tau) + \sum_{n2=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n2}(\xi_2 - \xi_{m2})}{\mu_{n2}} B_{n2}(\xi_{m2}) e^{-\mu_{n2}^2 \tau} \right) \quad (4.82) \\ \frac{\partial T_i}{\partial \xi_i}(\xi_{mi}, \tau) = & (\alpha_{0i} - T_{mi}) \frac{H_{i*}}{1 + H_{i*}} + \sum_{n1=1}^p (\varphi'_{ni}(\xi_{mi}) \cos v_{ni}^2 \tau + \chi'_{ni}(\xi_{mi}) \sin v_{ni}^2 \tau) + \sum_{n1=1}^{\infty} B_{ni}(\xi_{mi}) e^{-\mu_{n1}^2 \tau}. \end{aligned}$$

Формула (4.82) дозволяє обчислити температуру в довільній точці двомірного деревного бруса за товщиною в довільний момент часу сушіння залежності від координати площини фазового переходу для граничних умов $T = T_m(\xi_1, \xi_2, \tau)$ на $F_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau) = 0$. Ці формули наведені у додатку.

Для визначення зони сушіння як функції часу скористаємося інтегральним методом [140]. Деревний брус являє собою призму, що має поперечний прямокутний перетин і температура задовольняє рівнянню теплопровідності (4.50)

Визначимо зміну об'єму осушеної зони у процесі сушіння. Призматичне тіло обмежене поверхнею

$$F(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \tilde{l}_1^2)(\xi_2^2 - \tilde{l}_2^2). \quad (4.83)$$

Поверхня його описується (4.83), якщо $\xi_1^2 \neq \tilde{l}_1^2$, $\xi_2^2 = \tilde{l}_2^2$ або $\xi_1^2 = \tilde{l}_1^2$, $\xi_2^2 \neq \tilde{l}_2^2$. При цьому ξ_1 змінюються від $-\tilde{l}_1$ до \tilde{l}_1 , а ξ_2 від $-\tilde{l}_2$ до \tilde{l}_2 . В момент часу $\tau^* = 0$ температура на поверхні тіла, яка визначається рівнянням (4.83), досягає температури, необхідної для фазового переходу, і покладемо її рівною $T_{\tilde{l}_i}$, яка підтримується на контактній зовнішній поверхні і задовольняє рівнянню (4.82). В початковий момент температура на бічних поверхнях тіла отримана у вигляді:

$$T(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, 0) = \left(\varphi_{01}(\tilde{l}_1, 0) + \sum_{n=1}^p (\varphi_{n1}(\tilde{l}_1)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n1}(\tilde{l}_1 - \xi_{m1})}{\mu_{n1}} B_{n1}(\xi_{m1}) \right) \cdot \left(\varphi_{02}(\tilde{l}_2, 0) + \sum_{n=1}^p (\varphi_{n2}(\tilde{l}_2)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n2}(\tilde{l}_2 - \xi_{m2})}{\mu_{n2}} B_{n2}(\xi_{m2}) \right). \quad (4.84)$$

Граничні умови мають вигляд: $T = T(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ на $F_0(\xi_1, \xi_2) = 0$, $\tau > 0$

$$T = T_m(\tilde{l}_{m1}, \tilde{l}_{m2}) \text{ на } F_m(\xi_1, \xi_2, \tau) = 0 \quad (4.85)$$

Початкова умова: $T = T_m, F_0 = F_m = 0$ для $\tau = 0$.

В ході процесу сушіння положення лінії фазового переходу визначається деякою замкнутою кривою $F_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)$. В зоні, де відбувається фазовий перехід, процес описується рівнянням теплопровідності і з розв'язку задачі температура отримана у вигляді (4.82). Перейдемо до нових змінних

$$\frac{T(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)}{T_0(\xi_1, \xi_2, \tau) - T_m(\xi_{m1}, \xi_{m2}, \tau)} = \eta, \quad \beta = \frac{\rho_m c_m \bar{a}}{\lambda_m} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_m}, \quad \tau^* = \frac{\tau \bar{a}}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2}, \quad (4.86)$$

$$X = \xi_1 / \tilde{l}_1, Y = \xi_2 / \tilde{l}_2, \quad \mathcal{V} = V / \tilde{l}_1 \tilde{l}_2, \quad \rho_m c_m / \lambda_m = 1 / \bar{a}_m$$

Тоді отримаємо

$$T(X, Y, \tau) = \left((\varphi_{01}(\tilde{l}_1 X, \tau) + \sum_{n=1}^p (\varphi_{n1}(\tilde{l}_1 X) \cos v_{n1}^2 \tau + \chi_{n1}(\tilde{l}_1 X) \sin v_{n1}^2 \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n1}(\tilde{l}_1 - \tilde{l}_{m1}) X}{\mu_{n1}} B_{n1}(l_{m1} X) e^{-\mu_{n1}^2 x}) \right) \cdot \left((\varphi_{02}(\tilde{l}_2 Y, \tau) + \sum_{n=1}^p (\varphi_{n2}(\tilde{l}_2 Y) \cos v_{n2}^2 \tau + \chi_{n2}(\tilde{l}_2 Y) \sin v_{n2}^2 \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_{n2}(\tilde{l}_2 - \tilde{l}_{m2}) X}{\mu_{n2}} B_{n2}(l_{m2} X) e^{-\mu_{n2}^2 x}) \right). \quad (4.87)$$

Нехай $V(F_{mi}, F_{\tilde{l}_i})$ – об'єм осушеної зони до моменту часу τ^* на одиницю довжини бруса

$$V(F_m, F_{\tilde{l}}) = \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} ds = \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} \int_{F_m=0}^{F_{\tilde{l}}=0} dXdY.$$

Якщо за деякий час $\Delta \tau$ об'єм осушеної зони збільшиться на $\Delta V(F_{mi}, F_{\tilde{l}_i})$, то кількість тепла, поглинутого за рахунок фазового переходу описується формулою (4.18).

Даний потік визначимо через потік на поверхні фазового переходу згідно (4.19) та скористаємося (4.20). Тоді рівняння перенесення тепла згідно (4.86), (4.18), (4.19) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau^*}(\xi_1, \xi_2, \tau) = \frac{\partial^2 \eta(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \eta(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\partial \xi_2^2} \quad (4.88)$$

Початок процесу осушування бурса $\tau^* = 0$ характеризується співвідношеннями

$$F_0(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \tilde{l}_1^2)(\xi_2^2 - \tilde{l}_2^2) = \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 (X^2 - 1)(Y^2 - 1) = 0, \quad (4.89)$$

$\eta = 0$ на $F_m(\xi_{1m}, \xi_{2m}, \tau) = 0$ при цьому $T(\xi_1, \xi_2, \tau) = T_m(l_m, X, l_{m2}, \tau)$; $\eta = 1$ для $\tau = 0$.

Окрім цього $\tau^* = 0$. Отримаємо такі залежності

$$F_m(\xi_{1m}, \xi_{2m}, \tau^*) = F_0(\xi_{1m}, \xi_{2m}, 0) = (\xi_1^2 - \tilde{l}_1^2)(\xi_2^2 - \tilde{l}_2^2) = 0.$$

У подальшому приймаємо, що у процесі сушіння часу лінія утворення осушеної зони повинна мати форму прямокутника з округленими кутами, а далі вироджуватися в еліпс, рівняння якого $\tilde{l}_1^2 X^2 + \tilde{l}_2^2 Y^2 - \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 \varepsilon(\tau) = 0$, а в кінці утворення осушеної зони стягуються в точку на осі призми $X = 0, Y = 0$. Тому лінію утворення осушеної зони (фазового переходу) можна представити рівнянням

$$\begin{aligned} F_m(\xi_{1m}, \xi_{2m}, \tau^*) &= (\xi_1^2 - \tilde{l}_1^2)(\xi_2^2 - \tilde{l}_2^2) - \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 \varepsilon(\tau) = \\ &= \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 (X^2 - 1)(Y^2 - 1) - \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 \varepsilon(\tau^*) = 0, \end{aligned} \quad (4.90)$$

де $\varepsilon(\tau^*)$ – невідома поки що функція часу. Початкова умова запишеться $\varepsilon = 0$ для $\tau^* = 0$. З рівняння (4.90) випливає, що в момент завершення процесу сушіння $\varepsilon(\tau) = 1$.

З врахуванням виразу (4.90) та рівняння неперервності теплового потоку (4.21) між поверхнями $F_0(X, Y)$ і $F_m(X, Y)$ знаходимо

$$\eta = \frac{T - T_m}{T_0 - T_m} = \frac{(\xi_1^2 - \tilde{l}_1^2)(\xi_2^2 - \tilde{l}_2^2) - \tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 \varepsilon(\tau)}{-\tilde{l}_1^2 \tilde{l}_2^2 \varepsilon(\tau)} = \frac{(X^2 - 1)(Y^2 - 1) - \varepsilon(\tau)}{-\varepsilon(\tau)}. \quad (4.91)$$

При цьому $\Delta T = T(\tau) - T_m$ буде на проміжній поверхні $(X^2 - 1)(Y^2 - 1) - \varepsilon(\tau)$, а різниця $T_0 - T_m$ відповідає зовнішній поверхні з координатами $(\xi_1^2 = \tilde{l}_1^2)$, $(\xi_2^2 = \tilde{l}_2^2)$.

З урахуванням виразу (4.91) інтеграл у лівій частині балансу тепла (4.21) має вигляд

$$\int_{F_m}^{F_0} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \partial S = \frac{4\varepsilon'}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \varepsilon^2} \left(\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} (1-x^2) dx \int_{\sqrt{R}}^1 (1-y^2) dy + \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^1 (1-x^2) dx \int_0^1 (1-y^2) dy \right) =$$

$$= \frac{4\varepsilon'}{3\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \varepsilon^2} - \left(\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R}(2-2X^2 + \varepsilon) dX + \frac{4}{3} \right). \quad (4.92)$$

Рівняння балансу тепла (4.21) з врахуванням переміщення рухомої границі прийме вигляд:

$$\frac{4\varepsilon'}{3\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \varepsilon^2} \left(- \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R}(2-2X^2 + \varepsilon) dX + \frac{4}{3} \right) - \beta \eta \frac{2\varepsilon'}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{dX}{(1-X^2)\sqrt{R}} = \int_{F_0} \frac{\partial \eta}{\partial n} dl, \quad (4.93)$$

$$\text{де } R = \frac{1-X^2-\varepsilon}{1-X^2}, \quad \beta \eta \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \beta \eta \frac{2\varepsilon'}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{dX}{(1-X^2)\sqrt{R}}.$$

Розглянемо другий доданок у (4.21), що характеризує зміну площі висушеної зони бруска між лініями F_0 і F_m і зовнішній контур на межі фазового переходу. Після деяких перетворень отримаємо вираз:

$$\mathcal{G} = \int_{F_m}^{F_0} \int d\mathcal{G} = \frac{4}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \left\{ \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} dX \int_{\sqrt{R}}^1 dY + \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^1 dX \int_0^1 dY \right\} = \frac{4}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \left(1 - \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R} dX \right), \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \frac{4}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(1 - \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R} dX \right) = - \frac{2\varepsilon'}{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2} \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{dX}{(1-X^2)\sqrt{R}}$$

Тепер розглянемо перший доданок у рівнянні теплового балансу (4.21), а саме інтегральний вираз. Оскільки на контурі з координатами $(\tilde{l}_1, 0)$ та $(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$, де $\xi_1 = \tilde{l}_1$,

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial X} \right|_{x=1} = -\frac{2}{\varepsilon}(Y^2 - 1), \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right|_{y=1} = \frac{2}{\varepsilon}(X^2 - 1), \quad \text{то отримаємо } \int_L \frac{\partial \eta}{\partial n} dl = \frac{32}{3\varepsilon}.$$

Підставимо отримані вирази, а також (4.92)-(4.94) в інтеграл теплового балансу (4.21) з врахуванням початкової умови $\eta = 1$. Визначимо рівняння щодо знаходження рухомої межі фазового переходу.

$$\left(\left(\left(-3 \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R}(2-2X^2 + \varepsilon) dX + 4 \right) / 24\varepsilon \right) - \beta \frac{3}{16} \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \frac{dX}{(1-X^2)\sqrt{R}} \right) d\varepsilon = \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 d\tau. \quad (4.95)$$

Інтегралі, які входять у рівняння (4.95), визначаються через певні еліптичні інтегралі. Зокрема, оскільки

$$\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{R(2-2x^2+\varepsilon)} dx = \frac{1}{3}((4+\varepsilon)E - 2\varepsilon(1+\varepsilon)K),$$

де E і K – певні еліптичні інтегралі.

Висновки до розділу 4

1. Побудовано нову двовимірну нелінійну математичну модель процесу конвективного сушіння анізотропних пористих матеріалів з урахуванням руху границі фазових переходів. Враховується довільна орієнтація головних осей тензора теплопровідності та визначено вплив головних компонентів та орієнтації головних осей тензора теплопровідності та нестационарні температурні поля в анізотропній пластині.

2. Визначено вплив головних компонентів та орієнтації осей тензора теплоперенесення на нестационарні температурні поля у призматичному тілі. Вперше розроблено аналітично-числовий метод для визначення теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазових переходів та встановлення рухомих меж фазового переходу у прямокутній області з врахуванням головних осей анізотропії.

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕОЛОГІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ДЕРЕВИНИ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ З УРАХУВАННЯ ЗОНИ ВИПАРОВУВАННЯ

У даному розділі побудована математична модель реологічної поведінки деревної пластини з урахуванням зони випаровування вологи, яка поділяє пластину на дві області з різними структурними і реологічними властивостями. У вологій зоні пластини на основі реологічної моделі Кельвіна-Фойгта, отримано визначальне співвідношення. Отримано також узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фазового переходу на границі випаровування вологи. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з врахуванням руху зони випаровування. Встановлені розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу.

Встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язко-пружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Досліджено вплив термодифузії, теплофізичних характеристик матеріалу, режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів. Результати п'ятого розділу опубліковані у [1, 4, 10, 11, 13, 18, 20, 22].

5.1. Моделювання впливу передісторії навантаження на реологічну поведінку деревини з урахування зони випаровування

У процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів супроводжується поглиблення зони випаровування вологи у середину матеріалу. Наявність рухомої

границі фазових перетворень на межі розділу фаз з різними теплофізичними і механічними характеристиками суттєво ускладнює математичні моделі деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів під час сушіння капілярно-пористих матеріалів. Моделювання тепломасоперенесення з фазовими переходами у процесі сушіння зводяться до розв'язання задач Стефана, які є найскладнішими навіть для незначних змін густини матеріалу у зоні випаровування. Однак випаровування води зумовлює зміну її об'єму майже в тисячу раз, а видалення парогазової суміші з області зони випаровування вимагає значних затрат енергії. З поглибленням зони випаровування в об'ємі висушеного матеріалу спостерігається суттєве зростання тиску біля фронту випаровування. Тому, врахування енергетичних витрат кінетики переміщення пари і конвективного перенесення тепла у зони випаровування враховуються різними підходами для представлення моделі зони випаровування. Для випадку, коли висушуваний матеріал характеризується реологічними властивостями, частина енергії, пов'язана з незворотніми деформаціями, розсіюється у матеріалі. Тому рівняння балансу енергії на поверхні фазового переходу дає можливість сформулювати умови для зони поглиблення випаровування, враховуючи зберігання незворотних деформацій при фазових переходах.

Розроблення математичних моделей в'язкопружних капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння базується на моделях наслідкової повзучості. Однак такі моделі описують реологічну поведінку різних середовищ для неперервної історії деформування. Для випадку, коли у процесі деформування капілярно-пористих середовищах неявні фазові переходи і процес деформування на їх границі характеризується розривами, то необхідно враховувати вплив передісторії навантаження до фазового переходу на подальший розвиток напружено-деформівного стану середовища. Для однорідних в'язкопружних середовищ, які у процесі деформування міняли фазовий перехід, використовується гіпотеза про збереження пружних напружень на границі переходу [203]. Ця гіпотеза базується на використанні однієї з основних теорем теорії в'язкопружності, зокрема теореми Ріса на випадок, коли деформації середовища характеризуються розривами.

У роботі узагальнюється ця гіпотеза на випадок в'язкопружного деформування анізотропних капілярно-пористих матеріалів в умовах температурно-вологісного навантаження з врахуванням фазового переходу на границі зони випаровування вологи. Зокрема у вологій зоні процесу сушіння деревина розглядається як ортотропний ненасичений багатофазний капілярно-пористий матеріал з врахуванням в'язкопружних властивостей, а у висушуваній зоні процес деформування описується рівнянням лінійної в'язкопружності з врахуванням ортотропії тепломеханічних характеристик і всихання матеріалу.

Для моделювання реологічної поведінки колоїдних капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, використана модель гетерогенної системи з подвійною пористістю для насиченої системи. Деревина розглядається як матеріал, що складається з деревної речовини (тверда фаза), рідкої та пароповітряної фаз. Особливістю такого підходу є те, що деревина характеризується в'язкопружними властивостями і в явному виді описуються об'ємні вмісти кожної фази. Реологічна поведінка деревини, згідно [106, 118], описується такою математичною моделлю:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & K_{ijke}^s \left(\sigma_{ke} + \bar{\alpha}_{12} \delta_{ke} + \int_0^{\tau} K_{ijke}^s (\tau - \tau') \cdot (\sigma_{ij} + \bar{\alpha}_{12} \delta_{ke}) d\tau' \right) + \\ & + K_{ijke}^f \left(\sigma_{ke} + \bar{\beta}_{12} \delta_{ke} + \int_0^{\tau} K_{ijke}^f (\tau - \tau') \cdot (\sigma_{ke} + \bar{\beta}_{12} \delta_{ke}) d\tau' \right) + \alpha_{ij}^s (\Delta U(\tau)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

де $K_{ijke}^s = K_{ijke}^s(0)/\alpha_3$; $K_{ijke}^f = K_{ijke}^f(0)/(1 - m_{II})$; $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$; $\bar{\beta}_{12} = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$;
 $\beta_i = m_{II} \alpha_{ni} + \alpha_{ki} (1 - m_{II})$; $\alpha_i = \alpha_{ni} m_{II} + \alpha_{ki} m_k$ ($i = 1, 2$); $\alpha_{n1} + \alpha_{n2} = 1$; $\alpha_{k1} + \alpha_{k2} = 1$;
 $K_{ijke}(0)$ – тензор миттєвих піддатливостей, Па⁻¹; β_{ij} – коефіцієнт вологісного розширення; $K_{ijke}(\tau - \tau')$ – тензор функцій швидкостей повзучості; $\Delta U(\tau) = U(\tau, x) - U_0(\tau)$ – різниця між біжучим вологісним станом деревини та її початковим значенням; p – тиск; τ – час; m_{II} – пористість, яка визначається співвідношенням об'єму макропор до об'єму матеріалу; m_k – пористість, яка визначається співвідношенням об'єму капілярів до об'єму клітинних стінок; α_{ni}, α_{ki} ($i = 1, 2$) – відповідно вмісти рідкої і парової фаз в об'ємах пор і капілярів; індекси f відносяться до ефективних значень (деревного скелету); s – до матеріалу деревної речовини; II – до системи макропор;

k – до системи капілярів; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – об'ємні вмісти пароповітряної, рідкої та твердої фаз; δ_{ke} – одиничний тензор.

У висушуваній області поведінка деревини описується лінійними рівняннями в'язкопружності з урахуванням всихання. Вони включають у себе рівняння рівноваги $\partial\sigma_{ij}/\partial x_{ij} = 0$ та лінійні інтегральні рівняння наслідкової повзучості для анізотропного середовища [82], які можна представити у вигляді

$$\varepsilon_{ij}(\tau) = \beta_{ij} \left(\Delta U(\tau) + \int_0^{\tau} K_{ijke}^s(\tau - \tau') d\sigma_{ke}(\tau') \right). \quad (5.2)$$

Узагальнимо гіпотезу [203] про збереження залишкових напружень у деревині як капілярно-пористому в'язкопружному середовищі для фазового переходу на випадок, коли у вологому стані у процесі сушіння матеріал являє собою багатофазне в'язкопружне середовище, а в сухому стані деревина описується рівнянням наслідкової повзучості.

Нехай у момент часу $\tau = \tau^*$ у точці $x = \xi(\tau^*)$ спостерігається перехід від однієї зони до іншої. Для $0 < \tau < \tau^*$ зв'язок між напруженнями та деформаціями описується рівняннями

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\tau^*) = \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{3(1)}(\tau^* - \tau) d \left(\varepsilon_{ij}^{(1)}(\tau') - \beta_{ij}^{(1)} \Delta(U(\tau')) \right), \quad (5.3)$$

Тут індекс 1 відповідає висушеній зоні.

Залишкові в'язкопружні напруження та напруження, зумовлені всиханням визначаються залежностями

$$\sigma_{zall}^{(1)}(\tau^*) = - \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{3(1)}(\tau^* - \tau') \varepsilon_{ij}^{(1)} d(\tau') - \beta_{ij}^{(1)} \Delta(U(\tau')). \quad (5.4)$$

Для насиченої області напружено-деформівний стан деревини з врахуванням (5.1), описується співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(\tau) = & R_{ijke}^{(2)s} \left(\varepsilon_{ke}^{(2)} + \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke} + \int_0^{\tau} R_{ijke}^{(2)s}(\tau - \tau') \cdot \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke} \right) d\tau' \right) + \\ & + R_{ijke}^{(2)f} \left(\varepsilon_{ke}^{(2)} + \tilde{\beta}_{12} \delta_{ke} + \int_0^{\tau} R_{ijke}^{(2)f}(\tau - \tau') \cdot \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \tilde{\beta}_{12} \delta_{ij} \right) d\tau' \right) + \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}(\Delta U(\tau)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$R_{ijke}^{(2)}$ – компоненти тензора функції релаксації, які визначаються за компонентами тензора повзучості $K_{ijke}^{(s)}$; коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\beta}_{12}$ та $\tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}$ зв'язані відповідними залежностями з $\bar{\alpha}_{12}$, $\bar{\beta}_{12}$ і $\alpha_{ij}^{(s)}$.

Компонентами в'язкопружних напружень отримуються шляхом виключення миттєво-пружних складових. Враховуючи, що для фазового переходу зберігаються значення складових в'язкопружних напружень, знайдемо компоненти деформацій деревини, допускаючи що з самого початку деформування у вологісному (насиченому) стані і до моменту часу $\tau = \tau^*$ складові в'язкопружних напружень рівні:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(\tau^*) &= \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') \cdot (\varepsilon_{ij}^{(2)} + \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke}) d\tau' + \\ &+ \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau') \cdot (\varepsilon_{ij}^{(2)} + \tilde{\beta}_{12} \delta_{ij}) d\tau' + \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)}(\Delta U(\tau^*)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Співвідношення (5.6) представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(\tau^*) &= \int_0^{\tau^*} (R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau')) \varepsilon_{ij}^{(2)} + \\ &+ \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') \cdot \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke} d\tau' + \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau') \cdot \tilde{\beta}_{12} \delta_{ij} d\tau' + \\ &+ \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau^*)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') \cdot \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke} d\tau' &= R_{\alpha}(\tau^*); \\ \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau') \cdot \tilde{\beta}_{12} \delta_{ij} d\tau' &= R_{\beta}(\tau^*). \end{aligned}$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)}(\tau^*) &= \int_0^{\tau^*} R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau') \varepsilon_{ij}^{(2)} d\tau' + \\ &+ R_{\alpha}(\tau^*) + R_{\beta}(\tau^*) + \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau^*)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Представимо співвідношення реологічної поведінки деревини як ненасиченого середовища у такому вигляді

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)}(\tau) &= R_{ijke}^{(2)sf} + R_{ijke}^{(2)s} \bar{R}_\alpha(\tau') + R_{ijke}^{(2)f} \bar{R}_\beta(\tau') + \\
&+ R_{ijke}^{(2)s} \int_0^\tau R_{ijke}^{2(s)}(\tau - \tau') \varepsilon_{ij}^{(2)} d\tau' + R_{ijke}^{(2)f} \int_0^\tau R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau') \varepsilon_{ij}^{(2)} d\tau' + \\
&+ \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau)),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{R}_\alpha(\tau') &= \int_0^\tau R_{ijke}^{2(s)}(\tau - \tau') \tilde{\alpha}_{ij} \delta_{ke} d\tau'; \\
\bar{R}_\beta(\tau') &= \int_0^\tau R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau') \tilde{\beta}_{12} \delta_{ij} d\tau'.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи підінтегральні вирази для складових в'язкопружних напружень, отримаємо

$$\begin{aligned}
-R_{ijke}^{\varepsilon(1)}(\tau^* - \tau') \varepsilon_{ij}^{(1)}(\tau') - \beta_{ij}^{(1)} \Delta(U(\tau')) &= (R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{(2)f}(\tau^* - \tau')) \varepsilon_{ij}^{(2)} + \\
&+ R_\alpha(\tau^*) + R_\beta(\tau^*) + \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau^*)); \\
\varepsilon_{ij}^{(2)} &= - \frac{R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') \varepsilon_{ij}^{(1)}(\tau')}{R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{2(f)}(\tau^* - \tau')} - \\
&- \frac{R_\alpha(\tau^*) - R_\beta(\tau^*) - \beta_{ij}^{(1)}(\Delta U(\tau')) - \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau^*))}{R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{2(f)}(\tau^* - \tau')}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Таким чином, з урахуванням (5.9) і (5.10), запишемо визначальні співвідношення для в'язкопружного деформування деревини

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)}(\tau) &= R_{ijke}^{(2)s} (\varepsilon_{ke}^{(2)} + \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke}) + R_{ijke}^{(2)f} (\varepsilon_{ke}^{(2)} + \tilde{\beta}_{12} \delta_{ke}) + \\
&+ R_{ijke}^{(2)s} \int_0^\tau R_{ijke}^{2(s)}(\tau - \tau') \tilde{\alpha}_{12} \delta_{ke} d\tau' + R_{ij}^{(2)f} \int_0^\tau R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau') \tilde{\beta}_{12} \delta_{ke} d\tau' - \\
&- \int_0^{\tau^*} \frac{(R_{ijke}^{(2)s} R_{ijke}^{(2)s}(\tau - \tau') + R_{ijke}^{(2)f} R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau')) \varepsilon_{ij}^{(1)}(\tau)}{R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{2(f)}(\tau^* - \tau')} \cdot R_{ijke}^{\varepsilon(1)}(\tau^* - \tau') d\tau' - \\
&- \int_0^{\tau^*} \frac{R_{ijke}^{(2)s} R_{ijke}^{(2)s}(\tau - \tau') + R_{ijke}^{(2)f} R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau')}{R_{ijke}^{(2)s}(\tau^* - \tau') + R_{ijke}^{2(f)}(\tau^* - \tau')} \cdot \\
&\cdot (R_\alpha(\tau^*) - R_\beta(\tau^*) - \beta_{ij}^{(1)}(\Delta U(\tau')) - \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau^*))) d\tau' + \\
&+ R_{ijke}^{(2)s} \int_{\tau^*}^\tau R_{ijke}^{2(s)}(\tau - \tau') \varepsilon_{ij}^{(2)} d\tau' + R_{ij}^{(2)f} \int_{\tau^*}^\tau R_{ijke}^{2(f)}(\tau - \tau') \varepsilon_{ij}^{(2)} d\tau' + \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} \Delta(U(\tau)).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Таким чином, отримані співвідношення враховують деформаційно-релаксаційні процеси деревини як насиченого середовища як до, так і після зони випаровування вологи. Зокрема, інтегральні вирази у співвідношеннях (5.11)

враховують ефект впливу на релаксацію напружень у деревині передісторії деформування до фазового переходу.

5.2. Математична модель реологічної поведінки деревної пластини з урахуванням зони випаровування вологи

Виникаючи у процесі сушіння деревини напружено-деформівний стан є основним чинником сповільнення інтенсифікації технологічного процесу. Складність розрахунку компонентів напружень і деформації зумовлюються перш за все поведінкою матеріалу, анізотропністю структури матеріалу, капілярно-пористістю природного середовища. Процес сушіння деревини, особливо під час періоду спадної швидкості сушіння характеризується наявністю щонайменше двох зон випаровування вологи з різними технологічними характеристиками.

У роботі розглядається математична модель реологічної поведінки деревної пластини у процесі конвективного сушіння з урахуванням зони випаровування вологи.

У вологій зоні деревної пластини матеріал характеризується в'язкопружними властивостями. Для дослідження напружено-деформівного стану у вологій зоні приймається модель Кельвіна-Фойгта. Інша висушена зона описується пружною поведінкою. Однією з причин виникнення напружень у висушуваних матеріалах є вільне всихання, зумовлене капілярними процесами видалення вільної (міжкапілярної) вологи та наявністю нерівномірностей висушування за товщиною матеріалу та різними механізмами.

Загальну деформацію деревини в умовах конвективного сушіння можна представити у вигляді

$$\varepsilon = \varepsilon_{II} + \varepsilon_B + \varepsilon_w, \quad (5.12)$$

де ε_{II} , ε_B , ε_w – відповідно пружна, в'язкопружна та деформація всихання.

Для дослідження пружних деформацій всихання використовується закон Гука з урахуванням деформацій всихання, які визначаються за лінійною залежністю від зміни вологості. У вологій зоні деревної пластини реологічна модель Кельвіна-Фойгта описується співвідношенням [82, 89]

$$GK\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\varepsilon_w}{3}\delta_{ij}\right)=3K\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\sigma_{ij}-\left(3K\left(1+\tau_0\frac{\partial}{\partial\tau}\right)-\frac{2}{3}G\left(1+\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\sigma_{ii}\delta_{ij}\right), \quad (5.13)$$

де ε_{ij} , σ_{ij} – компоненти тензора деформацій і напружень; G , K – модулі пружності та об'ємного розширення; τ_0 , τ_1 – часи релаксації, δ_{ij} – символи Кронекера.

У випадку одновимірного вологісного поля у процесі сушіння деревної пластини товщиною $2l$ з урахуванням залежностей $\sigma_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ з (5.13) отримаємо математичну модель у вигляді

$$\begin{aligned} \tau_0\tau_1\frac{\partial^2\varepsilon_B(\tau)}{\partial\tau^2}+(\tau_0+\tau_1)\frac{\partial\varepsilon_B(\tau)}{\partial\tau}+\varepsilon_B(\tau) &= \\ &= \frac{4G\tau_1+3K\tau_0}{18GK}\frac{\partial\sigma_B}{\partial\tau}+\frac{4G+3K}{4G\tau_1+3K\tau_0}\sigma_B \end{aligned} \quad (5.14)$$

Граничні умови характеризують відсутність напружень і деформацій у деревній пластині на початку процесу сушіння ($\tau=0$), і мають вигляд $\sigma=0$, $\varepsilon=0$.

У (5.14) враховано, що у вологій зоні всихання деревини є незначним, тому $\varepsilon_w=0$.

Напружено-деформівний стан деревної пластини у висушеній зоні з урахуванням всихання згідно прийнятих допущень описується законом [82, 136]

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left((\varepsilon_{ij}-\varepsilon_w)+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}(\varepsilon_{kk}-\varepsilon_w)\right). \quad (5.15)$$

Оскільки розглядається одновимірна задача процесу сушіння, то рівняння сумісності [82] можна представити у вигляді

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sigma+\frac{E}{1+\nu}\right)\varepsilon_w=0; \quad \frac{\partial^2\varepsilon}{dz^2}=0; \quad (5.16)$$

Врахувавши (5.16) з (5.15), отримаємо

$$\sigma(\tau)=\frac{E}{1-\nu}(\varepsilon(\tau)-\varepsilon_w) \quad (5.17)$$

Згідно [7, 29, 136], процес переходу від вологої зони у висушену в процесі сушіння деревини характеризується майже сталими значеннями всихання, то вважаємо, що величина деформації всихання ε_w дорівнює загальній деформації

(5.12) у момент часу переходу між пружними зонами τ^* , тобто $\varepsilon_w = \varepsilon^0(\tau) = \varepsilon(\tau^*)$, $\tau^* = \xi^{-1}(x)$, де $\xi(x)$ – координата поверхні межі розподілу фаз, яка є паралельною до площини деревної пластини. Таким чином, деформація всихання, окрім процесів деформування деревної пластини у процесі сушіння, враховує і величину фазового переходу $\xi(x)$ залежно від технологічних режимів процесу сушіння, зокрема неізотермічного вологоперенесення.

Граничні умови на поверхні деревної пластини, враховуючи, що сумарні зусилля та момент дорівнюють нулеві, мають вигляд:

$$\int_{-e}^e \sigma(z) dz = 0, \int_{-e}^e z \sigma(z, \tau) dz = 0 \quad (5.18)$$

Таким чином, інтегруючи рівняння (5.15) з нульовими граничними умовами ($\tau = 0: \varepsilon = 0, \partial \varepsilon / \partial \tau = 0$) для вологої зони та врахуванням співвідношення (5.17), (5.18) для висушеної зони, отримаємо математичну модель для визначення напружено-деформівного стану деревної пластини у процесі конвективного сушіння з урахування рухомої зони випаровування вологи у вигляді $z \leq z^*$:

$$\sigma(\tau) = A_0 \varepsilon(\tau) + A_1 \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} + A_2 \int_0^\tau \varepsilon(\tau') \exp(-b_0(\tau - \tau')) d\tau', \quad (5.19)$$

де введені такі позначення:

$$A_0 = \frac{E(\tau_0 + \tau_1)b_1 - 3(1-\nu)\tau_1\tau_0}{b_1^2}; \quad A_1 = \frac{E\tau_0\tau_1}{b_1};$$

$$A_2 = \frac{E}{b_1^3} (b_1^2 - 3(1-\nu)(\tau_1 + \tau_0)(b_1 + 9(1-\nu)^2\tau_0\tau_1));$$

$$b_0 = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)\tau_1 + (1+\nu)\tau_0}; \quad b_1 = 2\tau_1(1-2\nu) + \tau_0(1+\nu).$$

Для висушеної зони $z^* \leq z \leq l$ відповідно можна записати

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon_w}{3} \right) \quad (5.20)$$

У (5.19), (5.20) через E і ν позначені модулі пружності та коефіцієнти Пуасона для деревини, як і у загальному випадку є функціями від вологості і температури, тобто $E = E(U, t)$, $\nu = \nu(U, t)$.

Визначення цих величин, які характеризують реологічну поведінку деревини пов'язане з аналізом експериментальних даних. Для цього використані експериментальні залежності кривих деформацій повзучості деревини поперек волокон для різних значень температури і вологості [155, 183]. Згідно цих та відповідних методик [7, 119], значення коефіцієнтів у (5.19) описується залежністю

$$b_0 = (E_i(U, t) - E_o(U, t)) / E_o(U, t) \tau_{\text{rel}}(U, t),$$

де E_m , E_T – відповідно миттєвий і тривалий модулі пружності. Приймаємо, що $\tau_{\text{rel}} = \tau_0 = \tau_1$ у формулі (5.19). для визначення τ_{rel} використані експериментальні дані [116] та залежність [121] τ_{rel} від t і U у вигляді

$$\tau_{\text{rel}} = a_0 + a_1 T + a_2 U + a_3 \frac{T^2}{2} + a_4 TU + a_5 \frac{U^2}{2} + a_6 \frac{T^3}{6} + a_7 \frac{T^2 U}{2} + a_8 \frac{T U^2}{2} + a_9 \frac{U^3}{6}.$$

У таблиці 5.1 наведені результати апроксимації величин τ_{rel} , $E_m(t, U)$, $E_T(t, U)$ за експериментальними даними [136, 155] для деревини сосни.

Таблиця 5.1

Коефіцієнти апроксимації величин τ_{rel} , E_m , E_T деревини сосни

Коефіцієнти апроксимації	Час релаксації, τ_{rel}		Миттєвий модуль пружності, E_m		Тривалий модуль пружності, E_T	
	танген-тальний	радіаль-ний	танген-тальний	радіаль-ний	танген-тальний	радіаль-ний
1	2	3	4	5	6	7
a ₀	194,6266	190,0849	798,5008	1231,188	507,4907	783,9413
a ₁	-1,60374	-1,56495	-3,29293	-3,48475	-3,07015	-3,86125
a ₂	-857,421	-824,86	-664,12	-1619,17	-465,824	-929,93
a ₃	0,012451	0,011215	-0,01451	-0,06438	0,02885	0,015359
a ₄	3,649931	3,74298	5,317597	8,633786	2,241751	5,245155
a ₅	3520,796	3329,721	-2878,33	-0,80933	-171,419	0,001428
a ₆	-5,8E-05	-3,2E-05	0,000242	0,000925	-0,00033	-0,00014
a ₇	-0,01166	-0,01483	-0,00172	-0,0179	-0,00376	-0,00863
a ₈	-5,40907	-5,07905	-2,25991	-0,00525	2,400749	-3,4E-05
a ₉	-8066,42	-7609,12	11027,99	3,98542	-32,0176	0,005516

Тривалий E_T та миттєвий E_m модулі пружності для деревини сосни у поперечному напрямі для зміни вологості $W = 5...15\%$ описується залежностями [7, 136]:

$$E_{11(t)}(W, T) = 5,58 + 1,116(25 - W) + 0,279T + 0,123(25 - W)T,$$

$$E_{11(m)}(W, T) = 9,62 + 1,924(25 - W) + 0,481T + 0,212(25 - W)T.$$

Розрахункові залежності модуля зсуву μ та коефіцієнта Пуассона ν деревини сосни згідно [7], мають вигляд:

$$\nu = 1,464 - 3,695 \cdot 10^{-2}W,$$

$$\mu(W, T) = (b_0 + b_1W + b_2W^2 + b_3W^3 + b_4T^3 + b_5WT^3 + b_6W^2T^3)^2 \cdot \rho,$$

де ρ – густина, коефіцієнти $b_0 = 1303,52388336834$; $b_1 = -12,0473477370703$;

$b_2 = 0,113229143493392$; $b_3 = -0,000402915927771619$; $b_4 = -0,000534331924880264$;

$b_5 = 8,89973932766165 \cdot 10^{-6}$; $b_6 = -7,86156549487012 \cdot 10^{-8}$.

Для визначення деформацій ε_w у процесі сушіння деревної пластини, які входять у (5.19), (5.20) з врахуванням зони випаровування вологи використано підхід [29, 30] та результати моделювання температури і вологості з розділів 2 та 3. Зокрема, для випадку одновимірних полів масоперенесення маємо такі вирази для деформацій у вологій та висушеній зонах пластини

$$\varepsilon_w = \beta_1 \Delta U^{(1)} = \beta_1 \Delta(U_1(z, \tau) - U_0), \quad 0 < z \leq z^*; \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_w = \beta_2 \Delta U^{(2)} = \beta_2 \Delta(U_2(z, \tau) - U_0), \quad z^* < z \leq l,$$

де β_i , $U_i (i=1,2)$ – відповідні коефіцієнти всихання та відповідні значення вологовмісту, U_0 – вологовміст у початковий момент процесу сушіння. Вологовміст U визначається як відношення маси вологої деревини до маси абсолютно сухого матеріалу [9].

Важливим моментом є визначення коефіцієнтів всихання β_i . Для деревини визначальним є β_2 для зони осушування, яка пов'язана з видаленням вологи під дією капілярних сил. Тому коефіцієнт всихання визначається швидкістю межі випаровування. Зазначимо, що геометричні розміри зони випаровування вологи не враховуються. Враховуючи це, для кількісного опису приймається залежність [80], $\varepsilon_m = \beta_0 V_0 (V + V_0)$, де β_0 – коефіцієнт всихання для маломожливих процесів сушіння, наприклад для періоду сталої швидкості сушіння. Приймається, що згідно [9, 38], швидкість руху межі фазового переходу рівна $V = -dz^*/d\tau = j/\rho$, де j – потік

вологи, який є обернено пропорційний розміру висушеної зони. Він може визначатися за формулою [81]: $j = A/(1 - z^*/l)$, де $A = l/2t_1$ – деяка стала, яка залежить від теплофізичних характеристик вологості: $A = [D]MP_s/RTl$. Такі допущення дозволяють здійснити від часу до координати межі випаровування за формулою $\xi_* = 1 - z^*/l = \sqrt{2A\tau/l}$, оскільки $\xi_*(\tau) = \sqrt{\tau}$, $d\xi_*(\tau)/d\tau = (2\xi_*)^{-1}$. У свою чергу це дозволяє визначити деформації $\varepsilon(\xi_*)$ на межі фазового переходу з граничних умов (5.18).

Для визначення деформацій використано реологічне рівняння [108] у вигляді

$$\partial^2 \varepsilon / \partial \tau^2 + \alpha_1 \partial \varepsilon / \partial \tau + \alpha_2 \varepsilon = \alpha_3. \quad (5.22)$$

Значення параметрів у цьому рівнянні приймають вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \frac{\tau_k}{\tau_1 \tau_2} (1 - \xi/l_2) (\tau_1 + \tau_2 - (1 - \xi/l_2)) (4\tau_2(1 - 2\nu) + 3\tau_1(1 + \nu)) / 2(1 - \nu), \quad (5.23) \\ \alpha_2 &= 4 \frac{\tau_k}{\tau_1} (1 - \xi/l_2)^2 \left(1 + \frac{l_2}{\xi} \frac{10\nu + 14}{9(1 - \nu)} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} + \frac{4\tau_2(1 - 2\nu) + 3\tau_1(1 + \nu)}{2\tau_k(7 - 5\nu)(1 - \xi/l_2)\xi/l_2} \right) \right), \\ \alpha_3 &= \frac{4}{81} \frac{4\tau_2(1 - 2\nu) + 3\tau_1(1 + \nu)}{\tau_2(1 - 2\nu)} \frac{\tau_k}{\tau_1} (1 - \xi/l_2)^2 \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2[(11 + 15\nu)/(8\tau_2(1 - 2\nu) + 6\tau_1(1 + \nu))](1 - \xi/l_2)(\xi/l_2) + (\tau_2/\tau_k)}{2(1 - \xi/l_2)(\xi/l_2)^2} + \\ &\quad + \left(1 - \frac{\xi}{l_2} - \frac{l_2}{2\tau_k\theta} \right) \ln \left(1 - \frac{\xi}{l_2} - \frac{l_2}{2\tau_k\theta} \right) + \frac{\tau_2/\tau_k}{2(1 - \xi/l_2 + l_2/2\tau_k\theta)(\xi/l_2)}. \end{aligned}$$

Залежності для визначення коефіцієнтів всихання $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ мають вигляд [10, 155]. Значення β_1 у вологій зоні є сталим та розраховується [155] для $U = 0,25 \div 0,3$ і $t = 20$ °C залежно від породи деревини.

Проведення чисельного експерименту для дослідження в'язкопружної поведінки деревної пластини у процесі конвективного сушіння за вище отриманими математичними моделями вибрано деревину сосну з базовою густиною $\rho_0 = 450$ кг/м³. Параметри агента сушіння були такими: початкове значення вологовмісту $u_0 = 0,4$ кг/кг; початкова температура $T_0 = 20$ °C; температура середовища $t_c = 70$ °C; відносна вологість $\varphi_0 = 60\%$; швидкість руху агента сушіння $v = 2$ м/с.

На рис. 5.1-5.3 наведені графічні залежності напружень σ за товщиною деревної пластини залежно від різних значень межі випаровування вологи ξ_* для різних значень часу сушіння. Рис. 5.4 характеризує зміну напружень у процесі сушіння деревної пластини на границі випаровування для різних значень вологості. На рис. 5.5 показано зміну деформації ε на границі фазового переходу для різних значень часу сушіння. Рис. 5.6 характеризує зміну відносних деформацій у деревній пластині для різних моментів часу сушіння. На рис. 5.7-5.10 наведені графічні залежності зміни напружень у деревній пластині для різних значень часу сушіння, початкової вологості та різних режимних параметрів сушіння.

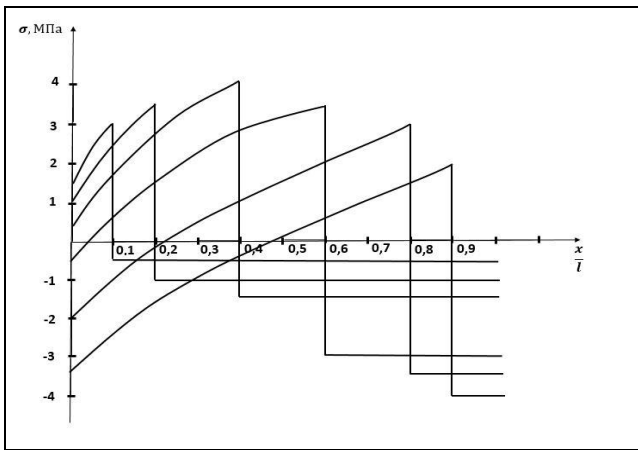


Рис. 5.1 Зміна напружень σ за товщиною деревної пластини для різних значень ξ_*

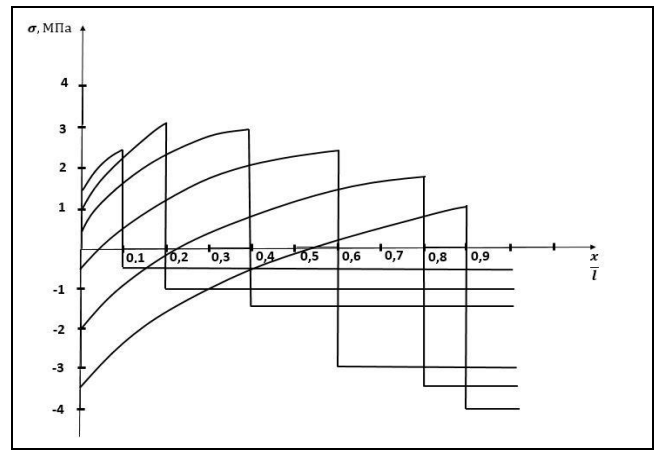


Рис. 5.2 Зміна напружень σ за товщиною деревної пластини для різних значень ξ_*

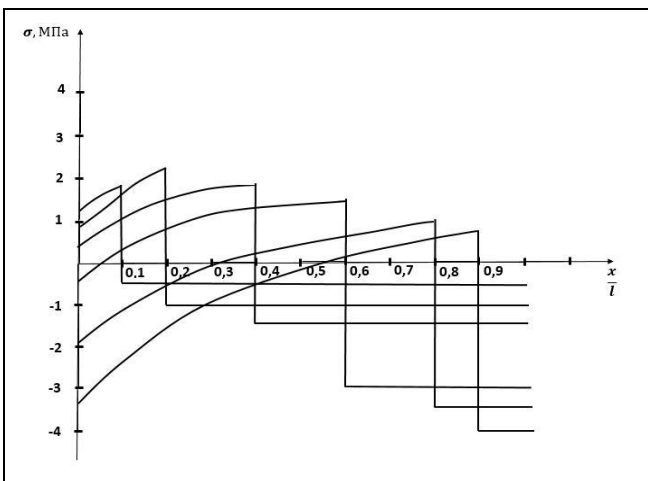


Рис. 5.3 Зміна напружень σ за товщиною деревної пластини для різних значень ξ_*

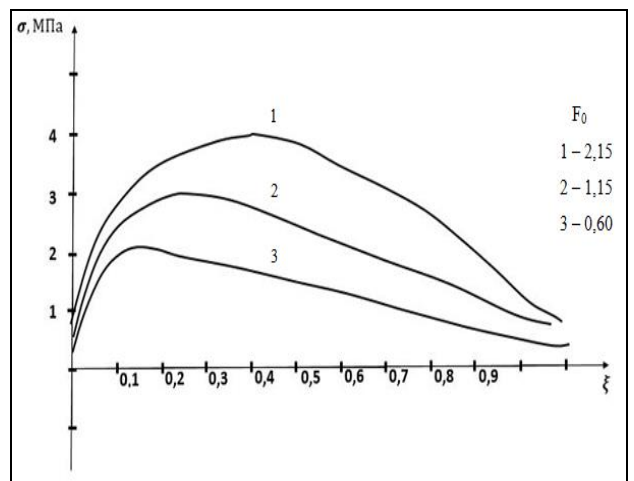


Рис. 5.4 Зміна напружень σ у деревній пластині для різних значень часу сушіння

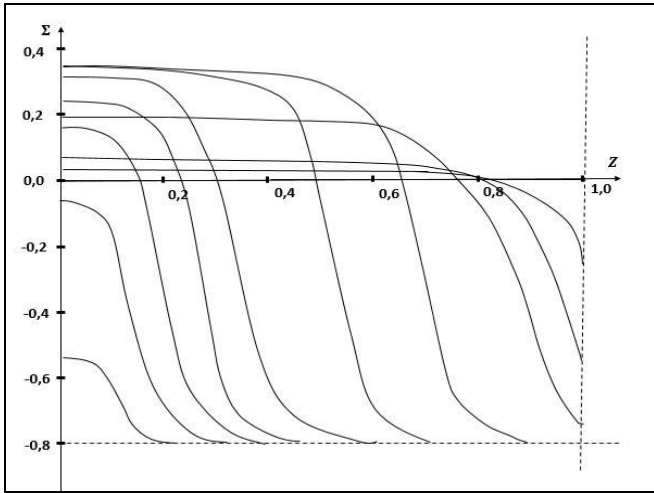


Рис. 5.5 Зміна деформації ϵ на границі фазового переходу у деревній пластині для різних значень часу сушіння

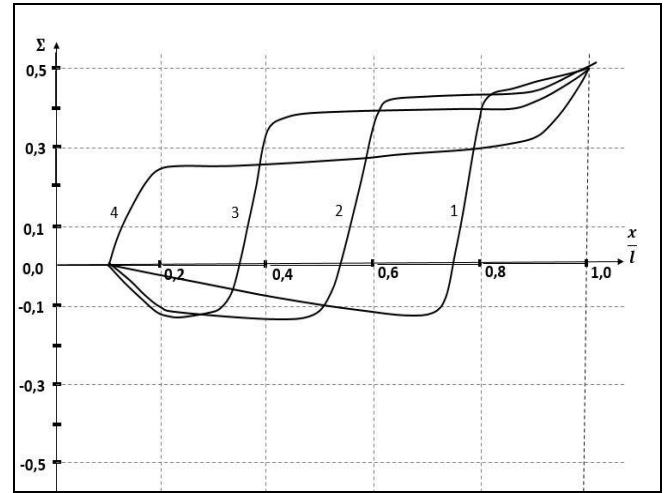


Рис. 5.6 Зміна деформації ϵ у деревній пластині для різних моментів часу сушіння

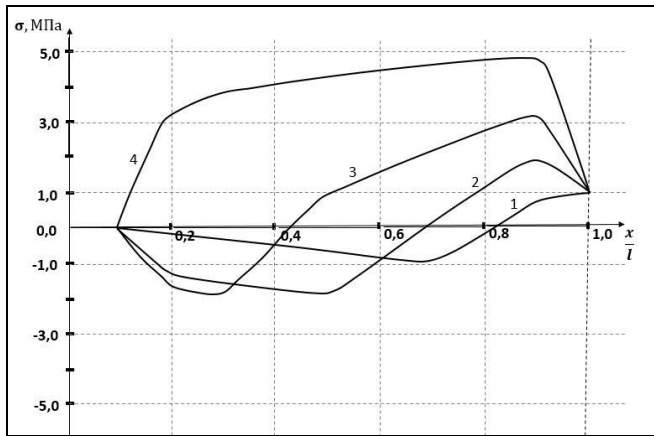


Рис. 5.7 Зміна напружень σ у деревній пластині для різних моментів часу сушіння

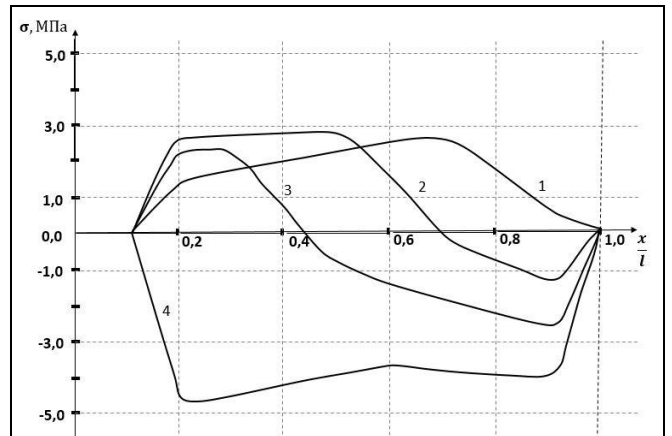


Рис. 5.8 Зміна напружень σ у деревній пластині для різних моментів часу сушіння

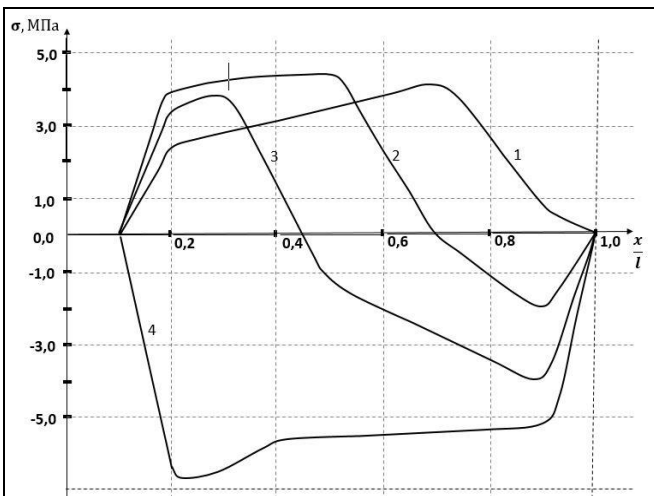


Рис. 5.9 Зміна напружень σ у деревній пластині для різних моментів часу сушіння

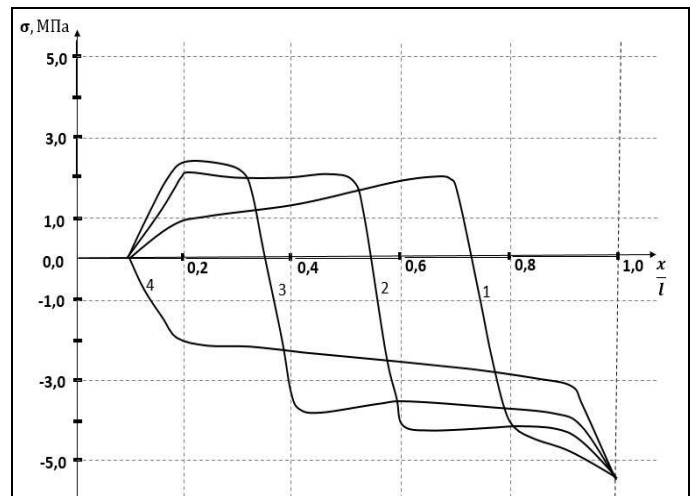


Рис. 5.10 Зміна напружень σ у деревній пластині для різних моментів часу сушіння

5.3. Аналіз впливу тепломасоперенесення на напружено-деформівний стан у деревній пластині

У процесі конвективного сушіння деревини супроводжується деформування матеріалу. Це зумовлюється залежністю зміни об'єму деревини ввід процесів тепломасоперенесення. У цьому підпункті наведені результати впливу зв'язку процесів тепломасоперенесення на напружено-деформівний стан деревини у процесі сушіння. Здійснено аналіз впливу комплексу теплофізичних і механічних характеристик матеріалу на розподіл напружень у пружній деревній пластині.

Розглянемо процес тепломасоперенесення у нескінченій плоскопаралельній пластині. Нехай вісь X напрямлена перпендикулярно поверхням пластини розміром l а початок координат знаходиться посередині між поверхнями. Початкова температура пластини дорівнює $T_0(x)$, а вологості $U_0(x)$. У цьому випадку рівняння тепломасоперенесення, граничні і початкові умови запишуться у вигляді:

$$\partial T(x, \tau) / \partial \tau = a \cdot \partial^2 T(x, \tau) / \partial x^2 + (\varepsilon \nu / c) \cdot \partial U(x, \tau) / \partial \tau; \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \partial U(x, \tau) / \partial \tau &= \alpha_m \cdot \partial^2 U(x, \tau) / \partial x^2 + \alpha_m \delta \cdot \partial^2 T(x, \tau) / \partial x^2; \\ -\lambda \cdot \partial T / \partial x |_{x=R} + \alpha (T_c - T |_{x=R}) - (1 - \varepsilon) \rho \beta \gamma (U |_{x=R} - U_p) &= 0; \\ \alpha_m \cdot \partial U / \partial x |_{x=R} + \alpha_m \delta \cdot \partial T / \partial x |_{x=R} + \beta (U |_{x=R} - U_p) &= 0; \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\partial T / \partial x |_{x=0} = 0; \partial U / \partial x |_{x=0} = 0; T(0, x) = T_0(x); U(0, x) = U_0(x),$$

де T – температура матеріалу ($^{\circ}\text{C}$); α – коефіцієнт температуропроводності ($\text{м}^2/\text{год}$); ε – критерій фазового переходу; ν – питома теплота фазового перетворення ($\text{ккал}/\text{кг}$); x – координата; c – питома теплоємність ($\text{Дж}/\text{кг град}$); U – вологовміст матеріалу ($\text{кг}/\text{кг}$); τ – час, (год); α_m – коефіцієнт вологопровідності ($\text{м}^2/\text{год}$); δ – термоградієнтний коефіцієнт ($1/\text{град}$); λ – коефіцієнт теплопровідності ($\text{Вт}/\text{м град}$); a – коефіцієнт теплообміну ($\text{Вт}/\text{м}^2 \text{град}$); β – коефіцієнт вологообміну ($\text{м}/\text{год}$); γ – густина сухої частини ($\text{кг}/\text{м}^3$); U_p – рівноважний вологовміст ($\text{кг}/\text{кг}$); T_c – температура середовища ($^{\circ}\text{C}$); U_0 – початковий вологовміст ($\text{кг}/\text{кг}$); T_0 – початкова температура ($^{\circ}\text{C}$).

Згідно [65, 69], аналітичний розв'язок крайової задачі (5.24)-(5.25) можна представити у вигляді:

$$\frac{(T(x, \tau) - T_0)}{(T_c - T_0)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n2} \cos \gamma_1 \mu_k \cdot x/R - C_{n1} \cos \gamma_2 \mu_k \cdot x/R) \cdot \exp(-\mu_k^2 Fo); \quad (5.26)$$

$$\frac{(U_0 - U(x, \tau))}{(U_0 - U_p)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{n1}^* \cdot (1 - \gamma_2^2) \cos \gamma_2 \mu_k \cdot \frac{x}{R} - C_{n2}^* \cdot (1 - \gamma_1^2) \cos \gamma_1 \mu_k \cdot \frac{x}{R} \right) \cdot e^{(-\mu_k^2 Fo)}; \mu_k = m, n,$$

де $C_{nj} = f(Fe, Lu, Ko, K_1, Bi_q, Bi_m)$, $\gamma_j^2 = f(Fe, Lu)$, ($j = \overline{1, 2}$) – функціональні залежності відповідних критеріїв: $Fe = \varepsilon \rho \delta / c$ – критерій Федорова; $Lu = \alpha_m / \alpha$ – критерій інерційності; $Ko = \frac{\rho(U_0 - U_p)}{c(T_c - T_0)}$ – критерій Коссовича; $K_1 = \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \cdot Lu Bi_q / Bi_m$ – комплексний критерій; $Bi_m = R \cdot \beta / \alpha_m$ – вологообмінний; $Bi_q = R \cdot a / \lambda$ – теплообмінний критерій Біо; μ_n – корені характеристичних рівнянь $tg \mu_m = \mu_m / Bi_m$, $tg \mu_n = \mu_n / Bi_q$.

Для розрахунку плоского напруженого стану для дослідження впливу зв'язаності дифузії тепла і вологи на напружено-деформівний стан деревної пластини скористаємося співвідношеннями [102, 109]:

$$\varepsilon_x = (1/E) \cdot (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha^* (T - T_0) + \beta^* (U - U_0); \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_y = (1/E) \cdot (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha^* (T - T_0) + \beta^* (U - U_0); \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy},$$

де E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона, α^* , β^* – коефіцієнт лінійного і вологісного всихання.

Осереднюючи ці рівняння за товщиною пластини і приймаючи до уваги, що рівнодіючі напружень дорівнюють нулеві, для випадку симетричної задачі, компоненти напружень визначаються формулами:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E \alpha^*}{1 - \nu} (\bar{T} - T) + \frac{E \beta^*}{1 - \nu} (\bar{U} - U); \tau_{xy} = 0, \quad (5.28)$$

де $\bar{T}(\tau)$, $\bar{U}(\tau)$ – середні за товщиною значення температури і вологості.

Для проведення чисельного аналізу впливу зв'язку процесів дифузії тепла і вологи на напружено-деформівний стан деревної пластини, вільної від зовнішніх фізичних навантажень, використовувалися наступні дані. Деревну пластину півтовщиною $R=0,01$ м. породи сосни, густиною $\rho = 581$ кг/м³, початковими значеннями

температури $T_0=20$ ($^{\circ}\text{C}$) і волого вмісту $U_0=0,4$ кг/кг прогрівали для значень температури середовища $T_c=70$ ($^{\circ}\text{C}$) і відносної вологості $\varphi=50\%$. Теплофізичні і механічні характеристики приймалися такими: $\alpha = 1,5518 \cdot 10^{17}$ ($\text{m}^2 / \text{ä} \hat{\text{a}} \ddot{\text{a}}$); $0 \leq x \leq 1$;
 $c = 2697,2$ ($\text{Ä} \alpha / \hat{e} \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\alpha} \delta \hat{\alpha} \ddot{\alpha}$); $\varepsilon = 0,5$, $\beta = 6,2831$ ($\hat{i} / \tilde{\alpha} \hat{i} \ddot{\alpha}$). $\lambda = 0,2999$ ($\hat{A} \delta / \hat{i} \cdot \tilde{\alpha} \delta \hat{\alpha} \ddot{\alpha}$);
 $\tau = 1$ ($\tilde{\alpha} \hat{i} \ddot{\alpha}$); $\delta = 0,0387$ ($1 / \tilde{\alpha} \delta \hat{\alpha} \ddot{\alpha}$); $\alpha_m = 3,0894 \cdot 10^{10}$ ($\text{m}^2 / \tilde{\alpha} \hat{i} \ddot{\alpha}$); $a = 21,6128$ ($\hat{A} \delta / \hat{i}^2 \cdot \tilde{\alpha} \delta \hat{\alpha} \ddot{\alpha}$).

Рівноважний вологовміст розраховувався за формулою [9, 10]

$$U_p = W_p / (100 - W_p), W_p = 10,6^{\circ} (0,0327 - 0,00015T_0) \cdot 100.$$

З підвищенням температури середовища у деревній пластині виникає та зростає градієнт вологовмісту і температури. Матеріал змінює свою форму за рахунок зменшення у ньому вологовмісту і виникнення деформацій. На графіках (рис. 5.11, 5.12) показано розподіл напружень у часі для різних значень величини $\alpha \cdot \beta^* / \alpha^*$.

Розподіл напружень у часі, коли величини $\beta \cdot \beta^* / \alpha^*$ приймають різні значення, наведені на рис. 5.13-5.15. Аналіз результатів свідчить про те, що зміна величини $\alpha \cdot \beta^* / \alpha^*$ змінює кількісний характер розподілу напружень. У той же час, зростання величини $\beta \cdot \beta^* / \alpha^*$ міняє не тільки кількісну, але і якісну картину розподілу напружень у деревній пластині. Для малих значень величини, що відповідає меншим швидкостям дифузії води порівняно зі швидкістю дифузії тепла, якісний характер зміни напружень не спостерігається. Відносно швидке зростання тепла практично підтримує температуру пластини постійною у процесі дифузії води з її поверхні.

Графічні залежності на рис. 5.16-5.18 характеризують вплив різних значень комплексу $Lu \cdot \beta^* / \alpha^*$ на розподіл напружень. Аналіз залежностей свідчить про те, що зв'язаність перенесення тепла і води суттєво змінює не тільки кількісний характер розподілу напружень, але й якісний

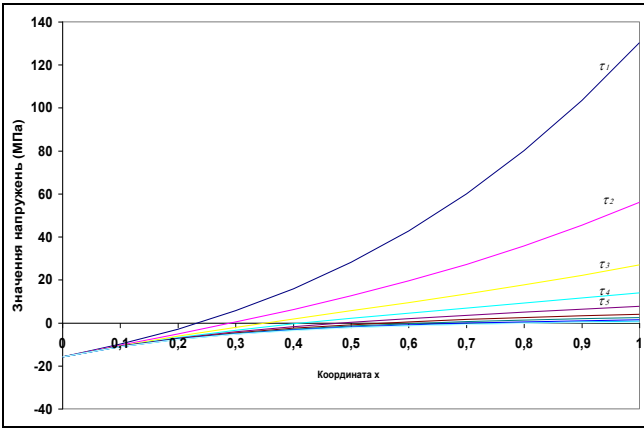


Рис. 5.11 Зміна напружень для $\alpha \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,001$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

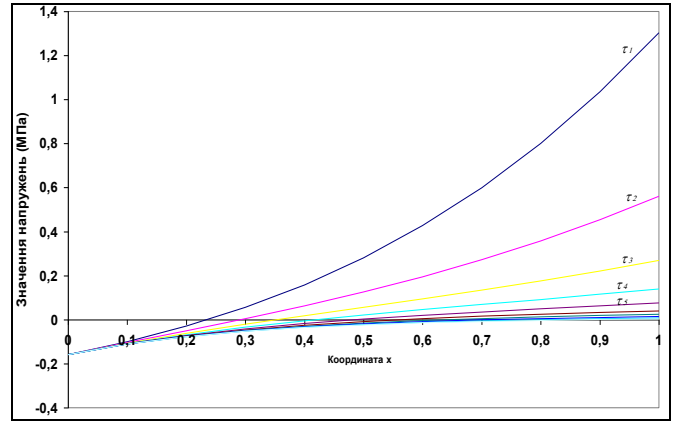


Рис. 5.12 Зміна напружень для $\alpha \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,1$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

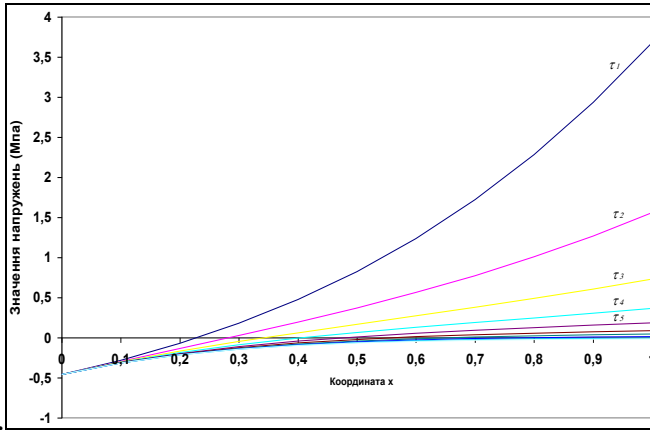


Рис. 5.13 Зміна напружень для $\beta \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,001$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

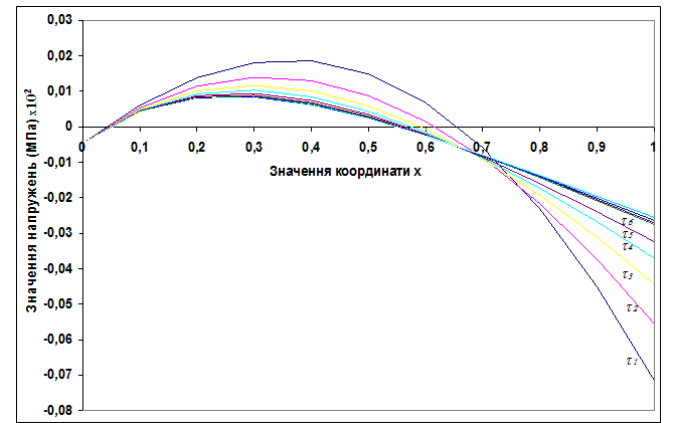


Рис. 5.14 Зміна напружень для $\beta \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,1$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

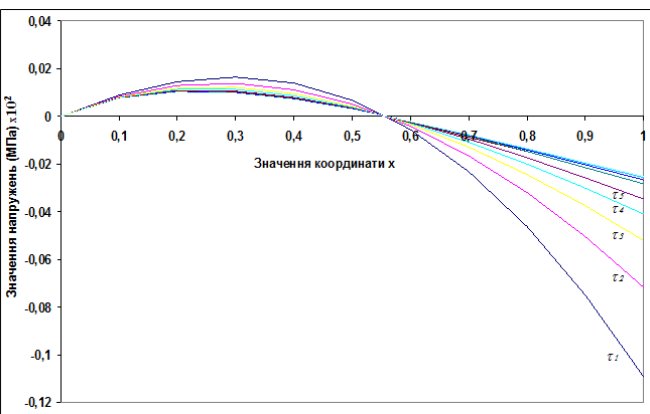


Рис. 5.15 Зміна напружень для $\beta \cdot \beta^* / \alpha^* = 100$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

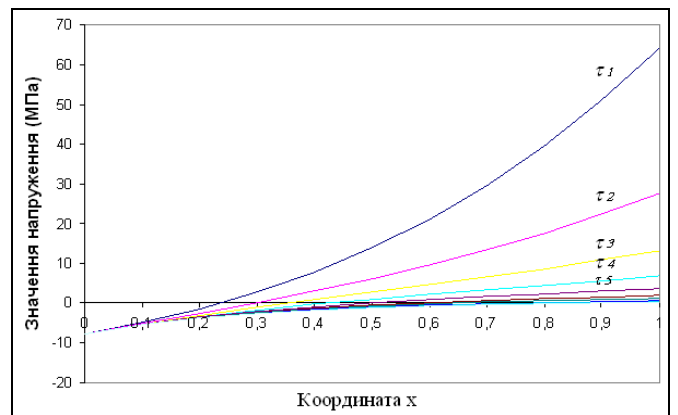


Рис. 5.16 Зміна напружень для $Lu \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,001$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

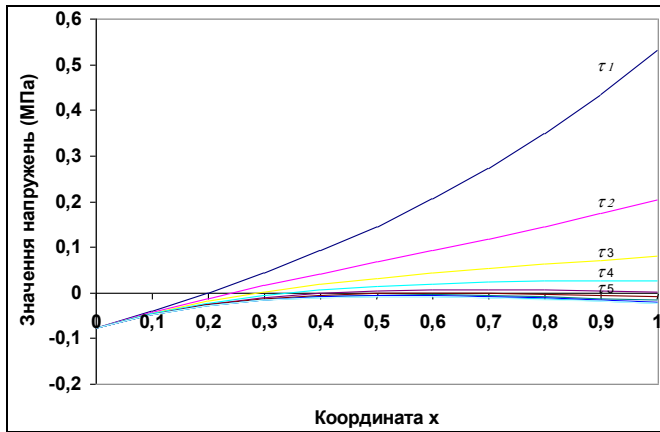


Рис. 5.17 Зміна напружень для $Lu \cdot \beta^* / \alpha^* = 0,1$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

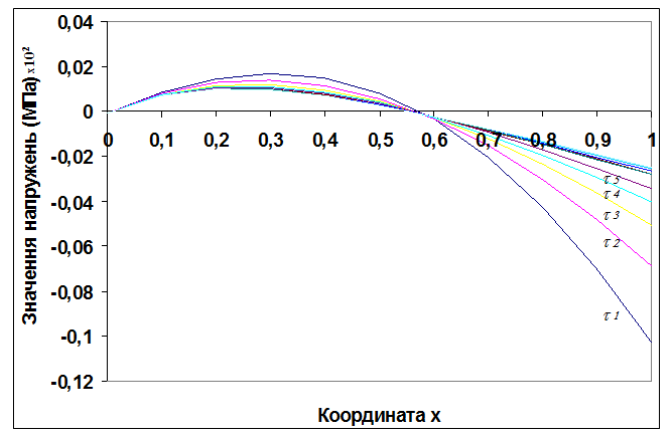


Рис. 5.18 Зміна напружень для $Lu \cdot \beta^* / \alpha^* = 100$ у часі для різних координат x ($x \in [0,1]$)

Таким чином, у рамках плоского напружено-деформівного стану досліджено вплив взаємозв'язку процесів дифузії тепла і вологи на розподіл напружень у процесі нагрівання деревної пластини. На основі чисельного аналізу виявлені характерні особливості різних інтенсивностей дифузії тепла і вологи на розподіл напружень за товщиною пластини.

Висновки до розділу 5

1. Побудована нова математична модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи.

2. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування у середовищах з врахуванням руху зони випаровування, яке дає змогу визначити зміну температури, вологовмісту та компонент напружень у деревині під час сушіння. Збіжність методу показано шляхом аналізу відносної похибки, а адекватність отриманих результатів – шляхом зіставлення з відомими експериментальними даними. Розроблені математичні моделі, алгоритмічне та програмне забезпечення використані для створення систем автоматизованого розрахунку температури, вологовмісту та компонентів напружень під час сушіння

капілярно-пористих матеріалів з урахуванням зони випаровування вологи та технологічних параметрів агента сушіння.

3. У результаті обчислювальних експериментів, проведених з використанням розроблених прикладних програмних засобів встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язкопружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу.

4. Виявлено задовільну узгодженість результатів чисельного моделювання з відомими експериментальними дослідженнями для часткових випадків.

5. Отримано узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів з врахуванням фазового переходу на границі випаровування вологи.

ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено актуальне наукове завдання побудови математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язкопружного деформування при конвективному сушінні капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, з врахуванням руху зони випаровування для нестационарних режимів агента сушіння та розроблення ефективних аналітико-числових методів їх реалізації, що має важливе значення для обґрунтування раціональних режимів та підвищення ефективності технологічного процесу за умови забезпечення необхідної якості продукції.

1. Побудовано нелінійну математичну модель неізотермічного вологоперенесення під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомих границь зони випаровування вологи, яка дозволяє отримати аналітичні залежності для визначення температури, вологості, густини пари, тиску пари у деревній пластині у довільний момент часу сушіння залежно від координати фазового переходу, теплофізичних характеристик матеріалу та параметрів агента сушіння.

2. Дістав подальший розвиток аналітично-числовий метод для визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Отримано рівняння для визначення рухомої межі розділу висушеної та вологої зон деревної пластини. Встановлено розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу. Коефіцієнти отриманого рівняння є функціями координати фазового переходу, питомої температури пароутворення, коефіцієнтів тепло- та масообміну, коефіцієнтів провідності та динамічної в'язкості газу, параметрів режиму сушіння, відносних насиченостей вологої поверхні шару і сушильного середовища та градієнта температури, середньої температури матеріалу. Встановлені залежності для визначення повного часу сушіння з урахуванням рухомої границі фазового переходу.

3. Сформульована двовимірною математичною моделлю теплоперенесення для нестационарних режимів конвективного сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням рухомих меж зони випаровування. На основі розробленого аналітико-

числового методу реалізації даної моделі отримані формули для визначення температури деревного бруса у довільний момент часу сушіння залежно від координати рухомої межі фазового переходу та температури на межі випаровування.

4. Адаптовано рівняння теплового балансу з урахуванням рухомої межі фазового переходу. Це дозволило розробити аналітично-числовий метод для розрахунку теплоперенесення в ортотропній пластині з рухомою границею фазових переходів та отримати рівняння для визначення рухомих меж фазового переходу у прямокутній ортотропній. Побудовано алгоритм для визначення рухомої межі зони випаровування у деревному брусі та досліджено закономірності її зміни залежно від ортотропних теплофізичних характеристик матеріалу, температури і відносної вологості агента сушіння.

5. Побудовано математичну модель в'язкопружного деформування капілярно-пористої пластини в умовах зміни вологоперенесення з врахуванням зони випаровування вологи. Встановлено закономірності розвитку компонент напружень у деревині під час сушіння залежно від зміни температури, вологовмісту, зони випаровування вологи та технологічних параметрів агента сушіння. Показано немонотонність характеру розтягуючих напружень у часі для різних значень зон випаровування та зміщення їхнього максимуму у середину пластини зі збільшенням тривалості сушіння. Виявлено наявність стискаючих напружень у висушеній зоні пластини для початкових стадій процесу сушіння.

6. У результаті обчислювальних експериментів, проведених з використанням розроблених прикладних програмних засобів, встановлено закономірності впливу анізотропії теплофізичних та механічних характеристик деревини, її початкової вологості, геометричних параметрів і характеристик агента сушіння на зміну температурно-вологісного та в'язкопружного стану деревини під час конвективного сушіння з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу. Досліджено вплив термодифузії початкових значень температури і вологості, теплофізичних характеристик матеріалу та режимних параметрів агента сушіння на температуру фазових переходів. Встановлено закономірності протікання дифузійного і конвективного тепломасоперенесення для різних періодів процесу сушіння

залежно від зони випаровування вологи. Виявлено задовільну узгодженість результатів чисельного моделювання з відомими експериментальними дослідженнями для часткових випадків.

7. Отримано узагальнення гіпотези збереження незворотних деформацій на випадок в'язкопружного деформування капілярно-пористих матеріалів з врахуванням рухомої границі випаровування вологи.

8. Результати дисертаційної роботи використано в ТзОВ «Суховільський ДОК» (Городоцький р-н, Львівська обл.) для аналізу температури, вологовмісту та компонентів в'язкопружного стану деревини у процесі сушіння з урахуванням рухомих меж зони випаровування вологи, що дає можливість раціонального вибору температурних режимів конвективного сушіння та забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акулич А.В. Моделирование тепломасопереноса в капиллярно-пористых материалах / А.В. Акулич, Н.Н. Гринчик // Инженерно-физический журнал. – 1998. – Т. 71, №2. – С. 225-233.
2. Алексеев В. М. Численное моделирование тепломассопереноса при сушке древесин кондуктивным способом в условиях пониженного давления / В.М. Алексеев, С.В. Кузнецов // Известия Томского политехнического университета. – Томск, 2001. – Т. 3, № 4. – С. 31-34.
3. Алямовский А.А. SolidWorks Simulation. Как решать практические задачи. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 448 с.
4. Арсеньев Д.Г. Эффективные упругие характеристики анизотропной модели пористого биологического материала, насыщенного жидкостью [Текст] / Д.Г. Арсеньев, А.В. Зинковский, Л.Б. Маслов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2008. – № 3 (59). – С. 230–236.
5. Бабенко К.И. Основы численного анализа / Бабенко К.И. – М.: Энергия, 1986. – 744 с.
6. Бородин С.Л. Численные методы решения задачи Стефана / С.Л. Бородин // Вестник Томского государственного университета, 2015. – Т. 1, № 3(3). – С. 164-165.
7. Белянкин Ф.П. Деформативность и сопротивляемость древесины / Ф.П. Белянкин, В.Ф. Яценко. – К.: АН УССР, 1957. – 199 с.
8. Бикулов Д.А. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере / Д.А. Бикулов, Д.С. Сенин, Д.С. Демин, А.В. Дмитриев, Н.Е. Грачев // Вычислительные методы и программирование, 2012. – Т. 13. – С. 13-19.
9. Білей П.В. Тепломасообмінні процеси деревообробки / П.В. Білей, І.В. Петришак. – Львів: ЗУКЦ, 2013. – 376 с.
10. Богданов В.С. Справочник по сушке древесины / В.С. Богданов, В.А. Козлов, В.Б. Кунтуш. – М: Лесн. пром-сть, 1990. – 304 с.
11. Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 291 с.

12. Борецька І.Б. Математичне моделювання впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у процесі сушіння / І.Б. Борецька // Науковий часопис «Технічні вісті». – Львів, 2015. – Вип. 2015/1(42), 2(43). – С. 60-67.
13. Боровиков А.Н. Справочник по древесине / А.Н. Боровиков, Б.Н. Уголев. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 296 с.
14. Булавацький В.М. Математичне моделювання релаксаційних процесів тепломасоперенесення : автореф. дис. д-ра техн. наук : 01.05.02 / НАН України, Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова. – К., 2003. – 30 с.
15. Бунь Р. Просторове моделювання емісії парникових газів від стаціонарних джерел / Р. Бунь, Н. Чарковська, О. Данило та ін. // Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів : ПП Сорока Т. Б., 2016. – 479 с.
16. Бурак Я.Й. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів / Я.Й. Бурак, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха. – Київ: Наук. Думка, 2006. – 272 с.
17. Бурак Я.Й. Математична модель розрахунку напружено-деформівного стану в процесі осушення пористого шару / Я.Й. Бурак, Б.І. Гайвась // Машинознавство. – 2011. – № 3-4 (165-166). – С. 3-8.
18. Бурак Я.Й. Побудова математичної моделі конвективно-теплового осушення пористих тіл в сушильних установках / Я.Й. Бурак, Б.І. Гайвась // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. / Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – К., 2010. – Вип. 56. – С. 145-156.
19. Буряк Я.Й. Вплив режиму сушіння на процеси тепломасоперенесення в пористому шарі / Я.Й. Буряк, Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // Системний аналіз та інформаційні технології SAIT-2011. – Київ, 2011. – С. 62-63.
20. Бурак Я.Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Й. Бурак, Є.Я. Чапля, Т. Нагірний та інші. Львів : СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
21. Вабищевич П.Н. Численное решение сопряженных задач тепло и массопереноса с учетом фазового перехода / П.Н. Вабищевич, О.П. Илиев // Дифференциальные уравнения, 1987. – Vol. 23, no. 7. – P. 1127-1132.
22. Васильев В.И. Математическое моделирование температурного режима грунтов фундаментов в условиях многолетнемерзлых пород / В.И. Васильев,

М.В. Васильєва, С.П. Степанов и др. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки», 2017. – no. 1 (70). – P. 142-159.

23. Васильев А.Н. Нейронные сети как новый универсальный подход к численному решению задач математической физики / А.Н. Васильев, Д.А. Тархов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение, 2004. – № 7-8. – С. 111-118.

24. Веселовский В.Б. Решение связанной задачи термоупругости для растущего стержня при наличии фазового перехода / В.Б. Веселовский, А.В. Сясов // Труды ин-та прикладной математики и механики НАН Украины, 2001. – Т. 6, №1. – С. 20-25.

25. Вінтонів І.С. Деревинознавство : навчальний посібник / І.С. Вінтонів, І.М. Сопушинський, А. Тайшінгер. – Львів: ТзОВ “Апріорі”, 2007. – 312 с.

26. Гавриш В.І. Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах : монографія / В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк. – Львів: В-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2012. – 176 с.

27. Гороховский А.Г. Повышение эффективности управления процессом сушки пиломатериалов / А.Г. Гороховский – Екатеринбург: УГЛТУ, 2008. – 128 с.

28. Гайвась Б.І. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл / Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // Комп'ютерні технології друкарства: зб. наук. праць УАД. – Львів, 2011. – №26. – С. 231-240.

29. Гайвась Б.І. Математичне моделювання конвективного сушіння матеріалів з урахуванням механотермодифузійних процесів / Гайвась Б.І. // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології: наук. зб. / ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2010. – Вип. 12. – С.9-37.

30. Гайвась Б.І. Математичне моделювання процесу сушіння пористих тіл з врахуванням кінетики фазових переходів та деформацій: автореф. дис. д-ра техн. наук / Б.І. Гайвась. – Львів, 2012. – 40с.

31. Гайвась Б.І. Осушення пористих тіл в сушильних камерах при м'яких режимах. / Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів, 2011. – Вип. 21.9. – С. 317-324.

32. Гайвась Б.І. Основні підходи в математичному моделюванні процесів сушіння капілярно-пористих та дисперсних матеріалів / Б.І. Гайвась // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 25. – С. 27-50.
33. Гірник Л.М. Математичне моделювання процесів конвективного сушіння / Л.М. Гірник, В.М. Гербей, З.Ю. Мазяк, В.О. Сафаров та ін. – К.: Будівельник, 1993. – 248 с.
34. Грингберг Г.А. О движении поверхности раздела фаз в задачах Стефановского тепла / Г.А. Грингберг, О.М. Чекмарёв // Журнал техн. физики, 1970. – №10. – С. 2025-2031.
35. Горбачева Г.А. Деформационные превращения древесины при изменении нагрузки, влажности и температуры: дис. канд. техн. наук: 05.21.05 / Горбачева Г.А. – Москва, 2004. – 197 с.
36. Гринчик Н.Н. Процессы переноса в пористых средах, электролитах и мембранах / Гринчик Н.Н. Минск : Институт тепло- и массообмена АН Беларуси, 1991. – 251 с.
37. Губін О.І. Математичне моделювання процесів теплопровідності з урахуванням релаксації теплового потоку / О.І. Губін // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Вид. ДНУ, 2008. – С. 58-67.
38. Гусев Е.В. Исследование деформационных свойств листовых материалов в процессе сушки при силовой нагрузке / Е.В. Гусев, А.Л. Павлов, С. В. Федосов, Д.В. Кирилов // Межвуз. сб. науч. тр. “Процессы в дисперсных средах”. – Иваново, 2002. – С. 68-71.
39. Данилюк И.И. О задаче Стефана / И.И. Данилюк // Успехи математических наук, 1985. – Т. 40, № 5. – С. 133-185.
40. Дейнека В.С. Идентификация теплофизических характеристик пластин / Дейнека В.С., Вещунова Н.А. (Институт кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009)
41. Дивак Т.М. Параметрична ідентифікація інтервального різницевого оператора на прикладі макромоделі розподілу вологості у листі гіпсокартону

в процесі його сушіння / Дивак Т.М. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія : міжнар. наук.-техн. журнал. – 2012. – Вип. 3. – С. 79-85.

42. Дияк І. Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіл з тонким включенням методом декомпозиції області / І. Дияк, А. Стягар, Я. Савула // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Вип. 57, №3. – С. 119-131.

43. Дмитрук В. Моделювання стаціонарних процесів конвективної дифузії у двофазних тілах періодичної структури за змішаних граничних умов / Дмитрук В. // Моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 59. – С. 161-170.

44. Дорняк О.Р. Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем лесного комплекса / Дорняк О.Р. // Межв. сборн. назн. тр. ВГЛТА. – Воронеж, 2001. – С. 132-139.

45. Дульнев Г.Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г.Н. Дульнев, В.Г. Парфенов, А.В. Сигалов. – М.: Высш. шк., 1990. – 207 с.

46. Журавчак Л.М. Математичне моделювання процесів поширення теплового та електромагнітного полів у неоднорідних середовищах методами приграничних елементів та скінченних різниць : автореф. дис. на здобут. вчен. ступ. докт. техн. наук: спец. 01.02.05 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Л.М. Журавчак. – Львів : Національний університет “Львівська політехніка”, 2007. – 40 с.

47. Загоруйко В.А. Определение влагосодержания гигроскопических грузов для их сохранной перевозки / В.А. Загоруйко, Ю.И. Кривошеев, А.Г. Слынько. – М.: Трансибир, 1988. – 496 с.

48. Загоруйко В.А. Теория единого потенциала массопереноса / В.А. Загоруйко, А.В. Соколовская // ДАН СССР. – 1986. – 28, №1. – С. 154-158.

49. Зенкевич О., Иорган К. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Иорган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

50. Жихарева В.В. Аппроксимация решений нестационарного уравнения теплопроводности методом вероятностных непрерывных асинхронных клеточных автоматов для одномерного случая / В.В. Жихарева, Л.М. Шумиляк // Компьютерные исследования и моделирования, 2012. – Т. 4, № 2. – С. 293-301.

51. Ильясов У.Р. Математическое моделирование сушки влажного пористого материала в диффузионном приближении / У.Р. Ильясов, Д.Е. Игошин // Теплофизика и аэромеханика, 2008. – Т. 15, № 4. – С. 689-697.
52. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов // М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
53. Кассиров Г.М., Применение ВЧ разрядов при сушке древесины / Г.М. Кассиров, В.В. Лопатин, Ф.Г. Секисов, О.В. Ли Хунда // Становление и развитие научных исследований в высшей школе: Сб. трудов Междунар. науч. конф. – Томск, 2009. – Т. 2. – С. 264-269.
54. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
55. Коляно Ю.М. Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве / Ю.М. Коляно, В.О. Волос, Е.Г. Иваник, Е.Г. Гаврыш // Инж.-физ. журнал. – 1994. – 66, №2. – С. 226-234.
56. Костробій П. Узагальнене рівняння дифузії у дробових похідних у статистиці Рені / П. Костробій, Б. Маркович, О. Візнович, М. Токарчук // Фіз.-матем. модел. інформ. техн. – 2016. – Вип. 23. – С. 108-118.
57. Кравчук А.С. Механика полимерных и композитных материалов / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Урижумцев. – М., 1985. – 319 с.
58. Крылов Д.А. Математическое моделирование распределения температурных полей / Д.А. Крылов, Н.И. Сиднев, А.А. Федотов // Математическое моделирование, 2013. – Т. 25, № 7. – С. 3-27.
59. Крылов Д.А. Подходы к решению трехмерных задач теплопроводности с учётом фазовых переходов в дисперсных средах / Д.А. Крылов // Молодежный научно-технический вестник, 2013. – № 3. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/562218.html>.
60. Кречетов И.В. Сушка древесины / Кречетов И.В. – М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 432с.

61. Кудін В.І. Схеми декомпозиції великорозмірних матриць спеціальної структури при моделювання фільтрації двофазної рідини / В.І. Кудін, Д.А. Ключин // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2003. – 2(89). – С. 55-65.
62. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU / А.Л. Куперштох // Вычислительные методы и программирование, 2012. – Т. 13. – С. 130-138.
63. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов / А.Л. Куперштох // Вычислительные методы и программирование, 2012. – Т. 13. – С.384-390.
64. Крылов Д.А. Математическое моделирование температурных полей с учётом фазовых переходов в криолитозоне / Д.А. Крылов // Электронный журнал, МГТУ им. Баумана // <http://technomaq.edu.ru/doc/354740.html>.
65. Куц П.С. Кинетика процесса конвективной сушки тонких материалов / П.С. Куц, В.Я. Шкляр // Пром. теплотехника. – 1989. – Т. 2. – №5. – С 55-59.
66. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: в 10-ти т. Т. VII: Теория упругости : учеб. пособие / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
67. Луцик П.П. Основные уравнения кинетики сушки деформируемого твердого тела / П.П. Луцик // Пром. теплотехника. – 1987. – Т. 9, №6. – С. 56-59.
68. Луцык Р.В. Напряженно-деформируемое состояние твердого тела в процессе сушки / Луцык Р.В. // Теоретические основы химической технологии. – 1988. – Т. 22, №1. – С. 21-28.
69. Лыков А.В. Тепломассообмен : справочник / Лыков А. В. – М. : Энергия, 1971. – 560 с.
70. Мазяк З.Ю. Математична модель процесу механічного видалення вологи з твердого пористого тіла / Мазяк З.Ю., Ханик Я.М., Ільків І.М. // Наук. вісн. УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 2002. – С. 67-72
71. Мандзій Б.А. Технологія аналітичного моделювання дискретно-неперервних стохастичних систем на основі блок-схем алгоритмів їх поведінки /

Б.А. Мандзій, Б.Ю. Волочій, Л.Д. Озірковський // Вісник НУ “Львівська політехніка”: Інформаційні системи та мережі. – 2008. – №621. – С. 171-181.

72. Мартинсон Л.К. Моделирование эволюции температурных полей в неоднородных средах / Л.К. Мартинсон, К.В. Морозов // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, №9. – С. 72-83.

73. Мартыненко О.Г. Тепло- и массоперенос в пористых средах / Мартыненко О.Г. // ИФЖ. – 1998. – Т. 71, № 1. – С. 5-18.

74. Марчук Г.И. Методы расщепления / Марчук Г.И. – М.: Наука, 1988. – 264 с.

75. Маслов Л.Б. Математическое моделирование колебаний пороупругих систем [Текст] : монография / Л.Б. Маслов. – Иваново : ПресСто, 2010. – 264 с.

76. Маслов Л.Б. Численный анализ вынужденных колебаний пороупругой модели лопатки газовой турбины [Текст] / Л.Б. Маслов, И.А. Белов // Теплоэнергетика. – 2010. – № 8. – С. 49–53.

77. Матвійчук Я.М. Математичне макромодельовання динамічних систем : Теорія і практика / Я.М. Матвійчук ; Львів. нац. ун-т. ім. І. Франка. – Львів: Вид. центр ЛНУ, 2000. – 214 с.

78. Мацевитый Ю.М. Математическая модель процесса теплообмена в испарителе контурной тепловой трубы / Ю.М. Мацевитый, В.А. Тарасова // Проблемы машиностроения. – 2002. – Т. 5, №3. – С. 21-25.

79. Мацевитый Ю.М. Математическая модель тепломассопереноса в капиллярном насосе контурной тепловой трубы / Ю.М. Мацевитый, Е.Н. Бут // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – Х.: НАКУ «ХАІ», 2002. – Вип. 33. – С. 260-270.

80. Миненков В.А. Моделирование напряжений и деформаций при конвективной сушке тонкой дисперсной пластины / В.А. Миненков, Д.В. Шевченко // Инженерно-физический журнал, 1998. – Т. 32, № 2. – С. 147-152.

81. Миненков В.А. Собственные напряжения, реология и структурообразование при сушке концентрированной дисперсной системы / В.А. Миненков // Инженерно-физический журнал, 1998. – Т. 71, № 3. – С. 417-423.

82. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості / Можаровський М.С. – К. : Вища школа. – 2002. – 312 с.
83. Мусакаев Н.Г. Численное исследование закономерностей движения фронта фазового перехода в многолетнемерзлых породах / Н.Г. Мусакаев, С.Н. Романюк, С.Л. Бородин // Известия вузов. Нефть и газ, 2011. – № 6. – С. 122-128.
84. Недопекин Ф.В. Информационная система расчета задач тепломассопереноса / Ф.В. Недопекин, В.В. Белоусов, В.И. Бондаренко, В.А. Кравец // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 16, № 9. – С. 8-15.
85. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Нигматулин Р.И. – М.: Наука, 1987. – 462 с.
86. Никитенко Н.И. Математическая модель и метод расчета тепломассопереноса, фазовых превращений и усадки в процессах сушки / Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сороковая Н.Н. // Доп. НАН України. – 2002. – № 9. – С. 81-89.
87. Никитенко Н.И. Теория сушки пористых тел с многокомпонентной жидкой фазой / Н.И. Никитенко, Ю.Ф. Снежкин, Н.Н. Сороковая // Доп. НАН України. – 2006. – № 4. – С. 72-82.
88. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса / Никитенко Н.И. – К. : Наукова думка, 1983. – 351 с.
89. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред / Николаевский В.Н. – М.: Недра, 1984. – 232 с.
90. Петров Н. Современные проблемы термодинамики / Н. Петров, Й. Бранков. – М.: Мир, 1986. – 245 с.
91. Поберейко Б.П. Дослідження процесів вологоперенесення всередині та на межі неруйнівної області деформування / Б.П. Поберейко, Я.І. Соколовський // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 2006. – Вип. 16.6. – С. 82-90.
92. Подстригач Я.С. Магнитотермоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я.И. Бурак, В.Ф. Кондрат. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с.

93. П'янило Я. Використання дробових похідних для аналізу нестационарного руху газу в трубопроводах за наявності компресорних станцій та відводів / Я. П'янило // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 122-132.
94. П'янило Я. Дослідження впливу теплофізичних параметрів на процес руху газу в трубопроводах / Я. П'янило, Г. П'янило // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 10. – С. 58-69.
95. Расев А.И. Сушка древесины : учебное пособие / А.И. Расев – 6-е изд. – М. : ГОУ ВПО МГУЛ, 2005. – 224 с.
96. Рыжов А.Ф. Математическая модель процесса нагрева и кинетики сушки влажных материалов / А.Ф. Рыжов // Математическое моделирование, 2004. – № 1(11).
97. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский. – М.: Телеком, 2006. – 383 с.
98. Рубцов Н.А. Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглощательной способности / Н.А. Рубцов, С.Д. Слепцов // Теплофизика и аэромеханика, 2010. – Т. 17, № 2
99. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Савула Я.Г. – Львів: Вид-во ЛНУ ім. Франка, 2004. – 222 с.
100. Сажин Б.С. Сушка в активних гидродинамических режимах / Б. С. Сажин, В.Б. Сажин, Е.В. Отрубянников, Л.М. Кочетов // ТОХТ, 2008. – Т. 42, № 6. – С. 638-653.
101. Самарский А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
102. Серговский П.С. Гидротермическая обработка и консервирование древесины / Серговский П.С. – М.: Лесн. пром-сть, 1981. – 304 с.
103. Скопецкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / Скопецкий В.В., Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г. – К.: Наукова думка, 2005. – 282 с.
104. Соколов О.С. Древесина как конструкционный материал / О.С. Соколов. – М.: Лесн. пром-сть, 1979. – 248с.

105. Соколовський Я.І. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька, О.В. Мокрицька, В.М. Шиманський, А.П. Здолбіцький // VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» (МОДС 2011). – Чернігів, 2011. – С. 88-89.

106. Соколовский Я.И. Автоматизация технологии моделирования и анализа деформационно-релаксационных и тепломассообменных технологий при сушке древесины / Я.И. Соколовский, О.В. Мокрицкая, И.Б. Борецкая // IV-я международная практическая технология «Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов)» СЭТТ-2011 – Москва, 20-23 сентября 2011. – С. 118-121.

107. Соколовський Я.І. Адаптивний інтелектуальний регулятор на основі неофазні моделі / Я.І. Соколовський, Є.В. Бодянський, О.А. Винокурова, О.В. Петрянич // 17-та Міжнародна конференція з автоматичного управління “Автоматика-2010”. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – С. 86.

108. Соколовський Я.І. Деформативність деревини й деревостружкових плит зі змінними потенціалами перенесення: дис. доктора тех. наук: 05.05.07 / Ярослав Іванович Соколовський // М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Національний лісотехнічний університет України. – Львів, 2001. – 372 с.

109. Соколовський Я.І. Аналіз впливу зв'язку перенесення тепла і вологи на напружено-деформівний стан у деревній пластині / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька, В.М. Дендюк // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 2010. – Вип. 20.2 – С. 309-314.

110. Соколовський Я.І. Взаємозв'язок деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих тілах / Я.І. Соколовський // Доповіді НАН України, сер. “Механіка”. – 1998. – № 9. – С. 76-80.

111. Соколовский Я.И. Взаимосвязь деформативно-релаксационных и тепломассообменных процессов при сушке капиллярно-пористых тел / Я.И. Соколовский // Прикладная механика. – 1988. – 34, № 9. – С. 100-107.

112. Соколовський Я.І. Застосування штучних нейронних мереж для чисельного моделювання тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.М. Крошний, І.Б. Борецька, І.Д. Капран // VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» (МОДС 2011). – Чернігів, 2011. – С. 92-93.

113. Соколовський Я.І. Інформаційні технології проектування та дослідження лісосушильних камер засобами SolidWorks API і COSMOSFloWorks / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька, П.І. Рожак // Національний університет біоресурсів і природокористування України. – Київ, 2013. – Вип. 185 частина 2. – С. 215-218.

114. Соколовський Я.І. Математична модель теплового перенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип.16. – С. 133-141.

115. Соколовський Я.І. Математичне моделювання впливу зовнішнього середовища на напружено-деформівний стан деревини у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, І.М. Крошний // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп’ютерні системи проектування. Теорія інформатики. – Львів, 2011. – №711 – С. 72-82.

116. Соколовський Я.І. Математичне моделювання двовимірного в’язкопружного стану деревини у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 7. – С. 17-26.

117. Соколовський Я.І. Математичне моделювання конвективного сушіння деревини з врахуванням границь фазових переходів / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька // Вісник Національного університету «Львівська політехніка»: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. № 826. – Львів: НУ «ЛП», 2015. – С. 219-230.

118. Соколовський Я.І. Математичне та програмне забезпечення автоматизації розрахунку деформаційно-релаксаційних та тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих матеріалах / Соколовський Я.І., Мокрицька О.В.,

Крошній І.М., Борецька І.Б., Капран І.Д. // VIII Всеукраїнська науково-практична конференція “Комп’ютерне моделювання та інформаційні системи в економіці, науці і освіті”, Черкаси – Одеса, 25-27 травня 2011р. – Черкаси – Одеса, 2011. – С. 145.

119. Соколовський Я. І. Методика та результати експериментальних досліджень реологічної поведінки деревини / Соколовський Я.І., Андрашек Й.В. // Науковий вісник УкрДЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 1999. – Вип. 9.13. – С. 15-26.

120. Соколовський Я.І. Математичне моделювання та аналіз деформаційно-релаксаційного стану в деревині у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець, О.В. Мокрицька // Вісник Національного університету „Львівська політехніка” : Комп’ютерні системи проектування. Теорія і практика. – Львів: Вид-во НУ ”Львівська політехніка”, 2011. – № 711. – С. 82-90.

121. Соколовский Я.И. Моделирование деформационно-релаксационных процессов в древесине во время сушки / Соколовский Я.И., Дендюк М.В., Поберейко Б.П. // Известия ВУЗ России: “Лесной журнал”. – 2007. – № 1. – С. 75-83.

122. Соколовський Я.І. Моделювання нелінійної реологічної поведінки деревини / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України, 2009. – Вип. 19.2. – С. 275-279.

123. Соколовський Я.І. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity state of wood in the process of drying / Ya. Sokolovskyu, A. Bakalletz, O Mokrytska, I. Kapran, I. Boretska // Міжнародна наукова конференція “Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI ‘2011)”. – Євпаторія, 2011. – С. 102-108.

124. Соколовський Я.І. Моделювання та оптимізація технологічних режимів сушіння деревини / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 629. – С. 105-111.

125. Соколовський Я.І. Об’єктно-орієнтована реалізація методу скінчених елементів для розрахунку в’язкопружного стану капілярно-пористих матеріалів / Соколовський Я.І., Мокрицька О.В. // Вісник національного університету “Львівська

політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2011. – Вип. 710. – С. 181-188.

126. Соколовский Я.И. Расчет нестационарных напряжений в древесине при воздействии влаги / Я.И. Соколовский, Б.П. Поберейко // Известия ВУЗ России : “Лесной журнал”. – 2000. – № 1. – С. 99-105.

127. Соколовський Я. Чисельне моделювання в’язкопружного деформування капілярно-пористого матеріалу / Я. Соколовський, О. Мокрицька // Вісник національного університету “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2011. – Вип. №719. – С. 184-190.

128. Соколовський Я.І. Чисельний метод дослідження неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я.І. Соколовський, М.В. Левкович // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ «ЛП», 2015. - №843. – С. 288-296.

129. Соколовський Я.І. Чисельне моделювання тепломасообмінних процесів з використанням штучних нейронних мереж / Я.І. Соколовський, І.М. Крошній, І.Б. Борецька, І.Д. Капран // Конференція INFOTECН-2011. – Київ, 2011. – С. 95-96.

130. Соколовський Я.І. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, І.Б. Борецька, В.Я. Семенюк // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту. Херсон: ХНТУ, 2014. С. 177-178.

131. Сясев А.В. Моделювання процесу кристалізації стрижня з урахуванням взаємного впливу температурних і механічних полів / А.В. Сясев, М.В. Костащук // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Моделювання, 2015. – Т. 23, №8. – С. 9-28.

132. Тарасова В.А. Применение модели нестационарного течения двухфазного теплоносителя через капиллярно-пористую среду для моделирования процесса сушки древесины / В.А. Тарасова // Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. – 2008. – № 7 (53). – С. 10-17.

133. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, А.Г. Ягола // М.: Наука, 1990. – 232 с.
134. Tamir A. Application of Markov Chains in chemical Engineering / A. Tamir // Elsevier Science. – 1998. – 604 p.
135. Тюленева Е.М. Природа упругих деформаций, возникающих в древесине в момент нагрузки и разгрузки / Е.М. Тюленева, В.Н. Курицын // Лесной и химический комплексы – проблемы и решения : сб. ст. – Красноярск, 2005. – Т. 2. С. 232-233.
136. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения: учеб. для лесотехн. вузов / Б.Н. Уголев; М-во образования Рос. Федерации, Моск. гос. ун-т леса. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: МГУЛ, 2002. – 340 с.
137. Федасюк Д.В. Порівняння нелінійної та лінійної моделей процесу теплообміну з використанням випаровування / Федасюк Д.В., Муха Т.О. // Вісник Національного технічного університету “ХПІ”: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків, 2011. – № 53. – С. 139-145.
138. Федасюк Д.В. Дослідження впливу випаровування і конвекції на процес відведення тепла з поверхні пластини / Федасюк Д. В., Муха Т.О. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2010. – Вип. 686. – С. 255-264.
139. Федосов С.В. Математическое описание взаимосвязанного теплопереноса при сушке пластинчатых и листовых материалов / С.В. Федосов, А.Л. Павлов, Е.В. Гусев // Тез. докл. Всес. НТС “Повышение эффективности и надежности машин и аппаратов в основной химии”. – Сумы, 1989. – С. 98-105.
140. Федоткін І.М. Математичне моделювання технологічних процесів : Методи математичного моделювання і розв’язання процесних задач / І.М. Федоткін, І.Ю. Бурлай, М.О. Рюмшин. – К.: Техніка, 2002. – 407 с.
141. Формалаев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных телах / В.Ф. Формалаев // Теплофизика высоких температур, 2001. – Т. 38, № 5. – С. 810-832.

142. Хрисанов Н.Н. Интегральный метод аппроксимации экспериментальных данных / Н.Н. Хрисанов // Вест. Сам. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – Самара: СамГТУ, 2004. – № 12. – С. 195-199.

143. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Хейфец Л.И., Неймарк А.В. – М.: Химия, 1982. – 320 с.

144. Чапля Є. Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах / Є. Чапля, О. Чернуха, В. Дмитрук // Доповіді НАН України. – 2011. – № 7. – С. 46-51.

145. Чернуха О. Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах / О. Чернуха, В. ГончарукЮ, В. Дмитрук // Задачі термодифузії та методи їх роз'язку : колект. моногр. / під ред. д.т.н. В.П. Ляшенка – Кременчук : Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2012. – С. 91-109.

146. Чернуха О. Моделювання граничних випадків контактно-крайової задачі стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах / О. Чернуха, В. Гончарук, В. Дмитрук // Моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 58. – С. 252-253.

147. Шинкаренко Г.А. Розпаралелена апроксимація еліптичних крайових задач штучною нейромережею з радіально-базисними функціями / Г.А. Шинкаренко, В.М. Трушевський // Вісник Львівського університету. Серія “Прикладна математика та інформатика”. – 2014. – Вип. 22. – С. 108-117.

148. Шинкаренко Г.А. Апостеріорні оцінки точкових похибок та уточнення апроксимацій методу скінченних елементів: ієрархічні оцінювачі лишків / Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісник Львівського університету. Серія “Прикладна математика та інформатика”. – 2006. – Вип. 11. – С. 107-119.

149. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины / Шубин Г.С. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 336 с.

150. Яковенко В.О. Моделювання процесу надвисокочастотного сушіння пористих діелектричних матеріалів / В.О. Яковенко // Вісник Академії митної служби України, 2007. – № 2 (34). – С. 107–111.

151. Яковенко В.О. Моделювання процесів переносу в областях з рухомими межами під дією енергії надвисоких частот: Монографія / В.О. Яковенко // Дніпропетровськ: Академія митної служби України, 2009. – 196 с.

152. Aversa M. An analysis of the transport phenomena occurring during food drying process / M. Aversa, S. Curcio, V. Calabro, G. Iorio // *Journal of Food Engineering*, 2007. – 78. P. 922–932.

153. Banaszak J. Theoretical and experimental analysis of stresses and fractures in clay like materials during drying / J. Banaszak, S. J. Kowalski // *Chemical Engineering and Processing*. – 2005. – Vol. 44, no. 4. – P. 497-503.

154. Bixler N.E. Noria a finite element computer program for analyzing water, vapor, air, and energy transport in porous media / N.E. Bixler // Technical report, Report No. SAND842057, UC-70; Sandia National Laboratories: Albuquerque, New Mexico 87185, 2006.

155. Bodig J. Mechanics of wood and wood composites / J. Bodig, B.A. Jayne // Krieger Publishing Company, 1993. – 712 p.

156. Boonstra M.J. Microstructural and physical aspects of heat treated wood. Part 1 / M.J. Boonstra, J.F. Rijdsdijk, C. Sander // *Softwoods. Maderas, Cienc. technol.* – 2006. – Vol. 8, no. 3. – P. 193-208.

157. Chemkhi S. Mathematical model for drying of highly shrinkable media / S. Chemkhi, F. Zagrouba, A. Bellagi // *Drying Technology*. – 2004. – Vol. 22, no. 5. – P. 1023-1039.

158. Chemkhi S. Modelling and simulation of drying phenomena with rheological behavior / S. Chemkhi, F. Zagrouba, A. Bellagi // *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, 2005. – 22(2). – P. 153–163.

159. Curcio S. Transport phenomena and shrinkage modelling during convective drying of vegetable / S. Curcio, M. Aversa // *In Proceedings of COMSOL Conferences 2009*. – Milan, 2009.

160. Datsko B. Different types of instabilities and complex dynamics in reaction-diffusion systems with fractional derivatives / B.Y. Datsko, V.V. Gafiychuk // *Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2012. – DOI No: CND-09-1119.

161. Desket A. Estimations of internal stresses in drying wood by variational principles / A. Desket, F. Bodnov // Vacuum drying of wood – Technical University in Zvolen, Slovakia, 2005. – P. 92-99.

162. Dincov D. D. Pericleous. Heat and mass transfer in in two phase porous materials under intensive microwave heating / D.D. Dincov, K.A. Parrott, K.A. Pericleous // Journal of Food Engineering, 2004. – 65. – P. 403–412.

163. Guiné P.F. Modelling and simulation of pear drying / P.F. Guiné, A.E. Rodrigued, M.M. Figueiredo // Applied Mathematics and Computation, 2007. – 192. P. 69–77.

164. John F. Sian. Wood: influence of moisture on physical properties / John F. Sian. – Virginia, 1995. – 227 p.

165. Hadrich B. Mathematical modelling and simulation of heat and mass transfer in a shrinking cylinder during drying / B. Hadrich, N. Kechaou // Proceedings of the 14th International Drying Symposium (IDS) (Sao Paulo, Brazil, August 22-25, 2004), 2004. – P. 533–541.

166. Hakan F. Oztop. Numerical and experimental analysis of moisture transfer for convective drying of some products / F. Oztop Hakan, Kavak Akpinar Ebru // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2008. – Vol. 35, Issue 2. – P. 169-177.

167. Halder A. Modeling transport in porous media with phase change: Application to food processing / A. Halder, A. Dhalla, A. Datta // Journal of Heat Transfer, 2011. – 133. – P. 1– 13.

168. Halder A. Water transport in cellular tissues during thermal processing / A. Halder, A. Datta, M. Spanswick // Trans IChemE, Food and Bioproducts Processing, 2010. – 00. P. 1–15.

169. Havrysh V.I. Boundary-value problem of heat conduction for a layer with foreign cylindrical inclusion / V.I. Havrysh, D.V. Fedasyuk, A.I. Kosach // Material Science. – 2011. – 46, No 5. – P. 702-708.

170. Ho Q.A permeationdiffusion- reaction model of gas transport in cellular tissues of plant material / Q. Ho, B. Verlinden, P. Verboven, S. Vandewalle, M. Nicolai // *Journal of Experiment Botany*, 2006. – 57. – P. 4215–4224.

171. Karim M.A. Drying characterictings of banana : Theoretical modeling and experimental validation / M.A. Karim, M.N. A. Hawlader // *Journal of Food Engineering*. – 2005. – Vol. 70, no. 1. – P. 35-45.

172. Kaya A. Numerical modelling of heat and mass transfer during force convection drying of rectangular moist objects / A. Kaya, O. Aydin, I. Dincer // *Journal of Food Engineering*, 2006. – 49. – P. 3094–3103.

173. Khaled A. The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues / A. Khaled, K. Vafai // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003. – 46. – P. 4989–5003.

174. Kocaefe D. Comparison of different models for the high-temperature heat-treatment of wood / D. Kocaefe, R. Younsi, S. Poncsak, Y. Kocaefe // *Int. J. Therm. Sci.* – 2007. – Vol. 46. – P. 707-716.

175. Kostrobij P. Generalized diffusion equation with fractional derivatives with in Renyi statistics / P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk // *J. Math. Phys.* – 2016. – Vol. 57. – P. 093301.

176. Kostrobij P. Generalized electrodiffusion equation with fractality of space-time / P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk // *Math. Model. Comp.* – 2016. – Vol. 3, No 2. – P. 163-172.

177. Kowalski S.J. Drying-induced stresses in elastic and viscoelastic saturated materials / S.J. Kowalski, K. Rajewska // *Chemical Engineering Science*. – 2002. – Vol. 57. – P. 3883-3892.

178. Kowalski S.J. The identifications of fracture in dried wood based on theoretical modeling and acoustic emission / S.J. Kowalski, W. Molinski, G. Musielak // *Wood Science and Technology*. – 2004. – Vol. 38, no. 1. – P. 35-52.

179. Kuwahara F.A numerical study of thermal dispersion in porous media / F. Kuwahara, A. Nakayama, H. Koyama // *Journal of Heat Transfer*. – 1996, August. – V. 118. – P. 756-761.

180. Mitchell S.L. Finite-difference method with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems / S.L. Mitchell, M. Vynnycky // *Applied Mathematics and Computation*, 2009. – Vol. 215. – P. 1609-1621.

181. Li X. Finite element method and constitutive modeling and computation for unsaturated soils / X. Li, H.R. Thomas // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* – 1999. – V. 169. – No 1-2. – P. 135-169.

182. Pang S. Modeling of stress development and relief during steaming in Pinus radiata lumber / Pang S. // *Drying Technology*. – 2000. – Vol. 18, no. 8. – P. 1677-1696.

183. Perre P. A physical and mechanical model able to predict the stress field in wood over a wide range of drying conditions / P. Perre, J. Passard // *Drying Technology*. – 2004. – Vol. 22, no. 1-2. – P. 27-44.

184. Quintard M. Theoretical analysis of transport in porous media / M. Quintard, S. Whitaker // In K. Vafai, editor, *Handbook of Porous Media*. – Taylor and Francis, 2000. – P. 1–52.

185. Quiroz M.R. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of banana / M.R. Quiroz, S.A. Nebra // *Journal of Food Engineering*, 2001. – 47. – P. 127–132.

186. Ranta-Maunus A. Strength of finish grown timber / Ranta-Maunus A. // *Espoo 2007, VTT Publications 688*. – Helsinki, 2007. – 60 p.

187. Resch H. Considering changes in wood utilization – a European perspective / Resch H. // *Softwoods. Maderas, Cienc. technol.* – 2008. – Vol. 10, no. 1. – P. 61-68.

188. Povstenko Y. Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Inclusion / Y. Povstenko // *Entropy*. - (October 2013). – Vol. 15. – P. 4122-4133.

189. Salin J.G. Drying of liquid water in wood as influenced by the capillary fiber network / Salin J.G. // *Drying Technology*. – 2008. – Vol. 26, no. 5. – P. 560-567.

190. Sokolovsky Ya. Computer-aided analysis and research of chambers of wood drying by Means of SolidWorks API and COSMOSFloWorks / Ya Sokolovsky, I. Boretska, P. Rozhak // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – Львів: Центр математичного моделювання інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Вип. 17. – С. 175-185.

191. Sokolovskyy Ya. Mathematical models and analysis of the heat-mass-transfer in anisotropic materials taking into account the boundaries of phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyy // 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM), February 26 – March 2, 2019 Polyana-Svalyava (Zakarpattya), Ukraine. – P. 28-33. (SCOPUS).

192. Sokolowsky Ya. Mathematical modeling of capillary-porous materials elastic-viscous-plastic deformation on the drying process / Ya. Sokolowsky, I. Kroshnyi, I. Boretska, O. Sykala // 16-th International Conference SAIT 2014 “System Analysis and Informational Technologies”. – Kyiv, Ukraine, May 26-30, 2014. – P. 323.

193. Sokolowsky Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // CEUR Workshop Proceedings. – 2018. – Vol. 2300. – P. 83–86. (SCOPUS).

194. Sokolowsky Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolovskyy, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // International conference «Advanced computer information technologies». – Czech Republic, Ceske Budejovice, June 1-3, 2018. – P. 83-87.

195. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of non-isothermal moisture transfer and rheological behavior in capillary-porous materials with fractal structure during drying / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi // Computer and Information Science. – Canadian Center of Science and Education. – 2014. – Vol. 7, No. 4. – P. 111-122.

196. Sokolovskyy Ya. Mathematical modeling of moving boundaries of phase transition in the process of drying anisotropic plate / Ya Sokolovskyy, I. Boretska, B. Gayvas // Journal of Engineering Research and Application, 2248-9622 Vol. 8, Issue 12 (Part -I) Dec 2018. – P. 57-63.

197. Sokolowsky Ya. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity state of wood in the process of drying / Ya. Sokolowsky, A. Bakalets, O. Mokrytska, I. Boretska, I. Kapran // Міжнародна наукова конференція “Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту” ISDMCI '2011, м. Євпаторія, АР Крим, Україна – Євпаторія, 2011. – С. 19-26.

198. Sokolowsky Ya. Mathematical modeling of the heat-mass-exchange in anisotropic environments taking into account the boundary of phase transition / Ya. Sokolowsky, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyy // XIII International Scientific and Technical Conference “Computer Science and Information Technologies”. – Vol.11, № 8. – 2018. – P. 147-150. (SCOPUS).

199. Sokolowsky Ya. Modeling deformation of wood with changeable potentials of mass heat transfer / Ya Sokolowsky, B. Pobereyko, A. Bakalletz, I. Senkiv, I. Boretska // X міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології». – Київ, 2008. – С. 30-31.

200. Sokolowsky Y. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Y. Sokolowsky, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala // Proceeding of the VIth International conference on Computer science and Informational technologies, CSIT-2011. – Lviv, 2011. – P. 210-213.

201. Sokolowsky Ya. Two-dimensional mathematical models of visco-elastic deformation using a fractional differentiation apparatus / Ya. Sokolowsky, M. Levkovich // International Journal of Modern Education and Computer Science (IJMECS). – 2018. – Vol. 10, No. 4. – P. 1-9.

202. Svensson S. Hydro-mechanical model for wood drying. From material model fo applicable tool / Svensson S. // 67th International IUFRO Wood Drying Conference. – 2000. – P. 187-193.

203. Taylor G.S. A model for coupled heat and moisture transfer during soil fruzing / G. S. Taylor, J. N. Luthiv // Canad. Geotech. Jornal. – 1978. – Vol. 1.15. – P. 548-555.

204. Zhao T.S. Buoyancy-induced flows and phase-change heat transfer in a vertical capillary structure with symmetric heating / T.S. Zhao, P. Cheng, C.Y. Wang // Chemical Engineering Science. – 1992. – Vol. 55. – P. 2653-2661.

ДОДАТОК А

Значення параметрів реологічної поведінки деревини
за експериментальними даними

Таблиця А.1

Значення коефіцієнтів апроксимації деформацій повзучості, пружних і в'язких
деформацій, часу релаксації і модулів пружності деревини сосни

Темпе- ратура Т, °С	Воло- гість, W, %	Коефіцієнти апроксимації			Деформації, $\varepsilon \cdot 10^{-3}$		Час релак- сації, хв.	Модулі пружності, МПа		
		a ₀	a ₁	a ₂	пружні	в'язкі		τ _{рел}	E _m	E _t
					ε _m	ε _t				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
тангентальний напрям										
40	12	14,126	-5,834	0,015	8,721	14,126	71,23	573,3	354,0	
	14	14,610	-6,081	0,019	9,074	14,610	58,36	551,1	342,2	
	22	17,304	-7,268	0,029	11,026	17,304	39,01	453,5	288,9	
	35	26,475	-11,145	0,065	18,438	26,475	20,28	271,2	188,9	
60	12	15,757	-6,775	0,021	9,660	15,757	53,24	517,6	317,3	
	14	16,143	-6,785	0,024	10,119	16,143	47,24	494,1	309,7	
	22	18,842	-7,922	0,038	12,286	18,842	31,37	407,0	265,4	
	35	28,027	-11,814	0,066	19,521	28,027	20,21	256,1	178,4	
80	12	17,533	-7,281	0,025	11,102	17,533	45,18	450,4	285,2	
	14	17,887	-7,515	0,031	11,466	17,887	36,74	436,1	279,5	
	22	20,669	-8,708	0,050	13,886	20,669	24,99	360,1	241,9	
	35	29,783	-12,593	0,112	22,586	29,783	13,92	221,4	167,9	
100	12	19,782	-8,308	0,032	12,687	19,782	36,64	394,1	252,8	
	14	20,068	-8,435	0,040	13,153	20,068	30,15	380,1	249,2	
	22	22,869	-9,630	0,063	15,848	22,869	20,82	315,5	218,6	
	35	31,734	-13,434	0,142	25,132	31,734	12,03	198,9	157,6	
120	12	22,683	-9,540	0,040	14,874	22,683	29,95	336,2	220,4	
	14	22,873	-9,998	0,049	15,053	22,873	25,35	332,2	218,6	
	22	25,604	-10,790	0,080	18,361	25,604	17,54	272,3	195,3	
	35	33,979	-14,397	0,180	28,126	33,979	10,56	177,8	147,2	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
радіальний напрям									
40	12	20,960	-8,637	0,015	12,956	20,960	70,73	385,9	238,5
	14	21,377	-8,918	0,019	13,262	21,377	58,02	377,0	233,9
	22	27,043	-11,350	0,029	17,245	27,043	39,01	289,9	184,9
	35	44,850	-18,858	0,065	31,243	44,850	20,32	160,0	111,5
60	12	23,408	-10,043	0,021	14,354	23,408	53,28	348,3	213,6
	14	23,635	-9,938	0,024	14,808	23,635	47,20	337,7	211,6
	22	29,443	-12,386	0,038	19,202	29,443	31,29	260,4	169,8
	35	47,465	-20,005	0,066	33,062	47,465	20,22	151,2	105,3
80	12	26,007	-10,799	0,025	16,465	26,007	45,40	303,7	192,3
	14	26,181	-11,004	0,031	16,775	26,181	36,86	298,1	191,0
	22	32,304	-13,593	0,050	21,717	32,304	25,00	230,2	154,8
	35	50,433	-21,331	0,112	38,238	50,433	13,94	130,8	99,1
100	12	29,346	-12,304	0,032	18,836	29,346	36,71	265,4	170,4
	14	29,372	-12,375	0,040	19,235	29,372	30,07	259,9	170,2
	22	35,749	-15,097	0,064	24,767	35,749	20,72	201,9	139,9
	35	53,743	-22,775	0,142	42,571	53,743	12,02	117,5	93,0
120	12	33,626	-14,160	0,040	22,053	33,626	29,79	226,7	148,7
	14	33,471	-14,604	0,049	22,051	33,471	25,33	226,7	149,4
	22	40,030	-16,841	0,080	28,713	40,030	17,58	174,1	124,9
	35	57,543	-24,358	0,180	47,629	57,543	10,56	105,0	86,9

ДОДАТОК Б

Експериментальні та розрахункові значення вологості деревини

τ	$T_c, ^\circ C$	W_p	$W_{exc}, \% [108]$						$W_{poz}, \%$					
6	39.0	18.9	37.0	49.2	48.8	45.7	41.5	39.7	37.4	47.0	46.0	42.5	41.1	41.9
12	48.6	12.5	35.5	47.8	48.1	45.2	41.1	39.4	35.0	45.8	45.1	43.0	41.4	41.3
18	48.5	12.5	33.0	46.7	47.3	43.8	40.5	39.3	28.1	42.9	43.1	42.9	41.1	41.0
24	48.5	12.5	29.5	44.2	44.5	42.3	39.6	38.5	23.5	39.2	40.6	42.1	40.9	40.4
30	48.5	12.4	26.9	42.9	43.8	41.6	39.1	38.4	21.3	38.1	39.7	42.0	40.9	40.5
36	48.5	12.4	24.9	41.9	42.9	41.0	38.6	38.0	20.2	37.2	38.9	41.7	40.6	40.3
42	48.4	12.4	24.2	40.9	42.0	40.6	37.9	37.5	19.5	36.3	38.0	41.0	40.5	40.2
48	48.5	12.4	23.7	39.8	40.6	39.6	37.4	37.1	19.2	35.5	37.4	40.3	40.2	40.0
54	48.6	12.3	23.1	37.8	39.2	39.0	36.7	36.4	17.4	35.0	36.8	39.7	39.9	40.0
60	48.5	12.3	22.8	35.7	37.0	37.5	35.8	35.7	15.8	34.2	35.9	39.1	39.6	39.6
66	48.5	12.3	22.0	35.0	36.1	36.6	35.1	35.0	14.4	30.9	35.1	38.6	39.0	39.3
72	48.6	12.3	21.1	34.3	35.5	36.0	34.5	34.4	13.4	22.8	32.8	37.6	38.5	38.6
78	48.6	12.2	20.2	33.9	34.8	35.0	34.0	33.9	12.8	19.6	28.8	36.6	37.4	37.8
84	48.6	12.2	19.4	32.3	33.0	33.7	32.8	33.4	12.6	17.8	25.3	35.6	36.5	36.8
90	48.6	12.2	18.3	27.2	29.8	31.9	31.8	33.0	12.3	16.8	23.1	34.2	35.6	36.0
96	48.6	12.1	16.7	23.8	27.1	29.5	30.5	32.1	12.1	16.1	21.6	32.3	34.4	35.3
102	48.6	12.1	15.1	21.5	24.9	27.4	29.2	31.2	12.0	15.7	20.5	30.3	33.0	34.2
108	48.6	12.2	12.9	13.1	15.5	18.7	20.9	23.4	12.1	15.3	19.8	28.7	31.8	32.9
114	48.6	12.1	12.8	13.1	15.4	18.3	20.3	22.6	11.8	15.0	19.0	27.3	30.5	31.5
120	48.5	11.9	12.2	13.0	15.1	17.9	19.7	21.9	11.6	14.7	18.3	26.2	29.0	30.1
126	48.5	12.2	12.4	12.9	14.9	17.5	19.2	21.3	11.6	14.5	17.8	25.0	27.7	28.7
132	48.5	12.1	11.9	12.9	14.7	17.1	18.7	20.7	11.5	14.3	17.4	23.9	26.5	27.2
138	48.5	11.8	11.8	12.6	14.5	16.7	18.3	20.1	11.1	13.9	16.8	22.8	25.2	25.9
144	48.5	11.9	11.6	12.5	14.2	16.3	17.8	19.5	11.2	13.7	16.4	21.8	24.0	24.7
150	48.6	12.1	16.5	29.6	32.4	31.3	35.2	37.7	11.2	13.7	16.2	21.0	23.0	23.6
156	48.5	12.1	15.8	28.9	31.8	30.8	34.3	37.0	11.2	13.6	15.9	20.3	22.1	22.7
162	48.5	12.1	13.0	21.7	29.9	29.1	33.5	36.1	11.2	13.5	15.7	19.7	21.3	21.8
168	48.5	12.0	12.0	17.1	27.7	28.1	32.8	35.7	11.1	13.4	15.5	19.2	20.7	21.1
174	48.5	12.2	12.1	13.6	14.3	15.6	17.4	18.9	11.4	13.4	15.4	18.8	20.1	20.5
180	48.5	12.1	12.0	13.5	14.1	15.3	17.0	18.3	11.3	13.3	15.1	18.3	19.5	19.8
186	48.5	12.1	11.9	16.5	14.0	15.1	16.7	18.0	11.3	13.2	15.0	17.9	19.0	19.3
192	48.6	12.1	12.1	13.4	13.9	14.9	16.4	17.5	11.2	13.1	14.8	17.5	18.6	18.8
198	48.5	12.1	12.0	13.3	13.7	14.7	16.1	17.2	11.2	13.0	14.6	17.2	18.1	18.4
204	48.5	12.2	34.3	49.4	49.0	46.3	47.9	46.8	11.5	13.0	14.8	17.0	17.8	18.0
210	48.5	12.1	32.7	47.5	47.5	45.5	45.7	44.6	11.3	12.9	14.5	16.7	17.5	17.6
216	48.5	12.1	28.1	42.5	44.1	43.1	44.1	43.6	11.2	12.9	14.3	16.4	17.2	17.3
222	48.5	12.1	25.3	40.5	42.7	41.9	42.1	42.4	11.1	12.8	14.2	16.1	16.9	17.0
228	48.5	12.1	22.4	37.1	40.7	40.2	40.3	41.2	11.1	12.7	14.1	15.9	16.6	16.7
234	48.5	12.1	20.2	35.2	39.0	38.7	39.3	40.4	11.0	12.7	14.0	15.8	16.4	16.5
240	48.5	12.1	19.0	34.1	37.9	37.8	38.7	39.9	11.0	12.6	13.8	15.5	16.1	16.2
246	48.4	11.7	16.9	32.8	37.6	37.7	38.2	39.6	10.7	12.4	13.7	15.3	15.9	16.0
252	48.4	11.7	16.4	31.3	37.1	37.3	37.7	38.8	10.6	12.3	13.5	15.1	15.7	15.8
258	48.3	11.7	15.9	30.2	36.4	36.7	37.4	38.3	10.5	12.2	13.4	15.0	15.5	15.5
264	48.5	12.0	16.3	29.7	35.9	36.5	36.5	37.7	10.5	12.2	13.3	14.8	15.3	15.3
270	48.5	12.0	10.5	12.2	12.2	12.5	13.2	13.8	10.6	12.2	13.2	14.6	15.0	15.1
276	48.5	12.1	10.6	12.3	12.3	12.6	13.3	13.9	10.6	12.2	13.2	14.5	15.0	15.0
282	48.5	12.1	10.6	12.3	12.3	12.6	13.2	13.8	10.6	12.2	13.2	14.4	14.8	14.9
288	48.5	12.1	10.7	12.3	12.2	12.5	13.1	13.7	10.6	12.1	13.1	14.3	14.7	14.7
294	48.5	12.1	10.6	12.2	12.2	12.4	13.0	13.6	10.5	12.1	13.0	14.2	14.5	14.6
300	48.5	12.1	10.6	12.3	12.2	12.4	13.0	13.5	10.5	12.1	13.0	14.1	14.4	14.5
306	48.5	12.1	10.6	12.2	12.1	12.3	12.9	13.4	10.5	12.0	12.9	14.0	14.3	14.3
312	48.5	12.1	10.7	12.2	12.0	12.2	12.7	13.2	10.4	12.0	12.8	13.8	14.2	14.2
318	48.5	12.0	10.5	12.1	12.0	12.2	12.6	13.1	10.4	11.9	12.8	13.7	14.0	14.0
324	48.4	12.0	10.6	12.1	11.9	12.1	12.6	13.0	10.5	11.9	12.7	13.7	13.9	14.0
330	48.4	12.0	10.6	12.1	11.9	12.1	12.5	13.0	10.4	11.9	12.7	13.6	13.8	13.8

ДОДАТОК В

Лістинг програмного коду чисельної реалізації математичної моделі

Програмний код класу Form

```
import javax.swing.*;
public class Form extends javax.swing.JFrame {
public Dryer theDryer;
public InputManager theInputManager;
public int t=0;//крок моделювання
public JLabel [] masLabel;
public JTextField[] masTextField;
/** Creates new form Form */
public Form() {
    initComponents();
    jButton2.setVisible(false);
}
/**
 * введення вхідних даних
 */
private void jButton1ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
    theInputManager=new InputManager();
    masLabel=new JLabel[6];
    masTextField=new JTextField[3];
    JLabel[] masLabel={jLabel11,jLabel12, jLabel13,jLabel14,jLabel15,jLabel16};
    JTextField[] masTextField={jTextField1,jTextField2,jTextField3};
    theInputManager.set_Params(jComboBox1, masLabel, masTextField);
    jButton2.setVisible(true);
}
/**
 * запуск розрахунку
 */
private void jButton2ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
    theDryer=new Dryer();
    theDryer.sendParams(theInputManager.send_ParamsDouble(),theInputManager.send_ParamsInt());
    for( t=0; t<19; t++){
        theDryer.dryer(jTable1,jTable2,jTable3,jTable4,t);
    }
}
/**
 * побудова графіку
 */
private void jButton3ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
    int param=0;
    if(jRadioButton1.isSelected()) param=1;
    if(jRadioButton2.isSelected()) param=2;
    if(jRadioButton3.isSelected()) param=3;
    theInputManager.paramsToChart(jTable1, jComboBox2,param);
}
}
```

```

private void jButton1MouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
    jButton2.setSelected(false);
    jButton3.setSelected(false);
}
private void jButton2MouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
    jButton1.setSelected(false);
    jButton3.setSelected(false);
}
private void jButton3MouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
    jButton1.setSelected(false);
    jButton2.setSelected(false);
}
/**
 * @param args the command line arguments
 */
public static void main(String args[]) {
    java.awt.EventQueue.invokeLater(new Runnable() {

        public void run() {
            new Form().setVisible(true);
        }
    });
}
private void initComponents() {
    jTable1 = new javax.swing.JTable();
    jPanel1 = new javax.swing.JPanel();
    jPanel2 = new javax.swing.JPanel();
    jLabel1 = new javax.swing.JLabel();
    jComboBox1 = new javax.swing.JComboBox();
    jLabel2 = new javax.swing.JLabel();
    jTextField1 = new javax.swing.JTextField();
    jLabel3 = new javax.swing.JLabel();
    jTextField2 = new javax.swing.JTextField();
    jLabel4 = new javax.swing.JLabel();
    jTextField3 = new javax.swing.JTextField();
    jButton1 = new javax.swing.JButton();
    jPanel6 = new javax.swing.JPanel();
    jLabel5 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel6 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel7 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel8 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel9 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel10 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel11 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel12 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel13 = new javax.swing.JLabel();
    jLabel14 = new javax.swing.JLabel();
}

```

```

jLabel15 = new javax.swing.JLabel();
jLabel16 = new javax.swing.JLabel();
jButton2 = new javax.swing.JButton();
jPanel5 = new javax.swing.JPanel();
jRadioButton1 = new javax.swing.JRadioButton();
jRadioButton2 = new javax.swing.JRadioButton();
jRadioButton3 = new javax.swing.JRadioButton();
jComboBox2 = new javax.swing.JComboBox();
jLabel19 = new javax.swing.JLabel();
jSeparator1 = new javax.swing.JSeparator();
jButton3 = new javax.swing.JButton();
jPanel2 = new javax.swing.JPanel();
jScrollPane1 = new javax.swing.JScrollPane();
jTable1 = new javax.swing.JTable();
jPanel7 = new javax.swing.JPanel();
jScrollPane2 = new javax.swing.JScrollPane();
jTable2 = new javax.swing.JTable();
setDefaultCloseOperation(javax.swing.WindowConstants.EXIT_ON_CLOSE);
jPanel3.setBorder(javax.swing.BorderFactory.createTitledBorder(null, "Властивості деревини",
javax.swing.border.TitledBorder.CENTER, javax.swing.border.TitledBorder.DEFAULT_POSITION, new
java.awt.Font("Tahoma", 1, 12))); // NOI18N
jLabel1.setText("Порода деревини");
jComboBox1.setModel(new javax.swing.DefaultComboBoxModel(new String[] { "сосна", "дуб", "бук" }));
jLabel2.setText("Ширина пластини пиломатеріалів");
jTextField1.setText("0.022");
jLabel3.setText("Вологовміст на поверхні пластини");
jTextField2.setText("0.25");
jLabel4.setText("Початкова температура");
jTextField3.setText("20");
jButton1.setText("Передати");
jButton1.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
    public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
        jButton1ActionPerformed(evt);
    }
});
javax.swing.GroupLayout jPanel3Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel3);
jPanel3.setLayout(jPanel3Layout);
jPanel3Layout.setHorizontalGroup(
    jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup()
            .addGap(20, 20, 20)
            .addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                .addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup()
                    .addComponent(jLabel1)
                    .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED)
                    .addComponent(jLabel2)
                    .addGap(21, 21, 21)
                    .addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                        .addComponent(jTextField1)
                        .addComponent(jTextField2)
                        .addComponent(jTextField3)
                    )
                )
            )
        )
);

```

```

        .addComponent(jComboBox1, 0, 104, Short.MAX_VALUE)
        .addComponent(jTextField1, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 104,
Short.MAX_VALUE)))
        .addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup())
        .addComponent(jLabel3)
        .addGap(18, 18, 18)
        .addComponent(jTextField2, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 104,
Short.MAX_VALUE))
        .addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup())
        .addComponent(jLabel4)
        .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED, 66,
Short.MAX_VALUE)
        .addComponent(jTextField3, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 104,
javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)))
        .addContainerGap(25, Short.MAX_VALUE))
        .addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup())
        .addGap(125, 125, 125)
        .addComponent(jButton1)
        .addContainerGap(131, Short.MAX_VALUE))
    );
jPanel3Layout.setVerticalGroup(
jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
.addGroup(jPanel3Layout.createSequentialGroup())
.addContainerGap()
.addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel1)
.addComponent(jComboBox1, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel2)
.addComponent(jTextField1, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel3)
.addComponent(jTextField2, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel3Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel4)
.addComponent(jTextField3, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED, 32, Short.MAX_VALUE)
.addComponent(jButton1)
.addContainerGap())
);

```

```

jPanel6.setBorder(javax.swing.BorderFactory.createTitledBorder(null, "Коефіцієнти",
javax.swing.border.TitledBorder.CENTER, javax.swing.border.TitledBorder.DEFAULT_POSITION, new
java.awt.Font("Tahoma", 1, 12)); // NOI18N
jLabel5.setText("Теплоємність");
jLabel6.setText("Теплопровідність");
jLabel7.setText("Термоградієнтний коефіцієнт");
jLabel8.setText("Коефіцієнт дифузії вологи");
jLabel9.setText("Масообмінний коефіцієнт");
jLabel10.setText("Теплообмінний коефіцієнт");
jLabel11.setText("0");
jLabel12.setText("0");
jLabel13.setText("0");
jLabel14.setText("0");
jLabel15.setText("0");
jLabel16.setText("0");
jButton2.setText("Розрахунок");
jButton2.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
    public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
        jButton2ActionPerformed(evt);
    }
});
javax.swing.GroupLayout jPanel6Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel6);
jPanel6.setLayout(jPanel6Layout);
jPanel6Layout.setHorizontalGroup(
    jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel6Layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                .addComponent(jLabel7)
                .addComponent(jLabel8)
                .addComponent(jLabel9)
                .addComponent(jLabel10)
                .addComponent(jLabel5)
                .addComponent(jLabel6))
            .addGap(18, 18, 18)
            .addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING, false)
                .addComponent(jLabel11, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 75, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jLabel12, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jLabel13, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jLabel14, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jLabel15, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jLabel16, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE))
            .addGap(27, Short.MAX_VALUE))
        .addGap(18, 18, 18)

```

```

.addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel6Layout.createSequentialGroup())
.addContainerGap(112, Short.MAX_VALUE)
.addComponent(jButton2)
.addGap(74, 74, 74)
);
jPanel6Layout.setVerticalGroup(
jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
.addGroup(jPanel6Layout.createSequentialGroup())
.addContainerGap()
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel5)
.addComponent(jLabel11))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel6)
.addComponent(jLabel12))
.addGap(11, 11, 11)
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel7)
.addComponent(jLabel13))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel8)
.addComponent(jLabel14))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel9)
.addComponent(jLabel15))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
.addGroup(jPanel6Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
.addComponent(jLabel10)
.addComponent(jLabel16))
.addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
.addComponent(jButton2)
.addContainerGap())
);
jPanel5.setBorder(javax.swing.BorderFactory.createTitledBorder(null, "Параметр пиломатеріалу для
відображення", javax.swing.border.TitledBorder.CENTER,
javax.swing.border.TitledBorder.DEFAULT_POSITION, new java.awt.Font("Tahoma", 1, 12))); // NOI18N
jRadioButton1.setSelected(true);
jRadioButton1.setText("Вологовміст");
jRadioButton1.addMouseListener(new java.awt.event.MouseAdapter() {
public void mouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
jRadioButton1MouseClicked(evt);
}
});
jRadioButton2.setText("Напруження");

```

```

jRadioButton2.addMouseListener(new java.awt.event.MouseAdapter() {
    public void mouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
        jRadioButton2MouseClicked(evt);
    }
});
jRadioButton3.setText("Температура");
jRadioButton3.addMouseListener(new java.awt.event.MouseAdapter() {
    public void mouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
        jRadioButton3MouseClicked(evt);
    }
});
jComboBox2.setModel(new javax.swing.DefaultComboBoxModel(new String[] { "1", "2", "3", "4", "5", "6",
"7", "8", "9", "10", "11" }));
jLabel19.setText("Шар пластины");
jSeparator1.setForeground(java.awt.SystemColor.controlHighlight);
javax.swing.GroupLayout jPanel5Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel5);
jPanel5.setLayout(jPanel5Layout);
jPanel5Layout.setHorizontalGroup(
    jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel5Layout.createSequentialGroup())
        .addGroup(jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
            .addGroup(jPanel5Layout.createSequentialGroup())
                .addGap(14, 14, 14)
                .addGroup(jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                    .addComponent(jRadioButton1)
                    .addComponent(jRadioButton2))
                .addGap(35, 35, 35)
                .addComponent(jLabel19)
                .addGap(9, 9, 9)
                .addComponent(jComboBox2, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
            .addGroup(jPanel5Layout.createSequentialGroup())
                .addContainerGap()
                .addGroup(jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                    .addComponent(jRadioButton3)
                    .addComponent(jSeparator1, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 315,
Short.MAX_VALUE)))
        .addContainerGap()
);
jPanel5Layout.setVerticalGroup(
    jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel5Layout.createSequentialGroup())
            .addGroup(jPanel5Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                .addGroup(jPanel5Layout.createSequentialGroup())
                    .addComponent(jRadioButton1)
                    .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED)
                    .addComponent(jRadioButton2))
                .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel5Layout.createSequentialGroup())
                    .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel5Layout.createSequentialGroup())

```



```

        .addContainerGap()
        .addGroup(jPanel1Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
            .addComponent(jLabel19)
            .addComponent(jComboBox2, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))))
        .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
        .addComponent(jSeparator1, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 11,
javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
        .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED)
        .addComponent(jRadioButton3)
        .addContainerGap(8, Short.MAX_VALUE))
    );

    jButton3.setText("Побудувати графік");
    jButton3.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
        public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
            jButton3ActionPerformed(evt);
        }
    });
    javax.swing.GroupLayout jPanel1Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel1);
    jPanel1.setLayout(jPanel1Layout);
    jPanel1Layout.setHorizontalGroup(
        jPanel1Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
            .addGroup(jPanel1Layout.createSequentialGroup()
                .addContainerGap()
                .addComponent(jPanel3, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED)
                .addComponent(jPanel6, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                .addContainerGap(84, Short.MAX_VALUE))
            .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel1Layout.createSequentialGroup()
                .addContainerGap(321, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jButton3)
                .addGap(288, 288, 288))
            .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel1Layout.createSequentialGroup()
                .addContainerGap(206, Short.MAX_VALUE)
                .addComponent(jPanel5, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                .addGap(187, 187, 187))
    );
    jPanel1Layout.setVerticalGroup(
        jPanel1Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
            .addGroup(jPanel1Layout.createSequentialGroup()
                .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING, jPanel1Layout.createSequentialGroup()
                    .addContainerGap()
                    .addGroup(jPanel1Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                        .addComponent(jPanel6, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)

```

```

        .addComponent(jPanel3, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE))
        .addGap(16, 16, 16)
        .addComponent(jPanel5, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
        .addGap(18, 18, 18)
        .addComponent(jButton3)
        .addGap(28, 28, 28)
    );
}
jTabbedPane1.addTab("Початкові параметри", jPanel1);
new String [] {
    "Час сушіння, год", "Шар пластини", "Температура пластини, С", "Значення вологовмісту",
"Вологісні напруження (МПа)"
    }
});
jScrollPane1.setViewportView(jTable1);
javax.swing.GroupLayout jPanel2Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel2);
jPanel2.setLayout(jPanel2Layout);
jPanel2Layout.setHorizontalGroup(
    jPanel2Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel2Layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addComponent(jScrollPane1, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 720, Short.MAX_VALUE)
            .addContainerGap())
);
jPanel2Layout.setVerticalGroup(
    jPanel2Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel2Layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addComponent(jScrollPane1, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 443, Short.MAX_VALUE)
            .addContainerGap())
);
jTabbedPane1.addTab("Вологість деревини", jPanel2);
new String [] {
    "Час сушіння, год", "Рівноважний вологовміст", "Середній вологовміст ", "Температура в камері,
С"
    }
});
jScrollPane2.setViewportView(jTable2);
javax.swing.GroupLayout jPanel7Layout = new javax.swing.GroupLayout(jPanel7);
jPanel7.setLayout(jPanel7Layout);
jPanel7Layout.setHorizontalGroup(
    jPanel7Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(jPanel7Layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addComponent(jScrollPane2, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 720, Short.MAX_VALUE)
            .addContainerGap())
);
jPanel7Layout.setVerticalGroup(
    jPanel7Layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)

```

```

        .addComponent(jScrollPane2, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 443, Short.MAX_VALUE)
    );
    jTabbedPane1.addTab("Проміжні параметри", jPanel7);
    javax.swing.GroupLayout layout = new javax.swing.GroupLayout(getContentPane());
    getContentPane().setLayout(layout);
    layout.setHorizontalGroup(
        layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
            .addGroup(layout.createSequentialGroup()
                .addGap(10, 10, 10)
                .addComponent(jTabbedPane1, javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, 745,
Short.MAX_VALUE))
            .addGap(10, 10, 10)
    );
    layout.setVerticalGroup(
        layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
            .addGroup(layout.createSequentialGroup()
                .addGap(10, 10, 10)
                .addComponent(jTabbedPane1, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 471,
javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                .addGap(10, 10, 10)
                .addGap(10, 10, 10)
            )
    );
    pack();
}

```

Програмний код класу Dryer

```

import javax.swing.*;
public class Dryer {
    public Chamber theChamber;
    public DisplayManager theDisplay;
    public Stack theStack;
    public Heater theHeater;
    public Matrix theMatrix;
    public TemperatureSensor temperature;
    public HumiditySensor humidity;
    public InputManager theInputManager;
    public Integer Time=0;
    /**
     * Конструктор класу Dryer
     */
    public Dryer(){
        theChamber=new Chamber();
        theDisplay= new DisplayManager();
        theStack=new Stack();
        theHeater=new Heater();
        theMatrix=new Matrix();
        temperature=new TemperatureSensor();
        humidity=new HumiditySensor();
    }
    /**
     * Функція, що керує діями системи
     */
}

```

```

public void dryer(JTable JTable1, JTable JTable2,
    JTable JTable3, JTable JTable4, int t){
    double hum,temp, Wr;
    double [] dispTemp;
    double [] dispHum;
    double [] dispSigmaV;
    temp=temperature.getChamberTemp();
    hum=humidity.GetChamberHumidity();
    Time=this.generateTime(t);
    dispHum=theStack.get_U(theChamber.get_Wr(hum,temp), temp, Time);
    dispTemp=theStack.get_T(temp, Time);
    dispSigmaV=theStack.get_SigmaV(theChamber.get_Wr(hum,temp), temp, Time);
    theDisplay.display(JTable1, dispTemp,dispHum,dispSigmaV, Time);
    theDisplay.displayParams(JTable2,
        theChamber.get_Wr(hum,temp),
        theStack.get_Us(theChamber.get_Wr(hum,temp), temp, Time),
        theStack.get_SigmaGran(theChamber.get_Wr(hum,temp)),
        t,
        Time,
        temp
    );
    theDisplay.displayMatrix(theMatrix.get_A(), JTable3);
    theDisplay.displayMatrix(theMatrix.get_B(), JTable4);
}
public void forMatrix(){
    theHeater.set_Params(theStack.b, theStack.fl,
        theChamber.Lk, theChamber.Bk, theStack.wl,theStack.Vd,theChamber.Ok);
}
/*
public double startMatrix(){
    theMatrix.get_g(theHeater.azv, theHeater.Frs, theHeater.Ck, theHeater.mk);
    return theMatrix.set_A();
}*/
public Integer generateTime(int t){
    return Time+=t;
}
public void M(JLabel l){
    Double a;
    a=theStack.get_Mm();
    l.setText(a.toString());
}
public void sendParams(Double[] paramsDouble, Integer[] paramsInt){
    theStack.initParams(paramsDouble, paramsInt);
}
}

```

Програмний код класу InputManager

```

import javax.swing.*;
//import java.lang.*;

```

```

public class InputManager {
    private Double am;//коефіцієнт дифузії
    private Double aq;//коєф. темпер. провідності
    private Integer ro;//густина
    private Double R;//половина товщини дошки
    private Double a;//коефіцієнт теплопровідності
    private Double alfa;//коєф. теплообміну
    private Double sigma;//термоградієнтний коефіцієнт
    private Double beta;//коєф. масообміну
    private Double c;//теплоємність
    private Integer T0;
    private Double Up;
    private Double Uc;
    // private Vector params;
    private Double [] paramsDouble;
    private Integer [] paramsInt;
    public InputManager(){
    }
    /**
    * Визначення параметрів сушіння
    * Функція отримує значення від компонентів форми та створює масив параметрів
    */
    public void set_Params(JComboBox combo, JLabel[] masLabel, JTextField[] masTextField){
        paramsDouble= new Double[10];
        paramsInt= new Integer[10];
        if(combo.getSelectedItem()=="сосна"){
            masTextField[0].getText().toString();
            R=(Double.valueOf( masTextField[0].getText()).doubleValue())/2;
            paramsDouble[0]=R;
            T0=Integer.valueOf( masTextField[2].getText()).intValue();
            paramsInt[0]=T0;
            Up=Double.valueOf( masTextField[1].getText()).doubleValue();
            paramsDouble[1]=Up;
            alfa=21.6127837;
            paramsDouble[2]=alfa;
            beta=6.28305E-07;
            paramsDouble[3]=beta;
            sigma=0.038727512;
            paramsDouble[4]=sigma;
            a=0.299992938;
            paramsDouble[5]=a;
            c=2697.2;
            paramsDouble[6]=c;
            ro=415;
            paramsInt[1]=ro;
            am=3.08945E-10;
            paramsDouble[7]=am;
            masLabel[0].setText(c.toString());

```

```

        masLabel[1].setText(a.toString());
        masLabel[2].setText(sigma.toString());
        masLabel[3].setText(am.toString());
        masLabel[4].setText(beta.toString());
        masLabel[5].setText(alfa.toString());
    }
}
/**
 * Відсилання параметрів класу Stack для ініціалізації
 * Функція отримує значення від компонентів форми та створює вектор параметрів
 */
public Double[] send_ParamsDouble( ){
    return paramsDouble;
}
public Integer [] send_ParamsInt(){
    return paramsInt;
}
}
/**
 * Відсилання параметрів з форми до класу Chart
 */
public void paramsToChart(JTable table, JComboBox combo,int param){
    chart=new Chart();
    chart.createChart(table, combo, param);
}
}

```

Програмний код класу DisplayManager

```

import javax.swing.*;
public class DisplayManager
{
    public int krok=0;
    /**
     * конструктор класу
     */
    public DisplayManager(){
    }
    /**
     * відображення рівноважної вологості, середньої вологості та часу сушіння
     */
    public void displayParams(JTable table, double Wr,double Us,double SigmaGran, int t, int Time, double temp){
        table.setValueAt(Time, t, 0);
        table.setValueAt(Wr, t, 1);
        table.setValueAt(Us, t, 2);
        table.setValueAt(temp, t, 3);
        table.setValueAt(SigmaGran, t, 4);
    }
    /**
     * відображення вологості та температури у пластині
     */
}

```

```

*/
public void display(JTable JTable1,double [] T, double [] U, double [] SigmaV, int Time)
{
    int j=0;
    for (int i=krok; i<krok+11; i++){
        JTable1.setValueAt(SigmaV[j], i, 4);
        JTable1.setValueAt(U[j], i, 3);
        JTable1.setValueAt(T[j], i, 2);
        JTable1.setValueAt(j+1, i, 1);
        JTable1.setValueAt(Time, i, 0);
        j++;
    }
    krok+=11;
}
public void displayMatrix(Double [][] Matrix, JTable table){
    for(int i=0; i<6; i++)
        for(int j=0; j<6; j++)
            table.setValueAt(Matrix [i][j], i, j);
}
}

```

Програмний код класу Chart

```

import javax.swing.JFrame;
import javax.swing.JTable;
import javax.swing.JComboBox;
import java.awt.*;
import org.jfree.chart.ChartFactory;
import org.jfree.chart.ChartPanel;
import org.jfree.chart.JFreeChart;
import org.jfree.chart.plot.PlotOrientation;
import org.jfree.data.xy.XYDataset;
import org.jfree.data.xy.XYSeries;
import org.jfree.data.xy.XYSeriesCollection;
import org.jfree.data.xy.XYCoordinate;
public class Chart {
    private int x;
    private Double []y;
    private Integer layer;
    private String title, OX,OY,
        frameTitle,
        paramTitle;
    public Chart(){
    }
}
/**
 * Функція для побудови графіків
 * в якості параметра передаються таблиця з даними,
 * поле зі значенням шару та номер параметру для відображення
 */

```

```

public void createChart(JTable table, JComboBox combo,int param){
    y=new Double[90];
    if(param==1)this.HumChart(table, combo);
    else if(param == 2) this.sigmaChart(table, combo);
    else this.temperChart(table);
    XYSeries series = new XYSeries(paramTitle);
    for(int i=0; i<90; i++){
        series.add(i,y[i]);
        i++;
    }
    XYDataset xyDataset = new XYSeriesCollection(series);
    JFreeChart chart = ChartFactory.
        createXYLineChart
        (title, OX, OY,
         xyDataset,
         PlotOrientation.VERTICAL,
         true, true, true);
    JFrame frame =
        new JFrame(frameTitle);
    frame.getContentPane()
        .add(new ChartPanel(chart));
    frame.setSize(400,300);
    frame.show();
}
/**
 * Створення масиву значень вологовмісту
 * для подальшого відображення на графіку
 */
public void HumChart(JTable table, JComboBox combo ){
    frameTitle="Зміна вологовмісту в пиломатеріалі";
    title="Значення вологовмісту";
    paramTitle="вологовміст";
    OX="t, год";
    OY="U, кг/кг";
    layer=Integer.valueOf(combo.getSelectedItem().toString());
    x=0;
    for(int i=layer-1; i<990; i+=11){
        y[x]=Double.valueOf(table.getValueAt(i, 3).toString());
        x++;
    }
}
/**
 * Створення масиву значень вологісних напружень
 * для подальшого відображення на графіку
 */
public void sigmaChart(JTable table, JComboBox combo){
    frameTitle="Зміна вологісних напружень пиломатеріалу";
    title="Значення вологісного напруження";
}

```



```
paramTitle="вологісні напруження";
OX="t, год";
OY="Sigma, МПа");
layer=Integer.valueOf(combo.getSelectedItem().toString());
x=0;
for(int i=layer-1; i<990; i+=11){
    y[x]=Double.valueOf(table.getValueAt(i, 4).toString());
    x++;
}
}
/**
 * Створення масиву значень температури
 * для подальшого відображення на графіку
 */
public void temperChart(JTable table){
    frameTitle="Зміна температури пиломатеріалу в часі";
    title="Значення температури";
    paramTitle="температура";
    OX="t, год";
    OY="T, C";
    x=0;
    for(int i=1; i<=990; i+=11){
        y[x]=Double.valueOf(table.getValueAt(i, 2).toString());
        x++;
    }
}
}
```

ДОДАТОК Г

Акти впровадження результатів дисертаційної роботи

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Ректор НЛТУ України
 Академік НАН України
 Ю.Ю. Туліця
 « 11 » грудня 2017 р.



АКТ

впровадження у навчальний процес результатів
 дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня
 кандидата технічних наук Борецької І.Б.

Ми, хто підписалися нижче, представники Національного лісотехнічного університету України, директор інституту деревооброблювальних технологій та дизайну, доктор технічних наук, професор В.М. Максимів; завідувач кафедри ІТ, доктор технічних наук, професор Я.І. Соколовський; голова методичної ради інституту деревооброблювальних технологій та дизайну, доктор технічних наук, професор кафедри ТМВД Б.Я. Кшивецький; доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри ІТ М.В. Дендюк; доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри ІТ І.М. Крошний склали цей акт про те, що у навчальному процесі кафедри ІТ для викладання дисциплін: “Моделювання систем”, “Проектування САЕ/CAD/CAM систем” та “Автоматизовані системи моделювання об’єктів і процесів” використовуються результати дисертаційної роботи старшого викладача кафедри ІТ І.Б. Борецької.

Результати дисертаційної роботи використано під час дипломного проектування при написанні бакалаврських робіт за спеціальністю “Комп’ютерні науки” та магістерських робіт за спеціальністю “Інформаційні технології проектування”.

Використання результатів дисертаційної роботи сприяє вдосконаленню та підвищенню рівня фахової підготовки студентів університету.

Акт складено у трьох примірниках:

1-й примірник – кафедрі ІТ; 2-й примірник – навчально-методичному відділу НЛТУ України; 3-й примірник – І.Б. Борецькій.

Голова комісії		В.М. Максимів
Члени комісії:		Я.І. Соколовський
		Б.Я. Кшивецький
		М.В. Дендюк
		І.М. Крошний

Проректор з наукової роботи
Національного лісотехнічного
університету України

Професор, д.т.н.


Г.Т. Криницький
(прізвище)
21 травня 2018р.
79052 м. Львів, вул. Гейл Чупринки 103



ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор ТзОВ «Суховільський
ДОК»


В.В. Тороус
(прізвище)
21 травня 2018 р.
Адреса: м. Суховілля, Городоцький
р-н, Львівська обл.



АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи: **«Математичне моделювання конвективного процесу сушіння деревини з врахуванням границі фазових переходів»**

на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Борецької Ірини Богданівни

Ми, що підписалися нижче, директор ТзОВ «Суховільський ДОК» В.В. Тороус, головний технолог О.М. Ващук, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України, д.т.н., професор Я.І. Соколовський склали цей акт про прийняття від старшого викладача кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Борецької І.Б., таких практичних результатів дисертаційної роботи:

- алгоритмічне та програмне забезпечення для автоматизованого розрахунку температури, вологовмісту та компонентів напружень під час сушіння деревини з урахуванням зони випаровування вологи та технологічних параметрів агента сушіння.
- Методику визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння деревини з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу.

Комісія ознайомилася із роботою програмного забезпечення, що розроблене Борецькою І.Б., яке дає можливість вирішувати важливі для ведення технологічного процесу сушіння деревини такі задачі:

1. Розроблене програмне забезпечення у вигляді пакету прикладних програм із графічним інтерфейсом для введення вхідних даних технологічного процесу та візуалізації результатів досліджень дозволяє за заданими початковими значеннями температури і вологості пиломатеріалів, агента процесу сушіння здійснювати розрахунок з задовільною точністю температурно-вологісних полів і напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння залежно від

координати фазового переходу із врахуванням пружних, в'язко-пружних і деформацій, обумовлених швидкістю зміни видалення вологості, механізмів переродження деформацій, анізотропії теплофізичних і механічних характеристик;

2. Встановлені розрахункові співвідношення для визначення температури фазового переходу з урахуванням градієнтів перенесення та часу, для якого відносна насиченість досягає границь фазового переходу дозволяють визначати параметри для побудови неперервних режимів процесу сушіння деревини із врахуванням обмежень на напружено-деформівний стан, компоненти якого не перевищують границю міцності деревини у процесі сушіння.

Висновок. Вважаємо, що передані для впровадження прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у деревині з врахуванням руху зони випаровування та методика визначення неізотермічного вологоперенесення при нестационарних режимах процесу сушіння деревини з врахуванням динаміки зміни границі фазового переходу дасть змогу підвищити показники якості висушеної деревини на 5 – 7 % за рахунок прогнозування та своєчасного виявлення гранично допустимих значень напружень у пиломатеріалах, які не перевищуватимуть границю міцності матеріалу.

Акт складений для пред'явлення до спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій і не є підставою для фінансових розрахунків.

Складений у трьох примірниках:

1-й примірник – ТзОВ "Суховільський ДОК"

2-й примірник – кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України

3-й примірник – старшиця Борецькій І.Б.

Директор ТзОВ
"Суховільський ДОК"




В.В. Тороус

Головний технолог ТзОВ
"Суховільський ДОК"


О.М. Ващук

Завідувач кафедри ІТ
НЛТУ України, д.т.н., професор


Я.І. Соколовський

Старший викладач кафедри ІТ
НЛТУ України


І.Б. Борецька

ДОДАТОК Г

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості та відомості
про апробацію результатів дисертації

1. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Математичне моделювання конвективного сушіння деревини з врахуванням границь фазових переходів // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Комп'ютерні науки та інформаційні технології: зб. наук. праць. 2015. № 826. С. 219-230.
2. Sokolovskyu Ya., Boretska I., Gayvas B. Mathematical modeling of moving boundaries of phase transition in the process of drying anisotropic plate // Journal of Engineering Research and Application. 2018. Vol. 8, No. 12. P. 57-63.
3. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Вплив режиму сушильного агента на осушення пористих тіл // Збірник наукових праць: «Комп'ютерні технології друкарства». 2011. № 26. С. 231-240.
4. Sokolovskyu Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided and drying and vearch of chambers of wood drying by Means of SolidWorks API and COSMOSFloWorks // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2013. Вип. 17. С. 175 - 185.
5. Гайвась Б.І., Борецька І.Б. Осушення пористих тіл у сушильних камерах за м'яких режимів // Науковий вісник НЛТУ України. 2011. Вип. 21.9. С. 317-326.
6. Соколовський Я.І., Борецька І.Б., Дендюк М.В. Аналіз впливу зв'язку перенесення тепла і вологи на напружено-деформівний стан у деревній пластині // Науковий вісник НЛТУ України. 2010. Вип. 20.12. С. 309-314.
7. Соколовський Я.І., Борецька І.Б. Моделювання нелінійної реологічної поведінки деревини // Науковий вісник НЛТУ України. 2009. Вип. 19.2. С. 275-279.
8. Sokolovskyu Ya., Boretska I., Rozhak P. Computer-aided design and research of forest drying chambers by means of SolidWorks API // Техніка та енергетика. 2013. Вип. 185, част. 2. С. 215-218.
9. Sokolowskyu Ya., Boretska I., Yatsyshyn S., Kaspryshyn Ya. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2300. P. 83–86. (SCOPUS).

10. Борецька І.Б. Математичне моделювання впливу термодифузії на поглиблення зони випаровування вологи у процесі сушіння // Технічні вісті. 2015. Вип. 2015/1(42), 2(43). С. 60-67.
11. Mathematical models and analysis of the heat-mass-transfer in anisotropic materials taking into account the boundaries of phase transition / Ya Sokolovskyu, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyu // The Experience of Designing and Application of CAD Systems 'CADSM 2019': proc of 15 Intern. Conf., 26 February – 2 March, 2019. Polyana-Svalyava (Zakarpattya). P. 28-33. (SCOPUS).
12. Mathematical modeling of the heat-mass-exchange in anisotropic environments taking into account the boundary of phase transition / Ya. Sokolovskyu, I. Boretska, B. Gayvas, I. Kroshnyu // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2018': proc. of the 13th Intern. Sci. and Techn. Conf., 11-14 Sept. 2018. Lviv, 2018. P. 147-150. (SCOPUS, WEB of SCIENCE).
13. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Y. Sokolowskyu, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala // Computer Science and Information Technologies 'CSIT 2011': proc. of the 6th Intern. Sci. and Techn. Conf. Lviv, 2011. P. 210-213.
14. Вплив режиму сушіння на процеси тепломасоперенесення в пористому шарі / Я.Й. Буряк, Б.І. Гайвась, І.Б. Борецька // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT-2011'. Київ, 2011. С. 62-63.
15. Mathematical modeling of capillary-porous materials elastic-viscous-plastic deformation on the drying process / Ya. Sokolowskyu, I. Kroshnyi, I. Boretska, O. Sykala // System Analysis and Informational Technologies 'SAIT 2014': proc. of the 16-th International Conferenseonal Technologies, 26-30 May, 2014. Kyiv, 2014. P. 323.
16. Mathematical modeling of deformation-relaxation processes under phase transition / Ya. Sokolovskyu, I. Boretska, S. Yatsyshyn, Ya. Kaspryshyn // Advanced computer information technologies: proc of the International Conference, 1-3 June, 2018. Czech Republic, Ceske Budejovice, 2018. P. 83-87.
17. Автоматизация технологии моделирования и анализа деформационно-релаксационных и тепломассообменных технологий при сушке древесины /

Я.И. Соколовский, О.В. Мокрицкая, И.Б. Борецкая // IV-я международная практическая технология «Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов)» 'СЭТТ-2011'. 20-23 сентября, 2011. Москва, 2011. С. 118-121.

18. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я.І. Соколовський, В.М. Шиманський, І.Б. Борецька, В.Я. Семенюк // Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту. Херсон: ХНТУ, 2014. С. 177-178.

19. Mathematical modeling of the two-dimensional nonisothermal moisture transfer and viscoelasticity state of wood in the process of drying / Ya. Sokolovskyu, A. Bakalletz, O Mokrytska, I. Kapran, I. Boretska // Міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту 'ISDMCI 2011'. Євпаторія, 2011. С. 102-108.

20. Modeling deformation of wood with changeable potentials of mass heat transfer / Ya. Sokolowskyu, B. Pobereyko, A. Bakalletz, I. Senkiv, I. Boretska // X міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології». Київ, 2008. С. 30-31.

21. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.Б. Борецька, О.В. Мокрицька, В.М. Шиманський, А.П. Здолбіцький // VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» 'МОДС 2011'. Чернігів, 2011. С. 88-89.

22. Застосування штучних нейронних мереж для чисельного моделювання тепломасообмінних процесів / Я.І. Соколовський, І.М. Крошній, І.Б. Борецька, І.Д. Капран // VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» 'МОДС 2011'. Чернігів, 2011. С. 92-93.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи висвітлено у доповідях та обговорено на: X, XIII та XVI міжнародних науково-технічних конференціях «Системний аналіз та інформаційні технології», SAIT-2008,

SAIT-2011, SAIT-2014 (м. Київ, 2008, 2011, 2014); Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту», ISDMCI-2011 (м. Євпаторія, 2011); VI науково-практичній конференції з міжнародною участю «Математичне та імітаційне моделювання систем», МОДС-2011 (м. Чернігів, 2011); IV международной научно-практической конференции «Современные энергосберегающие технологии (сушка и термовлажностная обработка материалов)», СЭТТ-2011 (м. Москва, 2011); VIth and XIIIth International Conferences on Computer Science and Informational Technologies, CSIT-2011, CSIT-2018 (м. Львів, 2011, 2018); Міжнародній науковій конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми штучного інтелекту» (м. Херсон, 2014); International Conference «Advanced Computer Information Technologies» (Чеська Республіка, м. Чеське Будейовіце, 2018); 15th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems, CADSM-2019 (Polyana-Svalyava, 2019); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного лісотехнічного університету України в період 2008–2018 рр.