Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»

Мочурад Леся Ігорівна

УДК 537.2+519.632+681.7

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ З УРАХУВАННЯМ СИМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Львів-2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному університеті «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:
доктор технічних наук, професор
Пукач Петро Ярославович,
Національний університет
«Львівська політехніка» МОН України,
завідувач кафедри обчислювальної математики
та програмування

Офіційні опоненти:
доктор технічних наук, професор
Виклюк Ярослав Ігорович,
Приватний вищий навчальний заклад
"Буковинський університет",
проректор з наукової роботи та
міжнародних зв'язків

доктор технічних наук
Синявський Андрій Тадейович,
Фізико-механічний інститут
ім. Г.В.Карпенка НАН України,
старший науковий співробітник відділу
фізичних основ діагностики матеріалів

Захист відбудеться 08 червня 2018 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті «Львівська політехніка» (79013, м.Львів, вул. С. Бандери, 12, 226 ауд. головного корпусу)

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Національного університету «Львівська політехніка» (79013, м.Львів, вул. Професорська, 1)

Автореферат розісланий «03» травня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Р. А. Бунь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Системи електронної оптики є основними компонентами сучасних науково-дослідних комплексів, за допомогою яких вивчаються складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Сфери застосування таких електронно-оптичних систем:

- радіолокація, радіоастрономія та вимірювальна техніка (електронні гармати є невід’ємними частинами ламп біжучої хвилі, вони є важливими електровакуумними приладами);
- ядерна фізика (лінзи та їх системи є основними частинами сучасних потужних електронних мікроскопів та прискорювачів; у більшості мікрозондів, що знаходяться в експлуатації, використовують мультиплети електростатичних квадрупольних лінз);
- медицина (дослідження за допомогою новітніх електронно-оптичних підсилювачів рентгенівського зображення).

У процесі моделювання систем електронної оптики постає задача розрахунку потенціальних полів, створюваних сукупністю заряджених електродів. Електростатичні поля досліджуються переважно за допомогою чисельних методів, оскільки аналітичний розрахунок поля в загальному випадку є складний, або взагалі неможливий. Значний внесок у розвиток теорії математичного моделювання електростатичних полів зробили Бакалець В.А., Верлань А.Ф., Владіміров В.С., Ільїн В.П., Людкевич Й.В., Мельник І.В., Захаров Е.В., Сафронов С.І., Хапко Р.С., Kress R., Johansson B.T. та інші. Відомо, що метод інтегральних рівнянь дає можливість ефективно розв’язувати електростатичні задачі.

Про актуальність дисертаційного дослідження свідчить те, що при аналізі сучасних електронно-оптичних систем виникає необхідність дослідження значної кількості заряджених електродів складної конфігурації, а відомі методи розрахунку електростатичних полів відповідних систем не є універсальними, оскільки не можуть забезпечити високу точність та швидкодію обчислень. За таких умов методу інтегральних рівнянь у його канонічній формі властива втрата стійкості. Недоліком існуючих методів є також те, що вони не враховують можливість опису об’єкту дослідження моделлю з врахуванням симетрії граничних поверхонь електродів. Іншим аргументом, що підтверджує актуальність розглянутих у дисертації задач, є те, що розімкненість граничних поверхонь електродів звужує коло чисельних методів, які б адекватно враховували фізичну природу досліджуваного електростатичного поля. Густина розподілу поверхневого заряду поблизу краю зарядженої поверхні стрімко зростає і перевищує на порядок відповідне значення в центрі поверхні. Це пов’язано з наявністю потенціального бар’єру, розмір якого в радіальному напрямі співпадає з розміром поверхні електроду. Велика кількість особливих точок значно ускладнює алгоритм наближеного розв’язання відповідних інтегральних рівнянь і не дає можливості скористатись простою і ефективною чисельно-аналітичною схемою розрахунку. Актуальність дисертаційного дослідження також полягає в тому, що існуюче програмне забезпечення розрахунку електростатичних полів електронно-оптичних систем із складною конфігурацією поверхонь електродів вимагає великих затрат часу для досягнення необхідної точності. Крім того, існуючі програмні продукти потребують складного налаштування відповідно до сформульованої задачі.

У цьому випадку значну громіздкість процедури чисельного аналізу можна значно спростити, максимально врахувавши наявну симетрію в геометрії граничних поверхонь, уникнути числової нестійкості обчислень, забезпечити необхідну точність та мінімізувати час обчислень.

Отже, задача розвитку математичних моделей та розробки нових методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку, є актуальною науковою та практичною задачею, яка виникає у процесі математичного моделювання сучасних систем електронної оптики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації відповідає науковому напряму «Аналіз великих даних» кафедри систем штучного інтелекту Національного університету «Львівська політехніка». Дисертаційна робота виконана також у рамках науково-дослідної роботи кафедри обчислювальної математики та програмування цього ж університету "Обґрунтування та застосування обчислювальних методів для розв'язання класичних та прикладних задач" (номер держреєстрації 0117U001850; 2017-2021 рр.) та держбюджетних робіт кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка: "Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь математичної фізики і механіки" (номер держреєстрації 0108U004150; 2008 р.), "Побудова і дослідження методів розв'язування лінійних та нелінійних задач обчислювальної математики" (номер держреєстрації 0107U007420; 2007-2009 рр.), "Чисельне розв'язування лінійних та нелінійних задач обчислювальної математики" (номер держреєстрації 0110U003150; 2010 р.). У рамках цих робіт здобувач розробила методи математичного моделювання систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення ефективних методів для чисельного моделювання електростатичних полів складних електронно-оптичних систем.

Мета дисертаційної роботи визначає необхідність розв'язання таких задач.

1. Розвинути математичні моделі опису електростатичних полів та розробити обчислювальні методи розрахунку цих полів для деяких класів систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь та апарату теорії груп.

2. Розробити методи та алгоритми числового розрахунку плоских систем електростатики зі складною геометрією поля з використанням методу декомпозиції областей та наявної геометричної симетрії.

3. Розробити програмне забезпечення для розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з наявною геометричною симетрією поверхонь електродів.

Об'єктом дослідження є електростатичні поля електронно-оптичних систем.

Предметом дослідження є математичні моделі та методи математичного моделювання електростатичних полів класів електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використано методи функціонального аналізу, алгебри та обчислювальної математики, зокрема, апарат теорії груп, апарат функцій Гріна, метод декомпозиції областей, метод граничних інтегральних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів, одержаних у дисертаційній роботі, полягає в наступному.

Вперше:

– розроблено метод моделювання електростатичних полів складних електронно-оптичних систем та їх плоских наближень, який базується на граничних інтегральних рівняннях теорії потенціалу у поєднанні з апаратом теорії груп, що на відміну від існуючих методів дозволяє уникнути числової нестійкості обчислень;

– встановлено умови коректності розв'язків плоских зовнішніх граничних задач теорії потенціалу, що уможливлює для класів крайових задач з абелевою групою симетрії скінченних порядків знайти аналітичне подання адитивної сталої, присутньої у зображенні розв'язку;

– розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі кутової точки поверхні, уникаючи труднощів аналітичного врахування її поведінки;

– розроблено стійкий обчислювальний алгоритм розв'язання модельних задач, який дозволяє процес обчислення реалізувати паралельно.

Удосконалено:

– математичні моделі електростатичних полів для класів систем електронної оптики з геометричною симетрією поверхонь електродів;

– метод чисельного моделювання складних електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем на основі апарату функцій Гріна, методу декомпозиції областей з врахуванням наявної геометричної симетрії.

Набула подальший розвиток методологія чисельного аналізу параметрів електростатичного поля електронно-оптичних систем з геометричною симетрією граничних поверхонь.

Практичне значення отриманих результатів полягає у досягненні таких результатів:

– розширено можливості засобів і методів математичного моделювання потенціальних полів електростатичних систем на основі методу інтегральних рівнянь;

– суттєво розширено границі можливого пошуку оптимальної конструкції електронно-оптичної системи, оцінено параметри такої системи, фізичне вимірювання яких або трудомістке, або неможливе для необхідної точності;

– забезпечено стійкість процедур знаходження параметрів електростатичних полів класів систем електронної оптики з наявною симетрією граничних поверхонь (ефективніше використано оперативну пам’ять комп’ютера шляхом зменшення її необхідного обсягу у 256, 64, 16, 4 разів для класів систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевими групами симетрій шістнадцятого, восьмого, четвертого та другого порядків, відповідно);

– розроблено програмне забезпечення, в якому реалізовано процедури розпаралелення розрахунків електростатичних полів класів електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів шляхом використання багатопотоковості, сучасної архітектури багатоядерних процесорів та програмних засобів у відповідності до специфікації OpenMP (у результаті зменшено час обчислень: на 50% для систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії другого порядку при використанні двоядерних процесорів; на 75% – четвертого порядку при використанні чотириядерних процесорів, на 94% – шістнадцятого порядку при використанні шістнадцятиядерних процесорів).

Результати дисертації можуть бути використані для проектування електронно-оптичних систем складної структури.

Впровадження результатів роботи. Одержані в роботі результати використано у дослідженнях, пов’язаних із аналізом та моделюванням електромагнітного випромінювання космічних об'єктів у діапазоні радіохвиль, які проводять у відділі методів та систем дистанційного зондування Фізико-механічного інституту ім. Г.В.Карпенка НАН України, що підтверджено відповідним актом впровадження. Також результати наукових досліджень впроваджено у Національному університеті “Львівська політехніка” в навчальний процес у курсі «Дискретна математика» у вигляді методичних вказівок для самостійної роботи та виконання лабораторних робіт.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором дисертації особисто. У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, автору належить: [1, 15] – розробка апостеріорного методу оцінювання похибки; [2, 17] – дослідження коректності розв’язків плоских зовнішніх граничних задач теорії потенціалу та знаходження аналітичного подання адитивної сталої, присутньої у зображенні розв’язку; [3, 16] – знаходження електростатичного поля плоскої електронно-оптичної системи з граничною поверхнею, яка володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку; [4, 10] – розвинення математичної моделі квадрупольної лінзи та розробка обчислювальних методів розрахунку електростатичного поля цієї системи; [5, 12] – розроблення обчислювального алгоритму, який дозволив процес розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи реалізувати на обчислювальних засобах з паралельною архітектурою; [7] – розробка ефективних методів для розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора; [9] – розробка та аналіз системи обчислювальних методів при розв’язуванні однієї плоскої задачі електростатики, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп, апаратом функцій Гріна та методом декомпозиції областей.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на міжнародних симпозіумах: «Проблеми оптимізації обчислень» (смт. Кацивелі, Крим, 2009, 2011 рр.), на XVIII міжнародній конференції з математичного моделювання ‘МКММ - 2017’ (м. Херсон, 2017 р.), на міжнародній науковій конференції "Інтегральні рівняння – 2010" (м. Львів, 2010 р.), на міжнародній науковій конференції «Наукова періодика слов’янських країн в умовах глобалізації» (м. Київ, 2012 р.), на міжнародній науковій конференції "Інтегральні рівняння – 2009" (м. Київ, 2009 р.), на міжвузівських науково-технічних конференціях "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технолоій в Україні" (м. Львів, 2009, 2010, 2012 рр.), а також на наукових семінарах кафедри систем штучного інтелекту Національного університету “Львівська політехніка” та кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка (2006-2011 рр.).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано у 18 наукових працях, із них 6 – одноосібні; 6 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, з них 4 – праці у журналах, що входять до наукометричних баз даних; 3 статті у наукових фахових виданнях з фізико-математичних наук; 9 праць у тезах доповідей міжнародних та міжвузівських конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних літературних джерел та додатків. Робота містить 116 сторінок основного тексту. Загальний обсяг дисертації – 161 сторінка, 19 таблиць, 27 рисунки, 102 найменування використаних першоджерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та основні задачі досліджень, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, наведено кількість публікацій за темою роботи, виділено особистий внесок здобувача тощо.

У **першому розділі** окреслено стан проблеми та відомі шляхи її вирішення у літературі, описано математичну модель електростатичного поля електронно-оптичної системи у суттєво просторовій постановці, наведено загальну схему врахування геометричної симетрії у конфігурації поверхонь електродів на основі апарату теорії груп, розглянуто плоске наближення суттєво просторової задачі.

Для дослідження використано таку фізичну модель: електростатичне поле електронно-оптичної системи визначається системою N безмежно тонких, ідеально провідних електродів $\{S_i\}$, які у своїй сукупності утворюють багатозв'язну поверхню $S := \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, де $S_i \cap S_j = 0$ при $i \neq j$. До кожного електроду $S_i \in \{S_i\}$ прикладається відомий потенціал, який є постійною величиною. Знаючи геометрію електродів та їх потенціали, завжди можна розрахувати розподіл потенціалів у просторі, а потім побудувати ці розрахунки графічно.

Можливість попереднього розрахунку розподілу електростатичного поля є важливою задачею при проектуванні електричного та електронного обладнання. Складність її полягає у взаємодії між провідниками, яка проявляється у перерозподілі заряду на їх поверхні. Визначення цього перерозподілу є ключовим етапом розрахунку результуючого електростатичного поля і визначає усю складність задачі: система рівнянь, яка описує розподіл заряду у сукупності заряджених провідників, має враховувати всі провідники без винятку.

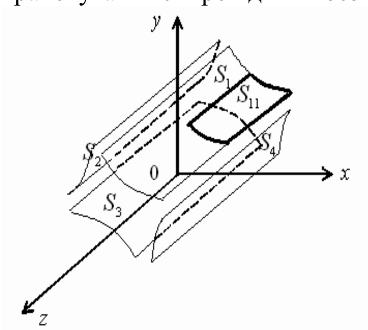

Рис. 1. Досліджувана квадрупольна система

Аналіз багатьох сучасних електронно-оптичних систем дає можливість зробити висновок про те, що їх граничні поверхні електродів володіють геометричною симетрією. З точки зору електростатики до таких систем можна віднести, для прикладу, квадрупольні лінзи. На рис. 1 представлено одну з можливих конфігурацій квадрупольної системи. Причому доцільним виявилось врахування наявної симетрії в геометрії поверхонь електродів шляхом використання апарату теорії груп.

Із праць Владімірова В.С. відомо: якщо заряджені електроди в процесі проектування електронно-оптичних систем моделювати нескінченно довгими циліндричними поверхнями, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей, то в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюється деяка сукупність розімкнених дуг. При цьому значення потенціалу досліджуваного поля у довільній точці простору не залежить від однієї координати, а необхідні розрахунки достатньо проводити лише в $\mathbf{R}^2$. Такий підхід досить широко поширено у практиці проектування електронно-променевих приладів. Зокрема, на рис. 2 зображено схему електронно-оптичної системи, яка є плоским наближенням відповідної просторової квадрупольної системи.

При математичному моделюванні поля електронно-оптичної системи в загальній постановці необхідно знайти функцію $U \in H^1(\Omega_S, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta U = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_S := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}\,; \tag{1}$$

$$\delta^{\pm} U = f \quad \text{на} \quad S\,; \tag{2}$$

$$\lim_{|Q| \to \infty} U(Q) = 0, \quad \text{точка } Q \in \Omega_S\,, \tag{3}$$

де $\delta^{\pm} : H^1(\Omega_S) \to H^{1/2}(S)$ – оператори сліду, $f \in H^{1/2}(S)$ – задане граничне значення потенціалу, а $H^1(\Omega_S, \Delta) := \left\{ U \,\middle|\, U \in H^1(\Omega_S), \Delta U \in L_2(\Omega_S) \right\}$.

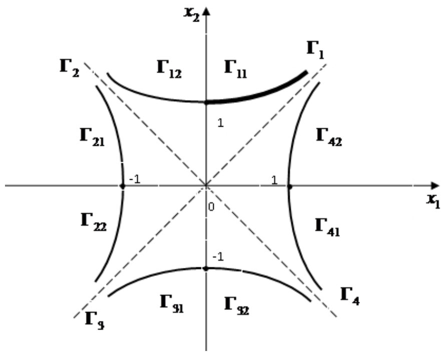

Рис. 2. Досліджувана плоска електронно-оптична система

Задача (1)-(3) еквівалентна такому інтегральному рівнянню (ІР)

$$(K\mu)(Q) \equiv \iint_S \mu(P)\, K(Q,P)\, \mathrm{d}S_P = f_k(Q)\,, \; Q \in S_k \; \left(k = \overline{1,\, N}\right), \tag{4}$$

де $K(Q,P) := 1/\operatorname{dist}(Q,P)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в $\mathbf{R}^3$, $\mu(P)$ – шукана сукупна "густина розподілу зарядів" на S, тобто $\mu(P) := \left\{ \mu_i(P),\, P \in S_i\,; i = \overline{1, N} \right\}$, а $f_k(Q)$ – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею S_k. При електростатичній інтерпретації (1)-(3) $f_k(Q) \equiv const \; \left(k = \overline{1,\, N}\right)$.

Математичне моделювання електростатичних полів базується на визначенні поля заряджених електродів шляхом застосування чисельних методів до диференціальної або інтегральної форми рівняння, яка описує основну задачу електростатики. Чисельні методи розв'язування ІР (4) для гладкої граничної поверхні S простої структури є добре відомими. Проте при аналізі електронно-оптичних систем присутня значна кількість заряджених електродів складної конфігурації. Використання при цьому навіть найекономнішого методу колокації за умов кусково постійної апроксимації шуканої густини розподілу зарядів вимагає чисельного розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь великих порядків з щільно заповненими матрицями.

Це, у свою чергу, веде до числової нестійкості. Оскільки більшість електронно-оптичних систем (зокрема, згадані вище) мають геометричну симетрію, то це дало підстави трактувати таке дослідження як задачу з абелевою групою симетрії скінченного порядку, що уможливило при тій же точності апроксимації суттєво знизити порядок матричних рівнянь, які апроксимують відповідні ІР і, таким чином, зменшило обсяг обчислень та розширило клас систем вказаного вигляду, допускаючи при цьому чисельне моделювання методом граничних інтегральних рівнянь.

У другому розділі на прикладі двох модельних задач розроблено систему методів моделювання електростатичних полів окремих класів електронно-оптичних систем з максимальним урахуванням наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь.

Розглянуто задачу розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи (див. рис. 1). Задача моделювання та розрахунку електростатичного поля цієї системи передбачає знаходження розподілу потенціалу. Нехай P, Q – точки евклідового простору $\mathbf{R}^3$. Тоді згадана вище задача еквівалентна такому ІР

$$(K\sigma)(P) \equiv \iint_S \sigma(Q)\cdot K(P,Q)\mathrm{d}S_Q = f_k(P), \quad P \in S_k \left(k = \overline{1,\,4}\right), \tag{5}$$

де $K(P,Q) := 1/\operatorname{dist}(P,Q)$, $f_k(P)$ – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею S_k ($f_k(P) \equiv \mathrm{const}$), а $\sigma(Q)$ – шукана сукупна "густина розподілу зарядів" на S: $\sigma(Q) = \left\{\sigma_i(Q),\, Q \in S_i\,;\, i = \overline{1,\,4}\right\}$. З метою максимального врахування наявної симетрії у геометрії поверхні S розбито кожну її складову S_i на чотири конгруентні елементи: $S_i := \bigcup_{j=1}^{4} S_{ij}$. Подано повний опис усіх фрагментів межі: $S_i = \bigcup_{j=1}^{4} S_{ij} = \bigcup_{j=1}^{4} \left\{Q_i(u,\,v); (u,\,v) \in D_j\right\} \left(i = \overline{1,\,4}\right)$, $(u,\,v)$ – локальна система координат, де точки $Q_1(u,\,v) := (\operatorname{sh} u, \operatorname{ch} u,\, v)^T \in S_1$, $Q_2(u,\,v) := (-\operatorname{ch} u,\, \operatorname{sh} u,\, v)^T \in S_2$, $Q_3(u,\,v) := (\operatorname{sh} u, -\operatorname{ch} u,\, v)^T \in S_3$, $Q_4(u,\,v) := (\operatorname{ch} u,\, \operatorname{sh} u,\, v)^T \in S_4$, $D_1 := [0,\,1]\times[0,\,A]$, $D_2 := [-1, 0]\times[0,\,A]$, $D_3 := [0, 1]\times[-A, 0]$, $D_4 := [-1,\,0]\times[-A, 0]$, причому $A > 0$ – довільне дійсне число $(A < +\infty)$. Таке зображення поверхні S дало можливість подати (5) у вигляді системи шістнадцяти інтегральних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\iint_{D_j} \sigma_{ij}(u,\,v)\cdot \hat{K}\left(Q_i(u,\,v); P\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = f_{kl}(P), \tag{6}$$

де $P \in S_{kl}$ $\left(k, l = \overline{1,\,4}\right)$, $\hat{K}\left[Q_i(u,\,v); P\right] := K\left[Q_i(u,\,v); P\right]\cdot\left[\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u\right]^{1/2}$, причому $P := Q_k(u_0,\, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D_l$, $\sigma_{ij}(u,\,v) := \sigma\left[Q_i(u,\,v)\right]$, $(u,\,v) \in D_j$.

Показано, що система інтегральних рівнянь (6) володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку і допускає зображення

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\iint_{D_1}\sigma'_{ij}(u,\ v)\cdot\hat{K}\left[\tau_h^{-1}\cdot Q_1(u,\ v);\tau_{h'}^{-1}\cdot Q_1(u_0,\ v_0)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v = f'_{kl}(u_0, v_0), \quad (7)$$

де $(u_0,\ v_0)\in D_1$; $k,l=\overline{1,\ 4}$.

Систему (7) зручно подати в такому матрично-операторному вигляді $(AG)(u_0,\ v_0)=\Psi(u_0,\ v_0)$. Тут $A:=(A_{hh'})_{h,h'=1}^{16}$ – матриця операторів; $G(u,v):=[G_h(u,\ v)]_{h=1}^{16}$, $\Psi(u_0,v_0):=[\Psi_{h'}(u_0,\ v_0)]_{h'=1}^{16}$ – стовпчики-функції такі, що $G_h(u,\ v):=\sigma'_{ij}(u,v)$, $\Psi_{h'}(u_0,\ v_0):=f'_{kl}(u_0,v_0)$, а кожний з операторів $A_{hh'}$ визначаємо за формулою

$$(A_{hh'}G_h)(u_0,\ v_0):=\iint_{D_j}G_h(u,\ v)\cdot\hat{K}\left[\tau_h^{-1}\cdot Q_1(u,\ v);\tau_{h'}^{-1}\cdot Q_1(u_0,\ v_0)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Доведено, що якщо система інтегральних рівнянь (7) володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку, то її можна подати у вигляді

$$\left(B_h\overline{G}_h\right)(u_0,v_0)=\overline{\Psi}_h(u_0,v_0)\ \left(h=\overline{1,16};\ (u_0,v_0)\in D_1\right), \quad (8)$$

$$\overline{G}_h(u,v):=\sum_{s=1}^{16}F_{hs}\cdot G_s(u,v)\ (\ (u,v)\in D_1),\ \overline{\Psi}_h(u_0,v_0):=\sum_{s=1}^{8}F_{hs}\Psi_s(u_0,v_0), \quad (9)$$

де B_h − елементи діагональної матриці $F\cdot A\cdot F^{-1}$ операторів.

Розв'язавши послідовно шістнадцять інтегральних рівнянь (8), наближено, з використанням методу колокації, знайдено $\overline{G}_h(u,v)$. Далі на основі (9) визначено $G_h(u,v)=\sigma'_{ij}(u,\ v)$, що дає змогу обчислити потенціал у будь-якій точці P простору $\mathbf{R}^3$.

Врахування наявної геометричної симетрії дало змогу перейти від початкового інтегрального рівняння, заданого на всій граничній поверхні S, до послідовності шістнадцяти незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише на одній із її конгруентних складових S_{11}. Це уможливило, по-перше, ефективніше використовувати оперативну пам’ять комп’ютера, зменшуючи її об’єм у 256 разів при формуванні кожної системи лінійних алгебричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні, що, в свою чергу, дозволило уникнути нестійкості розрахунків і, таким чином, розширило коло задач, які допускають чисельне моделювання з використанням методу інтегральних рівнянь. По-друге, це створило передумови до розпаралелення процесу розв’язування задачі в цілому. Сучасні архітектури багатоядерних процесорів дозволили розпаралелити процедуру розв’язання цих рівнянь, використавши один із засобів паралельного програмування згідно зі специфікацією *OpenMP*. Для досліджуваного класу систем при використанні шістнадцятиядерного процесора час обчислень зменшено на 94%.

Відомо, що густина розподілу зарядів в околі кутової точки і при підході до контуру має особливості, яких можна уникнути шляхом використання спеціальних замін змінних. Однак це значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування інтегрального рівняння і не дає можливості скористатись простою і ефективною чисельно-аналітичною схемою. Проте, врахування специфіки розімкнених поверхонь, а саме їх геометричної симетрії, дозволило значно зменшити кількість контрольованих особливих точок: у найкращому випадку мати справу лише з однією. Це суттєво спростило весь алгоритм обчислень. У роботі запропоновано метод апостеріорної оцінки похибки, який допомагає контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі "особливих" точок.

Візуалізацію результатів моделювання електростатичного поля квадрупольної лінзи при використанні описаної вище системи методів представлено розподілом ліній рівного потенціалу. На рис. 3 – рис. 5 подано розрахований розподіл ліній рівного потенціалу у площині $z=0$, за умови $A=1$, відстані між поверхнями $h=1$, кількості точок колокації $n=100$. Так, рис. 3 (випадок *а*) відповідає таким значенням потенціалу на електродах $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$. Аналогічно, на рис. 4 $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 1$, $f_4 = -1$ (випадок *б*); на рис. 5 $f_1 = 10$, $f_2 = 20$, $f_3 = -100$, $f_4 = 1$ (випадок *в*).

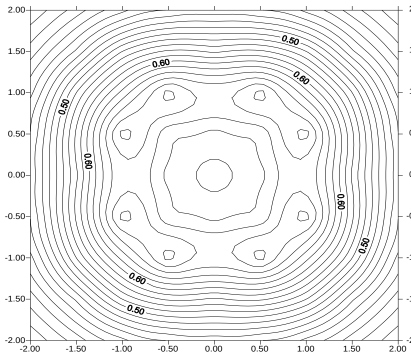

Рис. 3. Розподіл ліній рівня (випадок *а*)

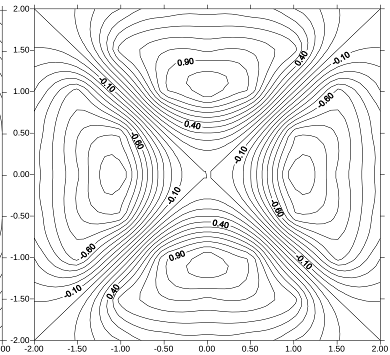

Рис. 4. Розподіл ліній рівня (випадок *б*)

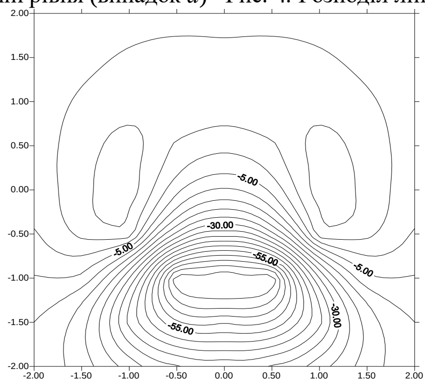

Рис. 5. Розподіл ліній рівня (випадок *в*)

Провівши низку чисельних експериментів, зауважено, що в разі переважання однієї геометричної складової поверхні (вздовж осі Oz) над іншими значення потенціалу в центральних поперечних перерізах сукупної поверхні S мало змінюється.

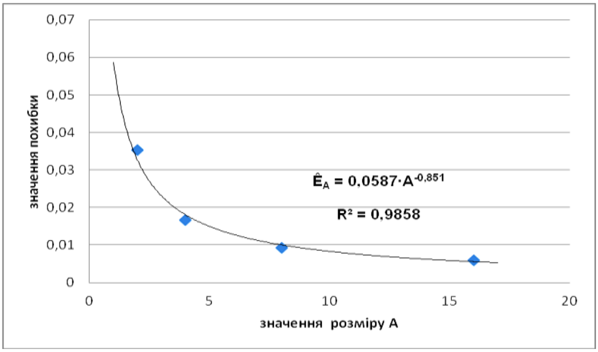

Рис. 6. Вплив збільшення розміру A на значення потенціалу в площині $z=0$

На рис. 6 відображено швидкість зміни відповідної похибки E_A: $E_A := \| u_A - u_{2A} \| = \max\limits_{1 \le i \le N} | u_A(P_i) - u_{2A}(P_i) |$ між обчисленими значеннями потенціалу в площині $z=0$ у випадку дворазового збільшення розміру A. При цьому $E_2 = 0{,}0353$, $E_4 = 0.0166$, $E_8 = 0.0093$. У розділі також отримано розв'язок задачі розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора. Ця задача відіграє роль модельної. При її розв'язуванні продемонстровано переваги розробленої системи обчислювальних методів, оскільки відтворення електростатичного поля плоского конденсатора не є тривіальною задачею за умов суттєвої відмінності потенціалів на відповідних пластинах.

Результати другого розділу опубліковано у роботах [1, 4-6, 10, 11, 13, 16].

У третьому розділі розглянуто математичну модель, яка описує так зване плоске електростатичне поле. При цьому враховано специфіку відповідної крайової задачі. Основну увагу зосереджено на питанні еквівалентності цієї задачі певному ІР та задачі вибору адитивної сталої, яка присутня в інтегральному зображенні плоского електростатичного поля при його математичному моделюванні. Показано, що цю константу можна обчислити за наявності конгруентних складових граничної поверхні. Також здійснено чисельне моделювання електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем з наявною геометричною симетрією поверхонь-електродів. Слід зауважити, що останні є деякими плоскими наближеннями просторових задач розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи та плоского конденсатора. Розглянуто особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрії скінченних порядків.

На підставі чисельних експериментів, наведених вище, у роботі встановлено, що навіть при розв'язанні задач у суттєво просторовій постановці за умов значного переважання однієї геометричної складової граничної поверхні над іншою значення потенціалу у відповідних поперечних перерізах системи електродів, близьких до центрального, мало змінюється. Тому для встановлення якісної картини в центральних поперечних перерізах таких простовових конструкцій можна обмежитись дослідженням плоского електростатичного поля.

Якщо $L := \bigcup_{j=1}^{\nu} L_j$ — об'єднання скінченної кількості простих, гладких, незамкнених і обмежених дуг L_j на площині $\mathbf{R}^2$. Довільні дві дуги L_j не мають спільних точок. Позначено x_m^* $\left(m = 2j-1, 2j;\ j = 1,2,\ldots,\nu \right)$ — крайні точки дуги L_j. Тоді при математичному моделюванні об'єкту дослідження у загальній постановці необхідно знайти функцію $U \in C^2\left(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}\right)$, яка разом із похідними першого порядку неперервна з додатньої (від'ємної) сторони L і задовольняє двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}; \tag{10}$$

крайові умови

$$U^{\pm}(x) = g(x), \quad x \in L, \tag{11}$$

де $g(x)$ — відома функція, задана на L, яка в нашому конкретному випадку є постійною величиною; умову обмеженості на нескінченності

$$U(\infty) = C, \tag{12}$$

“умову на ребрі”

$$\lim_{\rho \to 0} \sum_{m=1}^{2\nu} \int_{C_m^*(\rho)} \left| \frac{\partial U(y)}{\partial \rho} \right| \mathrm{ds_y} = 0, \tag{13}$$

причому $C_m^*(\rho) := \left\{ x \in \mathbf{R}^2 \middle| \left| x - x_m^* \right| = \rho \right\} \setminus L$.

Доведено, що якщо розв’язок $V(x)$ задачі (10)-(13) існує, то його можна подати у вигляді

$$V(x) = \int_L \Psi(x, y) \tau(y) \mathrm{d}s_y + C, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}, \tag{14}$$

причому $\tau(y)$ задовольняє таке ІР першого роду

$$\int_L \Psi(x, y) \tau(y) \mathrm{d}s_y = g(x) - C, \quad x \in L. \tag{15}$$

Припустимо, що межа L володіє абелевою групою симетрії скінченного порядку, тоді в процесі чисельного розв’язування задачі (10)-(13) можна використати апарат теорії груп. У зв’язку з цим для відповідного уточнення попередніх результатів у розділі доведено, що якщо початкова крайова задача (10)-(13) володіє абелевою групою симетрії скінченного k-го порядку, а граничні значення потенціалу на окремих ділянках межі приймають довільні постійні значення C_1, C_2, …, C_k $|C_i| < +\infty, i = \overline{1, k}$, то адитивну сталу в зображенні розв'язку (14) можна обчислити за формулою $C = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} C_i$. Встановлення цього факту дало можливість при знаходженні $\tau(y)$ обмежитись дослідженням лише одного ІР виду (15).

Розглянуто задачу знаходження електростатичного поля плоскої електронно-оптичної системи, зображеної на рис. 2 Встановлено, що модельна задача володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. При її чисельному моделюванні використано розроблену у розд. 2 систему обчислювальних методів.

Для підтвердження ефективності запропонованої системи методів і достовірності отриманих результатів при розв'язуванні відповідної просторової задачі у табл. 1 наведено для порівняння значення потенціалу, отримані при розв'язуванні просторової задачі в деяких контрольних точках площини $z = 0$, і відповідної плоскої при $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 1$, $f_4 = -1$ і кількості невідомих $n = 100$.

Таблиця 1

Потенціал електростатичного поля у точках площини $z = 0$

x	y	u $(A=1)$	u $(A=2)$	u $(A=4)$	u $(A=8)$	плоске наближення
-0.500	-2.000	0.554533	0.569875	0.582992	0.585020	0.580110
-0.500	-1.500	0.793349	0.807748	0.817789	0.821019	0.819194
-0.500	-1.000	0.723583	0.739573	0.744598	0.747684	0.743894
-0.500	-0.500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.500	0.000	-0.225466	-0.244789	-0.250436	-0.252070	-0.247042
0,000	-1,000	0.979874	0.988285	0.990054	0.990136	0.986836
0,000	-0.500	0.225466	0.244789	0.250436	0.252070	0.247042
1.000	-0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
1.000	0.000	-0.979874	-0.988285	-0.990054	-0.990136	-0.986836
1.000	0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
2.000	-1.500	-0.130574	-0.165877	-0.182457	-0.191768	-0.195074

У третьому розділі також розглянуто модельну задачу розрахунку електростатичного поля конденсатора як типовий приклад плоского наближення.

Результати третього розділу опубліковано у роботах [2, 3, 7, 8, 12, 14].

У четвертому розділі на прикладі розв'язування однієї плоскої модельної задачі електростатики проаналізовано систему обчислювальних методів, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь, декомпозиція складних областей, апарат функцій Гріна та врахування симетрії окремих елементів межі. Проведене дослідження ілюструє загальний підхід до розв'язування складної задачі математичної фізики, який має на меті максимально використати всі особливості досліджуваної задачі. Конфігурацію електронно-оптичної системи, в якій знайдено розподіл потенціалу, зображено на рис. 7.

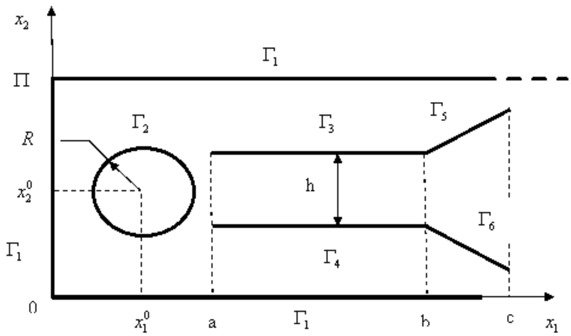

Рис. 7. Досліджувана плоска електронно-оптична система

При математичному моделюванні інформацію про таку систему подано наступним чином: на площині Ox_1x_2 задано деяку область D_1 у вигляді нескінченної півсмуги з границею Γ_1. В D_1 наявне коло Γ_2. Через D_2 позначимо область, що знаходиться ззовні кола. Припустимо також, що в $D = D_1 \cap D_2$ розміщені два розімкнені контури $\Gamma_{3,5}$ і $\Gamma_{4,6}$ так, що $\Gamma_{4,6}$ є дзеркальним відображенням $\Gamma_{3,5}$ відносно осі $x_2 = \pi/2$.

Потрібно визначити функцію $U(x) \in C^2\left(D \setminus \left(\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}\right)\right)$, яка задовольняє: двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0\,,\ \ x \in D \setminus \left(\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}\right),\ \ x = \left(x_1, x_2\right); \tag{16}$$

граничні умови

$$U(x) = f_1(x),\ \ x \in \Gamma_1;\ U(x) = f_2(x),\ \ x \in \Gamma_2; \tag{17}$$

$$U(x) = f_{3,5}(x),\ \ x \in \Gamma_{3,5};\ U(x) = f_{4,6}(x),\ \ x \in \Gamma_{4,6}, \tag{18}$$

де f_1, f_2, $f_{3,5}$, $f_{4,6}$ – відомі функції, які виражають граничні значення потенціалу на відповідних ділянках межі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}$;

умову обмеженості на нескінченності

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} |U(x)| < +\infty\,. \tag{19}$$

Для побудови та аналізу розв'язку задачі (16)-(19) розглянуто дві незалежні задачі.

Задача перша. Необхідно знайти розв'язок $V(x)$ рівняння Лапласа

$$\Delta V(x) = 0\,,\ \ x \in D_1 \setminus \left(\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}\right),$$

що задовольняє умови:

$$V(x) = f_1(x), x \in \Gamma_1;\ V(x) = f_{3,5}(x), x \in \Gamma_{3,5};\ V(x) = f_{4,6}(x),\ x \in \Gamma_{4,6};\ \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |V(x)| < +\infty\,.$$

Шукану функцію подано у вигляді $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$, де $V_1(x)$ задовольняє умови:

$$\Delta V_1(x)=0\,,\ x\in D_1\,;\ V_1(x)=f_1(x),\ x\in\Gamma_1\,;\ \sup_{x\in\mathbf{R}^2}|V_1(x)|<+\infty\,,$$

а $V_2(x)$, у свою чергу, є розв'язком такої задачі:

$$\Delta V_2(x)=0\,,\ x\in D_1\setminus(\Gamma_{3,5}\cup\Gamma_{4,6})\,;$$

$$V_2(x)=f_{3,5}(x)-V_1(x),\ x\in\Gamma_{3,5}\,;\ V_2(x)=f_{4,6}(x)-V_1(x),\ x\in\Gamma_{4,6}\,;$$

$$V_2(x)=0\,,\ x\in\Gamma_{1,}\,;\ \sup_{x\in\mathbf{R}^2}|V_2(x)|<+\infty\,.$$

Задача друга. Необхідно знайти розв'язок $W(x)$ рівняння Лапласа

$$\Delta W(x)=0\,,\ x=(x_1\,,\ x_2)\in D_2\,,\ W(x)\in C^2(D_2)\cap C(\overline{D}_2),$$

який є регулярним на нескінченності і задовольняє умову $W(x)|_{\Gamma_2}=f_2(x)$.

Розв'язок $V_1(x)$ знайдено на основі методу інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії функцій Гріна та обчисленням невласних інтегралів першого роду. При цьому відомо, що функція Гріна для півсмуги товщини π має вигляд

$$G(x,z)=\frac{1}{4\pi}\ln\left\{\frac{[\mathrm{ch}(x_1+z_1)-\cos(x_2-z_2)][\mathrm{ch}(x_1-z_1)-\cos(x_2+z_2)]}{[\mathrm{ch}(x_1+z_1)-\cos(x_2+z_2)][\mathrm{ch}(x_1-z_1)-\cos(x_2-z_2)]}\right\}.$$

При знаходжені розв'язку $V_2(x)$ враховано той факт, що перша задача належить до класу задач з абелевою групою симетрії другого порядку. Розв'язок другої задачі подано у вигляді інтегралу Пуассона.

Для знаходження розв'язку задачі (17)-(20) в області $D\setminus(\Gamma_{3,5}\cup\Gamma_{4,6})$ використано один із варіантів методу Шварца.

Основні результати четвертого розділу опубліковано у роботах [9, 15, 17, 18].

У **додатку** наведено акти впровадження результатів дисертаційної роботи.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано актуальне науково-практичне завдання розвитку математичних моделей та розробки методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку.

У роботі одержані такі нові наукові результати.

1. Отримано нові математичні моделі опису електростатичних полів та розроблено систему обчислювальних методів розрахунку цих полів для класів електронно-оптичних систем за наявності симетрії граничної поверхні, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп. На відміну від існуючих підходів вдалось при тій же точності розв'язку суттєво знизити порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні.

2. Окреслено класи електронно-оптичних систем, що допускають чисельне моделювання з використанням методу граничних інтегральних рів-

нянь. Окрім цього, ефективніше використано оперативну пам'ять комп'ютера шляхом зменшення її обсягу у квадрат порядку групи, якою володіє відповідна модельна задача, а також створено передумови до розпаралелення процесу розв'язування задач у цілому.

3. Удосконалено математичні моделі, які описують так зване плоске електростатичне поле, і вперше знайдено аналітичне представлення адитивної сталої, присутньої в зображенні розв'язку, що дало можливість суттєво спростити алгоритм наближеного розв'язування відповідних модельних задач.

4. Виділено особливості задачі, які дозволили розпаралелити процедури розрахунків параметрів електростатичних полів класів електронно-оптичних систем і для підтвердження ефективності розпаралелення зазначених процедур проведено низку чисельних експериментів з використанням програмного засобу OpenMP.

5. Розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі кутової точки складової поверхні, уникаючи необхідності аналітичного врахування її поведінки.

6. Удосконалено метод чисельного моделювання складних електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем, використовуючи апарат функцій Гріна, один із методів декомпозиції областей та наявну геометричну симетрію.

Автор висловлює щиру вдячність своєму першому науковому керівнику, кандидату фізико-математичних наук, доценту Остудіну Б.А. за наукові консультації та постійну увагу до роботи.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Mochurad L. I.* Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L. I. Mochurad, Y. S. Harasym, B. A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149-156 – *Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).*
2. *Mochurad L. I.* Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L. I. Mochurad, B. A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2011. – №2(105). – P. 98-110 – *Журнал індексується в Web of Science*.
3. *Мочурад Л. І.* Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2009. – Вип. 2.– С. 105-118.
4. *Мочурад Л. І.* Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л. І. Мочурад, П. Я. Пукач // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон : ХНТУ, 2017. – Вип. 3

(62). − Т. 1. – С. 155-165 – *Журнал індексується в Science Index (eLIBRARY.RU).*

5. *Мочурад Л. І.* Апостеріорний метод оцінювання похибки і розпаралелення обчислень для одного класу задач електронної оптики лінзи / Л. І. Мочурад, П. Я. Пукач // Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць. – Львів, 2017. – Т. 27, № 5. – С. 155-159 – *Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).*
6. *Мочурад Л. І.* Розпаралення розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора / Л. І. Мочурад // Біоніка інтелекту. – Вип. 2. – 2017. – С. 72-76.
7. *Гарасим Я.* Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання / Я. Гарасим, Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 64-74.
8. *Мочурад Л.* Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків / Л. Мочурад // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2013.– Вип. 20. – С. 34-41.
9. *Мочурад Л.* Чисельний аналіз граничних задач теорії потенціалу в $\mathbf{R}^2$ з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л. Мочурад, Б. Остудін / Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2008. – Вип. 14. – С. 32-47.
10. *Мочурад Л. І.* Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму «Проблеми оптимізації обчислень», 24-29.09.09, смт. Кацивелі, Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України. – Київ. – 2009. – С. 117-122.
11. *Мочурад Л. І.* Використання процедури розпаралелення при розрахунку електростатичних полів квадрупольних лінз та їх систем / Л. І. Мочурад // Матеріали XVIII міжнародної конференції з математичного моделювання 'МКММ-2017'. – Херсон : ХНТУ, 2017. – С. 27-28.
12. *Мочурад Л. І.* Ефективне розв'язування граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченого порядку / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Праці міжнародної молодіжної математичної школи **"**Питання оптимізації обчислень (ПОО – XXXVII)**"**, 22-29.09.2011 р., смт. Кацивелі (Крим), Міністерство освіти та науки України, Національна академія наук України, Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України. – Київ, 2011. – С. 129-131.
13. *Mochurad L. I.* Numeral modelling of the potential fields of electron-optical systems of complicated structure / L. I. Mochurad // Proceedings of the International Conference "Integral Equations – 2010", 25-27 August 2010. – Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2010. – P. 87-93.
14. *Мочурад Л. І.* Запровадження ефективної методики для наближеного розв'язування задач електронної оптики / Л. І. Мочурад // Технологічний

аудит та резерви виробництва. – 2012. – № 5/2 (7) / Матеріали міжнар. наук. конф. «Наукова періодика слов'янських країн в умовах глобалізації». − Ч. І. – К., 2012. – С. 35-36.

15. *Мочурад Л. І.* Ефективне використання методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні краєвих задач з наявною симетрією в геометрії елементів межі / Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Збірник тез міжнародної конференції «Інтегральні рівняння – 2009», 24-26.01.09, м. Київ. – ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2009. – С. 112-113.

16. *Мочурад Л.* Дослідження методики розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л. Мочурад, Б. Остудін // Збірник матеріалів IV Міжвузівської наук.-техн. конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", 30.03.09 – 10.04.09, м. Львів. – ІППТ при НУ «Львівська політехніка», 2009. – С. 38-39.

17. *Мочурад Л. І.* Наближене розв'язування задач електростатики із врахуванням специфіки вхідної інформації. / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник матеріалів V Міжвузівської наук.-техн. конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", березень 2010 року, м. Львів. – ІППТ при НУ «Львівська політехніка», 2010. – С. 268-269**.**

18. *Мочурад Л. І.* Особливості чисельного розв'язування граничних задач за наявності симетрії елементів межі / Л. І. Мочурад // Збірник тез за матеріалами VIII науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні". – Львів, 2012. – С. 310-311.

АНОТАЦІЇ

Мочурад Л. І. Математичне моделювання систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь.– На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України, Львів, 2018.

У дисертаційній роботі розв'язано актуальне наукове завдання розвитку математичних моделей та розробки нових методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку. Цю задачу розв'язано шляхом розроблення та вдосконалення системи методів чисельного моделювання складних електростатичних полів. В основі цієї системи лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп, методом декомпозиції областей та апаратом функцій Гріна. Розроблена система методів дала можливість, по-перше, ефективніше використовувати оперативну пам'ять комп'ютера, зменшуючи її обсяг у

квадрат порядку групи при формуванні кожної системи лінійних алгебричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні рівняння. По-друге, система методів дала можливість розпаралелити процес розв'язування задачі в цілому.

Ключові слова: математичне моделювання, електронно-оптична система, метод інтегральних рівнянь, абелева група симетрії, функція Гріна, декомпозиція складних областей.

Мочурад Л. И. Математическое моделирование систем электронной оптики с учетом симметрии граничных поверхностей. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет «Львивська политэхника» Министерства образования и науки Украины, Львов, 2018.

В диссертационной работе решено актуальное научное задание развития математических моделей и разработки новых методов расчета электростатических полей классов электронно-оптических систем с предельными поверхностями электродов, которые обладают абелевой группой симметрии конечного порядка. Эту задачу решено путем разработки и совершенствования системы методов численного моделирования сложных электростатических полей. В основе этой системы лежит метод интегральных уравнений в сочетании с аппаратом теории групп, методом декомпозиции областей и аппаратом функций Грина. Предложенная система методов позволила, во-первых, эффективно использовать оперативную память компьютера, уменьшая ее объем в квадрат порядка группы при формировании каждой системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих соответствующие интегральные уравнения. Во-вторых, система методов дала возможность распараллелить процесс решения задачи в целом.

Ключевые слова: математическое моделирование, электронно-оптическия система, метод интегральных уравнений, абелева группа симметрии, функция Грина, декомпозиция сложных областей.

Mochurad L. I. Mathematical modelling of the electronic optic systems taking into account the symmetry of the boundary surfaces. – On the right of manuscript.

The thesis for the degree of candidate of technical sciences, specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – Lviv Polytechnic National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The modern scientific task of the electrostatic field calculations in the modeling process of the electron-optical systems with the symmetry appeared in geometry of the surfaces- electrodes is solved in the thesis. This solution is realized

via the construction and improvement of the numerical modeling methods in the case of the complicated electrostatic fields. These methods are based on the integral equations method connected with the group theory, domain decomposition method and apparatus of Green function.

The proposed system of methods allowed us to use the main computer memory more effectively, diminishing it by squared order of group while constructing every system of linear algebraic equations which approximate the corresponding integral equations. Thus, the type of tasks which assumes a numeral modelling with the use of the method of boundary integral equations is broaden. Also, pre-conditions for parallelization of the solving process in general are created. Taking into account the specificity of the open-circuit surfaces it is possible to decrease the amount of the controlled special points considerably, and also substantially to simplify the algorithm of calculations. The procedure of parallelization was realized via the most popular means of OpenMP. With the aim to take into account the singular behaviour of the solution in the circuit of the open surface a posteriori method of the error evaluation is created.

It is also noticed that under predominance of one geometrical component surface over the other ones the changes of the potential value in its transversal cuts close to central are not noticeable. To state the high-quality representation of the field in the central transversal cuts of the electron-optical systems, one can limit the research by the flat cuts of spatial constructions, since boundary surfaces satisfy the geometrical properties mentioned above. Taking into account the specific characters of initial boundary value problem in the mathematical model, describing so-called flat electrostatic field, is considered. Thereby the main accent is made on the equivalence of last one to the integral first-order equation and the problem of additive constant calculation. This constant appears in the integral representation of flat electrostatic field. There is stated that the constant mentioned above is easily calculated in the presence of symmetry disposition of boundary surface constituents. The proposed concept is illustrated by the numerical solving of some model tasks.

There are obtained the approximate solutions of some spatial problems with different configurations of surfaces-electrodes and different boundary values of potentials using the so-called flat approximation. Such type problems arise in the mathematical modelling of electronic optical systems. The advantages of the proposed methods were demonstrated while solving them. To prove the reasonability and estimation of the technique efficiency a few numerical experiments were carried out. The equipotential lines are used for the representation of the electrostatic field.

Keywords: mathematical modelling, electronic optical system, integral equation method, Abelian symmetry group, Green function, domain decomposition.

Підписано до друку 27.04.2018 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Умовн. друк. арк. 0,9.
Наклад 100 прим. Зам. № 61

ТзОВ «Растр-7»
79005, м. Львів, вул. Кн. Романа, 9/1
тел./факс: (032) 235-52-05
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ЛВ №22 від 19.11.2002 р.