

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна праця
на правах рукопису

Мочурад Леся Ігорівна

УДК 537.2+519.632+681.7

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ
З УРАХУВАННЯМ СИМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
«05 – Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Л.І. Мочурад

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник –
Пукач Петро Ярославович,
д.т.н., професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради



Львів – 2018

АНОТАЦІЯ

Мочурад Л.І. Математичне моделювання систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» – Національний університет «Львівська політехніка» МОН України, Львів, 2018.

У дисертаційній роботі розв’язано актуальну науково-практичну задачу розвитку математичних моделей та розробки методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку. Вказана задача розв’язана шляхом розроблення та вдосконалення системи методів чисельного моделювання складних електростатичних полів. В основі цієї системи лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп, методом декомпозиції областей та апаратом функцій Гріна. Запропонована система методів дозволила, по-перше, ефективніше використовувати оперативну пам’ять комп’ютера, зменшуючи її обсяг у квадрат порядку групи при формуванні кожної системи лінійних алгебричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні рівняння. По-друге, система методів створила передумови до розпаралелення процесу розв’язування задачі в цілому.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та основні задачі досліджень, наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, наведено кількість публікацій за темою роботи, виділено особистий внесок здобувача тощо.

У першому розділі окреслено стан проблеми та відомі шляхи її вирішення у літературі, описано математичну модель електростатичного поля електрон-

но-оптичної системи у суттєво просторовій постановці, наведено загальну схему врахування геометричної симетрії у конфігурації поверхонь електродів на основі апарату теорії груп, розглянуто плоске наближення суттєво просторової задачі.

У другому розділі на прикладі двох модельних задач розроблено систему методів моделювання електростатичних полів окремих класів електронно-оптичних систем з максимальним врахуванням наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь.

Врахування специфіки розімкнених поверхонь дозволило значно зменшити кількість контрольованих особливих точок (в найкращому випадку мати справу лише з однією). Це також суттєво спростило весь алгоритм обчислень. Процедуру розпаралелення проведено з використанням програмного засобу OpenMP. З метою врахування сингулярної поведінки розв'язку в околі контуру розімкненої поверхні розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки.

Помічено, що при переважанні однієї геометричної складової поверхні над іншими значення потенціалу в її поперечних перерізах, близьких до центрального, мало змінюється. Тому для встановлення якісної картини поля в центральних поперечних перерізах електронно-оптичних систем, за умови задоволення граничними поверхнями розглядуваних у роботі геометричних властивостей, можна обмежитись дослідженням лише плоских перерізів просторових конструкцій.

У третьому розділі розглянуто математичну модель, яка описує так зване плоске електростатичне поле. При цьому суттєво враховано специфіку відповідної крайової задачі. Основну увагу зосереджено на питанні еквівалентності цієї задачі певному інтегральному рівнянню та задачі вибору адитивної сталої, яка присутня в інтегральному зображенні плоского електростатичного поля при його математичному моделюванні. Показано, що цю константу можна об-

числити за наявності конгруентних складових граничної поверхні.

Здійснено чисельне моделювання електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем з абелевими групами симетрії восьмого та четвертого порядків. Слід зауважити, що останні є деякими плоскими наближеннями просторових задач розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи та плоского конденсатора. Розглянуто особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрії скінченних порядків. Для підтвердження доцільності та оцінки ефективності відповідної процедури проведено низку чисельних експериментів.

У четвертому розділі на прикладі розв'язування однієї плоскої модельної задачі електростатики проаналізовано систему обчислювальних методів, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь, декомпозиція складних областей, апарат функцій Гріна та врахування симетрії окремих елементів межі. Проведене дослідження ілюструє загальний підхід до розв'язування складної задачі математичної фізики, який має на меті максимально використати всі особливості досліджуваної задачі.

У рамках розв'язання науково-практичного завдання розвитку математичних моделей та розробки методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку розширено можливості засобів і методів математичного моделювання потенціальних полів електростатичних систем на основі методу інтегральних рівнянь. Суттєво розширені границі можливого пошуку оптимальної конструкції електронно-оптичної системи, оцінено параметри такої системи, фізичне вимірювання яких або трудомістке, або неможливе для необхідної точності. Забезпечено стійкість процедур знаходження параметрів електростатичних полів класів систем електронної оптики з наявною симетрією граничних поверхонь. Ефективніше використано

оперативну пам'ять комп'ютера за рахунок зменшення її необхідного обсягу у 256, 64, 16, 4 рази для класів систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевими групами симетрій шістнадцятого, восьмого, четвертого, другого порядків, відповідно. А також розроблено програмне забезпечення, в якому реалізовано процедури розпаралелення розрахунків електростатичних полів класів електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів шляхом використання багатопотоковості, сучасної архітектури багатоядерних процесорів та програмних засобів у відповідності до специфікації OpenMP. В результаті зменшено час обчислень: на 50% для систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії другого порядку при використанні двоядерних процесорів; на 75% – четвертого порядку при використанні чотириядерних процесорів, на 94% – шістнадцятого порядку при використанні шістнадцятядерних процесорів.

Результати дисертації можуть бути використані для проектування електронно-оптичних систем складної структури.

Ключові слова: математичне моделювання, електронно-оптична система, метод інтегральних рівнянь, абелева група симетрії, функція Гріна, декомпозиція складних областей.

Список публікацій здобувача:

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Mochurad L.I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Y.S. Harysym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009.– Vol. 8, № 2. – P. 149-15 – Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).

2. Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics.– 2011. – №2(105). – P. 98-110 – Журнал індексується в Scopus i Web of Science.
3. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– 2009.– Вип. 2. – С. 105-118.
4. Мочурад Л.І. Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Вісник Херсонського національного технічного університету.–Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). Т.1. – С. 155-165 – Журнал індексується в Science Index (eLIBRARY.RU).
5. Мочурад Л.І. Апостеріорний метод оцінювання похибки і розпаралелення обчислень для одного класу задач електронної оптики лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць. – Львів, 2017. – Том 27, № 5. – С. 155-159– Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).
6. Мочурад Л.І. Розпаралелення розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора / Л.І. Мочурад // Науково-технічний журнал "Біоніка інтелекту". – Вип. 2. – 2017. – С. 72-76.
7. Гарасим Я. Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні гра-

ничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання / Я. Гарасим, Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 64-74.

8. Мочурад Л.І. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків / Л.І. Мочурад // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 34-41.
9. Мочурад Л.І. Чисельний аналіз граничних задач теорії потенціалу в \mathbf{R}^2 з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 32-47.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. Мочурад Л.І. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму "Проблеми оптимізації обчислень", 24-29.09.09, смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В.М. Глушкова НАНУ. – Київ. – 2009. – С. 117-122.
11. Мочурад Л.І. Використання процедури розпаралелення при розрахунку електростатичних полів квадрупольних лінз та їх систем / Л.І. Мочурад // Матеріали XVIII міжнародної конференції з математичного моделювання МКММ-2017. – Херсон: ХНТУ, 2017. – С. 27-28.
12. Мочурад Л.І. Ефективне розв'язування граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXVII)", 22 -

- 29.09. 2011 р., смт. Кацивелі (Крим), Міністерство освіти та науки України, Національна академія наук України, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – Київ.– 2011.– С. 129-131.
13. Mochurad L.I. Numeral modelling of the potential fields of electron-optical systems of complicated structure / L.I. Mochurad // Proceedings of the International Conference "Integral Equations – 2010" 25-27 August 2010.– Ivan Franko National University of Lviv. – 2010. – P. 87-93.
14. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики для наближеного розв'язування задач електронної оптики / Л.І. Мочурад // Технологічний аудит та резерви виробництва. – 2012. – №5/2(7) / Матеріали міжнар. наук. конф. "Наукова періодика слов'янських країн в умовах глобалізації". Ч. 1. – К., 2012. – С. 35-36.
15. Мочурад Л.І. Ефективне використання методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні краєвих задач з наявною симетрією в геометрії елементів межі / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник тез міжнародної конференції "Інтегральні рівняння – 2009", 24-26.01.09, м. Київ.– ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАНУ, 2009. – С. 112-113.
16. Мочурад Л.І. Дослідження методики розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник матеріалів IV Міжвузівської науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка", 2009. – С. 38-39.
17. Мочурад Л.І. Наближене розв'язування задач електростатики із врахуванням специфіки вхідної інформації. / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін //

Збірник матеріалів V Міжвузівської наук.-техн. конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка", 2010.– С. 268-269.

18. Мочурад Л.І. Особливості чисельного розв'язування граничних задач за наявності симетрії елементів межі. / Л.І. Мочурад // Збірник тез за матеріалами VIII науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні". – Львів. – 2012. – С. 310-311.

ABSTRACT

Mochurad L.I. Mathematical modeling of the electronic optic systems taking into account the symmetry of the boundary surfaces. – Qualifying scientific work on the right of manuscripts.

The thesis for the degree of candidate of technical sciences, specialty 01.05.02–Mathematical modeling and numerical methods. Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The modern scientific problem of the electrostatic field calculations in the modeling process of the electron-optical systems with the symmetry appeared in geometry of the surfaces-electrodes is solved in the paper. This solution is realized via the construction and improvement of the numerical modeling methods in the case of the complicated electrostatic fields. These methods are based on the integral equations method connected with the group theory, domain decomposition method and apparatus of Green function. The proposed system of methods allowed us to use the main computer memory more effectively, diminishing it by squared order of group while constructing every system of linear algebraic equations which approximate the corresponding integral equations. Thus, the type of tasks which assumes a numeral modelling with the use of the method of boundary integral equations is broaden. Also, pre-conditions for parallelization of the solving process in general are created.

The first chapter provides a state of the problem and the ways of its solution in the literature, describes a mathematical model for calculating the electrostatic field of electron-optical systems in a substantially spatial formulation, presents a general scheme for the consideration of geometric symmetry in the configuration of surfaces of electrodes on the basis of the group theory apparatus, considers some planar approximation substantially spatial problem.

In the second chapter, on the example of two model problems, a system of

methods of the electrostatic field calculations of certain classes of electron-optical systems with the maximum consideration of the existing symmetry in the geometry of open surfaces was developed.

Taking into account the specificity of the open-circuit surfaces it is possible to decrease the amount of the controlled special points considerably (in the best case to deal only with one), and also substantially to simplify the algorithm of calculations. The procedure of parallelization was realized via the most popular means of OpenMP. With the aim to take into account the singular behaviour of the solution in the circuit of the open surface a posteriori method of the error evaluation is created.

It is also noticed that under predominance of one geometrical component surface over the other ones the changes of the potential value in its transversal cuts close to central are not noticeable. To state the high-quality representation of the field in the central transversal cuts of the electron-optical systems, one can limit the research by the flat cuts of spatial constructions, since boundary surfaces satisfy the geometrical properties mentioned above. Taking into account the specific characters of initial boundary value problem in the mathematical model, describing so-called flat electrostatic field, is considered.

In the third chapter, we consider a mathematical model that describes the so-called plane electrostatic field. At the same time, the specificity of the corresponding boundary value problem is taken into account. The main attention is focused on the problem of the equivalence of this problem to a certain integral equation and the problem of the choice of additive constant that is present in the integral image of a plane electrostatic field with its mathematical modeling. It is shown that this constant can be calculated in the presence of congruent components of the boundary surface.

A numerical simulation of the electrostatic fields of plane electron-optical systems

with abelian groups of symmetry of the eighth and fourth order was also carried out. It should be noted that the latter are some flat approximations of the spatial problems of calculating the electrostatic field of a quadrupole lens and a plane capacitor. The features of parallelization of numerical solving problems of plane electrostatics with abelian finite-order symmetry groups are considered. The proposed concept is illustrated by the numerical solving of some model tasks. The equipotential lines are used for the representation of the electrostatic field.

In the fourth chapter, on the example of solving a single plane modeling problem of electrostatics, a system of computational methods based on the method of integral equations, the decomposition of complex domains, the apparatus of Green's functions and the consideration of the symmetry of individual elements of the boundary are analyzed. The study illustrates the general approach to solving a complex problem of mathematical physics, which aims to maximally use all the features of the problem under study.

For solving the task of the development of an effective system of methods for numerical simulation of the calculation of electrostatic fields for classes of electron-optical systems with abelian finite-order symmetry groups were expanded the possibilities of means and methods of mathematical modeling of potential fields of electrostatic systems on the basis of the method of integral equations. Significantly expanded the boundaries of a possible search for an optimal structure of the electron-optical system, evaluated the parameters of such a system, whose physical measurement is either labor-intensive or impossible for the required precision. Managed to ensure the stability of the procedures for finding the parameters of the electrostatic fields of the classes of systems of electronic optics with the available symmetry of the boundary surfaces. The memory of the computer was used more efficiently by reducing its volume: 256 times for the class of systems with the abelian group of symmetry of the sixteenth order; 64 times for the class of systems

with the abelian group of symmetry of the eighth order; 16 times for a class of systems with abelian symmetry group of the fourth order; 4 times for the class of systems with abelian symmetry group of the second order. developed software that implements the procedures for parallelizing the calculations of electrostatic fields of classes of electron-optical systems with the available geometric symmetry of electrodes surfaces by using such properties as multithreading, modern architecture of multi-core processors and the OpenMP software model. As a result, computing time is reduced: 50% for systems with abelian second-order symmetry group using dual-core processors; by 75% for systems with abelian symmetry group of the fourth order using quad-core processors, by 94% for systems with abelian symmetry group of the sixteenth order using sixteen-core processors.

The results of the dissertation can be used in the synthesis of electron-optical systems of complex structure.

Keywords: mathematical modelling, electronic optical system, integral equation method, abelian symmetry group, Green function, domain decomposition.

The list of author's publications:

Proceedings where basic scientific results of thesis were published:

1. Mochurad L.I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Y.S. Harysym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing.– 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149-15 – The journal is indexed in IC Journals Master List (Index Copernicus).
2. Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied

Mathematics.– 2011. – №2(105). – P. 98-110 – The journal is indexed in Scopus i Web of Science.

3. Mochurad L.I. Introduction of an effective method for numerical solving a class of boundary problems of the theory of potential / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Collection of scientific works "Mathematical and Computer Modeling". Series: Engineering. – Kamyanets-Podilsky. – 2009. – Issue 2. – P. 105-118.
4. Mochurad L.I. An effective approach to the calculating of the electrostatic field of a quadrupole lens / L.I. Mochurad, P.Ya. Pukach // Visnyk of Kherson National Technical University. - Kherson: KhNTU, 2017.– Issue 3(62). Vol. 1.– C. 155-165 – The journal is indexed in the Science Index (eLIBRARY.RU).
5. Mochurad L.I. The a posteriori method of error evaluation and parallelization of calculating for one class of problems of the electronic optics / L.I. Mochurad, P.Ya. Pukach // Scientific Bulletin of UNFU.– 2017.– 27(5).–P. 155-159 – The journal is indexed in IC Journals Master List (Index Copernicus).
6. Mochurad L.I. Parallelization of calculating of the electrostatic field of a plastic condenser / L.I. Mochurad // Scientific and technical journal "Bionics of Intellect" . – Issue 2. – 2017. – P. 72-76.
7. Garasym J. Integral equation method for numerical modelling of boundary value problems in potential theory and possibility of its efficient use / J. Garasym, L. Mochurad, B. Ostudin // Visnyk Lviv univ. Ser. appl. math. comp. sci. – 2008. – №. 14. – P. 64-74.
8. Mochurad L. Parallelization of procedures for numerical solution of the

- plane electrostatics problems with abelian group of symmetry of finite order / L. Mochurad // Visnyk of the Lviv univ. Series appl. math. and informat. – 2013. – Issue 20. – P. 34-41.
9. Mochurad L. Numerical analysis of \mathbf{R}^2 -boundary value problems in potential theory with finite order abelian group of symmetry / L. Mochurad, B. Ostudin // Visnyk Lviv univ. Ser. appl. math. comp. sci. – 2008. – № 14.– P. 32-47.
 10. Mochurad L.I. Investigation of approximate solutions of one boundary value problem of potential theory with the Abelian group of symmetry of the sixteenth order / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Works of the International Symposium "Problems of Optimization of Computing". – Kiev. – 2009. – P. 117-122.
 11. Mochurad L.I. Using the parallelization procedure for calculating the electrostatic fields of quadrupole lenses and their systems / L.I. Mochurad// Materials of the XVIII International Conference on Mathematical Modeling, MKMM-2017. – Kherson: KhNTU, 2017. – P. 27-28.
 12. Mochurad L.I. Effective solving of the boundary integral equation of the potential theory with finite order abelian group of symmetry / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Proceedings of the International Youth Mathematical School "Problem of Optimization of Computing". – Kiev. – 2011. – P. 129-131.
 13. Mochurad L.I. Numerical modelling of the potential fields of electron-optical systems of complicated structure / L.I. Mochurad // Proceedings of the International Conference "Integral Equations – 2010" 25-27 August 2010.– Ivan Franko National University of Lviv. – 2010. – P. 87-93.
 14. Mochurad L. Implement an effective technique for numerical solution of

- problems of electronic optics / L. Mochurad // Technology audit and production reserves. – №5/2(7), 2012. – P. 35-36.
15. Mochurad L.I. Effective use of the method of integral equations in solving boundary value problems with available symmetry in the geometry of the elements of the boundary / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Abstracts of international conference "Integral equations – 2009". – Kiev. – 2009. – P. 112-113.
 16. Mochurad L.I. Investigation of the method of calculating the electrostatic field of a quadrupole lens / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Proceedings of the IV Interuniversity scientific and technical conference of scientific and pedagogical workers "Problems and prospects of development of economy and entrepreneurship and computer technology in Ukraine". – Lviv. – 2009. – P. 38-39.
 17. Mochurad L.I. Approximate solution of electrostatics tasks taking into account the specifics of the incoming information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Proceedings of the V Interuniversity scientific and technical conference of scientific and pedagogical workers "Problems and prospects of development of economy and entrepreneurship and computer technology in Ukraine" – Lviv. – 2010. – P. 268-269.
 18. Mochurad L.I. Features of numerical solution of boundary problems in the presence of symmetry of the elements of the boundary / L.I. Mochurad // Abstracts on materials of VIII scientific and technical conference of scientific and pedagogical workers "Problems and prospects of development of economy and entrepreneurship and computer technology in Ukraine". – Lviv. – 2012. – P. 310-311.

ЗМІСТ

ВСТУП	21
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ШЛЯХИ ЇЇ ВИ- РІШЕННЯ	29
1.1. Опис математичної моделі досліджуваного явища	30
1.2. Загальна схема врахування геометричної симетрії у поданні гра- ничних поверхонь	33
1.3. Можливість використання плоского наближення	37
Висновки до розділу 1	39
РОЗДІЛ 2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОН- НОЇ ОПТИКИ	40
2.1. Розрахунок електростатичного поля квадрупольної лінзи як ти- пова модельна задача в суттєво просторовій постановці	40
2.1.1. Подання еквівалентного двовимірного інтегрального рівня- ння відповідно до специфіки поверхні S та його параме- тризація	42
2.1.2. Врахування наявної геометричної симетрії у поданні суку- пної граничної поверхні	43
2.1.3. Схема наближеного розв'язування двовимірних інтеграль- них рівнянь	48
2.1.4. Результати чисельних експериментів	51
2.1.5. Розпаралелення процедури розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи	55

2.2. Задача розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора	57
2.2.1. Максимальне врахування наявної симетрії у зображенні пластин	59
2.2.2. Апостеріорний метод оцінювання похибки наближених розв'язків інтегральних рівнянь (2.2.4)	64
2.2.3. Ітераційне уточнення результатів розрахунків	68
2.2.4. Результати чисельних експериментів	69
Висновки до розділу 2	72

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ З УРАХУВАННЯМ СИМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ В \mathbb{R}^2

74

3.1. Плоский варіант суттєво просторової задачі електростатики та деякі аспекти її дослідження та розв'язування	74
3.1.1. Про еквівалентність основної проблеми інтегральному рівнянню	75
3.1.2. Теорема про адитивну сталу	83
3.2. Висвітлення типових проблем, що виникають при розв'язуванні однієї модельної задачі з абелевою групою симетрії восьмого порядку	88
3.2.1. Параметризація відповідного інтегрального рівняння	90
3.2.2. Врахування симетрії межі	91
3.2.3. Зауваження щодо класу отриманих інтегральних рівнянь	96
3.2.4. Чисельне розв'язування отриманих інтегральних рівнянь	97
3.3. Аналіз, демонстрація та порівняльна характеристика розв'язків модельних задач з абелевими групами симетрії восьмого порядку	99

3.3.1. Результати чисельних експериментів визначення параметрів електростатичного поля квадрупольної лінзи	100
3.3.3. Результати чисельних експериментів в плані знаходження адитивної сталої	103
3.4. Модельна задача розрахунку електростатичного поля конденсатора як типовий приклад плоского наближення	106
3.4.1. Постановка задачі	106
3.4.2. Врахування геометричної симетрії у поданні вхідної інформації	107
3.4.3. Результати чисельних експериментів	109
3.5. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрій скінченних порядків	111
3.5.1. Використання паралельних комп'ютерів	111
3.5.2. Паралельні обчислення на багатоядерних персональних комп'ютерах	112
Висновки до розділу 3	117

РОЗДІЛ 4. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОДНІЄЇ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ З АБЕЛЕВОЮ ГРУПОЮ СИМЕТРІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4.1. Загальна постановка проблеми	119
4.2. Перша допоміжна задача	120
4.3. Параметризація досліджуваного інтегрального рівняння	125
4.4. Друга допоміжна задача	129
4.5. Побудова розв'язку початкової задачі з використанням одного із варіантів методу Шварца	130

4.6. Результати чисельних експериментів	132
Висновки до розділу 4	135
ВИСНОВКИ	136
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	138
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕ- МОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	153
ДОДАТОК Б. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ	157

ВСТУП

Актуальність теми.

Системи електронної оптики є основними компонентами сучасних науково-дослідних комплексів, за допомогою яких вивчаються складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Сфери застосування таких електронно-оптичних систем:

- радіолокація, радіоастрономія, вимірювальна техніка (електронні гармати є невід'ємними частинами ламп біжучої хвилі, вони є важливими електровакуумними приладами);
- ядерна фізика (лінзи та їх системи є основними частинами сучасних потужних електронних мікроскопів та прискорювачів; у більшості мікрондів, що знаходяться в експлуатації, використовують мультиплети електростатичних квадрупольних лінз);
- медицина (дослідження за допомогою новітніх електронно-оптичних підсилювачів рентгенівського зображення).

У процесі моделювання систем електронної оптики постає задача розрахунку потенціальних полів, створених сукупністю заряджених електродів. Електростатичні поля досліджуються переважно за допомогою чисельних методів, оскільки аналітичний розрахунок поля в загальному випадку є складний, або взагалі неможливий. Значний внесок у розвиток теорії математичного моделювання електростатичних полів зробили Бакалець В.А., Верлань А.Ф., Владіміров В.С., Ільїн В.П., Людкевич Й.В., Мельник І.В., Захаров Е.В., Сафронов С.І., Хапко Р.С., Kress R., Johansson B.T. та інші. Відомо, що метод інтегральних рівнянь дає можливість ефективно розв'язувати електростатичні задачі.

Про актуальність дисертаційного дослідження свідчить те, що при аналізі сучасних електронно-оптичних систем виникає необхідність дослідження значної кількості заряджених електродів складної конфігурації, а відомі методи розрахунку електростатичних полів відповідних систем не є універсальними, оскільки не можуть забезпечити високу точність та швидкодію обчислень. За таких умов методу інтегральних рівнянь у його канонічній формі властива втрата стійкості. А також недоліком існуючих методів є те, що вони не враховують можливість опису об'єкту дослідження моделлю з врахуванням симетрії граничних поверхонь електродів. Іншим аргументом, що підтверджує актуальність розглянутих в дисертації задач, є те, що розмікненість граничних поверхонь електродів звужує коло чисельних методів, які б адекватно враховували фізичну природу досліджуваного електростатичного поля. Густина розподілу поверхневого заряду поблизу краю зарядженої поверхні стрімко зростає і перевищує на порядок відповідне значення в центрі поверхні. Це пов'язано з наявністю потенціального бар'єру, розмір якого в радіальному напрямі співпадає з розміром поверхні електроду. Велика кількість особливих точок значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язання відповідних інтегральних рівнянь і не дає можливості скористатись простою і ефективною чисельно-аналітичною схемою розрахунку. Актуальність дисертаційного дослідження також полягає в тому, що існуюче програмне забезпечення розрахунку електростатичних полів електронно-оптичних систем із складною конфігурацією поверхонь електродів вимагає великих затрат часу для досягнення необхідної точності. Крім того, існуючі програмні продукти потребують складного налаштування відповідно до сформульованої задачі.

У цьому випадку значну громіздкість процедури чисельного аналізу можна значно спростити, максимально врахувавши наявну симетрію в геометрії граничних поверхонь, уникнути числової нестійкості обчислень, забезпечити

необхідну точність та мінімізувати час обчислень.

Отже, задача розвитку математичних моделей та розробки нових методів розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку, є актуальною науковою та практичною задачею, яка виникає у процесі математичного моделювання сучасних систем електронної оптики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації відповідає науковому напрямку "Аналіз великих даних" кафедри систем штучного інтелекту Національного університету "Львівська політехніка". Дисертаційна робота виконана також у рамках науково-дослідної роботи кафедри обчислювальної математики та програмування цього ж університету "Обґрунтування та застосування обчислювальних методів для розв'язання класичних та прикладних задач" (номер держреєстрації 0117U001850; 2017-2021 рр.) та держбюджетних робіт кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка: "Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь математичної фізики і механіки" (номер держреєстрації 0108U004150; 2008 р.), "Побудова і дослідження методів розв'язування лінійних та нелінійних задач обчислювальної математики" (номер держреєстрації 0107U007420; 2007-2009 рр.), "Чисельне розв'язування лінійних та нелінійних задач обчислювальної математики" (номер держреєстрації 0110U003150; 2010 р.). У рамках цих робіт здобувач розробила методи математичного моделювання систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь.

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи є розроблення ефективних методів для чисельного моделювання електростатичних полів складних електронно-оптичних систем.*

Мета дисертаційної роботи визначає необхідність розв'язання таких задач.

1. Розвинути математичні моделі опису електростатичних полів та розробити обчислювальні методи розрахунку цих полів для деяких класів систем електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь та апарату теорії груп.
2. Розробити методи та алгоритми числового розрахунку плоских систем електростатики зі складною геометрією поля з використанням методу декомпозиції областей та наявної геометричної симетрії.
3. Розробити програмне забезпечення для розрахунку електростатичних полів класів електронно-оптичних систем з наявною геометричною симетрією поверхонь електродів.

Об'єктом дослідження є електростатичні поля електронно-оптичних систем.

Предметом дослідження є математичні моделі та методи математичного моделювання електростатичних полів класів електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів.

Як *методи досліджень* у дисертаційній роботі використовуються методи функціонального аналізу, алгебри та обчислювальної математики, зокрема, апарат теорії груп, апарат функцій Гріна, метод декомпозиції областей, метод граничних інтегральних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:
вперше

- розроблено метод моделювання електростатичних полів складних електронно-оптичних систем та їх плоских наближень, який базується на граничних інтегральних рівняннях теорії потенціалу у поєднанні з апаратом

теорії груп, що на відміну від існуючих методів дозволяє уникнути числової нестійкості обчислень;

- встановлено умови коректності розв'язків плоских зовнішніх граничних задач теорії потенціалу, що уможлиблює для класів крайових задач з абелевою групою симетрії скінченних порядків знайти аналітичне подання адитивної сталої, присутньої у зображенні розв'язку;
- розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі кутової точки поверхні, уникаючи труднощів аналітичного врахування її поведінки;
- розроблено стійкий обчислювальний алгоритм розв'язання модельних задач, який дозволяє процес обчислення реалізувати паралельно;

удосконалено

- математичні моделі електростатичних полів для класів систем електронної оптики з геометричною симетрією поверхонь електродів;
- метод чисельного моделювання складних електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем на основі апарату функцій Гріна, методу декомпозиції областей з врахуванням наявної геометричної симетрії;

дістала подальший розвиток методологія чисельного аналізу параметрів електростатичного поля електронно-оптичних систем з геометричною симетрією граничних поверхонь.

Практичне значення отриманих результатів полягає у досягненні таких результатів:

- розширено можливості засобів і методів математичного моделювання потенціальних полів електростатичних систем на основі методу інтегральних рівнянь;
- суттєво розширено границі можливого пошуку оптимальної конструкції електронно-оптичної системи, оцінені параметри такої системи, фізичне вимірювання яких або трудомістке, або неможливе для необхідної точності;
- забезпечено стійкість процедур знаходження параметрів електростатичних полів класів систем електронної оптики з наявною симетрією граничних поверхонь (ефективніше використано оперативну пам'ять комп'ютера за рахунок зменшення її необхідного обсягу у 256, 64, 16, 4 рази для класів систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевими групами симетрій шістнадцятого, восьмого, четвертого, другого порядків, відповідно);
- розроблено програмне забезпечення, в якому реалізовано процедури розпаралелення розрахунків електростатичних полів класів електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією поверхонь електродів шляхом використання багатопотоковості, сучасної архітектури багатоядерних процесорів та програмних засобів у відповідності до специфікації OpenMP (у результаті зменшено час обчислень: на 50% для систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії другого порядку при використанні двоядерних процесорів; на 75% – четвертого порядку при використанні чотириядерних процесорів, на 94% – шістнадцятого порядку при використанні шістнадцятаядерних процесорів).

Результати дисертації можуть бути використані для проектування елект-

ронно-оптичних систем складної структури.

Впровадження результатів роботи. Одержані в роботі результати використано у дослідженнях, пов'язаних із аналізом та моделюванням електромагнітного випромінювання космічних об'єктів в діапазоні радіохвиль, які проводять у відділі методів та систем дистанційного зондування Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України, що підтверджено відповідним актом впровадження. Також результати наукових досліджень впроваджено у Національному університеті "Львівська політехніка" в навчальний процес у курсі "Дискретна математика" у вигляді методичних вказівок для самостійної роботи та виконання лабораторних робіт.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором дисертації особисто. У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, автору належить: [12] – розробка ефективних методів для розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора; [36, 41] – розроблення обчислювального алгоритму, який дозволив процес розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи реалізувати на обчислювальних засобах з паралельною архітектурою; [38, 45] – знаходження електростатичного поля плоскої електронно-оптичної системи з граничною поверхнею, яка володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку; [39, 42] – розвинення математичної моделі квадрупольної лінзи та розробка обчислювальних методів розрахунку електростатичного поля цієї системи; [40, 96] – розробка апостеріорного методу оцінювання похибки; [47, 95] – дослідження коректності розв'язків плоских зовнішніх граничних задач теорії потенціалу та знаходження аналітичного подання адитивної сталої, присутньої у зображенні розв'язку; [52] – розробка та аналіз обчислювальних методів при розв'язуванні плоскої задачі електростатики в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп, апаратом функцій Гріна та методом декомпозиції областей.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на міжнародних симпозиумах: "Проблеми оптимізації обчислень" (сmt. Кацивелі, Крим, 2009, 2011 pp.), на XVIII міжнародній конференції з математичного моделювання 'МКММ - 2017' (м. Херсон, 2017 p.), на міжнародній науковій конференції "Інтегральні рівняння – 2010" (м. Львів, 2010 p.), на міжнародній науковій конференції "Наукова періодика слов'янських країн в умовах глобалізації" (м. Київ, 2012 p.), на міжнародній науковій конференції "Інтегральні рівняння – 2009" (м. Київ, 2009 p.), на міжвузівських науково-технічних конференціях "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні" (м. Львів, 2009, 2010, 2012 pp.), а також на наукових семінарах кафедри систем штучного інтелекту Національного університету "Львівська політехніка" та кафедри обчислювальної математики Львівського національного університету імені Івана Франка (2006-2011 pp.).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані у 18 наукових публікаціях [12, 36-42, 44, 45, 47, 49-52, 95-97], із них 6 – одноосібні; 6 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, з них 4 – праці у журналах, що входять до наукометричних баз даних; 3 статті у наукових фахових виданнях з фізико-математичних наук; 9 праць у тезах доповідей міжнародних та міжвузівських конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних літературних джерел та додатків. Робота містить 116 сторінок основного тексту. Загальний обсяг дисертації – 161 сторінка, 19 таблиць, 27 рисунків, 102 найменування використаних першоджерел.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ШЛЯХИ ЇЇ ВИРІШЕННЯ

У процесі моделювання згадуваних вище електронно-оптичних систем базовою є задача визначення електростатичного поля, створюваного системою заряджених електродів [23, 30]. Аналітичний розрахунок даного поля може бути виконаний тільки у найпростіших випадках. Але навіть тоді, коли вдається отримати аналітичний розв'язок, кінцеві вирази часто виявляються громіздкими і не досить зручними для практичного використання [20, 62]. Тому при моделюванні електронно-оптичних систем широко використовують чисельні методи розрахунку і експериментального дослідження електростатичних полів [67].

Для знаходження розподілу потенціалу електростатичного поля ефективним виявляється використання методу інтегральних рівнянь (IP) [4, 7, 24, 32, 63-66, 83, 84, 87]. Показано [33-35], що даний метод у багатьох випадках є більш економним, ніж скінченно-різницеві методи, які раніше використовувались на практиці. До найбільш важливих переваг методу інтегральних рівнянь слід віднести зменшення розмірності задачі на одиницю та застосування для необмежених областей. Використання методу до крайових задач у частково-необмежених областях має ряд особливостей. Безпосереднє використання прямого або непрямого варіантів методу інтегральних рівнянь приводить до необхідності визначення невідомої функції на безмежних границях. Уникнути цих проблем вдається, задіюючи в інтегральному поданні розв'язку замість фундаментального розв'язку відповідні функції Гріна [88]. Це приводить до інтегрального рівняння на обмеженій частині границі області. В [83, 85, 86] техніка функцій Гріна використана для чисельного розв'язування прямих і обернених задач в плоских частково-необмежених областях. Наближені мето-

ди розв'язування інтегральних рівнянь для кусково-гладких замкнених граничних поверхонь простої структури є добре відомими [61, 71, 76]. Проте при аналізі реальних сучасних електронно-оптичних систем виявлена значна кількість заряджених електродів складної конфігурації з наявною геометричною симетрією граничних поверхонь. В свою чергу, при математичному моделюванні таких систем окремі електроди представляються у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задаються граничні значення потенціалів [73]. Це суттєво ускладнює традиційне застосування методу інтегральних рівнянь, а розімкненість граничних поверхонь-електродів звужує коло чисельних методів, які б адекватно враховували фізичну природу досліджуваного явища.

У цьому розділі описано математичну модель електростатичного поля електронно-оптичних систем у суттєво просторовій постановці, наведено загальну схему врахування геометричної симетрії в конфігурації поверхонь-електродів на основі апарату теорії груп, розглянуто деяке плоске наближення суттєво просторової проблеми, а також здійснено огляд літератури, присвяченої дослідженням та чисельному моделюванню систем електронної оптики.

1.1. Опис математичної моделі досліджуваного явища

Методи моделювання дозволяють досліджувати електростатичні поля електродів, величина, форма й розміщення яких відповідає конфігурації електродів реального досліджуваного приладу. Моделювання більшості електронно-оптичних систем вимагає чисельного аналізу параметрів електростатичного поля, створюваного цими системами. Нехай електростатичне поле електронно-оптичної системи створюється N ідеально провідними електродами, які у своїй сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею $S := \bigcup_{i=1}^N S_i$, де $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Кожен електрод $S_i \in S$ характеризують заданим потенціалом, який є постійною величиною. Розімкнені поверхні S_i віднесемо до класу ліпшицевих.

Знаючи геометрію електродів та їх потенціали, завжди можна розрахувати розподіл потенціалів у просторі, а потім побудувати ці розрахунки графічно і отримати потрібну картину. Електростатичний потенціал має властивість адитивності: потенціал системи зарядів дорівнює сумі потенціалів, створених кожним із них. При цьому принципове значення має правило подібності потенціальних полів, яке дозволяє у великому масштабі відтворити поля, що досліджуються. Правило подібності стверджує, якщо розміри електродів, які створюють поле, і вся відстань між цими електродами змінені в одній пропорції, то структура поля залишається незмінною.

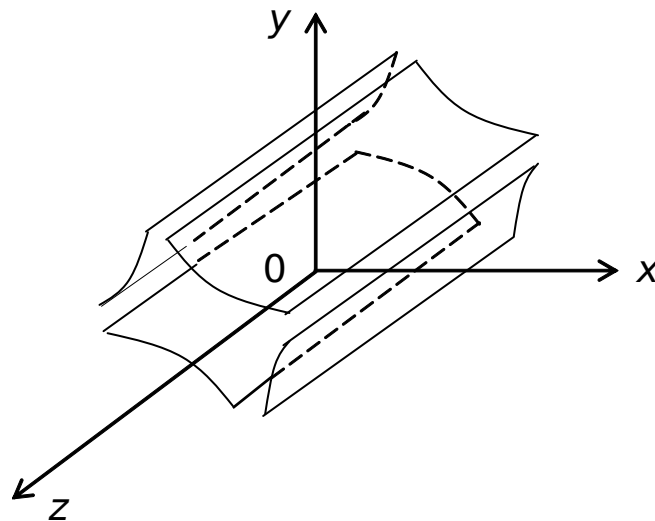


Рис. 1.1: Квадрупольна лінза

Можливість попереднього розрахунку розподілу електростатичного поля є важливою задачею при проектуванні електричного та електронного обладнання. Складність її полягає у взаємодії між провідниками та перерозподілі заряду на їх поверхні. Визначення цього перерозподілу є ключовим етапом розрахунку результуючого електростатичного поля і визначає усю складність задачі: система рівнянь, яка описує розподіл заряду у системі заряджених провідників, має враховувати всі провідники без можливості зменшення їх кількості.

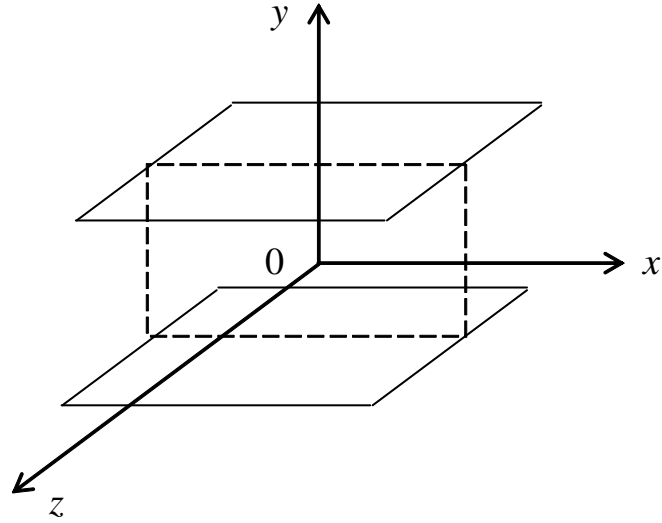


Рис. 1.2: Паралельний конденсатор

Аналіз багатьох сучасних електронно-оптичних систем дає можливість зробити висновок про те, що їх граничні поверхні електродів володіють геометричною симетрією. З точки зору електростатики до таких систем можна віднести, для прикладу, квадрупольні лінзи, паралельний конденсатор. На рис.1.1 представлена одна із можливих конфігурацій квадрупольної системи, а на рис.1.2 – паралельного конденсатора. Доцільним виявилось врахування наявної симетрії в геометрії поверхонь електродів шляхом використання апарату теорії груп.

При математичному моделюванні для розрахунку поля електронно-оптичної системи в загальній постановці необхідно знайти функцію $U \in H^1(\Omega_s, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta U = 0 \text{ в } \Omega_s := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}; \quad (1.1.1)$$

$$\delta^\pm U = f \text{ на } S; \quad (1.1.2)$$

$$\lim_{|Q| \rightarrow \infty} U(Q) = 0, \text{ точка } Q \in \Omega_s, \quad (1.1.3)$$

де $\delta^\pm : H^1(\Omega_s) \rightarrow H^{1/2}(S)$ – оператори сліду [17, 57, 83, 84, 93, 94], $f \in$

$H^{1/2}(S)$ – задане граничне значення потенціалу, а

$$H^1(\Omega_s, \Delta) := \{U \mid U \in H^1(\Omega_s), \Delta U \in L_2(\Omega_s)\}.$$

Як відомо [100], задача (1.1.1)-(1.1.3) еквівалентна такому інтегральному рівнянню

$$(K\mu)(Q) \equiv \iint_S \mu(P)K(Q, P)dS_P = f_k(Q), \text{ точка } Q \in S_k \ (k = \overline{1, N}), \quad (1.1.4)$$

де $K(Q, P) := 1/\text{dist}(Q, P)$ – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^3 , $\mu(P)$ – шукана сукупна "густина розподілу зарядів" на S , тобто $\mu(P) := \{\mu_i(P), P \in S_i; i = \overline{1, N}\}$, а $f_k(Q)$ – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею S_k . У роботі [100] показано, що K – ізоморфізм із $H_{00}^{-1/2}(S)$ в $H^{1/2}(S)$, причому

$$m_1 \|\mu\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \leq \|K\mu\|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \|\mu\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \quad (0 < m_1 \leq m_2). \quad (1.1.5)$$

Нерівності (1.1.5) виражають розв’язність ІР (1.1.4).

1.2. Загальна схема врахування геометричної симетрії у поданні граничних поверхонь

Математичне моделювання електростатичних полів базується на визначенні поля заряджених електродів шляхом застосування чисельних методів до диференціальної або інтегральної форми рівняння, яка описує основну задачу електростатики. Чисельне моделювання з використанням навіть найбільш економного методу колокації [14] за умов кусково-постійної апроксимації шуканої густини розподілу зарядів вимагає розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь великих розмірностей з щільно заповненими матрицями. Остання обставина, в свою чергу, як відомо, призводить до числової нестійкості. Помічено [16, 22], що більшості електронно-оптичних систем притаманна геометрична симетрія, яка дає можливість трактувати задачу як задачу з

абелевою групою симетрії скінченного порядку [21, 22]. Застосування апарату теорії груп [11, 18, 68] при чисельному розв'язуванні відповідних інтегральних рівнянь робить можливим суттєво понизити порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні. Це, в свою чергу, дозволяє уникнути нестійкості розрахунків і, таким чином, розширює коло проблем, що допускають чисельне моделювання з використанням методу інтегральних рівнянь. У загальному випадку за наявності великої кількості складових S для ефективного чисельного розв'язування інтегрального рівняння типу (1.1.4) доцільним є встановлення класів задач, які володіють абелевою групою симетрії того чи іншого скінченного порядку.

Для того, щоб гранична поверхня S володіла деякою абелевою групою симетрії скінченного порядку $\{\tau_i\}_{i=1}^M$, необхідно і достатньо, щоб S допускала поділ на конгруентні складові S_i ($i = \overline{1, M}$; $M \geq N$), тобто $S := \bigcup_{i=1}^M S_i$, причому $S_i \cap S_j = \emptyset$ для $i \neq j$ і $S_1 = \tau_i S_i$, $i = \overline{1, M}$. Тут перетворення τ_i є елементами відповідної групи симетрії M -го порядку. Тому граничну поверхню можна подати у вигляді $S = \bigcup_{i=1}^M \tau_i^{-1} S_1$.

Відомо [22], що оператор Лапласа інваріантний відносно руху евклідового простору, а кожна скінченна група симетрії поверхні в евклідовому просторі є підгрупою заданої групи рухів. Тому, якщо поверхня S володіє деякою скінченною групою симетрії $\{\tau_i\}_{i=1}^M$, то аналогічною групою володіє початкова крайова задача (1.1.1)-(1.1.3) і відповідне їй інтегральне рівняння (1.1.4). Далі розглянемо зображення групи $\{\tau_i\}$ операторами зсуву T_i , які діють в просторі функцій, визначених на S , і є асоційованими з рухами евклідового простору τ_i : $T_i \mu(P) = \mu(\tau_i^{-1} P)$, $P \in S$, $i = \overline{1, M}$. На підставі цього перейдемо від базису $\{\mu_i(P)\}$, $P \in S_i$, до базису $\{\mu'_i(P)\}$, $P \in S_1$, причому $\mu_i(P)$ – звуження $\mu(P)$ на S_i , а $\mu'_i(P) = \mu_i(\tau_i^{-1} P)$. Слід зауважити, що запроваджена "заміна змінних" впливає на загальний вигляд ядер і правих частин у інтегральних

рівняннях (1.1.4). В результаті цих перетворень отримаємо еквівалентну систему інтегральних рівнянь, яку подамо у такому операторному зображенні

$$\sum_{j=1}^M K'_{ij} \mu'_j(Q) = f'_i(Q), \quad i = \overline{1, M}. \quad (1.2.1)$$

Тут K'_{ij} – інтегральні оператори, областями визначення яких є функції μ'_j , задані лише на конгруентній складовій S_1 поверхні S , а $f'_i(Q)$ – виражають крайові умови на S_i , причому $Q \in S_1$.

В силу комутування матриці операторів $K' = \|K'_{ij}\|_{i,j=1}^M$ з довільною матрицею $\hat{P} \in \{\hat{P}^{(k)}\}$, де $\{\hat{P}^{(k)}\}$ – регулярне зображення групи $\{\tau_k\}$ матрицями перестановок, K' можна розглядати як оператор згортки. Тому, використовуючи перетворення Фур'є [74] для $\mu'_j(P)$, запишемо $\bar{\mu}'_j(P) := \sum_{j=1}^M F_{ij} \mu'_j(P)$, де $\|F_{ij}\|_{i,j=1}^M$ – матриця, елементи якої $\chi_i(\tau_j)$ є характери групи $\{\tau_j\}_{j=1}^M$. Останнє дає можливість перетворити систему (1.2.1) до такої послідовності M незалежних інтегральних рівнянь, де інтегрування проводиться лише по S_1 :

$$K_i \bar{\mu}'_j(Q) = \bar{f}'_i(Q), \quad Q \in S_1, \quad i = \overline{1, M}.$$

Тут $K_i := \bar{K}'_{ii} = \sum_{k,m=1}^M F_{ik} K'_{km} F_{mi}^{-1}$, $\|F_{ij}^{-1}\|_{i,j=1}^M$ – матриця оберненого перетворення Фур'є.

Для наближеного розв'язку двовимірних інтегральних рівнянь можна використовувати запропонований Остудінім Б.А. [14, 90] чисельно-аналітичний метод, який діє на певному класі розімкнених граничних поверхонь. Предметом окремих досліджень є побудова ефективних обчислювальних алгоритмів для знаходження густини розподілу зарядів. Відомо [29, 69, 98], що густина розподілу поверхневого заряду стрімко зростає поблизу краю зарядженої поверхні. Це пов'язано з наявністю потенціального бар'єра, розмір якого в радіальному напрямі практично співпадає з розміром поверхні [63]. Адекватне математичне моделювання відповідного поля передбачає врахування характе-

ру поведінки шуканої густини розподілу зарядів поблизу контуру розімкненої поверхні та на лінії її зламу [3, 19, 98]. Для врахування цієї особливості можна використовувати апостеріорний метод оцінки похибки, загальні ідеї якого наведені в роботі [89]. У працях [28, 80, 99] запропоновано способи побудови апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для крайових задач зі звичайним диференціальним рівнянням другого порядку та задач еластостатики.

Врахування наявної симетрії в геометрії заряджених електродів дає можливість "розщепити" початкову задачу на незалежні і розпаралелити процес розрахунку досліджуваного електростатичного поля. Для реалізації паралельних алгоритмів можна у паралельному режимі використовувати декілька комп'ютерів або звернутись до багатопотоковості. Будівництво мультипроцесорних систем є першим та найголовнішим напрямком у мультипотоковості, але для цього шляху розроблення потрібні великі кошти [56]. Використання мультиядерних систем є кращою можливістю для збільшення потужності процесорів [10]. На основі сучасних архітектур багатоядерних процесорів ефективним виявляється застосування популярного програмного засобу OpenMp [25, 102].

Для зображення електричного поля, як правило, використовують силові лінії. Поряд з цим поле можна зображати поверхнями, всі точки яких мають однаковий потенціал. При зображенні поля на площині цим поверхням будуть відповідати деякі лінії. Такі поверхні або лінії називаються еквіпотенціальними поверхнями або лініями [70]. Оскільки усі точки еквіпотенціальної поверхні дають однаковий потенціал, то при переміщенні заряду вздовж неї робота електричного поля дорівнює нулю. Це значить, що сила електричного поля, що діє на заряд, весь час перпендикулярна до переміщення. Звідки ми маємо, що силові лінії завжди перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь.

1.3. Можливість використання плоского наближення

Із метою спрощення сформульованої в суттєво просторовій постановці задачі у праці [8] розглядаються випадки, коли можна обмежитись так званим плоским її наближенням. А саме, якщо поверхні заряджених електродів є нескінченно довгими циліндричними, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей, то в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюється деяка сукупність розімкнених дуг. Тоді значення потенціалу досліджуваного поля в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому розглядувану просторову задачу можна трактувати як плоску. Вказаний підхід досить поширений у практиці проектування електронно-променевих приладів. Зокрема, на рис. 1.3 зображена схема електронно-оптичної системи, яка є плоским наближенням відповідної просторової квадрупольної системи.

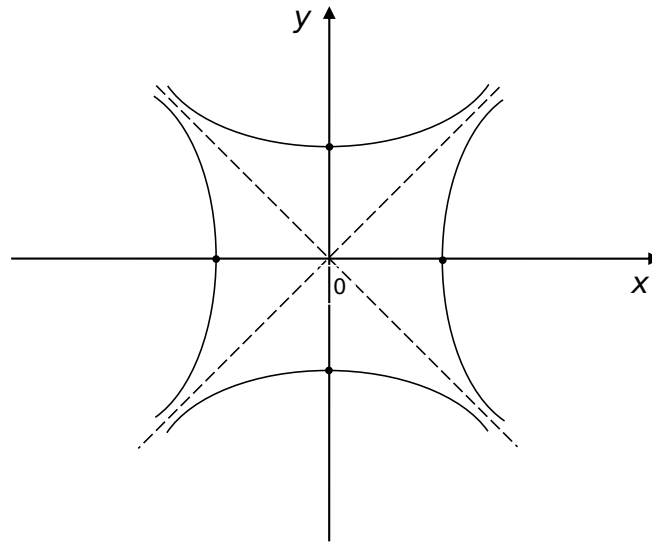


Рис. 1.3: Плоске наближення квадрупольної лінзи

Внаслідок, у роботі також зосереджено увагу на дослідженні певних аспектів математичної моделі, яка описує так зване плоске електростатичне поле.

При цьому відносно проста плоска модель стає в нагоді для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі в суттєво просторовій постановці. У такій ситуації необхідно знайти функцію $V(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{L})$, яка задовольняє

- двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta V(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}, \quad (1.3.1)$$

де $L := \bigcup_{j=1}^N L_j$ – об'єднання скінченної кількості простих, гладких, незамкнених і обмежених дуг L_j на площині \mathbf{R}^2 , причому довільні дві дуги не мають спільних точок, а $\bar{L} := L \cup \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2N}^*\}$, якщо через x_m^* ($m = 2j - 1, 2j; j = 1, 2, \dots, N$) позначати крайні точки розімкненої дуги L_j ;

- крайові умови

$$V^\pm(x) = g(x), \quad x \in L, \quad (1.3.2)$$

де $g(x)$ – відома функція, задана на L , яка в розглядуваному випадку є постійною величиною, а $V^\pm(x)$ – граничні значення шуканої функції за умов прямування точки $x \in L$ по нормалі до L з додатної (від'ємної) сторони;

- умову обмеженості на нескінченності

$$V(\infty) = C, \quad (1.3.3)$$

а також

- ” умову на ребрі ”

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{2N} \int_{C_m^*(\rho)} \left| \frac{\partial V(y)}{\partial \rho} \right| dS_y = 0, \quad (1.3.4)$$

причому $C_m^*(\rho) := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x - x_m^*| = \rho\} \setminus L$.

Оскільки задачу (1.3.1)-(1.3.4) трактуємо плоским наближенням суттєво просторової (1.1.1)-(1.1.3), то межу L вважаємо такою, що володіє абелевою групою симетрії скінченного порядку. Отже, для чисельного моделювання плоских проблем можна також скористатись описаною вище схемою.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі окреслено стан проблеми та шляхи її вирішення у літературі, описано математичну модель електростатичного поля електронно-оптичних систем у суттєво просторовій постановці, наведено загальну схему врахування геометричної симетрії у конфігурації поверхонь-електродів на основі апарату теорії груп, розглянуто деяке плоске наближення суттєво просторової задачі.

РОЗДІЛ 2

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ

При розгляді значної кількості сучасних електронно-оптичних систем помічено, що вони володіють геометричною симетрією. Дана властивість дозволяє серед крайових задач електростатики виділити класи задач, які володіють абелевими групами симетрії скінченних порядків. При цьому чисельне розв'язування типового модельного прикладу із певного класу дозволяє добре проілюструвати всі аспекти запровадженої методики. У цьому розділі, не зменшуючи загальності, на двох модельних прикладах продемонстровано усі основні ідеї методики моделювання процесу наближеного розрахунку електростатичних полів деяких електронно-оптичних систем, які володіють абелевими групами симетрії шістнадцятого та восьмого порядків.

Результати другого розділу опубліковані у [36-39, 42, 50, 96, 97].

2.1. Розрахунок електростатичного поля квадрупольної лінзи як типова модельна задача в суттєво просторовій постановці

З точки зору електростатики до класу задач, які володіють абелевою групою симетрії скінченного порядку, можна віднести задачу розрахунку полів, створюваних так званими квадрупольними системами заряджених електродів.

Розглянемо задачу розрахунку окремих параметрів електростатичного поля квадрупольної лінзи, одна із можливих конфігурацій якої зображена на рис. 2.4. Зазвичай, задача моделювання розрахунку електростатичного поля цієї системи передбачає знаходження розподілу потенціалу. У перерізі електроди даної лінзи мають форму гіпербол. На поверхні електродів електростатичний потенціал сталий. Його сталість досягається перерозподілом зарядів.

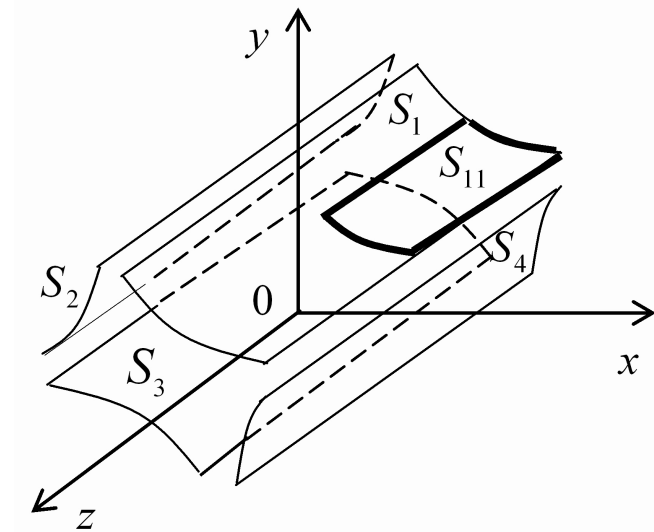


Рис. 2.4: Досліджувана квадрупольна система

У процесі математичного моделювання подамо відповідну систему електродів у такому вигляді: $S := \bigcup_{i=1}^4 S_i$, де S_i – гладкі розімкнені поверхні, що не мають спільних точок, обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини. З математичної точки зору необхідно знайти розв’язок задачі (1.1.1)–(1.1.3). Нехай P , Q і т.д. – точки евклідового простору \mathbf{R}^3 . Тоді, як відомо [100], проблема знаходження електростатичного поля еквівалентна такому інтегральному рівнянню

$$(K\sigma)(P) \equiv \iint_S \sigma(Q) K(P, Q) dS_Q = f_k(P), \quad P \in S_k \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (2.1.1)$$

де $K(P, Q) := 1/\text{dist}(P, Q)$, $f_k(P)$ – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею S_k ($f_k(P) \equiv \text{const}$), а $\sigma(Q)$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів на S , тобто $\sigma(Q) := \{\sigma_i(Q), Q \in S_i; i = \overline{1, 4}\}$. Також слід зауважити, що граничні значення потенціалу $f_k(P)$ не обов’язково володіють симетрією чи антисиметрією.

2.1.1. Подання еквівалентного двовимірного інтегрального рівняння відповідно до специфіки поверхні S та його параметризація

З метою максимального врахування наявної симетрії у геометрії поверхні S розіб'ємо кожну її складову S_i на чотири конгруентні елементи: $S_i := \bigcup_{j=1}^4 S_{ij}$. У відповідності з таким подрібненням S_i подамо (2.1.1) у вигляді

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{S_{ij}} \sigma_{ij}(Q) K(P, Q) dS_Q = f_{kl}(P), P \in S_{kl} \ (k, l = \overline{1, 4}), \quad (2.1.2)$$

де $\sigma_{ij}(Q)$ і $f_{kl}(P)$ – звуження $\sigma_i(Q)$ і $f_k(P)$ на S_{ij} і S_{kl} , відповідно.

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ складові поверхні S задано за допомогою параметричних рівнянь: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$. Тоді “біжучу” (Q) і “контрольну” (P) точки в \mathbf{R}^3 можна подати у вигляді $Q = Q(u, v) := \{x(u, v); y(u, v); z(u, v)\}^T$, $P = P(u_0, v_0) := \{x(u_0, v_0); y(u_0, v_0); z(u_0, v_0)\}^T$, де $a \leq u_0 \leq b$, $c \leq v_0 \leq d$ – деякі фіксовані значення параметрів u і v . Так, подаючи фрагмент S_{11} поверхні S , можна скористатися такими параметричними рівняннями: $x(u, v) = \operatorname{sh} u$, $0 \leq u \leq 1$; $y(u, v) = \operatorname{ch} u$, $0 \leq u \leq 1$; $z(u, v) = v$, $0 \leq v \leq A$ ($A > 0$).

Зауважимо, що тоді у (2.1.2) елемент поверхні dS_Q має вигляд $(\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u)^{1/2} dudv$, а відстань $\operatorname{dist}(P, Q)$, за умови, що $P \in S_{11}$, можна обчислити за формулою

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{u - u_0}{2} \right)}{\left(\frac{u - u_0}{2} \right)^2} \left[\operatorname{sh}^2 \left(\frac{u + u_0}{2} \right) + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{u + u_0}{2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right\}^{1/2}.$$

Враховуючи те, що $\lim_{u \rightarrow u_0} \operatorname{sh}^2\left(\frac{u - u_0}{2}\right) / \left(\frac{u - u_0}{2}\right)^2 = 1$, легко зробити висновок про характер особливості в ядрі IP (2.1.2).

Далі, у відповідності з попереднім подрібненням S , подамо повний опис усіх фрагментів межі:

$$S_i = \bigcup_{j=1}^4 S_{ij} = \bigcup_{j=1}^4 \{Q_i(u, v); (u, v) \in D_j\} \quad (i = \overline{1, 4}),$$

де точки

$$Q_1(u, v) := (\operatorname{sh}u, \operatorname{ch}u, v)^T \in S_1,$$

$$Q_2(u, v) := (-\operatorname{ch}u, \operatorname{sh}u, v)^T \in S_2,$$

$$Q_3(u, v) := (\operatorname{sh}u, -\operatorname{ch}u, v)^T \in S_3,$$

$$Q_4(u, v) := (\operatorname{ch}u, \operatorname{sh}u, v)^T \in S_4,$$

а $D_1 := [0, 1] \times [0, A]$, $D_2 := [-1, 0] \times [0, A]$, $D_3 := [0, 1] \times [-A, 0]$, $D_4 := [-1, 0] \times [-A, 0]$, при цьому $A > 0$ – довільне дійсне число ($A < +\infty$). Останнє дає можливість подати (2.1.2) у вигляді такої системи шістнадцяти інтегральних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{D_j} \sigma_{ij}(u, v) \hat{K}(Q_i(u, v); P) \operatorname{d}u \operatorname{d}v = f_{kl}(P), \quad (2.1.3)$$

де $P \in S_{kl}$ ($k, l = \overline{1, 4}$), $\hat{K}[Q_i(u, v); P] := K[Q_i(u, v); P] (\operatorname{sh}^2u + \operatorname{ch}^2u)^{1/2}$, причому $P := Q_k(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D_l$, $\sigma_{ij}(u, v) := \sigma[Q_i(u, v)]$, $(u, v) \in D_j$.

2.1.2. Врахування наявної геометричної симетрії у поданні сукупної граничної поверхні

Для зменшення кількості рівнянь, які потрібно розв'язувати паралельно, до одного скористаємось такою очевидною властивістю розглядуваної проблеми [21, 47].

Лема 2.1.1 Система інтегральних рівнянь (2.1.3) володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку, яка є прямим добутком абелевих підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$ і циклічної групи другого порядку $\{e, \beta\}$, де τ_x , τ_y , τ_z – дзеркальні відображення відносно трьох попарно ортогональних площин yz , xz , xy , а β – поворот на кут $\pi/2$.

Доведення. Враховуючи запроваджену вище нумерацію фрагментів межі S , легко бачити, що $S_{ij} = \tau_h S_{11}$ ($i, j = \overline{1, 4}$; $h = 4(i - 1) + j$), причому $\tau_1 = e$ (тотожне перетворення), $\tau_2 = \tau_x$, $\tau_3 = \tau_z$, $\tau_4 = \tau_z \circ \tau_x$, $\tau_5 = \beta$, $\tau_6 = \tau_y \circ \beta$, $\tau_7 = \tau_z \circ \beta$, $\tau_8 = \tau_y \circ \tau_z \circ \beta$, $\tau_9 = \tau_y$, $\tau_{10} = \tau_x \circ \tau_y$, $\tau_{11} = \tau_z \circ \tau_y$, $\tau_{12} = \tau_z \circ \tau_x \circ \tau_y$, $\tau_{13} = \tau_x \circ \beta$, $\tau_{14} = \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$, $\tau_{15} = \tau_z \circ \tau_x \circ \beta$, $\tau_{16} = \tau_z \circ \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$. Звідси випливає, що S володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку $GR_{16} := \{\tau_i\}_{i=1}^{16}$. обчислюючи прямий добуток циклічних груп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$, $\{e, \beta\}$, легко переконатись, що GR_{16} є їх прямим добутком. Таким чином гранична поверхня S володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору \mathbf{R}^3 . Кожна група симетрії поверхні у \mathbf{R}^3 є підгрупою заданої групи рухів, а тому аналогічною групою володіє гранична задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (2.1.3) володіє абелевою групою симетрії GR_{16} , що і треба було показати.

Лемму доведено.

Елементи розглядуваної групи $\tau_i (i = \overline{1, 16})$ можна подати матрицями:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\tau_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \tau_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tau_7 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \tau_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \tau_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tau_{10} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \tau_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\tau_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tau_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Далі, легко підрахувати, що

$$\begin{aligned}
\tau_1^{-1} &= \tau_1, \tau_2^{-1} = \tau_2, \tau_3^{-1} = \tau_3, \tau_4^{-1} = \tau_4, \tau_6^{-1} = \tau_6, \tau_8^{-1} = \tau_8, \tau_9^{-1} = \tau_9, \\
\tau_{10}^{-1} &= \tau_{10}, \tau_{11}^{-1} = \tau_{11}, \tau_{12}^{-1} = \tau_{12}, \tau_{13}^{-1} = \tau_{13}, \tau_{15}^{-1} = \tau_{15}, \tau_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tau_7^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{14}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{16}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для подальшого перетворення (2.1.3) стає в нагоді таке

Лема 2.1.2 Система інтегральних рівнянь (2.1.3) допускає зображення

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{D_1} \sigma'_{ij}(u, v) \widehat{K} [\tau_h^{-1} Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} Q_1(u_0, v_0)] dudv = f'_{kl}(u_0, v_0), \quad (2.1.4)$$

де $(u_0, v_0) \in D_1; k, l = \overline{1, 4}$.

Доведення. Для отримання (2.1.4) здійснимо в (2.1.3) перехід до нового базису згідно такої схеми:

$$\sigma'_{ij}(u, v) := \sigma [\tau_h^{-1} Q_1(u, v)], \quad (u, v) \in D_1; \quad i, j = \overline{1, 4}; \quad h = 4(i - 1) + j;$$

$$f'_{kl}(u_0, v_0) := f_{kl} [\tau_{h'}^{-1} Q_1(u_0, v_0)], \quad (u_0, v_0) \in D_1; \quad k, l = \overline{1, 4}; \quad h' = 4(k - 1) + l.$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (2.1.3) до еквівалентної системи (2.1.4), де інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій межі, тобто S_{11} . Лему доведено.

Систему (2.1.4) зручно подати в такому матрично-операторному вигляді

$$(AG)(u_0, v_0) = \Psi(u_0, v_0), \quad (u_0, v_0) \in D_1. \quad (2.1.5)$$

Тут $A := (A_{hh'})_{h, h'=1}^{16}$ – матриця операторів; $G(u, v) := [G_h(u, v)]_{h=1}^{16}$, $\Psi(u_0, v_0) := [\Psi'_h(u_0, v_0)]_{h=1}^{16}$ – стовпчики-функції такі, що $G_h(u, v) := \sigma'_{ij}(u, v)$, $\Psi'_h(u_0, v_0) := f'_{kl}(u_0, v_0)$, а кожний з операторів $A_{hh'}$ визначаємо за формулою

$$(A_{hh'} G_h)(u_0, v_0) := \iint_{D_1} G_h(u, v) \widehat{K} [\tau_h^{-1} Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} Q_1(u_0, v_0)] dudv. \quad (2.1.6)$$

Відомо [22], що характери групи $\{e, \beta\}$ можна обчислити за формулою $\chi^h(\beta^k) = e^{2\pi i k(h-1)/n}$ ($k = 0, 1; h = 1, 2; n = 2$), де k – степінь перетворення β , h – номер відповідного перетворення. Звідси таблиця характерів матиме вигляд

$$\begin{array}{c|cc} & e & \beta \\ \hline \chi^1 & 1 & 1 \\ \chi^2 & 1 & -1 \end{array} .$$

Для груп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$ таблиця характерів (матриця перетворення Фур'є) має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Оскільки група симетрії поверхні S є прямим добутком $\{e, \beta\}$, $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$, то знайшовши прямий добуток відповідних чотирьох матриць перетворень Фур'є, отримаємо матрицю перетворення Фур'є, що відповідає GR_{16} :

$$F := (F_{hl})_{h,l=1}^{16} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Далі використовуємо пряме і обернене перетворення Фур'є для розгля-

дуваної групи шістнадцятого порядку, матрицю перетворення A у (2.1.5), з врахуванням (2.1.6), можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (2.1.4) “розщепити” на шістнадцять незалежних рівнянь. На підставі проведених міркувань можна сформулювати таку теорему.

Теорема 2.1.1 *Нехай (2.1.4) володіє абелевою групою симетрії GR_{16} . Тоді (2.1.4) можна подати у вигляді*

$$(B_h \bar{G}_h)(u_0, v_0) = \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) \quad (h = \overline{1, 16}; (u_0, v_0) \in D_1), \quad (2.1.7)$$

$$\bar{G}_h(u, v) := \sum_{s=1}^{16} F_{hs} G_s(u, v) \quad ((u, v) \in D_1), \quad \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} \Psi_s(u_0, v_0), \quad (2.1.8)$$

а B_h – елементи діагональної матриці FAF^{-1} операторів.

Розв’язавши послідовно шістнадцять інтегральних рівнянь (2.1.7), наближено, з можливим використанням методу колокації [90], знайдемо $\bar{G}_h(u, v)$. Далі, на основі (2.1.8), визначимо $G_h(u, v) = \sigma'_{ij}(u, v)$, що дозволяє обчислити потенціал у будь-якій точці P простору \mathbf{R}^3 за формулою:

$$U(P) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{D_j} \sigma'_{ij}(u, v) \widehat{K}[\tau_h^{-1} Q_1(u, v); P] \, dudv, \quad P \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}. \quad (2.1.9)$$

2.1.3. Схема наближеного розв’язування двовимірних інтегральних рівнянь

Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах чисельного розв’язування інтегральних рівнянь вигляду

$$\int_0^1 \int_0^A \sigma(u, v) \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} \, dudv = U(u_0, v_0), \quad (2.1.10)$$

де $(u_0, v_0) \in (0, 1) \times (0, A)$, $D(u, v)$ – гладка функція, а $R(u, v, u_0, v_0) := \left\{ [x(u, v) - x(u_0, v_0)]^2 + [y(u, v) - y(u_0, v_0)]^2 + [z(u, v) - z(u_0, v_0)]^2 \right\}^{1/2}$.

Застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково-постійною апроксимацією шуканої густини $\sigma(u, v)$. Для цього проведемо поділ області інтегрування на елементи $\Delta_{ij} := \left[u_i - \frac{h_u}{2}, u_i + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[v_j - \frac{h_v}{2}, v_j + \frac{h_v}{2} \right]$, де $h_u = \frac{1}{N_u}$, $h_v = \frac{1}{N_v}$, а $u_i = (2i - 1) \frac{h_u}{2}$, $i = \overline{1, N_u}$, $v_j = (2j - 1) \frac{h_v}{2}$, $j = \overline{1, N_v}$.

У відповідності з запровадженим поділом подамо (2.1.10) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \iint_{\Delta_{ij}} \sigma(u, v) \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0).$$

Якщо $(u, v) \in \Delta_{ij}$, то за умов достатньої малості h_u і h_v $\sigma(u, v) \approx \sigma(u_i, v_j)$.

Використовуючи позначення $\sigma_{ij} := \sigma(u_i, v_j)$, отримуємо наближений аналог (2.1.10)

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0),$$

де в якості (u_0, v_0) обираємо точку з множини $n \{(u_k, v_l)\}_{k=\overline{1, N_u}; l=\overline{1, N_v}}$, $u_k = (2k - 1) \frac{h_u}{2}$; $v_l = (2l - 1) \frac{h_v}{2}$. Легко бачити, що тоді для знаходження наближених значень σ_{ij} шуканої густини необхідно розв'язати таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_k, v_l), \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Для надання цій системі канонічного вигляду використаємо позначення: $n := (j - 1)N_u + i$, $m := (l - 1)N_v + k$. Тоді $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_n$, а $U_{kl} := U(u_k, v_l) \rightarrow U_m$, причому $n = \overline{1, N_u N_v}$; $m = \overline{1, N_u N_v}$.

Таким чином отримуємо систему рівнянь для знаходження $\sigma_{(j-1)N_u+i}$ ($i = \overline{1, N_u}$, $j = \overline{1, N_v}$):

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{(j-1)N_u+i} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_k, v_l)} dudv = U_{(l-1)N_u+k}, \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Остання відрізняється від попередньої тим, що шукані величини σ_n і праві частини U_m є елементами двох одновимірних масивів розмірності $N_u \cdot N_v$. Ця обставина суттєво спрощує програмну реалізацію запровадженої методики. Матриця побудованої системи рівнянь за умови $i = k$ і $j = l$ містить подвійні невласні інтеграли.

Розглянемо алгоритм наближеного обчислення таких інтегралів. Не зменшуючи загальності, припустимо, що

$\Delta_0 := \left[u_0 - \frac{h_u}{2}, u_0 + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[v_0 - \frac{h_v}{2}, v_0 + \frac{h_v}{2} \right]$, тоді типовим інтегралом, що вимагає наближеного обчислення, є такий

$$\iint_{\Delta_0} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv.$$

Враховуючи вигляд $R(u, v; u_0, v_0)$ і можливість розвинення в ряд Тейлора функцій $x(u, v)$, $y(u, v)$ і $z(u, v)$ в околі точки (u_0, v_0) , подамо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} = F(u, v; u_0, v_0) + \frac{D(u_0, v_0)}{\left[(sh^2 u_0 + ch^2 u_0) (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}},$$

$$\text{де } F(u, v; u_0, v_0) = \frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} - \frac{D(u_0, v_0)}{\left[(sh^2 u_0 + ch^2 u_0) (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}}.$$

Тоді $\iint_{\Delta_0} \frac{D(u_0, v_0)}{\left[(sh^2 u_0 + ch^2 u_0) (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}} dudv$ обчислюємо аналітично, використовуючи формулу

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} \left[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{-1/2} dudv =$$

$$\sum_{(a \ b)} a \ln \left(\frac{d + \sqrt{d^2 + a^2}}{-c + \sqrt{c^2 + a^2}} \right) + \sum_{(c \ d)} c \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{-a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right),$$

де $b := \bar{b} - u_0$, $a := u_0 - \bar{a}$, $d := \bar{d} - v_0$, $c := v_0 - \bar{c}$.

У свою чергу, застосовуючи одну із кубатурних формул, інтеграл вигляду $\iint_{\Delta_0} F(u, v, u_0, v_0) dudv$ обчислюємо наближено. При цьому виникає необхідність обчислення $\lim_{u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0} F(u, v, u_0, v_0)$. Легко показати, що границя функції $F(u, v, u_0, v_0)$ при $u \rightarrow u_0$ і $v \rightarrow v_0$ є обмеженою величиною.

2.1.4. Результати чисельних експериментів

Для наочного зображення електростатичного поля розглядуваної квадрупольної системи на рис. 2.5–2.7 подано розрахований згідно формули (2.1.9) розподіл ліній рівного потенціалу у площині $z = 0$, за умови $A = 1$ і відстані між поверхнями $h = 1$. Допускаються різні значення потенціалу на електродах, а для наближеного розв'язання задачі використано кусково-постійну апроксимацію шуканої густини інтегрального рівняння при кількості невідомих $n = 100$. Так, рис. 2.5 (випадок а)) відповідає таким значенням потенціалу на електродах: $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$. Аналогічно на рис. 2.6: $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 1$, $f_4 = -1$ – випадок б); на рис. 2.7: $f_1 = 10$, $f_2 = 20$, $f_3 = -100$, $f_4 = 1$ – випадок в).

Слід зауважити, що розподіл ліній рівного потенціалу відповідає фізиці досліджуваних електростатичних полів. Наприклад, на рис. 2.6, де задані антисиметричні граничні значення, фіксуємо явно виражені асимптоти, потенціал на яких рівний нулю.

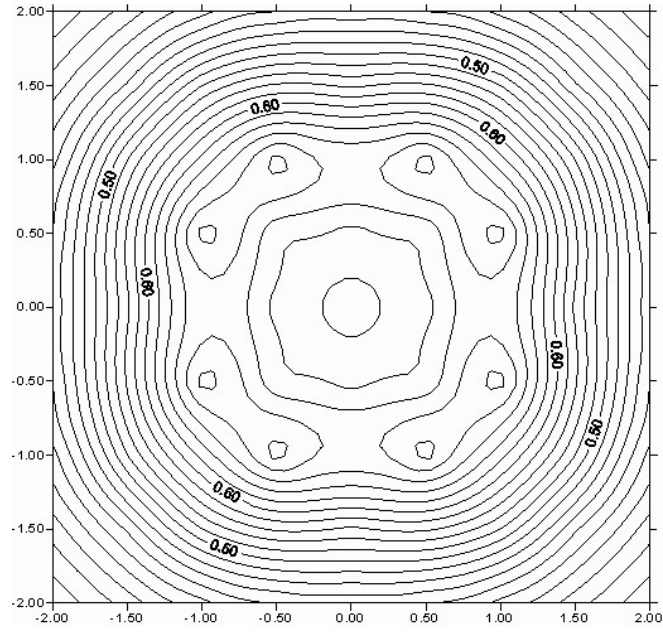


Рис. 2.5: Розподіл ліній рівня для випадку а)

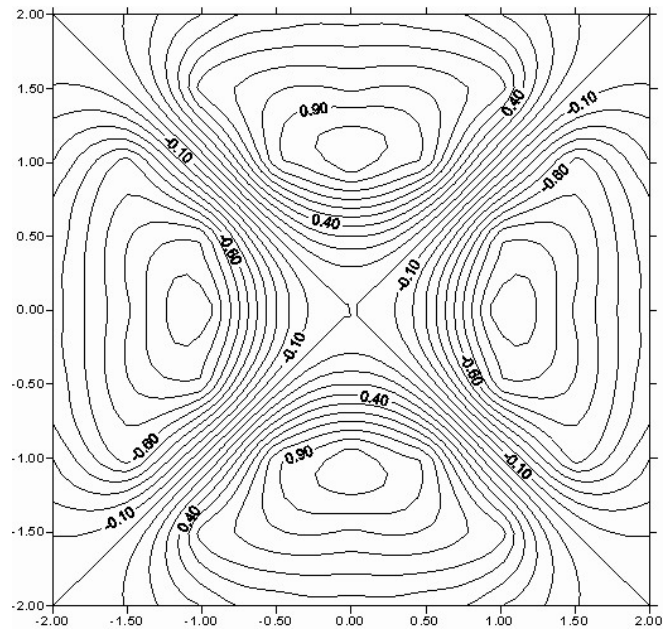


Рис. 2.6: Розподіл ліній рівня для випадку б)

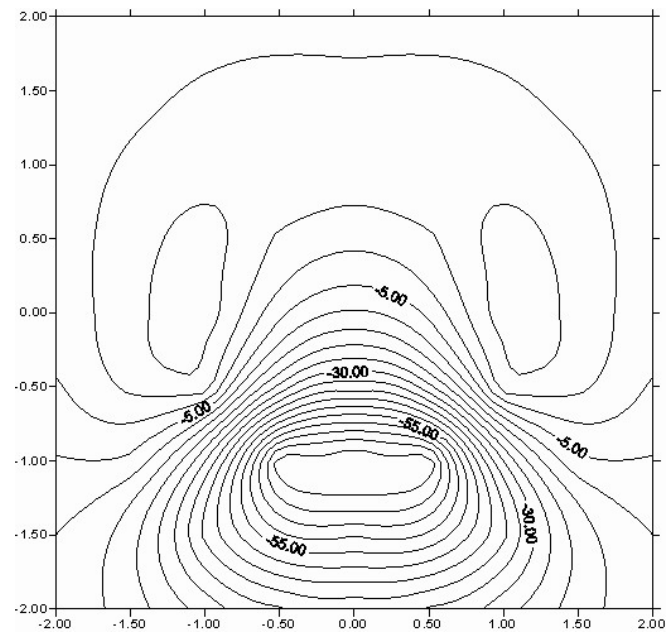


Рис. 2.7: Розподіл ліній рівня для випадку в)

Потенціал електростатичного поля (див. рис. 2.4) в деяких контрольних точках за умов $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 1$, $f_4 = -1$, при різних A і при кількості невідомих $n = 100$, наведено в табл. 2.1.

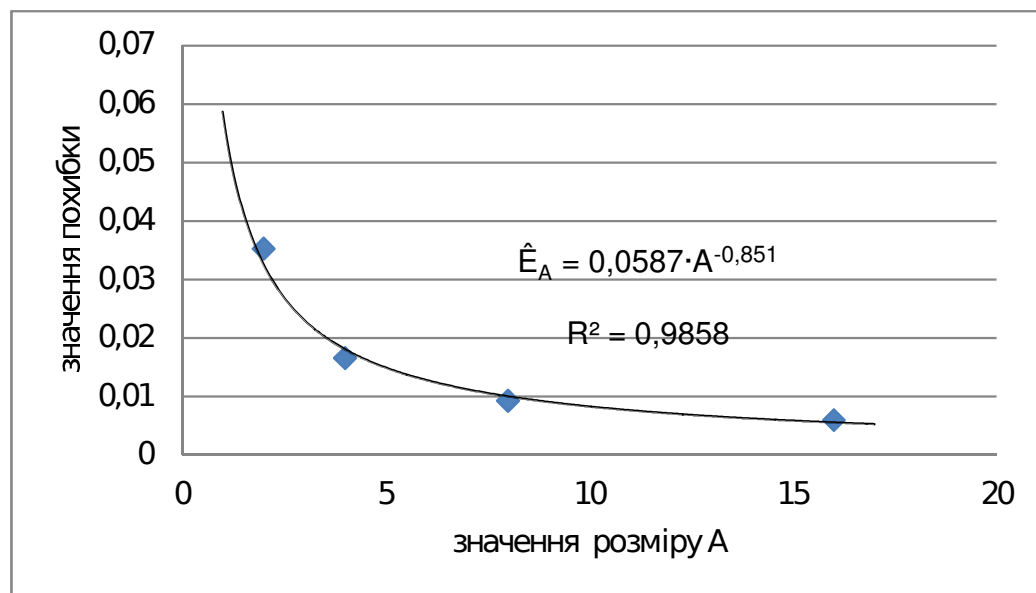


Рис. 2.8: Вплив збільшення розміру A на значення потенціалу в площині $z = 0$

Таблиця 2.1

Потенціал електростатичного поля у точках площини $z = 0$

x	y	$u(A = 1)$	$u(A = 2)$	$u(A = 4)$	$u(A = 8)$
-0.500	-2.000	0.554533	0.569875	0.582992	0.585020
-0.500	-1.500	0.793349	0.807748	0.817789	0.821019
-0.500	-1.000	0.723583	0.739573	0.744598	0.747684
-0.500	-0.500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.500	0.000	-0.225466	-0.244789	-0.250436	-0.252070
0.000	-1.000	0.979874	0.988285	0.990054	0.990136
0.000	-0.500	0.225466	0.244789	0.250436	0.252070
1.000	-0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684
1.000	0.000	-0.979874	-0.988285	-0.990054	-0.990136
1.000	0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684
2.000	-1.500	-0.130574	-0.165877	-0.182457	-0.191768

Зауваження. Провівши ряд чисельних експериментів, було помічено, що в разі переважання однієї геометричної складової поверхні (вздовж осі OZ) над іншими значення потенціалу в центральних поперечних перерізах сукупної поверхні S мало змінюється. На рис. 2.8 відображено швидкість зміни відповідної похибки E_A :

$$E_A := \| u_A - u_{2A} \| = \max_{1 \leq i \leq N} | u_A(P_i) - u_{2A}(P_i) | \quad (2.1.11)$$

між обчисленими значеннями потенціалу в площині $z = 0$ у випадку дворазового збільшення розміру A . При цьому $E_1 = 0,0353$, $E_2 = 0,0166$, $E_4 = 0,0093$. Апроксимацію похибки здійснено за допомогою степеневого полінома. В результаті похибка змінюється за таким законом $\tilde{E}_A = 0,0587 \cdot A^{-0,851}$, R^2 – величина достовірності апроксимації.

Отже, для з'ясування якісної картини поля в центральних поперечних пе-

перізах квадрупольної системи, в якій явно переважає довжина над шириною у вісім і більше разів, можна обмежитись розв'язанням "плоскої" задачі. При цьому суттєво зменшується не лише розмірність матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а й весь обсяг обчислень.

2.1.5. Розпаралелення процедури розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи

На даному етапі моделювання розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи ми отримали шістнадцять незалежних інтегральних рівнянь. Сучасні архітектури багатоядерних процесорів дозволяють розпаралелити процедуру розв'язання цих рівнянь, використавши один із найбільш популярних засобів паралельного програмування *OpenMP* [102]. У ньому використовується модель паралельного виконання "розгалуження-злиття". Програма *OpenMP* починається як єдиний потік виконання, що називається початковим потоком. Коли потік зустрічає паралельну конструкцію, він утворює нову групу потоків, що складається із себе та ще декількох додаткових потоків, що стає головним у групі. Після паралельної конструкції виконання користувачького коду продовжує лише головний потік. Отже, засобами *OpenMP* можна розпаралелити чисельне розв'язування шістнадцяти інтегральних рівнянь, які будуть виконуватись на ядрах комп'ютера окремими потоками. При цьому кількість ядер може не збігатись з кількістю потоків, на які розпаралелюється програма.

На рис. 2.9 представлена діаграма, яка відображає залежність часу обчислень від кількості ядер комп'ютера. За результатами чисельних експериментів на комп'ютері з одноядерним процесором час розв'язування задачі за програмою із застосуванням *OpenMP* не суттєво відрізняється від часу розв'язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім, шістнадцять потоків, у той час як фізично комп'ютер має одне

ядро.

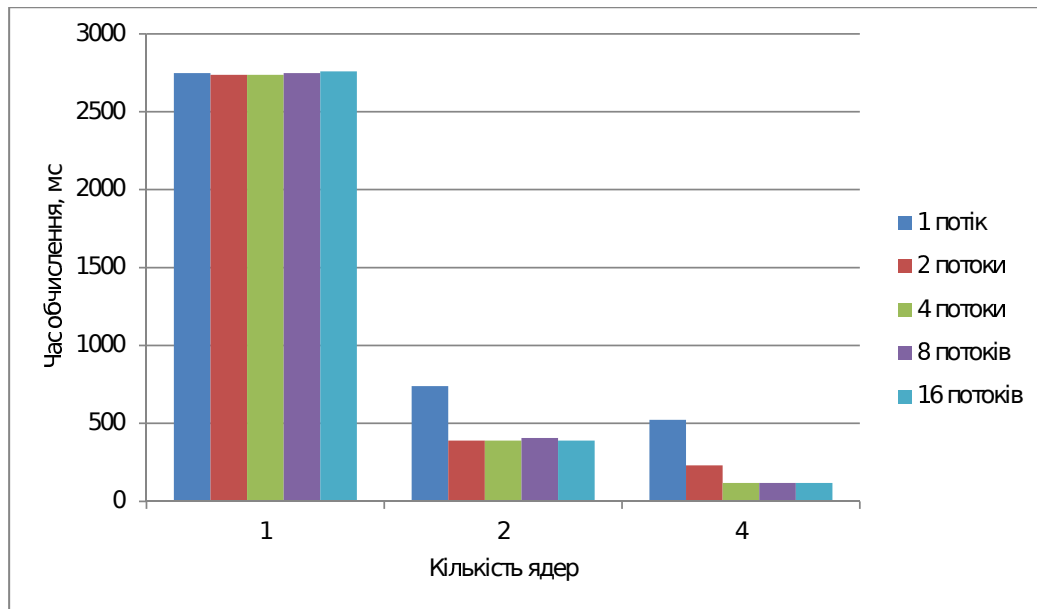


Рис. 2.9: Залежність часу обчислень від кількості ядер

При виконанні програми на комп'ютері з двоядерним процесором час розв'язування задачі за паралельною програмою приблизно в два рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Часова оцінка у випадку співпадіння кількості потоків і кількості ядер мало відрізняється від часової оцінки, яку отримують збільшуючи кількість потоків за умов незмінної кількості розв'язуваних рівнянь. Це пояснюється тим, що фізично процесор лишається двоядерним.

Якщо програма виконується на комп'ютері з чотириядерним процесором, то час розв'язування задачі за паралельною програмою приблизно в чотири рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Очевидно, що зі збільшенням кількості ядер ці показники будуть покращуватись. Отже, використання багатоядерності персонального комп'ютера є доцільним при розв'язуванні задач великих розмірностей з метою більш ефе-

ктивних затрат комп'ютерного часу на їх виконання.

2.2. Задача розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора

Плоским конденсатором називають систему з двох плоских пластин, розташованих паралельно одна одній на малій у порівнянні з розмірами відстані і розділених шаром діелектрика. Електричне поле плоского конденсатора, в основному, локалізовано між пластинами, однак, поблизу країв пластин і в навколишньому просторі також виникає порівняно слабе електричне поле, яке називають полем розсіювання. У цілому ряді задач наближено можна нехтувати полем розсіювання і думати, що електричне поле плоского конденсатора цілком зосереджено між його обкладинками. Але в інших завданнях нехтування полем розсіювання може призвести до грубих помилок, так як при цьому порушується потенційний характер електричного поля.

У процесі проектування конденсаторів постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів. Аналітичний розрахунок поля часто ускладнений через складну конфігурацію електродів, тому на практиці для визначення електростатичних полів у таких системах широко використовують методи математичного моделювання. У математичній моделі окремі електроди подають у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Ефективні розв'язки такої задачі можна одержати на підставі методу інтегральних рівнянь, оскільки його застосування пов'язане із знаходженням невідомих величин лише на граничних поверхнях. Однак присутність значної кількості електродів та високі вимоги до точності обчислень суттєво ускладнюють традиційне застосування методу. У такій та подібних ситуаціях доцільно розбивати задачу на незалежні складові врахувавши наявні симетрії в геометрії розімкнених поверхонь та

зменшувати складність розглядаючи лише плоскі перерізи просторових конструкцій. Очевидною перевагою розглядуваного підходу є створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому.

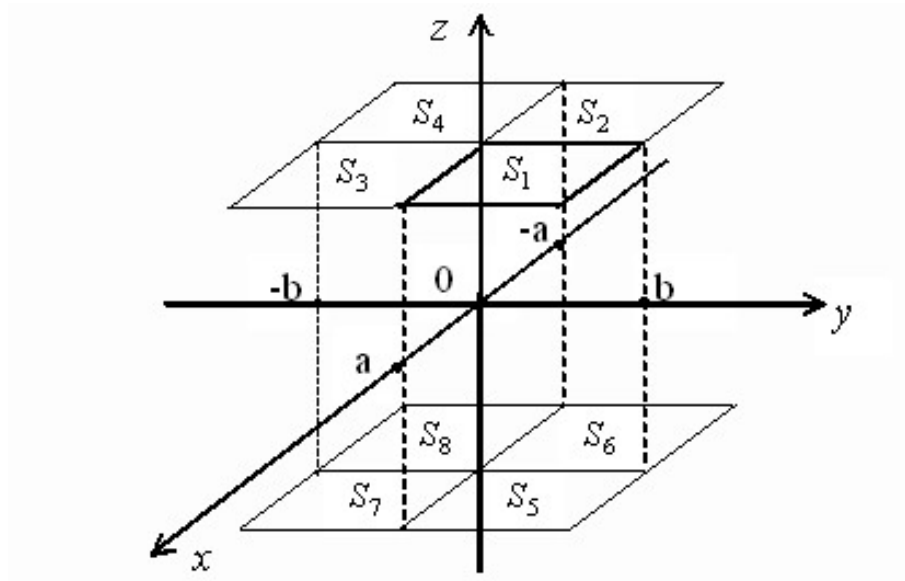


Рис. 2.10: Розміщення пластин паралельного конденсатора

Не зменшуючи загальності, розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора, зображеного на рис. 2.10. Легко бачити, що при математичному моделюванні проблеми інформація про геометрію заряджених електродів подається у вигляді деякої сукупності S двох паралельних прямокутних пластин. Вказані пластини будемо вважати безмежно тонкими, з математичної точки зору двосторонніми та обмеженими кусково-гладкими контурами скінченної довжини. Отже, необхідно знайти розв'язок задачі (1.1.1)-(1.1.3). Слід зауважити, що при електростатичній інтерпретації f в (1.1.2)– граничні значення потенціалу на кожному з двох електродів є постійними величинами. Нехай P , Q і т.д. – точки евклідового простору \mathbf{R}^3 . Тоді, було з'ясовано вище, розглядувана проблема еквівалентна такому

інтегральному рівнянню

$$\iint_S \rho(Q) K(P, Q) dS_Q = f(P), \quad P \in S, \quad (2.2.1)$$

де $K(P, Q) := 1/\text{dist}(P, Q)$ – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^3 , а $\rho(Q)$ – шукана сукупна “густина розподілу зарядів” на S .

Вказана задача грає роль модельної. При її розв’язуванні продемонстровано переваги запропонованої методики, оскільки відтворення електростатичного поля плоского конденсатора не є тривіальною проблемою за умов суттєвої відмінності потенціалів на відповідних пластинах і поступового зменшення відстані між ними. Отже, буде проаналізовано ситуацію, коли результати обрахунків особливо чутливі до змін вхідних даних.

2.2.1. Максимальне врахування наявної симетрії у зображенні пластин

Очевидно, що поверхню S згідно запровадженої методики можна розглядати як сукупність восьми конгруентних складових S_i ($i = \overline{1, 8}$) (див. рис. 2.10). Тому подамо (2.2.1) у відповідності з таким подібненням S у вигляді системи IP

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \iint_{\Delta_i} \rho_i(x, y) K(x, y; x_0, y_0) dx dy + \\ + \sum_{i=5}^8 \iint_{\Delta_i} \rho_i(x, y) K_h(x, y; x_0, y_0) dx dy = f_k(x_0, y_0), \\ (x_0, y_0) \in S_k, \quad k = \overline{1, 4}; \\ \sum_{i=1}^4 \iint_{\Delta_i} \rho_i(x, y) K_h(x, y; x_0, y_0) dx dy + \\ + \sum_{i=5}^8 \iint_{\Delta_i} \rho_i(x, y) K(x, y; x_0, y_0) dx dy = f_k(x_0, y_0), \\ (x_0, y_0) \in S_k, \quad k = \overline{5, 8}. \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

Тут $\{\rho_i(x, y), (x, y) \in \Delta_i, i = \overline{1, 8}\}$ – шукана сукупна “густина розподілу зарядів” на S ;

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \Delta_5 &:= [0, a] \times [0, b], \Delta_2 = \Delta_6 := [-a, 0] \times [0, b], \\ \Delta_3 = \Delta_7 &:= [0, a] \times [-b, 0], \Delta_4 = \Delta_8 := [-a, 0] \times [-b, 0]; \\ K(x, y; x_0, y_0) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}; \\ K_h(x, y; x_0, y_0) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 4h^2}}; \\ 2h &\text{ – відстань між пластинами.}\end{aligned}$$

Таке зображення (2.2.1) дає можливість встановити очевидну властивість досліджуваної проблеми.

Лема 2.2.3 Система інтегральних рівнянь (2.2.2) володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, яка, в свою чергу, є прямим добутком абелевих підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$, де e – тотожне перетворення, а τ_x, τ_y, τ_z – дзеркальне відображення від трьох попарно ортогональних площин $\{YZ\}$, $\{XZ\}$, $\{XY\}$, відповідно.

Доведення. Враховуючи запроваджену вище нумерацію конгруентних складових граничної поверхні S , легко бачити, що $S_i = \tau_i S_1 (i = \overline{1, 8})$, причому τ_i це такі лінійні перетворення: $\tau_1 = e$, $\tau_2 = \tau_x$, $\tau_3 = \tau_y$, $\tau_4 = \tau_x \circ \tau_y$, $\tau_5 = \tau_z$, $\tau_6 = \tau_x \circ \tau_z$, $\tau_7 = \tau_y \circ \tau_z$, $\tau_8 = \tau_x \circ \tau_y \circ \tau_z$. Звідси очевидним чином випливає, що поверхня S володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку $GR_8^1 := \{\tau_i\}_{i=1}^8$. Остання, в чому легко переконатись, є прямим добутком абелевих підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$. Отже, гранична поверхня S володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. Оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору \mathbf{R}^3 . Кожна група симетрії поверхні в \mathbf{R}^3 є підгрупою заданої групи рухів, тому аналогічною групою володіє крайова задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Таким чином, можна стверджувати, що (2.2.2) володіє абелевою групою симетрії $\{\tau_i\}_{i=1}^8$, що і

треба було показати.

Лемму доведено.

Оскільки невідомі функції $\rho_i(x, y)$ залежать лише від двох незалежних змінних, то очевидно, що

$$\begin{aligned} \tau_1 = \tau_5 = \tau_1^{-1} = \tau_5^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \tau_6 = \tau_2^{-1} = \tau_6^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 = \tau_7 = \tau_3^{-1} = \tau_7^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \tau_8 = \tau_4^{-1} = \tau_8^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для подальшого перетворення системи (2.2.2), відповідно до загальної методики, запозиченої із робіт [21, 22] скористаємось такими позначеннями:

$$\begin{aligned} g_1(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \\ g_2(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \\ g_3(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}}, \\ g_4(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}}, \\ g_5(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 4h^2}}, \\ g_6(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 4h^2}}, \\ g_7(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 + 4h^2}}, \\ g_8(x, y; x_0, y_0; h) &:= \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 + 4h^2}}. \end{aligned}$$

Лема 2.2.4 Система інтегральних рівнянь (2.2.2) еквівалентна такій системі рівнянь

$$\iint_{\Delta_1} \sum_{j=1}^8 g'_{|i-j|+1}(x, y; x_0, y_0; h) \rho'_j(x, y) dx dy = f'_i(x_0, y_0), \quad i = \overline{1, 8}, \quad (2.2.3)$$

де $(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$.

Доведення. Для отримання (2.2.3) здійснимо в (2.2.1) перехід до нового базису згідно такої схеми:

$$\rho'_j(x, y) := \rho_j \left[\tau_j^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right], \quad j = \overline{1, 8};$$

$$f'_i(x_0, y_0) := f_i \left[\tau_i^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right], \quad i = \overline{1, 8}.$$

На основі запровадженої “заміни змінних”, виконаної також і в ядрах IP, систему (2.2.2) можна подати у вигляді (2.2.3), де інтегрування здійснюється лише по одній складовій поверхні – S_1 .

Лему доведено.

Теорема 2.2.1 Нехай система інтегральних рівнянь (2.2.3) володіє абелевою групою симетрії GR_8 . Тоді цю систему останню можна подати у вигляді

$$\iint_{\Delta_1} A_j(x, y, ; x_0, y_0) \bar{\rho}_j(x, y) dx dy = \bar{f}_j(x_0, y_0), \quad j = \overline{1, 8}. \quad (2.2.4)$$

Тут $(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$,

$$\bar{\rho}_j(x, y) = \sum_{i=1}^8 F_{ji} \rho'_i(x, y), \quad (x, y) \in \Delta_1, \quad (2.2.5)$$

$\bar{f}_j(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^8 F_{ji} f'_i(x_0, y_0)$, $A_j(x, y; x_0, y_0)$ можна обчислити за формулами: $A_j(x, y; x_0, y_0) = \sum_{i=1}^8 F_{ji} g'_{|i-j|+1}(x, y; x_0, y_0; h)$, $j = \overline{1, 8}$, $F = (F_{ij})_{i,j=1}^8$ – знайдена матриця перетворення Фур'є.

Доведення. Оскільки підгрупи $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$ є циклічними групами, то таблиці їх характерів мають один і той же вигляд [21, 68]: де $\tau := \tau_x \vee \tau_y \vee \tau_z$.

	e	τ	
χ^1	1	1	,
χ^2	1	-1	

Це дає можливість обчислити характери нашої групи GR_8 , взявши прямий добуток матриць характерів(матриць Фур'є) підгруп $\{e, \tau_x\}$, $\{e, \tau_y\}$, $\{e, \tau_z\}$. В результаті отримаємо

$$F := (F_{ji})_{j,i=1}^8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі, використовуючи пряме і обернене перетворення Фур'є, матрицю системи (2.2.3) зведемо до діагонального вигляду [22], тобто “розщепимо” на вісім незалежних інтегральних рівнянь (2.2.4).

Теорему доведено.

Розв'язавши наближено вісім незалежних ІР (2.2.4) методом колокації, приймаючи до уваги (2.2.5), одержимо значення функцій $\rho'_i(x, y)$ $i = \overline{1, 8}$, за допомогою яких можна обчислити потенціал у будь-якій точці $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ простору, використовуючи таку формулу:

$$\begin{aligned}
 u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = & \iint_{\Delta_1} \left[\frac{\rho'_1(x, y)}{\sqrt{(x'_1 - \bar{x})^2 + (y'_1 - \bar{y})^2 + (\bar{z} - h)^2}} + \right. \\
 & + \frac{\rho'_2(x, y)}{\sqrt{(x'_2 + \bar{x})^2 + (y'_2 - \bar{y})^2 + (\bar{z} - h)^2}} + \frac{\rho'_3(x, y)}{\sqrt{(x'_3 - \bar{x})^2 + (y'_3 + \bar{y})^2 + (\bar{z} - h)^2}} + \\
 & + \frac{\rho'_4(x, y)}{\sqrt{(x'_4 + \bar{x})^2 + (y'_4 + \bar{y})^2 + (\bar{z} - h)^2}} + \frac{\rho'_5(x, y)}{\sqrt{(x'_5 - \bar{x})^2 + (y'_5 - \bar{y})^2 + (\bar{z} + h)^2}} + \\
 & + \frac{\rho'_6(x, y)}{\sqrt{(x'_6 + \bar{x})^2 + (y'_6 - \bar{y})^2 + (\bar{z} + h)^2}} + \frac{\rho'_7(x, y)}{\sqrt{(x'_7 - \bar{x})^2 + (y'_7 + \bar{y})^2 + (\bar{z} + h)^2}} + \\
 & \left. + \frac{\rho'_8(x, y)}{\sqrt{(x'_8 + \bar{x})^2 + (y'_8 + \bar{y})^2 + (\bar{z} + h)^2}} \right] dx dy, \\
 \text{де } \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = & \tau_i^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 8}.
 \end{aligned}$$

2.2.2. Апостеріорний метод оцінювання похибки наближених розв'язків інтегральних рівнянь (2.2.4)

Математичне моделювання розглядуваного електростатичного поля передбачає також врахування сингулярної поведінки шуканої густини розподілу зарядів $\rho(M)$ в околі кутової точки складової поверхні S_1 . Слід зауважити, що врахування специфіки розімкнених поверхонь, а саме, їх геометричної симетрії, дозволило зменшити кількість контрольованих особливих точок з восьми до однієї. Запровадимо апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає надійно контролювати нерегулярність $\rho(M)$ в околі кутової точки S_1 , відмовляючись таким чином від аналітичного врахування її поведінки.

Не зменшуючи загальності, розглянемо одне із восьми незалежних інтегральних рівнянь (2.2.4):

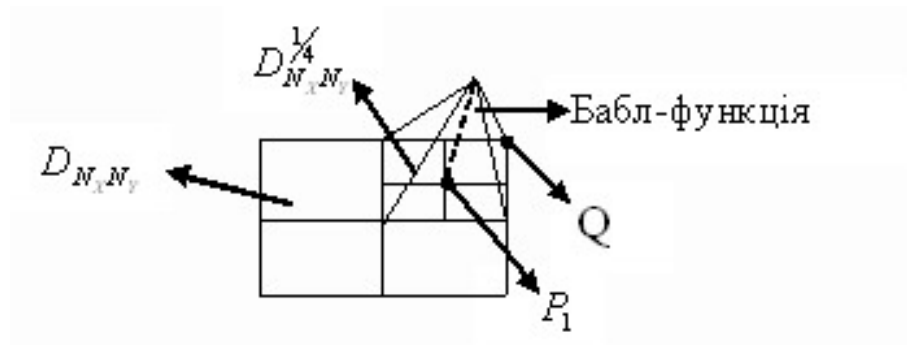


Рис. 2.11: Схематичне зображення "екстремального" елемента

$$(K\bar{\rho}_1)(x_0, y_0) \equiv \iint_{\Delta_1} A_1(x, y; x_0, y_0) \bar{\rho}_1(x, y) dx dy = \bar{f}_1(x_0, y_0), \quad (2.2.6)$$

$$(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b).$$

Наближене розв'язування цього рівняння здійснюємо методом колокації, використовуючи для апроксимації шуканого розв'язку кусково-постійні базисні функції. Поділ на елементи проводимо відносно $\Delta_1 = [0, a] \times [0, b]$. В силу апріорної інформації про характер поведінки $\bar{\rho}_1(x, y)$ "екстремальним" вважаємо елемент $D_{N_x N_y} := [a - h_x, a] \times [b - h_y, b]$, який відповідає кутовій точці складової S_1 (див. рис. 2.11). Тут $h_x = \frac{a}{N_x}$, $h_y = \frac{b}{N_y}$, де N_x, N_y – кількість точок поділу відрізків $[0, a]$, $[0, b]$, відповідно. Слід зауважити, що без врахування наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь ми повинні були б приймати до уваги особливості шуканого розв'язку в околі восьми кутових точок поверхні S , що суттєво ускладнює весь алгоритм обчислень.

Відомо [55, 90], що "густина розподілу зарядів" $\bar{\rho}_1(x, y)$ в околі "кутової точки" $Q := (a, b)$ і при підході до контуру має особливості, які можна врахувати шляхом запровадження у відповідних подвійних інтегралах такої вагової функції

$$\Omega(x, y) = \frac{[(a-x)(b-y)]^{1/2}}{(a-x)^\gamma + (b-y)^\gamma}, \text{ де } \gamma \approx 1,7034.$$

Від цієї особливості можна позбавитись шляхом використання спеціальних замінів змінних. Проте це значно ускладнює алгоритм наближеного розв'язування інтегрального рівняння і не дає можливості скористатись простою і ефективною чисельно-аналітичною схемою [14, 85, 90]. Тому будемо враховувати цю особливість методом згущення сітки в околі особливої точки Q для досягнення заданої точності, спираючись на загальні ідеї, висвітлені в роботах [89, 98].

Припустимо, що в результаті розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимує досліджуване операторне рівняння, отримано наближений розв'язок $\bar{\rho}_{1\varepsilon}(P)$, ($P := (x, y) \in \Delta_1$), аналіз якого так чи інакше вимагає вивчення властивостей його похибки $\varepsilon_{\rho_1} := \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_{1\varepsilon}$.

Обмежимося побудовою наближень e_{ρ_1} до реальної похибки ε_{ρ_1} за такою схемою. Перевірка задоволення граничної умови полягає в обчисленні потенціалу в деякій контрольній точці P_1 , яка не співпадає з точкою колокації і лежить в околі кутової точки складової S_1 на "екстремальному" елементі $D_{N_x N_y}$. Далі апроксимуємо функцію-похибки e_{ρ_1} за формулою $e_{\rho_1} = \lambda_1 B_{P_1}(x, y)$ і знайдемо невідомий параметр λ_1 шляхом колокації (2.2.6) саме в точці $P_1 := \left\{ a - \frac{h_x}{4}, b - \frac{h_y}{4} \right\}$:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{f}_1(P_1) - (K \bar{\rho}_1)(P_1)}{(K B_{P_1})(P_1)}. \quad (2.2.7)$$

Зауважимо, що такий відносно простий спосіб обчислення параметра λ_1 пов'язаний з фінітністю білінійної бабл-функції $B_{P_1}(x, y)$:

$$\text{supp } B_{P_1}(x, y) = D_{N_x N_y}^{1/4} := \left[a - \frac{h_x}{2}, a \right] \times \left[b - \frac{h_y}{2}, b \right].$$

При обчисленні знаменника у формулі (2.2.7) зручно віднести елемент $D_{N_x N_y}^{1/4}$ до локальної системи координат (α, β) так, що $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$. Це

дає можливість після подання $(KB_{P_1})(P_1)$ у вигляді суми чотирьох інтегралів

I_1, I_2, I_3, I_4 :

$$I_1 := \int_{a - \frac{h_x}{4}}^{a - \frac{h_x}{4} - \tilde{\Delta}_1} \int_{b - \frac{h_y}{4}}^{b - \frac{h_y}{4} - \tilde{\Delta}_2} A_1(x, y; P_1) B_{P_1}^1(x, y) dx dy,$$

$$I_2 := \int_{a - \frac{h_x}{4}}^{a - \frac{h_x}{4} + \tilde{\Delta}_1} \int_{b - \frac{h_y}{4}}^{b - \frac{h_y}{4} - \tilde{\Delta}_2} A_1(x, y; P_1) B_{P_1}^2(x, y) dx dy,$$

$$I_3 := \int_{a - \frac{h_x}{4}}^{a - \frac{h_x}{4} + \tilde{\Delta}_1} \int_{b - \frac{h_y}{4}}^{b - \frac{h_y}{4} + \tilde{\Delta}_2} A_1(x, y; P_1) B_{P_1}^3(x, y) dx dy,$$

$$I_4 := \int_{a - \frac{h_x}{4} - \tilde{\Delta}_1}^{a - \frac{h_x}{4}} \int_{b - \frac{h_y}{4}}^{b - \frac{h_y}{4} + \tilde{\Delta}_2} A_1(x, y; P_1) B_{P_1}^4(x, y) dx dy,$$

де $\tilde{\Delta}_1 = \frac{h_x}{4}$, $\tilde{\Delta}_2 = \frac{h_y}{4}$, в кожному з них виконати деяку заміну змінних. Так, наприклад, для I_1 матимемо

$$x(\alpha, \beta) := \frac{2 \left(a - \frac{h_x}{4} \right) - \tilde{\Delta}_1}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_1}{2} \alpha,$$

$$y(\alpha, \beta) := \frac{2 \left(b - \frac{h_y}{4} \right) - \tilde{\Delta}_2}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2}{2} \cdot \beta, \quad -1 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

При цьому відповідні складові бабл-функції у локальних координатах набувають такого вигляду:

$$B^1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 + \beta),$$

$$B^2(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 + \beta),$$

$$B^3(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 - \beta),$$

$$B^4(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 - \beta).$$

Запроваджені вище величини для апроксимації похибки на “екстремальному” елементі ми використовуємо для знаходження наближеного розв’язку (2.2.6) з наперед гарантованою точністю, повторюючи подібну процедуру. Критерієм завершення процесу уточнення наближеного розв’язку $\bar{\rho}_{1\varepsilon}(P)$ є деякий індикатор

$$\eta_{\rho_1} := \frac{\|e_{\rho_1}(x, y)\|_{L_2}}{\sqrt{\|e_{\rho_1}(x, y)\|_{L_2}^2 + \|\bar{\rho}_{1\varepsilon}(x, y)\|_{L_2}^2}} 100 \%. \quad (2.2.8)$$

Якщо індикатор (2.2.8) не перевищує заданого допустимого рівня, то уточнення $\bar{\rho}_{1\varepsilon}$ припиняємо, інакше здійснюємо згущення сітки для чергового розв’язання відповідного інтегрального рівняння. В нашому випадку на першому кроці згущення сітки отримаємо чотири нових елементи $(D_{N_x N_y}^{1/4})_i$, $(i = \overline{1, 4})$.

2.2.3. Ітераційне уточнення результатів розрахунків

Використовуючи частково наведений вище метод апостеріорного оцінювання похибки, розглянемо ітераційну процедуру уточнення наближених розв’язків задачі (1.1.1)-(1.1.3). На підставі знайдених методом колокації наближених значень густин $\bar{\rho}_j(x, y)$ ($j = \overline{1, 8}$) з (2.2.3) в точках (x_i, y_p) , де $x_i = (2i - 1)\frac{h_x}{2}$, $i = \overline{1, N_x}$, $y_p = (2p - 1)\frac{h_y}{2}$, $p = \overline{1, N_y}$, обчислимо значення

$\bar{\rho}_j(x, y)$ у вузлах сітки $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, де $\tilde{x}_k = (k - 1)h_x$, $k = \overline{1, N_x + 1}$, $\tilde{y}_l = (l - 1)h_y$, $l = \overline{1, N_y + 1}$, таким чином:

1. На межі сіткової області, наприклад, в точці $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_{N_y+1})$,

$$\text{нехай } \bar{\rho}_j(\tilde{x}_1, \tilde{y}_{N_y+1}) := \bar{\rho}_j(x_1, y_{N_y});$$

2. Для точок $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_{N_y+1})$, $k = \overline{1, N_x}$, припустимо,

$$\text{що } \bar{\rho}_j(\tilde{x}_k, \tilde{y}_{N_y+1}) := \frac{1}{2} [\bar{\rho}_j(x_i, y_{N_y}) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_{N_y})], \text{ де } i = \overline{1, N_x - 1};$$

3. В точках $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, $k = \overline{2, N_x}$, $l = \overline{2, N_y}$, покладемо

$$\bar{\rho}_j(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) := \frac{1}{4} [\bar{\rho}_j(x_i, y_p) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_p) + \bar{\rho}_j(x_i, y_{p+1}) + \bar{\rho}_j(x_{i+1}, y_{p+1})],$$

$$\text{де } i = \overline{1, N_x - 1}, p = \overline{1, N_y - 1}.$$

Далі обчислюємо потенціал у вузлах сітки $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$. Використовуючи бабл-функції, по аналогії з (2.2.7), знаходимо $\tilde{\lambda}_j$. На підставі наближено знайдених значень густини у вузлах сітки обчислюємо $\bar{\rho}_j(x, y)$ в точках (x_i, y_p) за описаними вище правилами 1)–3). Очевидно, що процедура ітераційного уточнення може повторюватись. Критерієм її припинення може бути, наприклад, фіксація кількості ітерацій або ж виконання умови $\|e_{\rho_j}(x, y)\|_{L_2} \leq eps$.

2.2.4. Результати чисельних експериментів

Для графічного зображення поля ефективним виявляється використання екіпотенціальних ліній. Це має особливо широке застосування в техніці, оскільки при конструюванні електронних ламп, конденсаторів, електронних лінз та інших приладів часто треба знайти розподіл електростатичного поля в просторі.

Використання запропонованого вище підходу дозволяє протестувати початкову задачу для довільних граничних значень потенціалу. На рис. 2.12–2.13 подано розподіл ліній рівного потенціалу в площині $x = 0$ при різних співвідношеннях довжини a та ширини b пластини з використанням кусково-постійної

апроксимації густини інтегрального рівняння з відповідними граничними значеннями потенціалу: $f_1 = 1$; $f_2 = -100$. Кількість точок колокації на S_1 становить 100.

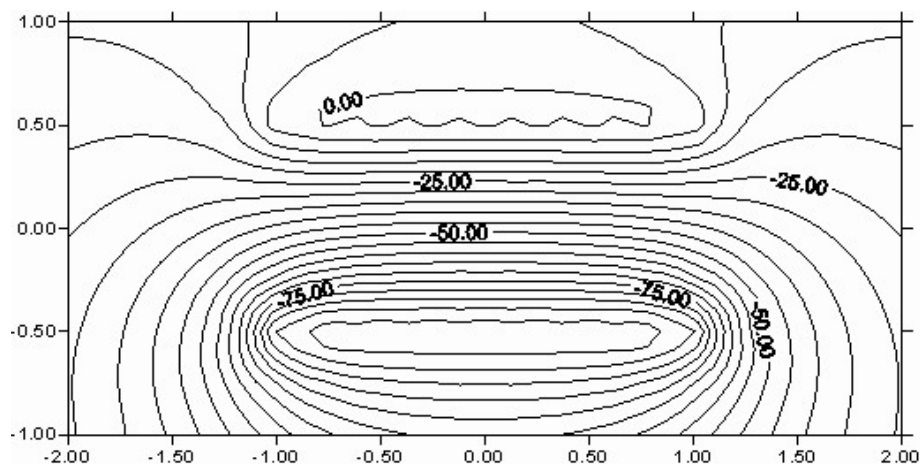


Рис. 2.12: Розподіл ліній рівня в площині $x = 0$ при $a/b = 1$

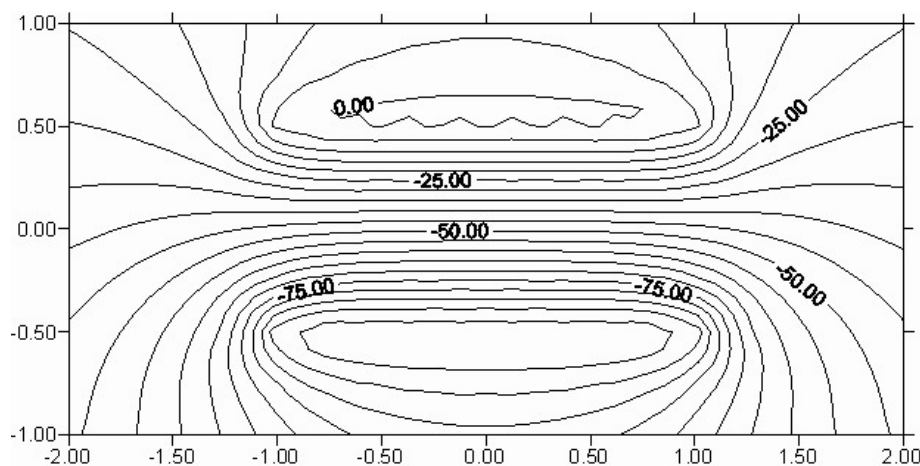


Рис. 2.13: Розподіл ліній рівня в площині $x = 0$ при $a/b = 16$

У табл. 2.2 подано значення потенціалу в деяких контрольних точках при розв'язуванні задачі розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора (див. рис. 2.11) за умов $a/b = 1$ і $a/b = 16$. Слід зауважити, що $E_8 = 0.0072$ (див. формулу 2.1.11). А в табл. 2.3 наведено значення потенціалу в деяких контрольних точках, до і після використання ітераційного уточнення.

Таблиця 2.2

Потенціал електростатичного поля у точках площини $x = 0$

(y, z)	$u(a/b = 1)$	$u(a/b = 16)$
(-1.00, -0.75)	-79.3684	-79.3731
(-1.00, -0.25)	-66.4537	-66.4593
(-1.00, 0.00)	-46.3882	-46.3909
(-1.00, 0.25)	-26.9936	-27.0001
(-1.00, 0.75)	-10.4048	-10.4086
(-0.75, -0.50)	-99.9853	-99.9925
(1.00, 0.75)	-10.4048	-10.4086
(2.00, -1.00)	-48.9251	-48.9304

Таблиця 2.3

Потенціал u в деяких контрольних точках після використання ітераційного уточнення розв'язку ($eps = 0, 01$)

y	z	Ітерації		
		1	2	3
0.9500	0.9500	0.9029	0.8150	0.9357
0.9500	0.8000	0.9650	0.8851	1.0318
0.6000	0.9500	0.9545	0.8892	1.0689
0.4000	0.9500	0.9569	0.8868	1.0786
0.2000	0.9500	0.9579	0.8876	1.0851

У табл. 2.4 наведено значення потенціалу в деяких контрольних точках, що знаходяться в околі “екстремального” елемента до (u_0) і після (u_1) врахування апостеріорного оцінювача похибки при допустимому рівні 10 %.

Потенціал в деяких контрольних точках у випадку кусково-білінійної
бл-функції

N_y	y	0,9375	0,8750	0,8125
	z	0,9375	0,9375	0,9375
4	u_0	0,8963	0,9454	0,9697
	u_1	1,0358	1,0189	1,0105
	λ_1	0,1395	0,0735	0,0408
	η	0,2116	0,1132	0,0631
5	u_0	0,9321	0,9792	–
	u_1	1,0234	1,0072	–
	λ_1	0,0913	0,0280	–
	η	0,1365	0,0421	–
6	u_0	0,9600	–	–
	u_1	1,0138	–	–
	λ_1	0,0538	–	–
	η	0,0794	–	–

Висновки до розділу 2

У розділі 2 на прикладі двох модельних задач розроблено систему методів моделювання для розрахунку електростатичних полів окремих класів електронно-оптичних систем з максимальним урахуванням наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь. Розроблено стійкий обчислювальний алгоритм розв'язання модельних задач, який дозволяє процес обчислення реалізувати паралельно. Досліджено умови трактування просторової задачі як плоскої. А також показано, як запропонований підхід дозволяє враховувати сингулярну поведінку шуканої густини в околі кутових точок розімкнених поверхонь і при підході до контуру обмежуючись її контролем лише в одній осо-

бливій точці. Для цього розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки. Для уточнення розв'язків у вузлах сітки запроваджено спеціальну ітераційну процедуру. Візуалізацію результатів моделювання електростатичного поля представлено розподілом ліній рівного потенціалу. Усі переваги розглянутої системи методів отримали своє підтвердження шляхом чисельних експериментів. Отримані результати також підтверджують доцільність застосування програмних засобів у відповідності до специфікації *OpenMP* для розпаралелення обчислень і вказують на можливість подальшої оптимізації програмного забезпечення для розв'язування даного класу задач за критерієм мінімізації часу розрахунків за рахунок варіації кількості паралельних потоків та процесорних ядер комп'ютера.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ З УРАХУВАННЯМ СИМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ В \mathbb{R}^2

У цьому розділі розглянуто математичну модель, що описує так зване плоске електростатичне поле. При цьому суттєво враховано специфіку відповідної крайової задачі. Основну увагу зосереджено на питанні еквівалентності цієї задачі певному інтегральному рівнянню та задачі вибору адитивної сталої, яка присутня в інтегральному зображенні плоского електростатичного поля при його математичному моделюванні. Показано, що цю константу легко обчислити за наявності конгруентних складових граничної поверхні. Також здійснено чисельне моделювання електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем з абелевими групами симетрії восьмого та четвертого порядків. Слід зауважити, що останні є деякими плоскими наближеннями просторових задач розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи, та плоского конденсатора. Розглянуто особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрії скінченних порядків.

Результати третього розділу опубліковані у [41, 44, 45, 49, 52, 95].

3.1. Плоский варіант суттєво просторової задачі електростатики та деякі аспекти її дослідження та розв'язування

Якщо заряджені електроди в процесі проектування електронно-оптичних систем моделювати нескінченно довгими циліндричними поверхнями, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей, то в перерізі з довільною площиною, перпен-

дикулярною до цієї осі, утворюється деяка сукупність розімкнених дуг. При цьому значення потенціалу досліджуваного поля в довільній точці простору не залежить від однієї координати, а необхідні розрахунки достатньо проводити лише в \mathbf{R}^2 , трактуючи розглядувану просторову проблему як плоску [8]. До того ж на підставі чисельних експериментів (див. розділ 2) встановлено, що навіть при розв'язанні задач у суттєво просторовій постановці за умов суттєвого переважання однієї геометричної складової граничної поверхні над іншою значення потенціалу у відповідних поперечних перерізах системи електродів близьких до центрального мало змінюється. Тому для встановлення якісної картини в центральних поперечних перерізах таких просторових конструкцій можна обмежитись дослідженням плоского електростатичного поля. Отже, зосередимо увагу на певних аспектах дослідження математичної моделі (1.3.1)–(1.3.4), яка описує саме плоске електростатичне поле.

Приймаючи до уваги те, що $\Psi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$ – фундаментальний розв'язок двовимірного рівняння Лапласа (1.3.1), розглянемо питання про еквівалентність задачі (1.3.1)–(1.3.4) певному інтегральному рівнянню.

Серед крайових задач теорії потенціалу в \mathbf{R}^2 можна виділити класи задач, які володіють абелевою групою симетрії того чи іншого скінченного порядку. Припускаючи, що межа L володіє абелевою групою симетрії скінченного порядку, в процесі чисельного розв'язування задачі (1.3.1)–(1.3.4) на основі методу інтегральних рівнянь можна скористатись апаратом теорії груп [21, 68]. У зв'язку з цим уточнено результати про так звану адитивну сталу, що фігурує в інтегральному зображенні розв'язку основної задачі. Отримано ефективну формулу для обчислення цієї сталої.

3.1.1. Про еквівалентність основної проблеми інтегральному рівнянню

Сформулюємо та доведемо теорему про еквівалентність задачі (1.3.1)–(1.3.4)

інтегральному рівнянню першого роду.

Теорема 3.1.1 *Якщо розв'язок $V(x)$ задачі (1.3.1)-(1.3.4) існує, то його можна подати у вигляді*

$$V(x) = \int_L \Psi(x, y) \tau(y) ds_y + C, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}, \quad (3.1.1)$$

причому $\tau(y)$ задовольняє таке інтегральне рівняння першого роду

$$\int_L \Psi(x, y) \tau(y) ds_y = g(x) - C, \quad x \in L. \quad (3.1.2)$$

Навпаки, якщо функція $V(x)$ визначена співвідношенням (3.1.1), де функція $\tau(y)$ і константа C задовольняють систему

$$\begin{cases} \int_L \Psi(x, y) \tau(y) ds_y = g(x) - C, & x \in L, \\ \int_L \tau(y) ds_y = 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

то $V(x)$ – розв'язок задачі (1.3.1)-(1.3.4).

Доведення. Скористаємось методикою, запровадженою в роботі [91]. Припустимо, що $z_j := \hat{c}_{2j-1}^*(\rho) \cup \hat{c}_{2j}^*(\rho) \cup L_j^{(+)} \cup L_j^{(-)}$ ($j = \overline{1, \nu}$) – простий, замкнений контур, який охоплює L_j таким чином, що $\hat{c}_m^*(\rho)$ ($m = 2j - 1, 2j$) є дугою кола радіуса ρ з центром у точці x_m^* , а $L_j^{(+)} \left(L_j^{(-)} \right)$ – незамкнена дуга, розміщена паралельно до L_j на відстані $\rho' < \rho$ з додатньої(від'ємної) сторони L_j . Позначимо через S_ρ об'єднання областей, обмежених замкненими контурами z_j , які містять L_j .

Нехай x – довільна фіксована точка в $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}$, $T := \{y \in \mathbf{R}^2 \mid |y - x| \leq R\}$, причому R настільки велике, що в T цілком міститься S_ρ . Застосуємо другу формулу Гріна [9] для функції $V(y)$, яка є розв'язком задачі (1.3.1)-(1.3.4), і функції $\Psi(x, y)$ в області, обмеженій $\bigcup_{j=1}^{\nu} z_j$ і двома колами $\Sigma_\varepsilon := \{y \in T \setminus \bar{S}_\rho \mid$

$|y - x| = \varepsilon\}$ і $\Sigma_R := \{y \in \mathbf{R}^2 \mid |y - x| = R\}$. Зауважимо, що $\varepsilon > 0$, згідно логіки доведення, довільне, скільки завгодно мале число.

Далі, спрямовуючи ρ' до нуля, отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{T \setminus (K_\varepsilon \cup \bar{S}_\rho)} [\Psi(x, y) \Delta V(y) - \Delta \Psi_y(x, y) V(y)] d\sigma_y &= \int_{\Sigma_R} \left[\Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} - V(y) \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} \right] ds_y + \int_{\Sigma_\varepsilon} \left[\Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} - V(y) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} \right] ds_y + \sum_{m=1}^{2v} V_m^*(x, \rho) + \\ &+ \sum_{j=1}^v \int_{L'_j} \Psi(x, y) \tau(y) ds_y - \sum_{j=1}^v \int_{L'_j} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} [V^-(y) - V^+(y)] ds_y, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

де

$$K_\varepsilon := \{y \in T \setminus \bar{S}_\rho \mid |y - x| \leq \varepsilon\}, \quad L'_j := L_j \setminus \sum_{m=2j-1}^{2j} \{y \in L_j \mid |y - x_m^*| \leq \rho\},$$

$$V_m^*(x, \rho) := \int_{c_m^*(\rho)} \left[\Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} - V(y) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} \right] ds_y,$$

$$\text{а } \tau(y) := \left(\frac{\partial V(y)}{\partial n} \right)^- - \left(\frac{\partial V(y)}{\partial n} \right)^+.$$

У співвідношенні (3.1.4) розглянемо інтеграли, які залежать від ε . Очевидно, що

$$\iint_{T \setminus (K_\varepsilon \cup \bar{S}_\rho)} V(y) \Delta \Psi_y(x, y) d\sigma_y = 0,$$

оскільки $\Delta_y \Psi(x, y) = 0$ за умови $x \neq y$. У відповідності з означенням невластного інтегралу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{T \setminus (K_\varepsilon \cup \bar{S}_\rho)} \Psi(x, y) \Delta V(y) d\sigma_y = \iint_{T \setminus \bar{S}_\rho} \Psi(x, y) \Delta V(y) d\sigma_y = 0,$$

тому що $\Delta V(y) = 0$ за будь-якого $y \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}$.

Далі,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Sigma_\varepsilon} V(y) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_\varepsilon} V(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y-x|} ds_y = - \frac{1}{2\pi\varepsilon} \times \\ & \times \int_{\Sigma_\varepsilon} V(y) ds_y = - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon V^* = -V^*, \text{ оскільки } \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y-x|} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |y-x| = \frac{\partial}{\partial r} \ln r = \frac{1}{r}, \left. \frac{1}{r} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ а } V^* \text{ - середнє значення} \\ & \text{функції } V(y) \text{ на колі } \Sigma_\varepsilon. \text{ За рахунок неперервності } V(y), \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ } V^* \rightarrow \end{aligned}$$

$V(x)$. Аналогічним чином

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_\varepsilon} \Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_\varepsilon} \ln \frac{1}{|y-x|} \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y = \\ & - \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon 2\pi\varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^* = -\varepsilon \ln \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^*, \text{ де } \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^* \text{ - середнє значення нор-} \\ & \text{мальної похідної функції } V(y) \text{ на колі } \Sigma_\varepsilon, \text{ звідки } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^* = 0, \text{ оскільки} \\ & \text{перші похідні функції } V(y) \text{ неперервні в } \mathbf{R}^2 \setminus \bar{L}. \text{ Отже, величина } \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^* \\ & \text{обмежена.} \end{aligned}$$

Оцінимо у (3.1.4) інтеграли, які залежать від R . Очевидно, що

$$\begin{aligned} & - \int_{\Sigma_R} V(y) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_R} V(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y-x|} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_R} V(y) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{1}{R} ds_y = - \frac{1}{2\pi R} \int_{\Sigma_R} V(y) ds_y. \text{ За умови прямування } R \text{ до нескінченності,} \end{aligned}$$

враховуючи (1.3.3), легко бачити, що $\frac{1}{2\pi R} \int_{\Sigma_R} V(y) ds_y \rightarrow C$.

Далі,

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_R} \Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_R} \ln |y-x| \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y = - \frac{1}{2\pi} \ln R \int_{\Sigma_R} \frac{\partial V(y)}{\partial n} dS_R. \text{ Ос-} \\ & \text{кільки } V(y) \text{ гармонічна функція на нескінченності, то в околі нескінченно} \\ & \text{віддаленої точки площини справедливою є оцінка [9]} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial V(y)}{\partial n} \right| \leq \frac{A}{R^2}, \quad R = |y-x|.$$

Тому при достатньо великому R

$$\left| \int_{\Sigma_R} \Psi(x, y) \frac{\partial V(y)}{\partial n} ds_y \right| \leq \frac{A \ln R}{R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Із формули (3.1.4) при $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на підставі попереднього, враховуючи умови (1.3.2), отримуємо

$$V(x) = \sum_{j=1}^v \int_{L'_j} \Psi(x, y) \tau(y) ds_y + \sum_{m=1}^{2v} V_m^*(x, \rho) + C. \quad (3.1.5)$$

Розглянемо величини $V_m^*(x, \rho)$, враховуючи те, що $\rho > 0$ – скільки завгодно мале число. Оскільки $\Psi(x, y)$ неперервно диференційована при $y \neq x$, то $|\Psi(x, y)|$ і $\left| \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_y} \right|$ обмежені за будь-якого $y \in C_m^*(\rho)$. Тому $|V_m^*(x, \rho)| \leq B \int_{C_m^*(\rho)} \left[|V(y)| + \left| \frac{\partial V(y)}{\partial \rho} \right| \right] ds_y$, де $B > 0$ – деяка стала. При виконанні умови (1.3.4) $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_m^*(x, \rho) = 0$.

Внаслідок припущення щодо існування розв'язку задачі (1.3.1)-(1.3.4) вираз у правій частині (3.1.5), який існує при довільному ρ , буде збігатись до даного $V(x)$ за умови $\rho \rightarrow 0$. З урахуванням останнього отримуємо

$$V(x) = \sum_{j=1}^v \int_{L_j} \Psi(x, y) \tau(y) ds_y + C,$$

або скорочено,

$$V(x) = \int_L \Psi(x, y) \tau(y) ds_y + C.$$

Нарешті отримаємо інтегральне рівняння (3.1.2). Для цього в (3.1.1) спрямуємо точку x до точки $x_0 \in L$ з додатньої або від'ємної сторони. Враховуючи властивості потенціалу простого шару [9], маємо

$$V^\pm(x_0) = \int_L \Psi(x_0, y) \tau(y) ds_y + C, \quad (3.1.6)$$

причому використання крайових умов (1.3.2) дає

$$\int_L \Psi(x_0, y) \tau(y) ds_y = g(x_0) - C.$$

Отже, побудовано інтегральне рівняння і доведена перша частина теореми.

Навпаки, припустимо, що $V(x)$ подається правою частиною (3.1.1), а $\tau(y)$ і C задовольняють систему (3.1.3). Очевидно, що $V(x)$ є розв'язком (1.3.1). Оскільки крайові значення $V(x)$ виражаються формулою (3.1.6), а $\tau(y)$ задовольняє систему (3.1.3), то легко бачити, що $V^\pm(x_0) = g(x_0)$.

Оскільки поки що на константу C ніяких обмежень не накладали, підберемо її так, щоби виконувалась умова (3.1.3). Для цього подамо $\tau(y)$ у вигляді $\tau(y) = \tau_1(y) - C\tau_2(y)$, де $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ – розв'язки інтегральних рівнянь

$$\int_L \Psi(x, y) \tau_1(y) ds_y = g(x)$$

і

$$\int_L \Psi(x, y) \tau_2(y) ds_y = 1, \quad x \in L,$$

відповідно. Якщо $C = \left(\int_L \tau_1(y) ds_y \right) \left(\int_L \tau_2(y) ds_y \right)^{-1}$, то $\tau(y)$ задовольняє (3.1.3), що легко перевірити.

При виконанні умови $\int_L \tau(y) ds_y = 0$ функція $V(x)$ обмежена на нескінченності. Дійсно, нехай $x \in \bar{L}$, а \hat{y} – довільна точка на L , тоді $V(x) = \int_L \Psi(x, y) \tau(y) ds_y + C = \frac{1}{2\pi} \int_L \ln \frac{1}{|x - y|} \tau(y) ds_y + \frac{1}{2\pi} \ln |x - \hat{y}| \int_L \tau(y) ds_y = \frac{1}{2\pi} \int_L \ln \frac{|x - \hat{y}|}{|x - y|} \tau(y) ds_y + C$. Застосовуючи теорему про середнє, неважко отримати таку оцінку

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_L \ln \frac{|x - \hat{y}|}{|x - y|} \tau(y) ds_y \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_L |\tau(y)| \left| \ln \frac{|x - \hat{y}|}{|x - y|} \right| ds_y = \int_L |\tau(y)| ds_y \frac{1}{2\pi} \times$$

$\times \left| \ln \frac{|x - \hat{y}|}{|x - y^*|} \right|$, де y^* – деяка точка на L . Звідси при $x \rightarrow \infty$ маємо $|x - \hat{y}| \times$
 $\times |x - y^*|^{-1} \rightarrow 1$, а $\ln \frac{|x - \hat{y}|}{|x - y^*|} \rightarrow 0$, тобто $V(\infty) = C$. Зауважимо також, що
 величина $\int_L |\tau(y)| ds_y$ обмежена, що впливає з наступних міркувань.

Залишається перевірити виконання умови (1.3.4). При цьому достатньо показати, що $|\partial V(y)/\partial \rho|$ при $y \in C_m^*(\rho)$ та $\rho \rightarrow 0$ є величиною порядку $o(\rho^\alpha)$, де $\alpha > -1$. Скористаємось відомим поданням інтегралу Коші [75]:

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = v(x_1, x_2) + iu(x_1, x_2),$$

де $z := x_1 + ix_2 \in L$, $\varphi(t)$ – дійсна обмежена на L функція, $v(x_1, x_2)$ – потенціал подвійного шару, а $u(x_1, x_2)$ – з точністю до сталої логарифмічний потенціал простого шару. Легко бачити, що

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2} dt.$$

З іншого боку, враховуючи умову Коші-Рімана,

$$\Phi'(z) = \frac{\partial v}{\partial x_1} + i \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x_2} - i \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (3.1.7)$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в ролі L виступає інтервал $(0, 1)$ осі абсцис декартової прямокутної системи координат $0x_1x_2$. Побудуємо коло радіуса ρ з центром у початку координат. Точка кола z , яка не лежить на L , належить комплексній площині, а тому її можна подати у вигляді

$$z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\beta} = \rho(\cos \beta + i \sin \beta),$$

де β – аргумент, ρ – модуль комплексного числа z .

Похідну логарифмічного потенціалу V за напрямком ρ можна обчислити за формулою

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial x_2} \sin \beta,$$

а похідна інтегралу Коші на колі радіуса ρ в даному випадку має вигляд:

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\varphi(s)}{(s - \rho e^{i\beta})^2} ds.$$

Виділяючи в останньому інтегралі дійсну і уявну частини, з урахуванням (3.1.8), отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{s^2 - 2\rho s \cos \beta + \rho^2 \cos 2\beta}{(s^2 + \rho^2 - 2\rho s \cos \beta)^2} \varphi(s) ds,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\rho \sin \beta}{\pi} \int_0^1 \frac{s - \rho \cos \beta}{(s^2 + \rho^2 - 2\rho s \cos \beta)^2} \varphi(s) ds.$$

Тепер формулу для обчислення похідної U за напрямком ρ можна подати у вигляді

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{2\rho s - (s^2 + \rho^2) \cos \beta}{(s^2 + \rho^2 - 2\rho s \cos \beta)^2} \varphi(s) ds.$$

Для оцінки цього інтегралу за порядком величини використаємо очевидну нерівність $2\rho s \leq s^2 + \rho^2$, яка виконується строго за умови $s \neq \rho$. Звідки отримаємо

$$2\rho s - (s^2 + \rho^2) \cos \beta \leq (1 - \cos \beta)(s^2 + \rho^2),$$

$$(1 - \cos \beta)^2 (s^2 + \rho^2)^2 \leq (s^2 + \rho^2 - 2s\rho \cos \beta)^2, \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} < \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi(s^*)}{1 - \cos \beta} \int_0^1 \frac{ds}{s^2 + \rho^2} = o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow 0, \quad s^* \in (0, 1).$$

Строге виконання останньої нерівності, а також властивість монотонності показникової функції дозволяє стверджувати, що

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = o(\rho^\alpha), \quad \alpha > -1.$$

Отже, доведено еквівалентність задачі (1.3.1)-(1.3.4) інтегральному рівнянню першого роду зі слабкою особливістю в ядрі.

Теорему доведено.

Використовуючи диференціальну постановку початкової задачі (1.3.1)-(1.3.4), запроваджену вище методику, міркуючи від супротивного, легко довести єдиність розв'язку відповідного інтегрального рівняння.

3.1.2. Теорема про адитивну сталу

З метою уточнення попередніх результатів сформулюємо та доведемо таку теорему.

Теорема 3.1.2 *Якщо початкова крайова задача (1.3.1)-(1.3.4) володіє абелевою групою симетрії скінченного k -го порядку, а граничні значення потенціалу на окремих ділянках межі приймають довільні постійні значення C_1, C_2, \dots, C_k , $|C_i| < +\infty$, $i = \overline{1, k}$, то адитивну сталу в поданні розв'язку (3.1.1) можна обчислити за формулою*

$$C = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C_i.$$

Доведення. Із доведення теореми 3.1.1 випливає, що адитивна стала в інтегральному поданні розв'язку задачі (1.3.1)-(1.3.4) має вигляд:

$$C = \left(\int_L \tau_1(y) ds_y \right) \left(\int_L \tau_2(y) ds_y \right)^{-1}.$$

Тут $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ – розв'язки таких інтегральних рівнянь

$$\int_L \tau_1(y) \Psi(x, y) ds_y = g(x), \quad x \in L, \quad (3.1.8)$$

$$\int_L \tau_2(y) \Psi(x, y) ds_y = 1, \quad x \in L, \quad (3.1.9)$$

відповідно. Нагадаємо, що $g(x) \equiv \text{const}$ на кожній складовій L , а $\Psi(x, y)$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^2 .

Оскільки початкова крайова задача (1.3.1)-(1.3.4) володіє абелевою групою симетрії k -го порядку, то межа L допускає розбиття на конгруентні складові L_i ($i = \overline{1, k}$), тобто $L := \bigcup_{i=1}^k L_i$, причому $L_i \cap L_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Трактуючи шукані густини $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ у відповідності з таким подрібненням L , подамо інтегральні рівняння (3.1.8) і (3.1.9) у вигляді

$$\sum_{i=1}^k \int_{L_i} \tau_{1i}(y) \Psi(x, y) ds_y = C_j, \quad x \in L_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (3.1.10)$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{L_i} \tau_{2i}(y) \Psi(x, y) ds_y = 1, \quad x \in L_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (3.1.11)$$

де $\tau_{1i}(y)$, $\tau_{2i}(y)$ – звуження $\tau_1(y)$ і $\tau_2(y)$ на L_i , відповідно.

Здійснивши параметризацію інтегральних рівнянь (3.1.10) і (3.1.11), отримаємо

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \tau_{1i}(\alpha) \Phi[y_i(\alpha), x] d\alpha = C_j, \quad x \in L_j, \quad j = \overline{1, k} \quad (3.1.12)$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \tau_{2i}(\alpha) \Phi[y_i(\alpha), x] d\alpha = 1, \quad x \in L_j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (3.1.13)$$

де $\tau_{1i}(\alpha) := \tau_1[y_i(\alpha)]$, $\tau_{2i}(\alpha) := \tau_2[y_i(\alpha)]$, $i = \overline{1, k}$; $\Phi[y_i(\alpha), x] := |y_i(\alpha)| \times \Psi(y_i(\alpha), x)$ при тому, що $y_i(\alpha)$ ($a_i \leq \alpha \leq b_i$, $i = \overline{1, k}$) – параметричні подання ділянок межі L , а для позначення невідомих густин збережені позначення з (3.1.10), (3.1.11). Припускаємо також, що вектор-функції $y_i(\alpha)$ володіють достатньою гладкістю. Оскільки операція суперпозиції елементів групи симетрії, які є відповідними перетвореннями конгруентних складових L із множини $\{L_i\}_{i=1}^k$, транзитивна, то при визначенні нумерації елементів σ_i цієї групи будемо вважати, що $L_1 = \sigma_i L_i$, $i = \overline{1, k}$, де σ_1 – тотожне перетворення. Далі

здійснимо в (3.1.12), (3.1.13) перехід до нового базису:

$$\tau'_{1i}(\alpha) := \tau_1 [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha)], \quad \tau'_{2i}(\alpha) := \tau_2 [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha)], \quad a_1 \leq \alpha \leq b_1, \quad i = \overline{1, k}.$$

Тут $\tilde{\sigma}_i^{-1}$ – матриці, обернені до матриць, які, в свою чергу, є зображеннями елементів групи $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$. Таким чином запроваджені "заміни змінних" дозволяють від (3.1.12), (3.1.13) перейти до інтегральних рівнянь вигляду

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{1i}(\alpha) \Phi [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha); \tilde{\sigma}_j^{-1} y_1(\bar{\alpha})] d\alpha = C_j, \quad (3.1.14)$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{2i}(\alpha) \Phi [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha); \tilde{\sigma}_j^{-1} y_1(\bar{\alpha})] d\alpha = 1, \quad (3.1.15)$$

де $\bar{\alpha} \in [a_1, b_1]$, $j = \overline{1, k}$. Отже, на даному етапі досліджень ми отримали дві системи інтегральних рівнянь (3.1.14) і (3.1.15), у яких інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій L_1 межі L .

Системи (3.1.14) і (3.1.15) зручно подати у формі таких операторних рівнянь

$$(AG_1)(\bar{\alpha}) = \hat{C}, \quad (3.1.16)$$

$$(AG_2)(\bar{\alpha}) = I. \quad (3.1.17)$$

Тут $A := (A_{ji})_{j,i=1}^k$ – матриця операторів; $G_1(\alpha) := [\tau'_{1i}(\alpha)]_{i=1}^k$, $G_2(\alpha) := [\tau'_{2i}(\alpha)]_{i=1}^k$ – стовпчики-функції; $\hat{C} := (C_1, C_2, \dots, C_k)^T$; I – одиничний стовпчик. При цьому кожний з операторів визначається за формулами

$$\left(A_{ji} G_1^{(i)} \right) (\bar{\alpha}) := \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{1i}(\alpha) \Phi [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha); \tilde{\sigma}_j^{-1} y_1(\bar{\alpha})] d\alpha,$$

$$\left(A_{ji} G_2^{(i)} \right) (\bar{\alpha}) := \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{2i}(\alpha) \Phi [\tilde{\sigma}_i^{-1} y_1(\alpha); \tilde{\sigma}_j^{-1} y_1(\bar{\alpha})] d\alpha,$$

де $G_1^{(i)}, G_2^{(i)}$ – i -ті компоненти ($i = \overline{1, k}$) стовпчиків-функцій $G_1(\alpha), G_2(\alpha)$, відповідно. Далі, використовуючи теорію характерів [11, 68], побудуємо матрицю перетворення Фур'є для розглядуваної групи k -го порядку, що дає можливість подати (3.1.16) і (3.1.17) у розщепленому вигляді:

$$(B_p \overline{G}_{1p})(\bar{\alpha}) = \overline{C}_p, \quad (3.1.18)$$

$$(B_p \overline{G}_{2p})(\bar{\alpha}) = \overline{I}_p, \quad (3.1.19)$$

де $p = \overline{1, k}$; $a_1 \leq \bar{\alpha} \leq b_1$; $\overline{G}_{1p}(\alpha) := \sum_{i=1}^k F_{pi} G_1^{(i)}(\alpha)$; $\overline{G}_{2p}(\alpha) := \sum_{i=1}^k F_{pi} G_2^{(i)}(\alpha)$; $a_1 \leq \alpha \leq b_1$; $\overline{C}_p := \sum_{i=1}^k F_{pi} C_i$; $\overline{I}_p = \sum_{i=1}^k F_{pi}$, а B_p – елементи діагональної матриці FAF^{-1} , причому $F := \{F_{pi}\}_{p,i=1}^k$.

На основі наведеної вище методики переходу до k незалежних інтегральних рівнянь (3.1.18), (3.1.19) шукану адитивну сталу можна обчислити за такою формулою:

$$\begin{aligned} C &= \left(\sum_{i=1}^k \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{1i}(\alpha) d\alpha \right) / \left(\sum_{i=1}^k \int_{a_1}^{b_1} \tau'_{2i}(\alpha) d\alpha \right) = \\ &= \left(\frac{1}{k} \int_{a_1}^{b_1} \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^k F_{ip} \overline{G}_{1i}(\alpha) d\alpha \right) / \left(\frac{1}{k} \int_{a_1}^{b_1} \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^k F_{ip} \overline{G}_{2i}(\alpha) d\alpha \right). \end{aligned}$$

Враховуючи вигляд матриці перетворення Фур'є для групи k -го порядку, легко бачити, що

$$C = \left(\int_{a_1}^{b_1} \overline{G}_{11}(\alpha) d\alpha \right) / \left(\int_{a_1}^{b_1} \overline{G}_{21}(\alpha) d\alpha \right),$$

де $\overline{G}_{11}(\alpha)$ and $\overline{G}_{21}(\alpha)$ визначаємо з таких інтегральних рівнянь:

$$(B_1 \overline{G}_{11})(\bar{\alpha}) = \overline{C}_1, \quad (3.1.20)$$

$$(B_1 \overline{G}_{21})(\overline{\alpha}) = \overline{I}_1, \quad (3.1.21)$$

відповідно. Тут $\overline{C}_1 = \sum_{i=1}^k F_{1i} C_i = \sum_{i=1}^k C_i$, а $\overline{I}_1 = \sum_{i=1}^k F_{1i} \cdot 1 = k$, $a_1 \leq \overline{\alpha} \leq b_1$.

Внаслідок існування та єдиності розв'язку задачі (1.3.1)-(1.3.4), існує оператор B_1^{-1} , що дозволяє подати розв'язки (3.1.20), (3.1.21) у вигляді $\overline{G}_{11} = B_1^{-1} \overline{C}_1$, $\overline{G}_{21} = B_1^{-1} \overline{I}_1$. Оскільки \overline{C}_1 і \overline{I}_1 – сталі величини,

$$C = \left(\int_{a_1}^{b_1} (B_1^{-1} \overline{C}_1)(\alpha) d\alpha \right) / \left(\int_{a_1}^{b_1} (B_1^{-1} \overline{I}_1)(\alpha) d\alpha \right) = \frac{\overline{C}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\sum_{i=1}^k C_i}{k},$$

що і треба було довести.

Теорему доведено.

Встановлення даного факту суттєво спрощує алгоритм наближеного розв'язування задачі (1.3.1)-(1.3.4), оскільки при знаходженні $\tau(y)$ можна обмежитись дослідженням лише одного інтегрального рівняння виду

$$\int_L \Psi(x, y) \tau(y) dS_y = \hat{g}_i(x), \quad x \in L_i,$$

де $\hat{g}_i(x) = g_i(x) - C$, причому $g_i(x) \equiv C_i$, $i = \overline{1, N}$. Отже, значення C можна знаходити просто без додаткових складних обчислень.

Зауваження. Враховуючи складність чисельної та програмної реалізації відповідних алгоритмів апарату теорії груп, можна обмежитись 16-м порядком групи симетрії. Вибір групи саме з таким максимальним порядком є, на нашу думку, вичерпним з точки зору подання систем електродів, які здебільшого використовують у процесі реального моделювання електронно-променевих приладів.

3.2. Висвітлення типових проблем, що виникають при розв'язуванні однієї модельної задачі з абелевою групою симетрії восьмого порядку

Враховуючи типові конфігурації складових поверхонь-електродів, які використовують при проектуванні реальних приладів, розглянемо задачу знаходження електростатичного поля плоскої електронно-оптичної системи, зображеної на рис. 3.14. Як бачимо, інформацію про геометрію заряджених електродів подано у вигляді деякої сукупності конгруентних гладких незамкнених дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, які є частинами відповідних гіпербол у \mathbf{R}^2 . При цьому граничні значення потенціалу (f_1, f_2, f_3, f_4) не володіють симетрією чи антисиметрією.

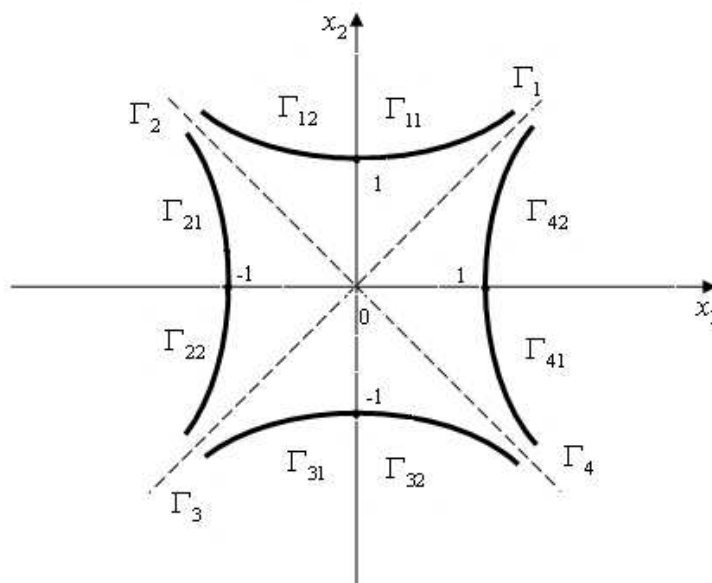


Рис. 3.14: Досліджувана плоска електронно-оптична система

З математичної точки зору необхідно знайти функцію $V(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Gamma})$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta V(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad \Gamma := \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad x := (x_1, x_2)^T; \quad (3.2.1)$$

за умови

$$V(x) = f_i(x), \quad x \in \Gamma_i \quad (i = \overline{1,4}); \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |V(x)| < +\infty. \quad (3.2.2)$$

Нехай $\Phi(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$ – фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^2 [9]. Тоді, враховуючи теорему 3.1.1, розв’язок задачі (3.2.1)–(3.2.2) шукатимемо у вигляді

$$V(y) := \int_{\Gamma} \mu(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x + C, \quad y := (y_1, y_2). \quad (3.2.3)$$

Тут $\mu(x) := g(x) - C\lambda(x)$, де $\lambda(x)$ – розв’язок допоміжного інтегрального рівняння

$$\int_{\Gamma} \lambda(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = 1, \quad y \in \Gamma, \quad (3.2.4)$$

а $g(x)$ задовольняє рівняння

$$\int_{\Gamma} g(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = f_i(y), \quad y \in \Gamma_i \quad (i = \overline{1,4}), \quad (3.2.5)$$

причому константа C визначається з умови $\int_{\Gamma} \mu(x) d\Gamma_x = 0$, тобто

$$C = \left(\int_{\Gamma} g(x) d\Gamma_x \right) / \left(\int_{\Gamma} \lambda(x) d\Gamma_x \right).$$

Отже, знаходження $\mu(x)$, – сукупної густини розподілу зарядів уздовж Γ ($\mu(x) := \{ \mu_i(x), x \in \Gamma_i; i = \overline{1,4} \}$), – пов’язане із необхідністю розв’язання двох інтегральних рівнянь (3.2.4) і (3.2.5) [79]. Знайдена при цьому константа C забезпечує обмеженість шуканого розв’язку (3.2.3) на нескінченності при $|y| \rightarrow \infty$.

Слід зауважити, що при чисельному розв’язуванні задачі (3.2.1)–(3.2.2) адитивну сталу C шукатимемо чисельно, для перевірки достовірності отриманих в теоремі 3.1.2. результатів.

3.2.1. Параметризація відповідного інтегрального рівняння

З метою максимального врахування симетрії у розташуванні окремих ділянок межі Γ на площині $x_1 0 x_2$ подамо кожен дугу Γ_i ($i = \overline{1, 4}$) у вигляді двох конгруентних складових: $\Gamma_i := \Gamma_{i1} \cup \Gamma_{i2}$. Трактуючи $\mu(x)$ у відповідності з таким подрібненням Γ , розглянемо інтегральне рівняння (3.2.5) для знаходження шуканої густини розподілу зарядів $g(x)$ у вигляді:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{ij}} g_{ij}(x) \Phi(x, y) d\Gamma_x = f_{kl}(y), \quad y \in \Gamma_{kl} \quad (k = \overline{1, 4}; l = 1, 2), \quad (3.2.6)$$

де $g_{ij}(x)$ – звуження $g(x)$ на Γ_{ij} , а $f_{kl}(y)$ – звуження $f_k(y)$ на Γ_{kl} .

Далі, для аналізу криволінійних інтегралів у (3.2.6) використаємо параметричні рівняння, що описують відповідні ділянки межі [6]:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12} := \left\{ x_{11}(\tau) := (\operatorname{sh}\tau, \operatorname{ch}\tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x_{12}(\tau) := (\operatorname{sh}\tau, \operatorname{ch}\tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\}, \\ \Gamma_2 &:= \Gamma_{21} \cup \Gamma_{22} := \left\{ x_{21}(\tau) := (-\operatorname{ch}\tau, \operatorname{sh}\tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x_{22}(\tau) := (-\operatorname{ch}\tau, \operatorname{sh}\tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\}, \\ \Gamma_3 &:= \Gamma_{31} \cup \Gamma_{32} := \left\{ x_{31}(\tau) := (\operatorname{sh}\tau, -\operatorname{ch}\tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x_{32}(\tau) := (\operatorname{sh}\tau, -\operatorname{ch}\tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\}, \\ \Gamma_4 &:= \Gamma_{41} \cup \Gamma_{42} := \left\{ x_{41}(\tau) := (\operatorname{ch}\tau, \operatorname{sh}\tau)^T; -1 \leq \tau \leq 0 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ x_{42}(\tau) := (\operatorname{ch}\tau, \operatorname{sh}\tau)^T; 0 \leq \tau \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Це дає можливість подати (3.2.6) у вигляді такої системи восьми інтегральних рівнянь:

$$\int_0^1 g_{11}(\tau) \cdot K[x_{11}(\tau); y] d\tau + \int_{-1}^0 g_{12}(\tau) \cdot K[x_{12}(\tau); y] d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 g_{21}(\tau) \cdot K[x_{21}(\tau); y] d\tau + \int_{-1}^0 g_{22}(\tau) \cdot K[x_{22}(\tau); y] d\tau + \\
& \int_{-1}^0 g_{31}(\tau) \cdot K[x_{31}(\tau); y] d\tau + \int_0^1 g_{32}(\tau) \cdot K[x_{32}(\tau); y] d\tau + \\
& \int_{-1}^0 g_{41}(\tau) \cdot K[x_{41}(\tau); y] d\tau + \int_0^1 g_{42}(\tau) \cdot K[x_{42}(\tau); y] d\tau =
\end{aligned}$$

$$f_{kl}(y), \quad y \in \Gamma_{kl} \quad (k = \overline{1,4}; l = 1, 2), \quad (3.2.7)$$

де $g_{ij} := g[x_{ij}(\tau)]$ ($i = \overline{1,4}; j = 1, 2$), а $K[x(\tau); y] := |x(\tau)| \cdot \Phi[x(\tau); y]$ при тому, що $x(\tau)$ – параметричне подання однієї з восьми ділянок межі.

3.2.2. Врахування симетрії межі

Для зменшення кількості рівнянь, які можна розв’язувати одночасно, скористаємось очевидною властивістю розглядуваної проблеми [21, 22].

Лема 3.2.5 Система інтегральних рівнянь (3.2.7) володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку, яка є прямим добутком циклічних груп четвертого порядку $\{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ і другого порядку $\{e, \sigma\}$, де e – тотожне перетворення, σ – дзеркальне відображення, а β – поворот на кут $\pi/2$ відносно початку координат.

Доведення. Враховуючи запроваджену вище нумерацію конгруентних складових межі Γ , легко бачити, що $\Gamma_{ij} = \beta_h \Gamma_{11}$ ($i = \overline{1,4}; j = 1, 2; h = 2(i-1) + j$), причому $\beta_1 := e$, $\beta_2 := \sigma$, $\beta_3 := \beta$, $\beta_4 := \beta\sigma$, $\beta_5 := \beta^2$, $\beta_6 := \beta^2\sigma$, $\beta_7 = \beta^3$, $\beta_8 = \beta^3\sigma$. Тому Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку $GR_8^2 := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8\}$. Остання, в свою чергу, є прямим

добутком циклічних груп четвертого порядку $GR_4^1 := \{e, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ і другого порядку $GR_2^1 := \{e, \sigma\}$. Отже, межа Γ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. Оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору \mathbf{R}^2 . Кожна група симетрії кривої у \mathbf{R}^2 є підгрупою заданої групи рухів, тому аналогічною групою володіє відповідна крайова задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (3.2.7) володіє абелевою групою симетрії GR_8^2 , що і треба було показати.

Лемму доведено.

Очевидно, що матриця поворотів на кут $\varphi = \pi/2$ має вигляд:

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а } \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідно } \beta_1^{-1} = \beta_1, \beta_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_7^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_8^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наведені вище міркування дозволяють встановити такий факт.

Лема 3.2.6 Система інтегральних рівнянь (3.2.7) еквівалентна системі рів-

нянь:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 g'_{ij}(\tau) K[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau); \beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau})] d\tau = f'_{kl}(\bar{\tau}), \quad (3.2.8)$$

де $\bar{\tau} \in [0, 1]$; $k = \overline{1, 4}$; $l = 1, 2$.

Доведення. Для отримання (3.2.8) здійснимо в (3.2.7) перехід до нового базису згідно такої схеми:

$$g'_{ij}(\tau) := g_{ij}[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau)] \quad (0 \leq \tau \leq 1; i = \overline{1, 4}; j = 1, 2; h = 2(i-1) + j);$$

$$f'_{kl}(\bar{\tau}) := f_{kl}[\beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau})] \quad (0 \leq \bar{\tau} \leq 1; k = \overline{1, 4}; l = 1, 2; h' = 2(k-1) + l).$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (3.2.7) до еквівалентної системи (3.2.8), де інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій межі Γ_{11} .

Лемму доведено.

Неважко переконатися в тому, що систему (3.2.8) зручно подати в формі такого операторного рівняння

$$(AG)(\bar{\tau}) = \Psi(\bar{\tau}). \quad (3.2.9)$$

Тут $A := (A_{hh'})_{h, h'=1}^8$ – матриця операторів, $G(\tau) := [G_h(\tau)]_{h=1}^8$, $\Psi(\bar{\tau}) := [\Psi'_h(\bar{\tau})]_{h=1}^8$ – стовпчики-функції такі, що $G_h(\tau) := g'_{ij}(\tau)$, $\Psi'_h(\bar{\tau}) := f'_{kl}(\bar{\tau})$, а кожний з операторів $A_{hh'}$ визначається за формулою:

$$(A_{hh'}G_h)(\bar{\tau}) := \int_0^1 G_h(\tau) K[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau); \beta_{h'}^{-1} x_{11}(\bar{\tau})] d\tau = \Psi_{h'}(\bar{\tau}). \quad (3.2.10)$$

Відомо [68], що характери групи GR_4^1 можна обчислити за формулою $\chi^h(\beta^k) = e^{2\pi i k(h-1)/n}$ ($k = \overline{0, 3}$; $h = \overline{1, 4}$; $n = 4$), де k – степінь перетворення β , h – номер відповідного представлення. Легко бачити, що таблиця характерів тоді матиме вигляд:

	e	β	β^2	β^3
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	$-i$
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	i	-1	i

Оскільки для групи GR_2^1 таблиця характерів (матриця перетворення Фур'є) має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а досліджувана група є прямим добутком GR_4^1 і GR_2^1 , то, знайшовши прямий добуток відповідних матриць перетворення Фур'є, отримуємо

$$F := (F_{hl})_{h,l=1}^8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

Використовуючи пряме (3.2.11) і обернене перетворення Фур'є для розглядуваної групи восьмого порядку, матрицю операторів A у (3.2.8) з врахуванням (3.2.10) можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (3.2.7) “розщепити” на вісім незалежних рівнянь. Отже, на підставі попередніх міркувань можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3.2.1 *Нехай (3.2.7) володіє абелевою групою симетрії GR_8^2 . Тоді*

(3.2.7) можна подати у вигляді:

$$(B_h \bar{G}_h)(\bar{\tau}) = \bar{\Psi}_h(\bar{\tau}) \quad (h = \overline{1,8}; 0 \leq \bar{\tau} \leq 1), \quad (3.2.12)$$

де

$$\bar{G}_h(\tau) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} G_s(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad \bar{\Psi}_h(\bar{\tau}) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} \Psi_s(\bar{\tau}), \quad (3.2.13)$$

а B_h – елементи діагональної матриці FAF^{-1} операторів, які обчислюємо за формулами:

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} + A_{51} + A_{61} + A_{71} + A_{81}, \\ B_2 &:= A_{11} + A_{21} + iA_{31} + iA_{41} - A_{51} - A_{61} - iA_{71} - iA_{81}, \\ B_3 &:= A_{11} + A_{21} - A_{31} - A_{41} + A_{51} + A_{61} - A_{71} - A_{81}, \\ B_4 &:= A_{11} + A_{21} - iA_{31} - iA_{41} - A_{51} - A_{61} + iA_{71} + iA_{81}, \\ B_5 &:= A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} + A_{51} - A_{61} + A_{71} - A_{81}, \\ B_6 &:= A_{11} - A_{21} + iA_{31} - iA_{41} - A_{51} + A_{61} - iA_{71} + iA_{81}, \\ B_7 &:= A_{11} - A_{21} - A_{31} + A_{41} + A_{51} - A_{61} - A_{71} + A_{81}, \\ B_8 &:= A_{11} - A_{21} - iA_{31} + iA_{41} - A_{51} + A_{61} + iA_{71} - iA_{81}. \end{aligned}$$

Розв'язавши вісім інтегральних рівнянь (3.2.12), знайдемо $\bar{G}_h(\tau)$. Далі, на основі (3.2.12) визначимо $G_h(\tau) = g'_{ij}(\tau)$, які можна використати при обчисленні потенціалу в будь-якій точці P площини $x_1 0 x_2$:

$$V(P) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \int_0^1 (g'_{ij}(\tau) - C\lambda'_{ij}(\tau)) K[\beta_h^{-1} x_{11}(\tau); P] d\tau + C,$$

де $P \in \bar{\Gamma}$.

Слід зауважити, що обчислення адитивної сталої C з урахуванням теореми 3.1.2 дозволяє суттєво прискорити обчислення потенціалу плоского електростатичного поля в довільній точці $P \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}$.

3.2.3. Зауваження щодо класу отриманих інтегральних рівнянь

Далі, не зменшуючи загальності, для побудови та аналізу наближеної схеми розв'язування задачі в цілому розглянемо два “типові” інтегральні рівняння в послідовності (3.2.12) – перше та четверте.

Лема 3.2.7 *Перше рівняння в послідовності (3.2.12) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.*

Доведення. Легко бачити, що досліджуване рівняння допускає виділення особливості ядра в явному вигляді:

$$\int_0^1 \bar{G}_1(\tau) [\ln |\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau})] D(\tau) d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (3.2.14)$$

де $D(\tau) := \frac{1}{2\pi} (\operatorname{sh}^2 \tau + \operatorname{ch}^2 \tau)^{1/2}$, $N(\tau, \bar{\tau}) := \ln M(\tau, \bar{\tau}) + 2\pi \times$

$$\times \sum_{l=2}^8 \Phi [\beta_l^{-1} x_{11}(\tau); \beta_1^{-1} x_{11}(\bar{\tau})],$$

причому

$$M(\tau, \bar{\tau}) := \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2} \right)}{\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{2} \right)^2} \left[\operatorname{sh}^2 \left(\frac{\tau + \bar{\tau}}{2} \right) \right] + \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\tau + \bar{\tau}}{2} \right) \right\}^{1/2}.$$

Лему доведено.

Для знаходження правої частини в (3.2.14) ми врахували ту обставину, що f_i ($i = \overline{1, 4}$) – граничні значення потенціалу, тобто постійні величини в межах відповідних дуг Γ_i . Розв'язуваність (3.2.14) досліджують у різних функціональних просторах, але при цьому бажано враховувати особливу пове-

дінку шуканої густини розподілу зарядів в околі точки $\tau = 1$. Так, наприклад, $\bar{G}_1(\tau)$ можна шукати в модифікованому просторі Гьольдера $\tilde{H}_\mu[0, 1)$ ($0 < \mu \leq 1$). Функція належить до такого простору тоді й лише тоді, коли має вигляд $\bar{G}_1^*(\tau)/\sqrt{1-\tau}$, причому неперервна функція $\bar{G}_1^*(\tau)$ задовольняє умову Гьольдера з показником μ .

Четверте рівняння в послідовності (3.2.12), враховуючи наявність уявної одиниці в зображенні оператора B_4 , необхідно подати у вигляді такої еквівалентної системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \left(A_1^{(4)} G_1^{(4)} \right) (\bar{\tau}) + \left(A_2^{(4)} G_2^{(4)} \right) (\bar{\tau}) = 2(f_1 - f_3), \\ - \left(A_2^{(4)} G_1^{(4)} \right) (\bar{\tau}) + \left(A_1^{(4)} G_2^{(4)} \right) (\bar{\tau}) = 2(f_2 - f_4), \end{cases} \quad (0 \leq \bar{\tau} \leq 1) \quad (3.2.15)$$

де $A_1^{(4)} := A_{11} + A_{21} - A_{51} - A_{61}$, $A_2^{(4)} := A_{31} + A_{41} - A_{71} - A_{81}$, $G_1^{(4)} := G_1(\tau) + G_2(\tau) - G_5(\tau) - G_6(\tau)$, $G_2^{(4)} := G_3(\tau) + G_4(\tau) - G_7(\tau) - G_8(\tau)$.

Перше і друге рівняння в системі (3.2.15) належить до класу інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі. Зауважимо також, що (3.2.15) можна “розщепити” в послідовність двох незалежних рівнянь.

3.2.4. Чисельне розв’язування отриманих інтегральних рівнянь

Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах чисельного розв’язування інтегральних рівнянь (3.2.14). Враховуючи відносно невисоку гладкість функції $N(\tau, \bar{\tau})$, застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково-постійною апроксимацією шуканої густини $\bar{G}_1(\tau)$. Для цього проведемо поділ відрізка інтегрування на елементи з кроком $h = 1/n$, $[0, 1] := \bigcup_{j=1}^n \Delta_j$, де $\Delta_j := [\tau_j - \frac{h}{2}, \tau_j + \frac{h}{2}]$, $\tau_j := \frac{h}{2}(2j - 1)$. У відповідності з запровадженим поділом подамо (3.2.14) у вигляді

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} \bar{G}_1(\tau) [\ln|\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau})] D(\tau) d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k. \quad (3.2.16)$$

Припустимо, що при виборі достатньо великого n у межах j -го елемента $\bar{G}_1(\tau) \approx \bar{G}_1(\tau_j)$. Далі, обираючи в якості точок колокації ($\bar{\tau} \in [0, 1]$) послідовно точки з дискретної множини $\{\bar{\tau}_i\}_{i=1}^n$, де $\bar{\tau}_i := \frac{h}{2}(2i-1)$, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження $\bar{G}_1(\tau_j)$ ($j = \overline{1, n}$):

$$\sum_{j=1}^n \bar{G}_1(\tau_j) \int_{\Delta_j} D(\tau) [\ln |\tau - \bar{\tau}_i| + N(\tau, \bar{\tau}_i)] d\tau = 2 \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (3.2.17)$$

яка апроксимує (3.2.14). У разі необхідності виявлення особливого характеру поведінки шуканої функції $\bar{G}_1(\tau)$ в околі точки $\tau = 1$ є підстави апроксимувати останній доданок у лівій частині (3.2.16) таким виразом:

$$\bar{G}_1(\tau_n) \sqrt{h/2} \int_{1-h}^1 \frac{D(\tau)}{\sqrt{1-\tau}} [\ln |\tau - \bar{\tau}| + N(\tau, \bar{\tau})] d\tau.$$

Для усунення особливості, що при цьому виникає в знаменнику підінтегральної функції, достатньо виконати заміну змінних: $\sqrt{1-\tau} = v$.

Певну трудність викликає обчислення діагональних елементів матриці системи алгебричних рівнянь (3.2.16), тобто інтегралів виду:

$$\int_{\tau_i - h/2}^{\tau_i + h/2} D(\tau) \ln |\tau - \bar{\tau}_i| d\tau + \int_{\Delta_i} D(\tau) N(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для наближеного обчислення першого доданку скористаємось таким “послабленням” особливості у підінтегральній функції:

$$\int_{\Delta_i} D(\tau) \ln |\tau - \bar{\tau}_i| d\tau = \int_{\Delta_i} R(\tau, \bar{\tau}_i) d\tau + D(\bar{\tau}_i) \int_{\Delta_i} \ln |\tau - \bar{\tau}_i| d\tau,$$

$$\text{де } R(\tau, \bar{\tau}_i) = \begin{cases} [D(\tau) - D(\bar{\tau}_i)] \ln |\tau - \bar{\tau}_i|, & |\tau - \bar{\tau}_i| \neq 0; \\ 0, & |\tau - \bar{\tau}_i| = 0. \end{cases}$$

Зауважимо при цьому, що $\int_{\Delta_i} \ln |\tau - \bar{\tau}_i| d\tau = h \left(\ln \frac{h}{2} - 1 \right)$. При наближеному розв'язанні інтегрального рівняння (3.2.14) використовували апостеріорний метод оцінювання похибки, а досягнення потрібної точності результатів забезпечували шляхом згущення сітки в околі особливої точки шуканого розв'язку [12].

3.3. Аналіз, демонстрація та порівняльна характеристика розв'язків модельних задач з абелевими групами симетрії восьмого порядку

У даному підрозділі, використовуючи отримані вище теоретичні результати, виконано аналіз чисельних розв'язків двох модельних задач. При цьому перша ілюструє методику розв'язування плоскої задачі електростатики (3.2.1)–(3.2.2) при різних граничних значеннях потенціалу на електродах, зображених на рис. 3.14.

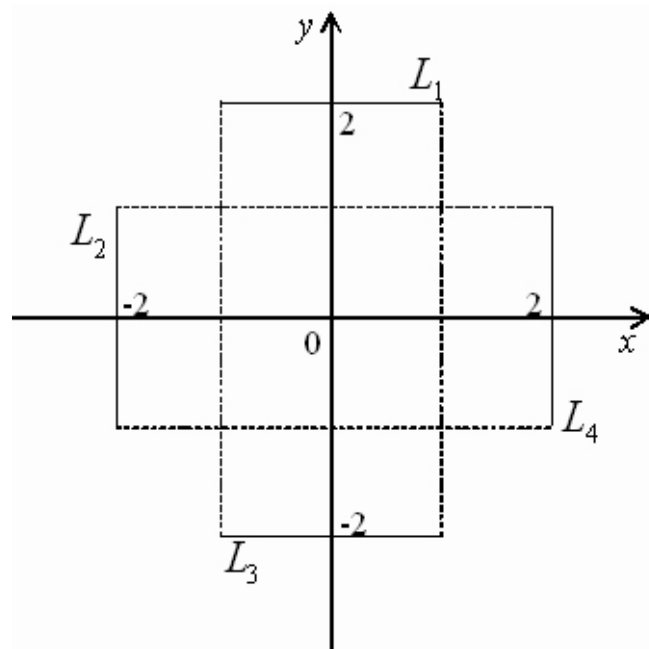


Рис. 3.15: Досліджувана плоска електронно-оптична система

Друга стосується знаходження електростатичного поля плоскої електрон-

но-оптичної системи, зображеної на рис. 3.15. Як бачимо, інформацію про геометрію заряджених електродів тут подано у вигляді деякої сукупності конгруентних гладких незамкнених дуг L_1, L_2, L_3, L_4 . Граничні значення потенціалу $g_i(x) \equiv C_i, i = \overline{1, 4}$, – довільні відомі величини.

Враховується той факт, що границя $L = \bigcup_{i=1}^4 L_i$ володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. Для перевірки достовірності отриманих результатів адитивна стала C , яка фігурує в інтегральному поданні поля, знайдена чисельно, тобто без урахування результатів теореми 3.1.2. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь здійснюється методом колокації з апроксимацією шуканої густини кусково-постійними базисними функціями. При цьому отримані невластні інтеграли обчислювались аналітично. Результати чисельних експериментів додатково висвітлені при аналізі розв'язків двох прикладів, які фігурують під номерами 3 і 4.

3.3.1. Результати чисельних експериментів визначення параметрів електростатичного поля квадрупольної лінзи

У табл. 3.1 наведено значення потенціалу в деяких точках відрізка $[-2, 2]$ з кроком $h = 0,5$ при антисиметричних граничних значеннях: $f_1(x) = 1, f_2(x) = -1, f_3(x) = 1, f_4(x) = -1$ і різних значеннях параметру M , що характеризує поділ $[-2, 2]$ на елементи. Загальний вигляд розв'язку за умови поділу $[-2, 2]$ на 100 елементів ($M = 100$) ілюстровано лініями рівня (див рис. 3.16.). $C = 0$ (результат підтверджується теоремою про адитивну сталу). Наведений експеримент називаємо прикладом 1.

У табл. 3.2 наведено значення потенціалу в деяких точках проміжка $[-2, 2]$ з кроком $h = 0,5$ при таких граничних значеннях: $f_1(x) = 10, f_2(x) = 20, f_3(x) = -100, f_4(x) = 1$ і різних значеннях M . Загальний вигляд розв'язку при $M = 100$ продемонстровано на лініях рівня (див рис. 3.17). $C = -17.25$. Останній експеримент вважається прикладом 2.

Таблиця 3.1

Результати, отримані в одній точці для прикладу 1

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $V(x)$				
		$M = 10$	$M = 30$	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
1	(-0.50, -2.00)	0.5067	0.5590	0.5765	0.5798	0.5801
2	(-0.50, -1.50)	0.7393	0.7974	0.8157	0.8189	0.8191
3	(-0.50, -1.00)	0.6967	0.7318	0.7422	0.7434	0.7438
4	(-0.50, -0.50)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	(-0.50, 0.00)	-0.2236	-0.2412	-0.2466	-0.2469	-0.2470
6	(-0.50, 0.50)	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
7	(-0.50, 1.00)	0.6967	0.7318	0.7422	0.7434	0.7438
8	(-0.50, 1.50)	0.7393	0.7974	0.8157	0.8189	0.8191
9	(-0.50, 2.00)	0.5067	0.5590	0.5765	0.5798	0.5801

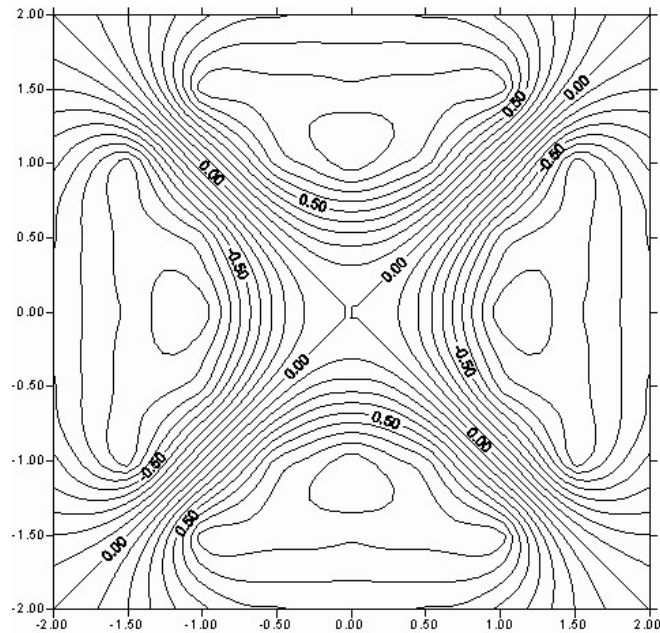


Рис. 3.16: Лінії рівня наближеного розв'язку для прикладу 1

Таблиця 3.2

Результати, отримані в одній точці для прикладу 2

	Координати точки $(x_1, x_2) = x$	Значення потенціалу $V(x)$				
		$M = 10$	$M = 30$	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
1	(0.50, -2.00)	-66.3840	-71.5473	-73.6754	-73.6788	-73.6792
2	(0.50, -1.50)	-80.3798	-85.9270	-87.8676	-87.8708	-87.8710
3	(0.50, -1.00)	-79.5545	-83.8284	-84.6181	-84.6204	-84.6207
4	(0.50, -0.50)	-37.8503	-39.6271	-40.1711	-40.1728	-40.1732
5	(0.50, 0.00)	-11.0440	-10.5548	-10.4051	-10.2022	-10.4020
6	(0.50, 0.50)	3.3503	5.1271	5.8788	5.8820	5.8823
7	(0.50, 1.00)	6.3833	8.7100	9.8493	9.8518	9.8524
8	(0.50, 1.50)	4.8476	7.1660	7.9155	7.9185	7.9187
9	(0.50, 2.00)	3.7618	6.0219	6.8235	6.8264	6.8267

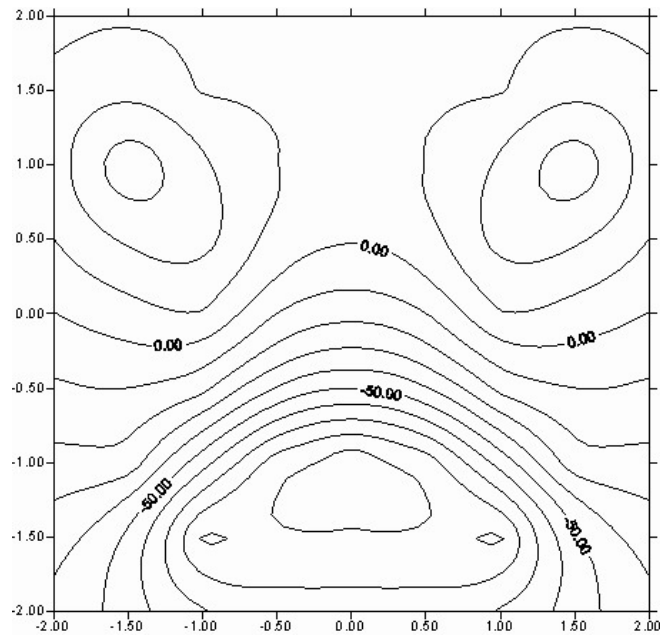


Рис. 3.17: Лінії рівня наближеного розв'язку для прикладу 2

3.3.3. Результати чисельних експериментів в плані знаходження адитивної сталої

У табл. 3.3 наведено значення потенціалу в деяких точках відрізка $[-5, 5]$ з кроком $h = 0,5$ при антисиметричних граничних значеннях: $g_1(x) = g_3(x) = 1$, $g_2(x) = g_4(x) = -1$. Кількість точок колокації $n = 100$. Загальний вигляд розв'язку продемонстровано лініями рівня (див. рис. 3.18).

Таблиця 3.3

Результати, отримані в одній точці для прикладу 3

x	y	v
-1.0	2.0	0.945862
0.0	2.0	0.995043
0.5	4.0	0.288362
0.0	1.5	0.561519
1.0	1.0	0.000000
1.5	0.5	-0.506728
-1.5	-0.5	-0.506728

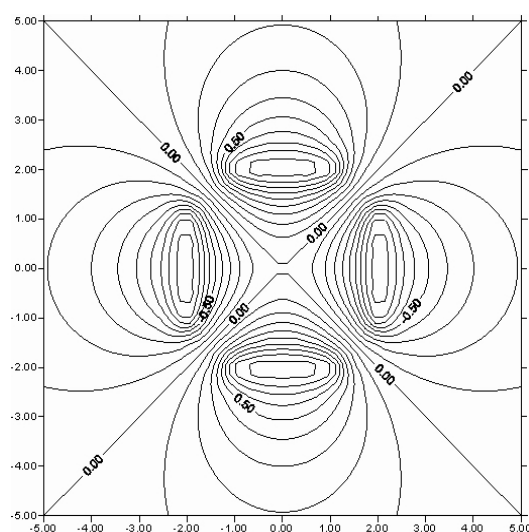


Рис. 3.18: Розподіл ліній рівня для прикладу 3.

У табл. 3.4 наведено значення потенціалу в деяких точках відрізка $[-5, 5]$

з кроком $h = 0,5$ при таких граничних значеннях: $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 10$, $g_3(x) = -1000$, $g_4(x) = 100$. Кількість точок колокації $n = 100$. Загальний вигляд розв'язку продемонстровано лініями рівня (див. рис. 3.19).

Таблиця 3.4

Результати, отримані в одній точці для прикладу 4

x	y	v
-1.0	-2.0	-998.868931
0.0	-2.0	-999.884148
-1.0	-2.5	-717.181022
-0.5	-0.5	-333.964404
0.5	1.0	-10.502750
0.0	0.0	-222.250000
0.0	2.0	0.996728

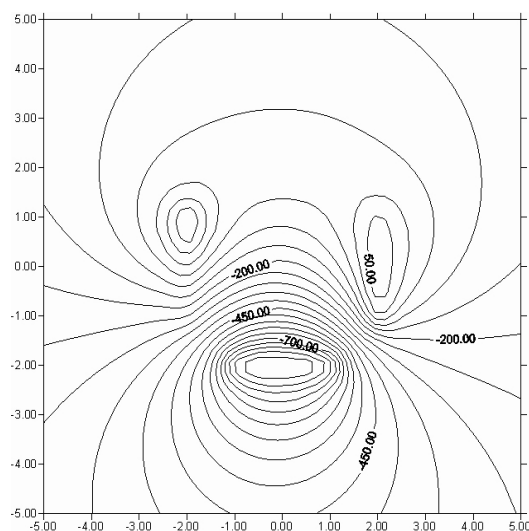


Рис. 3.19: Розподіл ліній рівня для прикладу 4.

У табл. 3.5 наведені обчислені значення адитивної сталої C при різних граничних значеннях потенціалу за методикою, яка передбачає чисельне розв'язання двох допоміжних інтегральних рівнянь. Достовірність отриманих результатів перевірено за допомогою формули для обчислення адитивної сталої C отриманої в теоремі 3.1.2.

Таблиця 3.5

Значення константи C , отримані на основі чисельних експериментів

$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	C
1	-1	1	-1	0.00
1	10	-1000	100	-222.25
10	20	10	-20	5.00
5	-100	-10	-1000	-276.25
50	100	500	1000	412.50

Таблиця 3.6

Потенціал електростатичного поля у точках площини $z = 0$

x	y	$U (A = 8)$	плоске наближення
-0.500	-2.000	0.585020	0.580110
-0.500	-1.500	0.821019	0.819194
-0.500	-1.000	0.747684	0.743894
-0.500	-0.500	0.000000	0.000000
-0.500	0.000	-0.252070	-0.247042
0.000	-1.000	0.990136	0.986836
0.000	-0.500	0.252070	0.247042
1.000	-0.500	-0.747684	-0.743894
1.000	0.000	-0.990136	-0.986836
1.000	0.500	-0.747684	-0.743894
2.000	-1.500	-0.191768	-0.195074

В розділі 2 було встановлено, що для з'ясування якісної картини поля в центральних поперечних перерізах квадрупольної системи (див. рис. 2.1), у якій явно переважає довжина над шириною у вісім і більше разів, доцільно перейти до розв'язування відповідної плоскої задачі (3.2.1)–(3.2.2). У цьому випадку суттєво зменшується не лише розмірність матриці системи лінійних алгебричних рівнянь, а й весь обсяг обчислень. У табл. 3.6 наведені значення потенціалу в декількох контрольних точках при розв'язуванні просторової задачі (1.1.1)–(1.1.3) (див. рис. 2.4) і відповідного плоского наближення (3.2.1)–(3.2.2) за умов: $f_1 = 1$, $f_2 = -1$, $f_3 = 1$, $f_4 = -1$, при кількості невідомих

$n = 100$.

Слід зауважити, що отримані результати свідчать про достовірність отриманих розв'язків як просторової задачі, так і відповідної плоскої.

3.4. Модельна задача розрахунку електростатичного поля конденсатора як типовий приклад плоского наближення

Розглянемо задачу знаходження параметрів електростатичного поля плоского конденсатора зображеного на рис. 3.20. Слід зауважити, що дана задача є деяким плоским наближення просторової задачі (1.1.1)-(1.1.3) (див. рис. 2.10) розглянутої в певному перерізі, наприклад, $z = 0$.

3.4.1. Постановка задачі

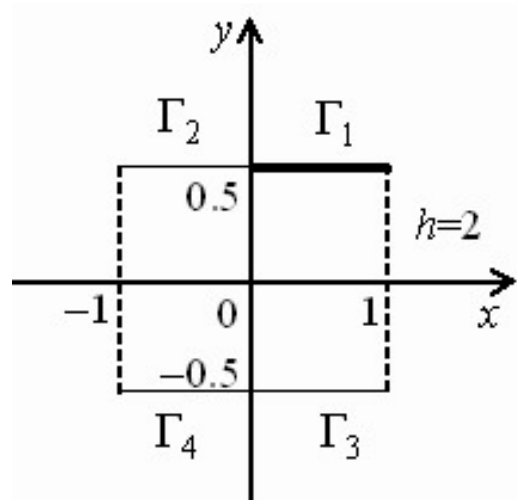


Рис. 3.20: Плоска електронно-оптична система

Необхідно визначити функцію $v(K) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma)$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta v(K) = 0, \quad K \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma, \quad K = (x, y)^T \quad (3.4.1)$$

за умови

$$v(K) = f(K), \quad K \in \Gamma, \quad \sup_{K \in \mathbf{R}^2} |u(K)| < +\infty. \quad (3.4.2)$$

Нехай межа Γ (див. рис. 3.20) задачі (3.4.1)-(3.4.2) допускає поділ на конгруентні складові Γ_i , $i = \overline{1,4}$, де $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тоді розв'язок задачі (3.4.1)-(3.4.2), використовуючи теорему про еквівалентність початкової крайової задачі інтегральному рівнянню можна подати у вигляді

$$v(L) = \int_{\Gamma} \Phi(K, L) \tau(K) d\Gamma_K + C, \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad L = (x_1, y_1)^T. \quad (3.4.3)$$

Тут $\Phi(K, L) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|K - L|}$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в \mathbf{R}^2 [9], граничні значення потенціалу $f_i(K) \equiv C_i$, тобто сталі величини. Тоді, згідно теореми про адитивну сталу, $C = \left(\sum_{i=1}^4 C_i \right) / 4$. Знайдена при цьому константа C забезпечує обмеженість шуканого розв'язку (3.4.1)-(3.4.2) на нескінченності при $|L| \rightarrow \infty$. При цьому $\tau(K)$ – сукупна густина розподілу зарядів уздовж Γ ($\tau(K) := \{\tau_i(K), K \in \Gamma_i; \quad i = \overline{1,4}\}$), яка задовольняє рівняння

$$\int_{\Gamma} \Phi(K, L) \tau(K) d\Gamma_K = \bar{C}_i, \quad L \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.4.4)$$

де $\bar{C}_i \equiv C_i - C$.

3.4.2. Врахування геометричної симетрії у поданні вхідної інформації

Межа Γ володіє четвертою групою симетрії Клейна $c_{2\sigma} = \{e, c_2, \sigma_1, \sigma_2\}$, де e – тотожне перетворення, c_2 – поворот на кут π , а σ_1, σ_2 – дзеркальне відображення відносно осей ox і oy , відповідно. Легко бачити, що $\Gamma_i = \beta_i \Gamma_1$, $i = \overline{1,4}$, причому $\beta_1 = e$, $\beta_2 = \sigma_2$, $\beta_3 = \sigma_1$, $\beta_4 = c_2$.

Матриця поворотів на кут $\varphi = \pi$ має вигляд [11]:

$$\beta_4 = \left(\begin{array}{cc} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right) \Big|_{\varphi=\pi} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Очевидно, що

$$\beta_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad \beta_2 = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad \beta_3 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right).$$

Відповідно $\beta_1^{-1} = \beta_1$, $\beta_2^{-1} = \beta_2$, $\beta_3^{-1} = \beta_3$, $\beta_4^{-1} = \beta_4$. Звідси аналогічною групою симетрії володіє гранична задача (3.4.1)-(3.4.2) і відповідне їй інтегральне рівняння [21, 22]

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \Phi(K, L) \tau_i(K) d\Gamma_K = \bar{C}_i(L), \quad L \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3.4.5)$$

Використавши поняття згортки і перетворення Фур'є на скінченній групі [21, 68], можна звести інтегральний оператор по дискретній змінній до діагонального вигляду. При цьому матриця перетворення Фур'є має вигляд

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Це, в свою чергу, відповідає перетворенню початкового інтегрального рівняння (3.4.5), заданого на всій поверхні Γ , до чотирьох незалежних інтегральних рівнянь, заданих на одній із конгруентних складових, наприклад, Γ_1 . Останнє дозволяє уникнути числової нестійкості внаслідок зменшення порядку матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні. Це пояснюється тим, що замість матриць розміру $N \cdot M \times N \cdot M$ отримуємо N матриць

розміру $M \times M$, де M – число вузлів на одній з конгруентних частин межі, N – порядок симетрії задачі.

3.4.3. Результати чисельних експериментів

В метою підтвердження ефективності запропонованої методики розглянемо задачу розрахунку параметрів електростатичного поля електронно-оптичної системи, зображеної на рис. 3.20. Виберемо граничні значення потенціалу антисиметричними: $f_1 = f_2 = 1$, $f_3 = f_4 = -1$. Слід зауважити, що наближене розв'язування інтегральних рівнянь здійснюється методом колокації з апроксимацією шуканої густини кусково-постійними базисними функціями. При цьому отримані невласні інтеграли обчислювалися аналітично, а інтегрування здійснювалося лише по Γ_1 . Досягнення потрібної точності результатів забезпечували шляхом згущення сітки в околі особливої точки $\nu = 1$. Результати отриманих обчислень подані на рис. 3.21 у вигляді ліній рівного потенціалу.

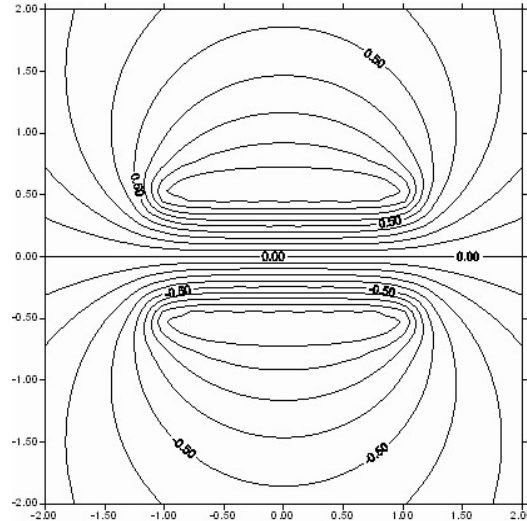


Рис. 3.21: Розподіл ліній рівня плоскої задачі.

У табл. 3.5 наведені значення потенціалу в деяких контрольних точках площини $z = 0$ за умов трактування розглядуваної плоскої задачі (3.4.1)-(3.4.2) як просторової при переважанні довжини пластини (a) над шириною (b) у 8 разів, причому відстань між пластинами обирали рівною 1.

Таблиця 3.5

Значення потенціалу в деяких контрольних точках

x	y	v	$u(a/b = 8)$
2.000	2.000	0.26781000	0.26363402
1.000	0.500	0.93293100	0.94066169
1.000	0.250	0.38746600	0.40475033
0.500	0.500	0.99257100	1.00203440
0.500	0.250	0.49114900	0.49589698
0.000	0.500	0.99098600	1.00000000
0.000	0.250	0.49620500	0.49967008
0.000	0.000	0.00000000	0.00000000

Таблиця 3.6

Значення потенціалу в деяких контрольних точках

x	y	v	$u(a/b = 16)$
-1.00	-0.75	-79.3729	-79.3731
-1.00	-0.25	-66.4594	-66.4593
-1.00	0.00	-46.3910	-46.3909
-1.00	0.25	-27.0004	-27.0001
-1.00	0.75	-10.4082	-10.4086
-0.75	-0.50	-99.9930	-99.9925
1.00	0.75	-10.4082	-10.4086
2.00	-1.00	-48.9307	-48.9304

У табл. 3.6 наведені значення потенціалу в деяких контрольних точках площини $z = 0$ при розв'язуванні розглядуваної плоскої задачі (3.4.1)-(3.4.2) і відповідної просторової при переважанні довжини пластини (a) над шириною- (b) у 16 разів, причому граничні значення потенціалу є такими: $f_1 = f_2 = 1$,

$f_3 = f_4 = -100$, відстань між пластинами дорівнює 2. Для досягнення співрозмірної з просторовим випадком точності необхідно вибрати 20 точок локації. Наявність симетрії в геометрії граничних контурів дозволяє розв'язувати чотири незалежних інтегральних рівняння з інтегруванням лише по Γ_1 та отримати систему лінійних інтегральних рівнянь з матрицею порядку 5×5 . Останнє дозволяє проводити паралельні обчислення і в більш складних ситуаціях.

3.5. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрій скінченних порядків

Розглянемо особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрій скінченних порядків. Для реалізації паралельних алгоритмів можна у паралельному режимі використовувати декілька комп'ютерів або звернутись до так званої багатопотоковості. Перший спосіб допомагає, обираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їх завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень. Другий спосіб дає змогу використати сучасні архітектури багатоядерних процесорів. На їхній підставі, застосовуючи популярний сьогодні програмний засіб *OpenMP* [102], експериментально виявити усі переваги розглядуваного алгоритму розпаралелення.

3.5.1. Використання паралельних комп'ютерів

Відомо, що одним із способів реалізації паралельних алгоритмів є використання багатопроцесорних обчислювальних комплексів. Схема наближеного розв'язування одного інтегрального рівняння, в загальних рисах, полягає в першу чергу у формуванні матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що апроксимує відповідний інтегральний оператор, і подальшому розв'язу-

ванні отриманої системи. Систему розв'язуємо методом Гаусса. За таких умов, використовуючи N процесорів ($p = N$), розв'язок N алгебричних систем, які апроксимують N незалежних інтегральних рівнянь, методом Гаусса можна отримати за $T_p = M^3$ часових тактів, де M – кількість точок колокації на контурі інтегрування. Легко бачити, що в цьому разі коефіцієнт прискорення $R_p = N$, а коефіцієнт ефективності розпаралелення $E_p = 1$. Отже, використовуючи N процесорів для розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь, ми досягаємо максимальної ефективності розпаралелення.

Для прискорення процесу розв'язування N рівнянь, враховуючи специфіку методу колокації, можна збільшити кількість процесорів до $p = NM^2$. Тоді $T_p = 3M$ – кількість часових тактів, необхідних для розв'язування N алгебричних систем, які апроксимують N інтегральних рівнянь, на NM^2 процесорах методом Гауса. Далі, легко бачити, що

$$R_p = \frac{NM^3}{3M} = \frac{NM^2}{3}, \text{ а } E_p = \frac{NM^2}{3NM^2} = \frac{1}{3}.$$

Отже, збільшуючи кількість процесорів, ми прискорюємо процес розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь. У цьому разі зменшується коефіцієнт завантаження. Отож, для найшвидшого отримання розв'язку в цілому, незалежно від ефективності використання процесорів E_p та їхньої кількості p , треба максимізувати коефіцієнт прискорення R_p .

3.5.2. Паралельні обчислення на багатоядерних персональних комп'ютерах

Сьогодні для більшості персональних комп'ютерів характерна наявність багатоядерних процесорів. Найпопулярніший засіб паралельного програмування на багатоядерних комп'ютерах із загальною пам'яттю – програмний засіб *OpenMP*. За його допомогою можна розпаралелити виконання програми так, що за наявності декількох ядер вона буде реалізована окремими потоками.

У цьому випадку не потрібно описувати обмін інформацією.

У розглядуваному випадку, тобто при чисельному розв'язуванні крайової задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії N -го порядку, отримано N незалежних інтегральних рівнянь. Для зменшення витрат комп'ютерного часу доцільно використовувати розпаралелення програми чисельного розв'язування цих інтегральних рівнянь шляхом одночасного розв'язування їх на незалежних потоках.

Для проведення експериментів розглянуто задачі знаходження електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем (ЕОС), зображених на рис. 3.22 – 3.23. Вони відображають класи задач з абелевими групами симетрій другого, четвертого, восьмого та шістнадцятого порядків.

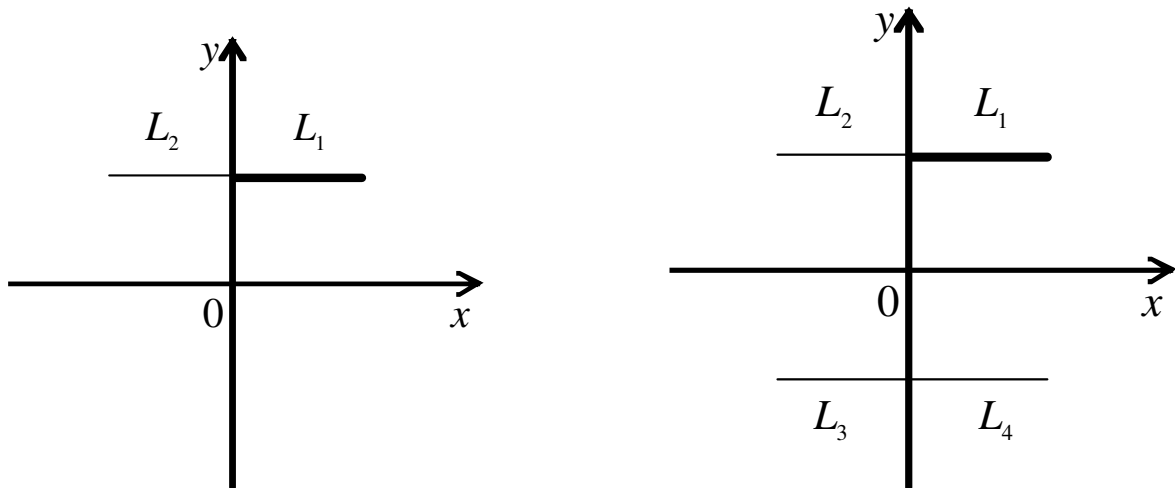


Рис. 3.22: ЕОС із симетріями другого та четвертого порядків.

Чисельні дослідження проведені на комп'ютерах різної конфігурації з різною кількістю ядер. Кількість рівнянь два відповідає першій ЕОС на рис.3.22, чотири – другій ЕОС на рис. 3.22, вісім – першій ЕОС на рис. 3.23, шістнадцять – другій ЕОС на рис. 3.23. Час розв'язування подано в мікросекундах. M – кількість точок колокації. Використовуючи стандарт *OpenMP*, програмування реалізовано на мові $C++$. Результати обчислень наводимо далі.

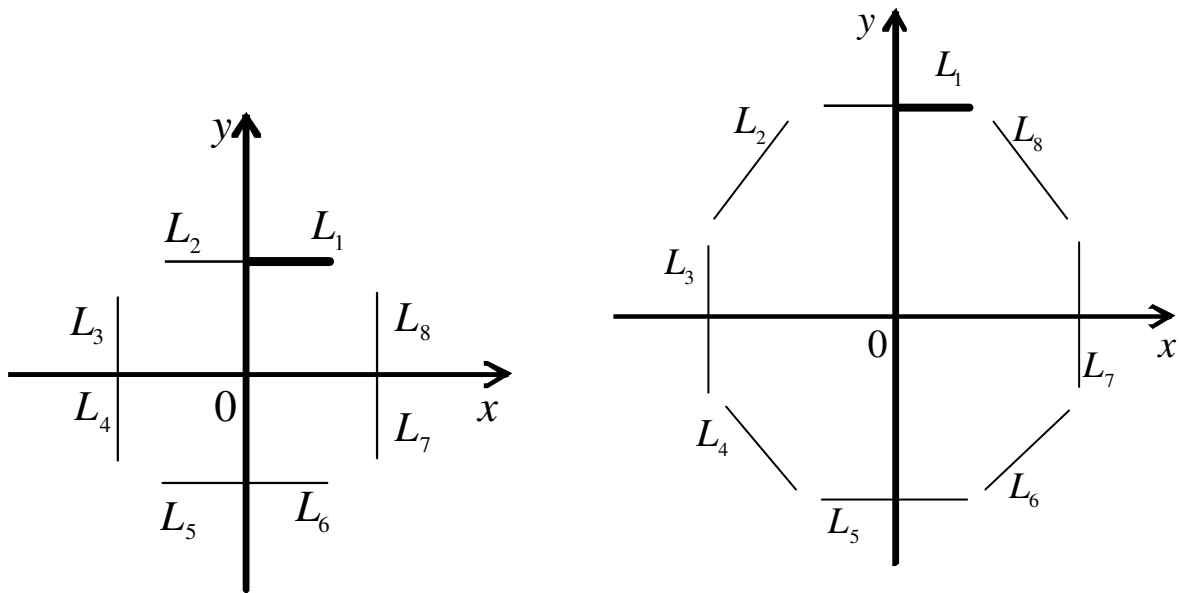


Рис. 3.23: ЕОС із симетріями восьмого та шістнадцятого порядків.

Таблиця 3.7

Час виконання на одноядерному процесорі

M	К-сть рівнянь	К-сть . потоків	Час викон., мс	M	К-сть рівнянь	К-сть потоків	Час викон., мс
250	2	1	341	500	2	1	2283
		2	330			2	2283
	4	1	671		4	1	4557
		2	671			2	4546
		4	661			4	4536
	8	1	1332		8	1	9103
		2	1322			2	9093
		4	1322			4	9083
		8	1332			8	9063
	16	1	2664		16	1	18216
		2	2663			2	18226
		4	2654			4	18256
		8	2664			8	18687
		16	2674			16	18467

1. Програми виконуються на комп'ютері з одноядерним процесором. Конфігурація системи: ADM Athlon(tm)XP 1700+ з 1.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 1.46 GHz.

Результати першого експерименту засвідчують, що на комп'ютері з одноядерним процесором час розв'язування задачі за програмою з застосуванням *OpenMP* несуттєво відрізняються від часу розв'язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім, шістнадцять потоків, тоді як фізично комп'ютер має одне ядро (табл. 3.7).

2. Програми виконуються на комп'ютері з двоядерним процесором. Конфігурація системи: Intel Core 2 Duo з 2.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 3.00 GHz.

Результати другого експерименту переконують, що час розв'язування задачі за паралельною програмою на комп'ютері з двоядерним процесором приблизно вдвічі зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Часова оцінка у випадку збігання кількості потоків і кількості ядер мало відрізняється від часової оцінки, яку отримують, збільшуючи кількість потоків за умов незмінної кількості розв'язуваних рівнянь. Це пояснюється тим, що фізично процесор залишається двоядерним.

3. Програми виконуються на комп'ютері з чотирядерним процесором. Конфігурація системи: Intel Core i5 з 4.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 3.2 GHz.

За результатами третього експерименту час розв'язування задачі за паралельною програмою на комп'ютері з чотирядерним процесором приблизно в чотири рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Очевидно, що зі збільшенням кількості ядер ці показники будуть поліпшуватись. Отже, використання багатоядерності персонального комп'ютера доцільне для розв'язування задач великих розмірностей, щоб ефективніше затрачати комп'ютерний час на їхнє виконання.

Таблиця 3.8

Час виконання на двоядерному процесорі

<i>M</i>	К-сть рівнянь	К-сть . потоків	Час викон., мс	<i>M</i>	К-сть рівнянь	К-сть потоків	Час викон., мс
250	2	1	94	500	2	1	407
		2	47			2	203
	4	1	187		4	1	797
		2	94			2	406
		4	94			4	422
	8	1	375		8	1	1625
		2	188			2	844
		4	187			4	844
		8	188			8	828
	16	1	718		16	1	3266
		2	375			2	1672
		4	375			4	1719
		8	390			8	1668
		16	375			16	1672

Таблиця 3.9

Час виконання на чотирядерному процесорі

<i>M</i>	К-сть рівнянь	К-сть . потоків	Час викон., мс	<i>M</i>	К-сть рівнянь	К-сть потоків	Час викон., мс
250	2	1	47	500	2	1	249
		2	31			2	141
	4	1	94		4	1	483
		2	62			2	250
		4	23			4	122
	8	1	202		8	1	983
		2	141			2	546
		4	54			4	248
		8	54			8	242
	16	1	421		16	1	1966
		2	219			2	1045
		4	105			4	500
		8	106			8	500
		16	105			16	503

Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглянуто математичну модель, яка описує так зване плоске електростатичне поле. При цьому суттєво враховано специфіку відповідної крайової задачі. Основну увагу зосереджено на питанні еквівалентності цієї задачі певному IP та задачі вибору адитивної сталої, яка присутня в інтегральному зображенні плоского електростатичного поля при його математичному моделюванні. Показано, що цю константу легко обчислити за наявності конгруентних складових граничної поверхні. Також здійснено чисельне розв'язування плоских модельних задач теорії потенціалу з абелевими групами симетрії восьмого та четвертого порядків. Слід зауважити, що останні є деякими плоскими наближеннями просторових задач розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи та плоского конденсатора. Розглянуто особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрії скінченних порядків. В результаті зменшено час обчислень: на 50% для систем з граничними поверхнями електродів, які володіють абелевою групою симетрії другого порядку при використанні двоядерних процесорів; на 75% – четвертого порядку при використанні чотириядерних процесорів, на 94% – шістнадцятого порядку при використанні шістнадцятиядерних процесорів.

РОЗДІЛ 4

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОДНІЄЇ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ З АБЕЛЕВОЮ ГРУПОЮ СИМЕТРІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Відомо, що на етапі математичного моделювання та аналізу деяких електронно-оптичних систем постає проблема чисельного розв'язування досить складних зовнішніх граничних задач теорії потенціалу. Подання розв'язків таких задач у інтегральному вигляді дає змогу зменшити розмірність задач на одиницю. Проте геометрична складність межі вимагає суттєвого вдосконалення та обґрунтування методики, що базується на чисельному розв'язуванні відповідних одновимірних інтегральних рівнянь. Для конструювання досконалих алгоритмів при цьому пропонується поєднати апарат функцій Гріна з методом декомпозиції складних областей, а також максимально скористатися наявною симетрією в розташуванні окремих ділянок межі. Останнє обумовлюється тим, що, як правило, при моделюванні практично важливих задач електронної оптики отримані інтегральні рівняння належать до проблем із абелевою групою симетрії скінченного порядку. Це дає можливість перейти до інтегрування лише по конгруентним складовим, що суттєво зменшує об'єм обчислень, а також дозволяє уникнути числової нестійкості внаслідок помітного зменшення порядку матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні.

Існування функції Гріна $G(x, y)$ для “канонічної” області дозволяє, наприклад, побудувати частковий розв'язок задачі на фрагменті γ межі Γ за допомогою такого аналогу потенціалу простого шару

$$V(x) = \int_{\gamma} G(x, y) \tau(y) ds_y, x \in \mathbf{R}^2 \setminus \gamma.$$

Основні результати четвертого розділу опубліковані у [12, 40, 47, 51].

4.1. Загальна постановка проблеми

Розглянемо деяку модельну задачу плоскої електростатики. На рис. 4.24 представлена одна із можливих конфігурацій електронно-оптичної системи, в якій потрібно знайти розподіл потенціалу. Подамо інформацію про таку систему та сформулюємо відповідну граничну задачу. На площині Ox_1x_2 розглянемо область D_1 у вигляді нескінченної півсмуги з границею Γ_1 . В D_1 наявне коло Γ_2 . Через D_2 позначимо область, що знаходиться ззовні кола. Припустимо також, що в $D := D_1 \cap D_2$ розміщені два розімкнені контури $\Gamma_{3,5} := \Gamma_3 \cup \Gamma_5$ і $\Gamma_{4,6} := \Gamma_4 \cup \Gamma_6$ так, що $\Gamma_{4,6}$ є дзеркальним відображенням $\Gamma_{3,5}$ відносно осі $x_2 = \pi/2$.

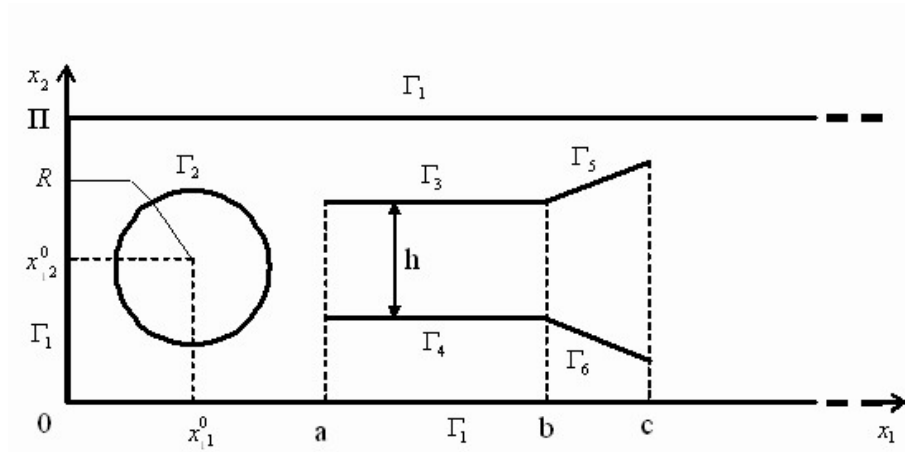


Рис. 4.24: Досліджувана плоска електронно-оптична система.

Потрібно визначити функцію $U(x) \in C^2(D \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}))$, яка задовольняє:

двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0, \quad x \in D \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}), \quad x = (x_1, x_2)^T;$$

крайові умови

$$U(x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1; \quad U(x) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2;$$

$$U(x) = f_{3,5}(x), \quad x \in \Gamma_{3,5}; \quad U(x) = f_{4,6}(x), \quad x \in \Gamma_{4,6},$$

де $f_1, f_2, f_{3,5}, f_{4,6}$ – відомі функції, які виражають граничні значення потенціалу на відповідних ділянках межі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}$;

умову обмеженості на нескінченності

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} |U(x)| < +\infty.$$

Для побудови та аналізу розв'язку поставленої проблеми розглянемо дві незалежні задачі.

4.2. Перша допоміжна задача

Необхідно знайти розв'язок $V(x)$ рівняння Лапласа

$$\Delta V(x) = 0, \quad x \in D_1 \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}),$$

що задовольняє умови (див. рис. 4.25):

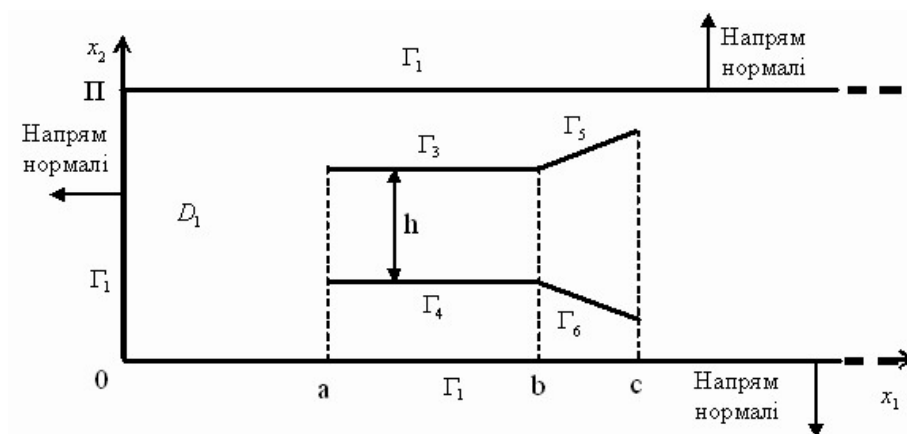


Рис. 4.25: Багатозв'язна межа першої крайової задачі

$$V(x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1; \quad V(x) = f_{3,5}(x), \quad x \in \Gamma_{3,5};$$

$$V(x) = f_{4,6}(x), \quad x \in \Gamma_{4,6}; \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |V(x)| < +\infty.$$

Шукану функцію подамо у вигляді $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$, де $V_1(x)$ задовольняє умови:

$$\Delta V_1(x) = 0, \quad x \in D_1; \quad V_1(x) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1; \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |V_1(x)| < +\infty, \quad (4.4.1)$$

а $V_2(x)$, у свою чергу, є розв'язком такої задачі:

$$\Delta V_2(x) = 0, \quad x \in D_1 \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6});$$

$$V_2(x) = f_{3,5}(x) - V_1(x), \quad x \in \Gamma_{3,5}; \quad V_2(x) = f_{4,6}(x) - V_1(x), \quad x \in \Gamma_{4,6}; \quad (4.4.2)$$

$$V_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |V_2(x)| < +\infty.$$

Оскільки в області D_1 для оператора Лапласа існує функція Гріна $G(x, z)$, $x = (x_1, x_2)^T$, $z = (z_1, z_2)^T$, то $V_1(x)$ можна подати у вигляді [5, 73]:

$$V_1(x) = - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G(x, z)}{\partial n_z} f_1(z) d\Gamma_z. \quad (4.4.3)$$

Зауважимо при цьому, що $f_1(z)$ повинна належати до класу функцій, який забезпечує існування інтегралу в (4.4.3). Наприклад, граничне значення потенціалу на Γ_1 можна змоделювати так:

$$f_1|_{\{z_1=0; 0 \leq z_2 \leq \pi\}} = 1, \quad f_1|_{\{z_2=0 \vee z_2=\pi; 0 \leq z_1 \leq z_{\max}\}} = e^{-\alpha z_1},$$

де $\alpha > 0$, $z_{\max} \rightarrow \infty$ (реально z_{\max} – достатньо велике число), тобто у вигляді швидко спадної на нескінченності функції.

З урахуванням конкретного вигляду межі Γ_1 , а також у разі виконання процедури диференціювання за нормаллю до Γ_1 , отримаємо:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \int_0^\pi \left. \frac{\partial G}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} dz_2 + \int_0^\infty e^{-\alpha z_1} \left. \frac{\partial G}{\partial z_2} \right|_{z_2=0} dz_1 - \int_0^\infty e^{-\alpha z_1} \left. \frac{\partial G}{\partial z_2} \right|_{z_2=\pi} dz_1 = \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Відомо [2], що функція Гріна для півсмуги товщини π має вигляд

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{[\operatorname{ch}(x_1 + z_1) - \cos(x_2 - z_2)][\operatorname{ch}(x_1 - z_1) - \cos(x_2 + z_2)]}{[\operatorname{ch}(x_1 + z_1) - \cos(x_2 + z_2)][\operatorname{ch}(x_1 - z_1) - \cos(x_2 - z_2)]} \right\}.$$

Відповідні похідні функції $G(x, z)$ за нормаллю можна обчислити за такими формулами:

$$-\frac{\partial G}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = \frac{\operatorname{sh} x_1 \sin x_2 \sin z_2}{\pi [\operatorname{ch} x_1 - \cos(x_2 - z_2)][\operatorname{ch} x_1 - \cos(x_2 + z_2)]},$$

$$-\frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} = \frac{\operatorname{sh} x_1 \sin x_2 \operatorname{sh} z_1}{\pi [\operatorname{ch}(x_1 + z_1) - \cos x_2][\operatorname{ch}(x_1 - z_1) - \cos x_2]},$$

$$-\frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=\pi} = \frac{\operatorname{sh} x_1 \sin x_2 \operatorname{sh} z_1}{\pi [\operatorname{ch}(x_1 + z_1) + \cos x_2][\operatorname{ch}(x_1 - z_1) + \cos x_2]},$$

де $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

У формулі (4.4.4): $I_1 = \int_0^\pi \frac{\partial G}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} dz_2$ – власний інтеграл (за умови $x \neq z$), який можна наближено обчислити за допомогою будь-якої квадратурної формули [77];

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-\alpha z_1} \frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} dz_1 \quad \text{та} \quad I_3 = \int_0^\infty e^{-\alpha z_1} \frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=\pi} dz_1 \quad \text{за умови } x \neq z$$

інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

За означенням,

$$I_2 = \int_0^\infty g_1(z_1) dz_1 = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A g_1(z_1) dz_1, \quad g_1(z_1) = e^{-\alpha z_1} \frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0};$$

$$I_3 = \int_0^\infty g_2(z_1) dz_1 = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A g_2(z_1) dz_1, \quad g_2(z_1) = e^{-\alpha z_1} \frac{\partial G}{\partial z_2} \Big|_{z_2=\pi}.$$

Ці інтеграли можна наближено обчислити за допомогою “правила трапецій” для нескінченних відрізків [27]:

$$\int_0^\infty f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^{N=\infty} f(kh).$$

На практиці необхідно вибирати не лише крок h , а й скінченну границю сумування N . Одна із можливих стратегій полягає в обчисленні послідовності наближень при зменшенні h і збільшенні N , коли добуток Nh^2 залишається приблизно сталим.

Усе сказане вище стосовно задачі (4.4.1) проілюстровано в табл. 4.1.

Далі, функцію $V_2(x)$ будемо шукати у вигляді:

$$V_2(x) = \int_{\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}} \mu(z) G(x, z) d\Gamma_z. \quad (4.4.5)$$

Таке подання розв'язку задачі (4.4.2) можна вважати певним аналогом потенціалу простого шару, що породжується фундаментальним розв'язком $\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$. На відміну від останнього, у (4.4.5) відсутня адитивна стала C , оскільки, як легко показати, $G(x, z) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ за будь-якого $z \in \Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}$, що забезпечує обмеженість шуканого на підставі (4.4.5) розв'язку на нескінченності.

Аналог потенціалу простого шару $V_2(x)$ є розв'язком зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа (4.4.2), якщо його густина $\mu(z)$ визначається з інтегрального рівняння першого роду

$$\int_{\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}} \mu(z) G(x, z) d\Gamma_z = F(x), \quad x \in \Gamma_{3,5} \vee \Gamma_{4,6}, \quad (4.4.6)$$

$$\text{де } F(x) = \begin{cases} F_{3,5}(x) = f_{3,5}(x) - V_1(x), & x \in \Gamma_{3,5}; \\ F_{4,6}(x) = f_{4,6}(x) - V_1(x), & x \in \Gamma_{4,6}, \end{cases}$$

а $\mu(z)$ трактуємо як невідому сукупну густину розподілу зарядів на $\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}$:

$$\mu(z) = \{\mu_{3,5}(z), z \in \Gamma_{3,5}; \mu_{4,6}(z), z \in \Gamma_{4,6}\}.$$

І ще одне зауваження стосується вибору функції $f_1(x)$. З точки зору електростатики, $f_1(x)$ є граничним значенням потенціалу на Γ_1 , яке обирають константою.

Таблиця 4.1

Результати наближеного розв'язування задачі (4.4.1)

Початкові дані				
ε	n	Граничні значення потенціалу		V^*
		$f_1 _{\{x_1=0; 0 \leq x_2 \leq \pi\}}$	$f_1 _{\{x_2=0 \vee x_2=\pi; 0 \leq x_1 \leq \infty\}}$	
0.00001	1000	1	1	1
Результати, отримані в одній точці				
	$(x_1, x_2) = x$	$V_1(x)$		
1	(5.0, 1.5)	0.99568		
2	(8.0, 0.1)	0.99975		
3	(5.0, 3.0)	0.99986		
4	(1.0, 1.0)	0.99994		
5	(0.1, 1.0)	0.99999		
6	(1.0, 2.0)	0.99998		
7	(0.1, 2.0)	1.00000		
Початкові дані				
ε	n	Граничні значення потенціалу		
		$f_1 _{\{x_1=0; 0 \leq x_2 \leq \pi\}}$	$f_1 _{\{x_2=0 \vee x_2=\pi; 0 \leq x_1 \leq \infty\}}$	
0.00001	1000	1	e^{-x_1}	
Результати, отримані в одній точці				
	$(x_1, x_2) = x$	$V_1(x)$	$f_1(x)$	
1	(0.05, 2.000)	0.99767	1.0000	
2	(0.04, 2.000)	0.99869	1.0000	
3	(0.02, 2.000)	0.99998	1.0000	
4	(4.00, 0.050)	0.01909	0.0183	
5	(4.00, 0.045)	0.01830	0.0183	
6	(3.00, 3.100)	0.05062	0.0498	
7	(3.00, 3.103)	0.04979	0.0498	
8	(4.00, 3.040)	0.02110	0.0183	
9	(4.00, 3.070)	0.01804	0.0183	

Це не суперечить темі досліджень, оскільки інтеграли в (4.4.3) по необмеженій кривій Γ_1 залишаються обмеженими величинами, якщо точка спостереження x фіксується біля кривих Γ_2 , $\Gamma_{3,5}$ і $\Gamma_{4,6}$, тобто сама не прямує до безмежно віддаленої.

4.3. Параметризація досліджуваного інтегрального рівняння

Для наближеного розв'язування (4.4.6) проведемо спочатку його параметризацію, демонструючи при цьому всі послідовні кроки необхідних перетворень. Очевидно, що (4.4.6) можна подати в такому вигляді:

$$\int_{\Gamma_{3,5}} \mu_{3,5}(z) G(x, z) d\Gamma_z + \int_{\Gamma_{4,6}} \mu_{4,6}(z) G(x, z) d\Gamma_z = F(x), \quad x \in \Gamma_{3,5} \vee \Gamma_{4,6},$$

де

$$\int_{\Gamma_{k,l}} \mu_{k,l}(z) G(x, z) d\Gamma_z = \int_{\Gamma_k} \mu_k(z) G(x, z) d\Gamma_z + \int_{\Gamma_l} \mu_l(z) G(x, z) d\Gamma_z, \quad (4.4.1)$$

$$(k, l) = (3, 5) \vee (4, 6)$$

Останнє означає, що $\mu_{3,5}(z) = \{\mu_3(z), z \in \Gamma_3; \mu_5(z), z \in \Gamma_5\}$, тобто вважається сукупною густиною зарядів, розподілених на Γ_3 і Γ_5 . Аналогічним чином трактуємо і $\mu_{4,6}(z)$.

Тепер зручно здійснювати параметризацію інтегралів у (4.4.1).

Подамо криві $\Gamma_{k,l} = \Gamma_k \cup \Gamma_l$ (див. рис. 4.24, рис. 4.26 за допомогою таких параметричних рівнянь:

$$\Gamma_k = \left\{ z_2^{(k)}(\tau) = \frac{1}{2} [\pi + (-1)^{k+1} h], \quad 0 < h < \pi; \quad z_1^{(k)}(\tau) = \tau, \quad a \leq \tau \leq b \right\}$$

$$(k = 3, 4),$$

$$\Gamma_l = \left\{ z_i^{(l)}(\tau) = z_i^{(l)} + \frac{z_i^{K(l)} - z_i^{(l)}}{T^{(l)}} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq T^{(l)}; \quad i = 1, 2 \right\} \quad (l = 5, 6).$$

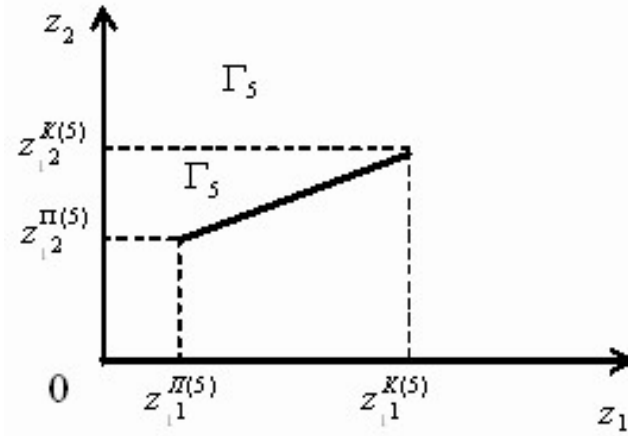


Рис. 4.26: Зображення прямої Γ_5 на координатній площині Oz_1z_2

Легко бачити, що при цьому для всіх Γ_i ($i = 3, 4, 5, 6$) $d\Gamma_z = 1 \cdot d\tau$. Тоді інтегральне рівняння (4.4.6) набуває вигляду:

$$\int_a^b \mu_3(\tau) G_3(x; \tau) d\tau + \int_a^b \mu_4(\tau) G_4(x; \tau) d\tau + \int_0^T \mu_5(\tau) G_5(x; \tau) d\tau + \int_0^T \mu_6(\tau) G_6(x; \tau) d\tau = F(x), \quad x \in \Gamma_{3,5} \vee \Gamma_{4,6}, \quad (4.4.2)$$

де $T = T^{(5)} = T^{(6)}$, $G_k(x; \tau) = G(x; z_1^{(k)}(\tau), z_2^{(k)}(\tau))$ ($k = 3, 4, 5, 6$), причому для невідомих функцій $\mu_i(\tau)$ ($i = 3, 4, 5, 6$) збережені позначення з (4.4.1).

Враховуючи попереднє, дві функції $\mu_3(\tau)$ ($a \leq \tau \leq b$), $\mu_5(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) (відповідно $\mu_4(\tau)$, $\mu_6(\tau)$) можна вважати однією сукупною густиною розподілу зарядів на контурі $\Gamma_{3,5}$ ($\Gamma_{4,6}$), на якому задано одну граничну умову $F_{3,5}(x)$ ($F_{4,6}(x)$). Тому (4.4.2) трактуємо як систему двох інтегральних рівнянь з двома невідомими функціями: $\{\mu_3, \mu_5\}$ і $\{\mu_4, \mu_6\}$. Далі, з'ясуємо тип інтегральних рівнянь, що входять у (4.4.2). Не зменшуючи загальності, припустимо, що точка спостереження $x \in \Gamma_5$, тоді знайдеться таке значення параме-

тра $\bar{\tau}$, $0 < \bar{\tau} < T$, що $x_i = z_i^{(5)}(\bar{\tau})$ ($i = 1, 2$). Дане припущення дає можливість подати перше рівняння в (4.4.2) у вигляді

$$\int_a^b \mu_3(\tau) G_3(x; \tau) d\tau + \int_a^b \mu_4(\tau) G_4(x; \tau) d\tau + \int_0^T \mu_5(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}|} + \right. \\ \left. + G_5^*(\bar{\tau}; \tau) \right] d\tau + \int_0^T \mu_6(\tau) G_6(x; \tau) d\tau = F \left(z_1^{(5)}(\bar{\tau}), z_2^{(5)}(\bar{\tau}) \right), \quad (4.4.3)$$

де $0 < \bar{\tau} < T$,

$$G_5^*(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\left[H_1^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) - \cos(d_2^{(5)}(\tau - \bar{\tau})) \right] \left[\operatorname{ch} \left(d_1^{(5)}(\tau - \bar{\tau}) \right) - S_2^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) \right] \times |\tau - \bar{\tau}|^2}{\left[H_1^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) - S_2^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) \right] \left[\operatorname{ch} \left(d_1^{(5)}(\tau - \bar{\tau}) \right) - \cos \left(d_2^{(5)}(\tau - \bar{\tau}) \right) \right]} \right\},$$

причому $H_1^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) = \operatorname{ch} \left(2z_1^{(5)} + d_1^{(5)}(\tau + \bar{\tau}) \right)$, $S_2^{(5)}(\tau, \bar{\tau}) = \cos \left(2z_2^{(5)} + d_2^{(5)}(\tau + \bar{\tau}) \right)$, а $d_i^{(5)} = \left(z_i^{(5)} - z_i^{(5)} \right) / T$ ($i = 1, 2$).

При інших припущеннях щодо положення точки спостереження одержимо аналогічні рівняння.

Отже, (4.4.3) належить до класу інтегральних рівнянь першого роду зі слабкими особливостями в ядрах, що можна сказати і про решти рівнянь системи (4.4.2). Розв'язок рівняння (4.4.3) можна будувати в різних функціональних просторах, однак, при цьому слід враховувати специфіку описуваного фізичного явища. Будемо розглядати розв'язки (4.4.3) у так званих модифікованих просторах Гьольдера. Функція $\mu(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) належить до такого простору, якщо її можна подати у вигляді $\mu(\tau) = \mu^*(\tau)/R(\tau)$, де $\mu^*(\tau) \in H_\alpha[0, T]$ ($0 < \alpha \leq 1$) – простору Гьольдера з показником α , а $R(\tau) = \sqrt{\tau(T - \tau)}$.

Оскільки система (4.4.2) належить до задач із абелевою групою симетрії другого порядку [21, 22], то можливий перехід до двох незалежних інтегральних рівнянь лише по конгруентній складовій $\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}$, тобто $\Gamma_{3,5}$. Зазначимо,

що згадана група містить два елементи: тотожне перетворення та перетворення дзеркального відображення відносно прямої $x_2 = \pi/2$ (див. рис. 4.20). Далі, у другому доданку лівої частини (4.4.2) фактично перейдемо від інтегрування по Γ_4 до інтегрування по Γ_3 , а у четвертому – від Γ_6 до Γ_5 . В результаті система (4.4.2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \mu_3(\tau) G_3(x; \tau) d\tau + \int_a^b \mu_4(\tau) G'_4(x; \tau) d\tau + \int_0^T \mu_5(\tau) G_5(x; \tau) d\tau + \\ & + \int_0^T \mu_6(\tau) G'_6(x; \tau) d\tau = F(x), \quad x \in \Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6}, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

де

$$\begin{aligned} G'_4(x; \tau) &= G\left(x; z_1^{(3)}(\tau), z_2^{(3)}(\tau) - h\right), \\ G'_6(x; \tau) &= G\left(x; z_1^{(5)}(\tau), -z_2^{(5)}(\tau) + 2z_2^{(5)}(\tau) - h\right). \end{aligned}$$

Для отримання послідовності незалежних інтегральних рівнянь перейдемо до нового базису:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3(\tau) &= \mu_3(\tau) + \mu_4(\tau), \quad \bar{\mu}_5(\tau) = \mu_5(\tau) + \mu_6(\tau), \\ \bar{\mu}_4(\tau) &= \mu_3(\tau) - \mu_4(\tau), \quad \bar{\mu}_6(\tau) = \mu_5(\tau) - \mu_6(\tau); \\ F'_{3,5}(\bar{\tau}) &= \begin{cases} F\left(z_1^{(3)}(\bar{\tau}), z_2^{(3)}(\bar{\tau})\right), & a < \bar{\tau} < b; \\ F\left(z_1^{(5)}(\bar{\tau}), z_2^{(5)}(\bar{\tau})\right), & 0 < \bar{\tau} < T; \end{cases} \\ F'_{4,6}(\bar{\tau}) &= \begin{cases} F\left(z_1^{(3)}(\bar{\tau}), z_2^{(3)}(\bar{\tau}) - h\right), & a < \bar{\tau} < b; \\ F\left(z_1^{(5)}(\bar{\tau}), -z_2^{(5)}(\bar{\tau}) + 2z_2^{(5)}(\bar{\tau}) - h\right), & 0 < \bar{\tau} < T; \end{cases} \\ \bar{F}(\bar{\tau}) &= F'_{3,5}(\bar{\tau}) + F'_{4,6}(\bar{\tau}); \quad \overline{\bar{F}}(\bar{\tau}) = F'_{3,5}(\bar{\tau}) - F'_{4,6}(\bar{\tau}). \end{aligned}$$

Тепер застосуємо до системи (4.4.4), яку ми трактуємо операторним рівнянням із заданою матрицею операторів, перетворення Фур'є [11, 21]. Матриця

цього перетворення для довільної групи другого порядку має вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

У результаті отримаємо два незалежних інтегральних рівняння із логарифмічними особливостями в ядрах

$$\int_a^b \bar{\mu}_3(\tau) [G_3(x; \tau) + G_4'(x; \tau)] d\tau + \int_0^T \bar{\mu}_5(\tau) [G_5(x; \tau) + G_6'(x; \tau)] d\tau = \bar{F}(\bar{\tau}), \quad (4.4.5)$$

$$(a < \bar{\tau} < b) \vee (0 < \bar{\tau} < T), \quad x \in \Gamma_{3,5},$$

$$\int_a^b \bar{\mu}_4(\tau) [G_3(x; \tau) - G_4'(x; \tau)] d\tau + \int_0^T \bar{\mu}_6(\tau) [G_5(x; \tau) - G_6'(x; \tau)] d\tau = \bar{\bar{F}}(\bar{\tau}), \quad (4.4.6)$$

$$(a < \bar{\tau} < b) \vee (0 < \bar{\tau} < T), \quad x \in \Gamma_{4,6}.$$

Інтегральні рівняння (4.4.5) і (4.4.6) розв'язуємо одним із відомих чисельних методів, а саме, методом колокації. Від особливостей у шуканих розв'язках позбавляємось шляхом запровадження спеціальних заміни змінних. У процесі чисельного розв'язування (4.4.5) і (4.4.6) логарифмічні особливості послабляємо методом Канторовича [26], а одержані при цьому невластні інтеграли обчислюємо аналітично.

4.4. Друга допоміжна задача

Необхідно знайти розв'язок $W(x)$ рівняння Лапласа

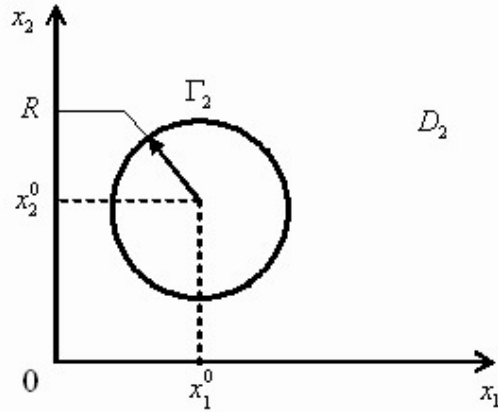


Рис. 4.27: Друга зовнішня гранична задача

$$\Delta W(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2)^T \in D_2, \quad W(x) \in C^2(D_2) \cap C(\bar{D}_2),$$

який регулярний на нескінченності і задовольняє умову $W(x)|_{\Gamma_2} = f_2(x)$ (див. рис. 4.27).

Відомо [73], що розв'язок цієї задачі можна подати у вигляді інтегралу Пуассона

$$W(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) \frac{r^2 - R^2}{r^2 - 2rR \cos\left(t - \arccos \frac{x_1 - x_1^0}{r}\right) + R^2} dt, & r > R; \\ f_2(t), & r = R, \quad -\pi \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

$$r^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2.$$

4.5. Побудова розв'язку початкової задачі з використанням одного із варіантів методу Шварца

Для знаходження розв'язку початкової задачі скористаємось одним із варіантів методу Шварца [72, 82, 94, 101]. Розглянемо випадок, коли область D має зовнішню межу S_1 і внутрішні S_2, S_3, \dots, S_n . При цьому для області

D_1 з межею S_1 ми матимемо внутрішню задачу Діріхле, а для областей D_k ($k = 2, 3, \dots, n$) – зовнішні.

Отже, в нашому випадку, згідно загальної схеми, спочатку знаходимо гармонічну функцію $V_0(x)$ в області $D_1 \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6})$ і гармонічну функцію $W_0(x)$ в області D_2 , що зодовольняють такі крайові умови:

$$V_0|_{\Gamma_1} = f_1, \quad V_0|_{\Gamma_{3,5}} = f_{3,5}, \quad V_0|_{\Gamma_{4,6}} = f_{4,6}, \quad W_0|_{\Gamma_2} = f_2.$$

Далі, визначимо гармонічні функції $V_1(x)$ і $W_1(x)$ в області $D_1 \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6})$ і D_2 , відповідно, з такими крайовими умовами:

$$V_1|_{\Gamma_1} = -W_0|_{\Gamma_1}, \quad V_1|_{\Gamma_{3,5}} = -W_0|_{\Gamma_{3,5}}, \quad V_1|_{\Gamma_{4,6}} = -W_0|_{\Gamma_{4,6}}, \quad W_1|_{\Gamma_2} = -V_1|_{\Gamma_2}.$$

Продовжуючи цю процедуру, на m -му кроці одержимо функції $V_m(x)$ і $W_m(x)$:

$$V_m|_{\Gamma_1} = -W_{m-1}|_{\Gamma_1}, \quad V_m|_{\Gamma_{3,5}} = -W_{m-1}|_{\Gamma_{3,5}}, \quad V_m|_{\Gamma_{4,6}} = -W_{m-1}|_{\Gamma_{4,6}},$$

$$W_m|_{\Gamma_2} = -V_{m-1}|_{\Gamma_2}.$$

Функції $\sum_{m=0}^p V_m(x)$, $\sum_{m=0}^p W_m(x)$ гармонічні в $D_1 \setminus (\Gamma_3 \cup \Gamma_4)$ і D_2 , відповідно, і задовольняють умови:

$$\sum_{m=0}^p V_m(x) \Big|_{\Gamma_1} = f_1 - \sum_{m=0}^{p-1} W_m(x) \Big|_{\Gamma_1}; \quad \sum_{m=0}^p V_m(x) \Big|_{\Gamma_{3,5}} = f_3 - \sum_{m=0}^{p-1} W_m(x) \Big|_{\Gamma_{3,5}};$$

$$\sum_{m=0}^p V_m(x) \Big|_{\Gamma_{4,6}} = f_4 - \sum_{m=0}^{p-1} W_m(x) \Big|_{\Gamma_{4,6}}; \quad \sum_{m=0}^p V_m(x) \Big|_{\Gamma_2} = f_2 - \sum_{m=0}^{p-1} W_m(x) \Big|_{\Gamma_2}.$$

Віднімаючи від лівої та правої частин останніх чотирьох рівностей $\sum_{m=0}^{p-1} V_m(x)$, $\sum_{m=0}^{p-1} W_m(x)$ (у четвертій), одержимо

$$\sum_{m=0}^{p-1} (V_m(x) + W_m(x)) = f_1(x) - V_p(x) \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} (V_m(x) + W_m(x)) = f_{3,5}(x) - V_p(x) \text{ на } \Gamma_{3,5},$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} (V_m(x) + W_m(x)) = f_{4,6}(x) - V_p(x) \text{ на } \Gamma_{4,6},$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} (V_m(x) + W_m(x)) = f_2(x) - W_p(x) \text{ на } \Gamma_2.$$

Можна показати, що при $p \rightarrow \infty$ функції $V_p(x)$ і $W_p(x)$ рівномірно на відповідних контурах прямують до нуля. Отже, є підстави сподіватись, що сума $\sum_{m=0}^{\infty} (V_m(x) + W_m(x))$ дає розв'язок початкової задачі.

Також мають місце нерівності [26]:

$$|V(x) - V_m(x)| \leq N \vartheta_1^{m-1} \vartheta_2^{m-1},$$

$$|W(x) - W_m(x)| \leq N \vartheta_1^m \vartheta_2^{m-1},$$

де $\vartheta_1 < 1$, $\vartheta_2 < 1$, а N – додатня константа.

Дві останні нерівності справедливі у кожній скінченній точці області $D \setminus (\Gamma_{3,5} \cup \Gamma_{4,6})$ поблизу контурів Γ_2 , $\Gamma_{3,5}$, $\Gamma_{4,6}$, де досліджуване електростатичне поле найбільше виявляє свою неоднорідність. Вони також показують, що відхилення m -тих наближень V_m та W_m від функцій V і W збігаються не повільніше ніж члени геометричної прогресії з знаменником $q = \vartheta_1 \vartheta_2$.

4.6. Результати чисельних експериментів

У табл. 4.2-4.3 відображено результати тестування методики та розв'язування плоскої задачі електростатики, а загальний вигляд відповідної електронно-оптичної системи подано на рис. 4.20. При конкретній реалізації значення параметрів задаємо наступним чином: $(x_1^0, x_2^0) = (2, 1.55)$, $R = 0.25$, $(4, 2.07) - (7, 2.07)$, $(7, 2.07) - (9, 2.64)$, $(4, 1.07) - (7, 1.07)$, $(7, 1.07) - (9, 0.5) -$ координати початку-кінця кривих Γ_3 , Γ_5 , Γ_4 , Γ_6 , відповідно. Тут також $\varepsilon -$

точність обчислень, n – кількість точок колокації, $U^*(x)$ – точний розв'язок, $U(x)$ – значення потенціалу, $f(x)$ – граничні значення потенціалу, p – кількість розв'язаних пар задач, * – поле близьке до однорідного.

Таблиця 4.2

Результати чисельних експериментів

Початкові дані для тестування							
ε	n	Граничні значення потенціалу					$U^*(x)$
		$f_1 _{\{x_1=0; 0 \leq x_2 \leq \pi\}}$	$f_1 _{\{x_2=0 \vee x_2=\pi; 0 \leq x_1 \leq \infty\}}$	$f_2(x)$	$f_{3,5}(x)$	$f_{4,6}(x)$	
0.00001	1000	5	5	5	5	5	5
Результати, отримані в одній точці							
	$(x_1, x_2) = x$	$U(x)$	$f(x)$	p			
1	(3.5, 0.10)	4.9964	5.0000	9			
2	(0.1, 2.00)	4.9972	5.0000	2			
3	(5.0, 3.10)	4.9878	5.0000	9			
4	(2.0, 1.20)	4.9764	5.0000	3			
5	(1.7, 1.55)	4.9979	5.0000	4			
6	(6.0, 1.00)	4.9843	5.0000	9			
7	(8.0, 0.70)	4.9645	5.0000	6			
8	(5.0, 2.09)	4.9939	5.0000	7			

Таблиця 4.3

Результати чисельних експериментів

Початкові дані для тестування						
ε	n	Граничні значення потенціалу				
		$f_1 _{\{x_1=0; 0 \leq x_2 \leq \pi\}}$	$f_1 _{\{x_2=0 \vee x_2=\pi; 0 \leq x_1 \leq \infty\}}$	$f_2(x)$	$f_{3, 5}(x)$	$f_{4, 6}(x)$
0.00001	1000	1	1	-5	100	10
Результати, отримані в одній точці						
	$(x_1, x_2) = x$	$U(x)$	$f(x)$	p		
1	(2.00, 0.10)	0.91990	1.0000	22		
2	(2.00, 0.05)	0.98990	1.0000	22		
3	(0.10, 1.00)	0.89310	1.0000	20		
4	(0.05, 1.00)	0.92560	1.0000	19		
5	(3.00, 3.00)	0.86330	1.0000	22		
6	(3.00, 3.10)	0.91360	1.0000	20		
7	(5.00, 1.05)	9.96050	10.000	29		
8	(5.00, 1.06)	9.96870	10.000	29		
9	(8.00, 2.35)	99.7686	100.00	29		
10	(8.00, 2.39)	99.8235	100.00	29		
11	(2.28, 1.55)	-4.98360	-5.0000	33		
12	(2.26, 1.55)	-5.00300	-5.0000	33		
13	(30.0, 1.50)	1.43866	*	28		
14	(60.0, 1.50)	1.03828	*	35		
15	(100, 1.50)	1.00047	*	39		

Висновки до розділу 4

У розділі 4 на прикладі розв'язування однієї плоскої модельної задачі електростатики проаналізовано систему обчислювальних методів, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь, декомпозиція складних областей, апарат функцій Гріна та врахування симетрії окремих елементів межі. Проведене дослідження ілюструє загальний підхід до розв'язування складної задачі математичної фізики, який дозволив максимально використати всі особливості досліджуваної модельної задачі.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано актуальну науково-практичну задачу моделювання процесу чисельного розрахунку електростатичних полів деяких класів сучасних електронно-оптичних систем із наявною геометричною симетрією.

У роботі одержані такі нові наукові результати.

1. Удосконалено математичні моделі електростатичних полів та розроблено систему обчислювальних методів розрахунку цих полів для класів електронно-оптичних систем за наявності симетрії граничної поверхні, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп. На відміну від існуючих підходів вдалось при тій же точності апроксимації суттєво знизити порядки матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні.
2. Розширено класи електронно-оптичних систем, що допускають чисельне моделювання з використанням методу граничних інтегральних рівнянь. Окрім цього, ефективніше використано оперативну пам'ять комп'ютера шляхом зменшення її обсягу у квадрат порядку групи, якою володіє відповідна модельна задача, а також створено передумови до розпаралелення процесу розв'язування задач в цілому.
3. Досліджено математичні моделі, які описують так зване плоске електростатичне поле, і вперше знайдено аналітичне представлення адитивної сталої, присутньої в зображенні розв'язку, що дало можливість суттєво спростити алгоритм наближеного розв'язування відповідних модельних задач.
4. Розглянуто особливості розпаралелення процедур розрахунків параметрів електростатичних полів класів електронно-оптичних систем і для

підтвердження ефективності розпаралелення зазначеної процедури проведено ряд чисельних експериментів з використанням програмного засобу OpenMP.

5. Розроблено апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає надійно контролювати нерегулярність густини розподілу зарядів в околі кутової точки складової поверхні, відмовляючись від аналітичного врахування її поведінки.
6. Удосконалено метод чисельного моделювання складних електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем, використовуючи апарат функцій Гріна, один із методів декомпозиції областей та наявну геометричну симетрію.

Висновки, одержані в роботі, підтверджені у дослідженнях, пов'язаних із аналізом та моделюванням електромагнітного випромінювання космічних об'єктів в діапазоні радіохвиль, які проводяться у відділі методів та систем дистанційного зондування ФМІ НАН України.

Нові наукові розробки впроваджені в навчальний процес Національного університету "Львівська політехніка".

Автор висловлює щирю вдячність своєму першому науковому керівнику, кандидату фізико-математичних наук, доценту Остудіну Б.А. за наукові консультації та постійну увагу до роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Абрамович С.Н. Оптимизация зондоформирующей системы ядерного сканирующего микронзонда на базе электростатического перезарядного ускорителя ЭГП-10 / С.Н. Абрамович, Н.В. Завьялов, А.Г. Звенигородский, И.Г. Игнатъев, Д.В. Магилин, К.И. Мельник, А.Г. Пономарев // Журнал технической физики. – 2005. – Том 75, Вып. 2. – С. 6-12.
- [2] Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М.А. Алексидзе. – М.: Наука, 1991. – 352 с.
- [3] Бакалец В.А. Исследование алгоритмов численного решение интегральных уравнений электронной оптики в случае незамкнутых поверхностей / В.А. Бакалец, М.В. Дорошенко // Лучевая технология электронной техники: Моделирование и эксперимент. – М., 1988. – С. 26-30.
- [4] Бакалец В.А. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений / В.А. Бакалец, И.В. Людkevич // Учебное пособие, м. Львов. – Изд-во ЛГУ, 1986. – 135 с.
- [5] Болюбов А.Н. Функция Грина оператора Лапласа / А.Н. Болюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шашкина // Учебное пособие, М.: Физический факультет МГУ. – 2012. – 130 с.
- [6] Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
- [7] Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

- [8] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
- [9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
- [10] Воеводин В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин – СПб.: БХВ-Петербург.– 2004. – 608 с.
- [11] Ганюшкін О.Г. Теорія груп: Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету / О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. – К. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2005. – 123 с.
- [12] Гарасим Я.С. Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання / Я.С. Гарасим, Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14 – С. 64-74.
- [13] Гарасим Я.С. Розпаралелення методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач теорії потенціалу за наявності симетричних елементів межі / Я.С. Гарасим, Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Матеріали третьої міжнарод. наук.-техн. конф. "Комп'ютерні науки та інформаційні технології 25-27 вересня 2008 р., Львів: Вид-во ПП "Вежа і Ко". – 2008. – С. 342-346.
- [14] Гарасим Я.С. Описание эффективной методики приближенного решения двумерных интегральных уравнений теории потенциала на основе вычислительных экспериментов / Я.С. Гарасим, Б.А. Остудін // Вестн. Львов. ун-та. Сер. прикл. матем. и информ. – 2004. – Вып. 9. – С. 47-53.
- [15] Гладков В.С. Дослідження експериментального зразка установки очище-

- ння трансформаторного масла / В.С. Гладков, О.А. Гученко, О.В. Шестеріков // Вестник НТУ "ХПИ". – 2009. – № 39. – С. 46-50.
- [16] Глумова М.В. Чисельне моделювання фізичних процесів у вісесиметричних електронно-променевих приладах / М.В. Глумова // Автореферат на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук, Харків. – 2000. – 17 с.
- [17] Гончаренко В.М. Основы теории уравнений с частными производными / В.М. Гончаренко. – К. Вища школа, 1985. – 311 с.
- [18] Демин С.К. Моделирование сложных электростатических систем, разбивающихся на подсистемы с конечной группой симметрий / С.К. Демин, Р.П. Тарасов // Журнал Математическое моделирование. – 1993. – т. 5, № 7. – С. 115-123.
- [19] Дорошенко М.В. Два підходи чисельного розв'язування інтегральних рівнянь першого роду / М.В. Дорошенко, О.М. Дудник, Я.С. Пушак // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №341. – С. 103-105.
- [20] Жигарев А.А. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы / А.А. Жигарев. – М. : Высшая школа, 2009. – 540 с.
- [21] Захаров Е.В. Метод численного решения интегральных уравнений в краевых задачах с абелевой группой симметрий конечного порядка / Е.В. Захаров, С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1990. – Т. 30, № 11. – С. 1661-1674.
- [22] Захаров Е.В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е.В. Захаров, С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1992. – Т. 32. – № 1. – С. 40-58.

- [23] Иванов В.Я. Методы математического моделирования задач электронной оптики / В.Я. Иванов. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. – 1986.
- [24] Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики / В.П. Ильин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985. – 336 с.
- [25] Камерон Хьюз. Параллельное и распределенное программирование на C++.: Пер. с англ. / Хьюз Камерон, Хьюз Трейси. – М.: Изд. дом "Вильямс". – 2004. – 672 с.
- [26] Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 664-681.
- [27] Каханер Д. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. / Д. Каханер, К. Моулдер, С. Нэш. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
- [28] Квасниця Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. уні-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 162-174.
- [29] Кичура С.М. Исследование одной математической модели, описывающей пространственное электростатическое поле / С.М. Кичура, Б.А. Остудин, Ю.Н. Сибиль // Теоретическая электротехника. – 1990. – Вып. 49. – С. 132-139.
- [30] Корсак К.В. Електростатика / К.В. Корсак. – К.: НМКВО. 1991. – 196 с.
- [31] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

- [32] Людкевич й.В. Метод інтегральних рівнянь у граничних задачах теорії потенціалу / Й.В. Людкевич // Вісн. АНУРСР. – 1989. – Вип. 1. – С. 8-16.
- [33] Мельник И.В. Использование метода интегральных уравнений для численного моделирования оптических свойств диодных систем высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / И.В. Мельник // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. – т. 6(2001). – С. 80-85.
- [34] Мельник И.В. Алгоритм решения задачи анализа электронной оптики электродных систем высоковольтного тлеющего разряда основанный на использовании метода интегральных уравнений / И.В. Мельник // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Херсон. – 2002. – Вып. 2 (15). – С. 321-325.
- [35] Мельник И.В. Численное моделирование распределения электрического поля и траекторий частиц в источниках электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда / И.В. Мельник // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – т. 48(2005), №6 – С. 61-71.
- [36] Мочурад Л.І. Апостеріорний метод оцінювання похибки і розпаралелення обчислень для одного класу задач електронної оптики лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Науковий вісник НЛТУ України. – Львів, 2017.– Том 27, № 5: збірник науково-технічних праць. – С. 155-159.
- [37] Мочурад Л.І. Використання процедури розпаралелення при розрахунку електростатичних полів квадрупольних лінз та їх систем / Л.І. Мочурад // Матеріали XVIII міжнародної конференції з математичного моделювання. МКММ-2017 – Херсон:ХНТУ, 2017. – С. 27-28.
- [38] Мочурад Л. Дослідження методики розрахунку електростатичного поля

- квадрупольної лінзи / Л. Мочурад, Б. Остудін // Збірник матеріалів ІV Міжвузівської наук.-техн. конф. наук.-педагог. працівн. "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні 30.03.09 - 10.04.09, м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка 2009. – С. 38-39.
- [39] Мочурад Л.І. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму "Проблеми оптимізації обчислень 24-29.09.09. смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В.М.Глушкова НАНУ. – Київ. – 2009. – С. 117-122.
- [40] Мочурад Л.І. Ефективне використання методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні краєвих задач з наявною симетрією в геометрії елементів межі / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник тез міжнародної конференції "Інтегральні рівняння - 2009 ", 24-26.01.09, м. Київ. – ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАНУ, 2009. – С . 112-113.
- [41] Мочурад Л.І. Ефективне розв'язування граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXVII) з 22 по 29 вересня 2011 року, смт. Кацивелі (Крим), Міністерство освіти та науки України, Національна академія наук України, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України – Київ. – 2011. – С. 129-131.
- [42] Мочурад Л.І. Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Вісник Херсонського національного технічного університету – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). – Т.1. – С. 155-165.

- [43] Мочурад Л.І. Ефективний підхід до розрахунку поля, створюваного системою електродів складної конфігурації / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Матеріали XVI Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики 8 - 9.09.09, м. Львів. – Видавничий центр при ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – С. 150-151.
- [44] Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики для наближеного розв'язування задач електронної оптики / Л.І. Мочурад // Технологічний аудит та резерви виробництва. – 2012. – № 5/2 (7) / Матеріали міжнар. наук. конф. «Наукова періодика слов'янських країн в умовах глобалізації». Ч. I.– К., 2012. – С. 35-36.
- [45] Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2009. – Вип. 2. – С. 105-118.
- [46] Мочурад Л.І. Наближене розв'язування граничної задачі Діріхле з абелевою групою симетрії восьмого порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Тези доповідей XV Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики 23-25 вересня 2008 р., м. Львів. – Видавничий центр при ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – С. 26.
- [47] Мочурад Л.І. Наближене розв'язування задач електростатики із врахуванням специфіки вхідної інформації / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник матеріалів V Міжвузівської наук.-техн. конф. наук.-педагог. працівн. "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та ком-

- п'ютерних технологій в Україні березень 2010 року, м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка" – 2010. – С. 268-269.
- [48] Мочурад Л.І. Проблема оптимізації розрахунку потенціальних полів електронно-оптичних систем складної структури / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці V міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень 27 вересня - 1 жовтня 2010 року, м. Ужгород. – УжНУ, 2010. – С. 155-156.
- [49] Мочурад Л. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків / Л. Мочурад // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 34-41.
- [50] Мочурад Л.І. Розпаралелення розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора / Л.І. Мочурад // Науково-технічний журнал "Біоніка інтелекту" – Вип. 2. – 2017. – С. 72-76.
- [51] Мочурад Л.І. Особливості чисельного розв'язування граничних задач за наявності симетрії елементів межі / Л.І. Мочурад // Збірник тез за матеріалами VIII науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні". – Львів. – 2012. – С. 310-311.
- [52] Мочурад Л.І. Чисельний аналіз граничних задач теорії потенціалу в \mathbf{R}^2 з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 32-47.
- [53] Мочурад Л.І. Чисельне моделювання зовнішніх граничних задач теорії потенціалу електронної оптики в \mathbf{R}^2 / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Матеріали XIV Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики

- та інформатики 2-4 жовтня 2007 р., м. Львів. – Видавничий центр при ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – С. 104-106.
- [54] Мочурад Л.І. Чисельне розв'язування граничних задач теорії потенціалу в електронній оптиці з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Тези доповідей міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатька, 24-28 вересня 2007 р., м. Дрогобич. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2007. – С. 200.
- [55] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, – 1968. – 512 с.
- [56] Немнюгин С.А. Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем / С.А. Немнюгин, О.Л. Стесик. – СПб.: БХВ-Петербург.– 2002. – 400 с.
- [57] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
- [58] Остудін Б.А. Чисельне моделювання деяких граничних задач теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Б.А. Остудін, Л.І. Мочурад // Збірник матеріалів ІІ міжвузівської наук.-техн. конф. наук.-педагог. працівн. "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні 20-21 березня 2007 року, м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка 2007. – С. 200-201.
- [59] Остудін Б. Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Б. Остудін, Л. Мочурад // Програма міжнар. наук. конф. "Обчислювальна математика і математичних проблем механіки 31.08.09 - 4.09.09, м. Львів. – ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2009. – 1 стор.

- [60] Остудін Б.А. Численне рішення двумерних інтегральних рівнянь теорії потенціала на розомкнутих поверхностях з урахуванням специфіки досліджуваної граничної задачі електростатики / Б.А. Остудін, Л.І. Мочурад // Тезиси докладів міжнародної конференції "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики" пам'яті акад. А.А. Самарського (к 90-летию со дня народження), 16-18.06.09, г. Москва. – МГУ ім. Ломоносова, 2009. – С. 84-85.
- [61] Полищук А.Д. О Численном решении интегральных уравнений теории потенциала / А.Д. Полищук // Препринт №743. – Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. – 1987. – 26 с.
- [62] Проценко І.Ю., Черноус А.М., Проценко С.І. Прилади і методи дослідження плівкових матеріалів / І.Ю. Проценко, А.М. Черноус, С.І. Проценко // Навч. посібник. – Суми: Вид-во СумДІ, 2007. – 264 с.
- [63] Романенко А.В. Застосування методу квадратур до інтегрального рівняння у стаціонарних осесиметричних самоузгоджених задачах електронної оптики / А.В. Романенко, Б.А. Остудін // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2000. – № 2. – С.59-67.
- [64] Романенко А.В. Про збіжність методу квадратур для інтегрального рівняння у стаціонарних осесиметричних самоузгоджених задачах електронної оптики / А.В. Романенко, Б.А. Остудін // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2003. – № 7. – С.65-74.
- [65] Романенко А.В. Розрахунок руху пучка заряджених частинок в електростатичному полі з урахуванням просторового заряду / А.В. Романенко, Б.А. Остудін // Теоретична електротехніка. – 2002. – № 59. – С.87-103.
- [66] Романенко А.В. Чисельне розв'язування просторових стаціонарних само-

- узгоджених задач електронної оптики на основі методу інтегральних рівнянь / А.В. Романенко // Автореферат дис. на здобуття наук. ступеня кан. фіз. - мат. наук, Львів, 2005. – 20 с.
- [67] Сатановская О. Электронно-оптические системы ЕЛП для коллиматорных индикаторов / О. Сатановская // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2003. – №4 – С. 66-68.
- [68] Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп / Ж.-П. Серр. – М.: РХД, 2003. – 132 с.
- [69] Сибиль Ю.Н. Существование решения двумерных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого рода теории потенциала заданных на гладком многообразии с краем / Ю.Н. Сибиль. – Львов. – 1990. – 17 с.
- [70] Сигаловський Д.Ю. Електронна оптика / Д.Ю. Сигаловський. – Київ. – 1977. – 163 с.
- [71] Смагин С.И. Решение трехмерной задачи диффракции электромагнитных волн методом потенциалов / С.И. Смагин // Численные методы в интерпретации геофизических наблюдений. – Новосибирск, 1980. – С. 109-124.
- [72] Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – Т. IV. – Ч. 2. – М.: Наука, 1981. – 550 с.
- [73] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
- [74] Тыртышников Е.Е. Об алгоритмах дискретного преобразования Фурье /

- Е.Е. Тыртышников // В кн. Численные методы алгебры. – Москва, 1981. – 10-26 с.
- [75] Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми – М.: Москва, 1960.– 299 с.
- [76] Цегелик Г.Г. Наближені методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь / Г.Г. Цегелик. – Львів: Вид. ЛНУ імені Івана Франка, 2008 р. – 140 с.
- [77] Цегелик Г.Г. Чисельні методи / Г.Г. Цегелик. – Львів: Вид. ЛНУ імені Івана Франка, 2004 р. – 408 с.
- [78] Швець Є.Я. Вакуумна та плазмова електроніка Частина 2. Електронно-променеві прилади / Є.Я. Швець, А.В. Юдачов, М.М. Турба // Навчально-методичний посібник. – Запоріжжя: Видавництво ЗДІА, 2010 р. – 127 с.
- [79] Atkinson K. The numerical solution of first-kind logarithmic-kernel integral equations on smooth open arcs / K. Atkinson, I.H. Sloan // Mathematics of Computation. – 1991. – Vol. 56. –№ 193. – P. 119-139.
- [80] Borovyuy R. A posteriori error estimators of finite elements method for advection-diffusion-reaction problems: linear approximations on triangles/ R.V. Borovyuy, O.Yu. Ostapov, G.A. Shynkarenko // 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics: Short Papers. – Warsaw:Warsaw University of TechnologyPress. – 2011. – P. 143-144.
- [81] Carstensen C. Residual based a posteriori estimate for hypersingular equation on surfaces / C. Carstensen, M. Maischak, D. Praetorins, E.P. Stephan // Numer. Math. – (2004)97. – P. 397-425.

- [82] Chan T., Mathew T. Domain decomposition algorithms / T. Chan, T. Mathew // In A. Acta Numerical 1994, Cambridge: Cambridge Univ. Press.– 1994.– P. 61-143.
- [83] Chapko R. An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in semi-infinite regions/ R. Chapko, B.T. Johansson // Inverse Problems and Imaging. – 2008. – 2. – P. 317-333.
- [84] Chapko R. The numerical solution of the axially symmetric linear sloshing problem by the boundary integral equation method / R. Chapko, G. Datsiv // Jour. of Integral Equations and Applications. – Vol.20. – 2008. – P. 1-24.
- [85] Chapko R. On the numerical solution of direct and inverse problems for the heat equation in a semi-infinite region // Journal of computational and Applied Mathematics. – 1999. – 108. – P. 41-55.
- [86] Chapko R. On a hybrid method for shape reconstruction of buried object in an elastostatic half plane / R. Chapko // Inverse Problems and Imaging. – 2009.– 3. – P. 199-210.
- [87] Chapko R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind / R. Chapko, R. Kress // Agarwal, ed., World Scientific Series in Applicable Analysis. Contributions in Numerical Mathematics, Vol. 2. – Singapore: World Scientific, 1993. – P. 127–140.
- [88] Duffy D.G. Green's function with application / D.G. Duffy. – Boca Raton - London - New York - Washington: Chapman&Hall/CRC, 2001. – 404 p.
- [89] Eriksson K. Introduction to adaptive methods for differential equations / K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson // Acta Numerica. – 1995. – Pp. 001-054.

- [90] Garasym Ya.S. On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method / Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2003.– № 1 (88). – С. 17-28.
- [91] Hayashi Y. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary / Y. Hayashi // J. Math. Anal. and Appl. – 1973. – Volume 44. – P. 489-530.
- [92] Kirch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems / A. Kirch. – Springer. New-York. – 1996.
- [93] Lions J.-L. Problèmes de limites de non homogènes et de Applications / J.-L. Lions, E. Magenes. – Dunod. Paris. – 1968. – Vol. 1.
- [94] Lions P.-L. On the Schwartz alternating method // I First Int. Symposium on Domain Decomposition Method for Partial Differential Equations, (R. Glavinski, G.H. Golub, G. Meurant and J. Periaux, eds), – SIAM, Philadelphia.– 1988. – P. 1-41.
- [95] Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics.– 2010. – №99(100). – 14 p.
- [96] Mochurad L.I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Ya.S. Garasym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149-156.
- [97] Mochurad L.I. Numerical modelling of the potential fields of electron-optical systems of complicated structure / L.I. Mochurad // Proceedings of the

- International Conference "Integral Equations – 2010" 25-27 August 2010. – Ivan Franko National University of Lviv. – 2010. – P. 87-93.
- [98] Morrison J.A. Charge singularity at the corner of a flat plate / J.A. Morrison, J.A. Lewis // SIAM J. Appl. Math. – Vol. 31. – № 2. – 1976. – P. 233-249.
- [99] Ostapov O.Yu. A posteriori error estimators for diffusion- advection- reaction boundary value problems: piecewise linear approximations on triangles / O.Yu. Ostapov and H.A. Shynkarenko // J.Numer. Appl. Math. – №2(105). – 2011. – P. 111-123.
- [100] Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu.M. Sybil // Матем. студії. – 1997. – Т. 8. – № 2. – С. 79-96.
- [101] Toselli A. Domain decomposition methods algorithms and theory/ Toselli A., Widlund O. // Spring Series in Comput. Math. Heidelberg: Springer – 2004– Vol.34.
- [102] Voss M.J. OpenMP share memory parallel programming / M.J. Voss. – Toronto, Kanada, 2003. – 270 p.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Mochurad L.I. Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Y.S. Harasym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009.– Vol. 8, № 2. – P. 149-15 – Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).
2. Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics.– 2011. – №2(105). – P. 98-110 – Журнал індексується в Scopus i Web of Science.
3. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2009.– Вип. 2. – С. 105-118.
4. Мочурад Л.І. Ефективний підхід до розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Вісник Херсонського національного технічного університету.–Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3 (62). Т.1. – С. 155-165 – Журнал індексується в Science Index (eLIBRARY.RU).

5. Мочурад Л.І. Апостеріорний метод оцінювання похибки і розпаралелення обчислень для одного класу задач електронної оптики лінзи / Л.І. Мочурад, П.Я. Пукач // Науковий вісник НЛТУ України: збірник науково-технічних праць. – Львів, 2017. – Том 27, № 5. – С. 155-159– Журнал індексується в IC Journals Master List (Index Copernicus).
6. Мочурад Л.І. Розпаралелення розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора / Л.І. Мочурад // Науково-технічний журнал "Біоніка інтелекту". – Вип. 2. – 2017. – С. 72-76.
7. Гарасим Я. Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання / Я. Гарасим, Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 64-74.
8. Мочурад Л.І. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків / Л.І. Мочурад // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 34-41.
9. Мочурад Л.І. Чисельний аналіз граничних задач теорії потенціалу в \mathbf{R}^2 з абелевою групою симетрії скінченного порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 32-47.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

10. Мочурад Л.І. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародного симпозіуму "Пробле-

- ми оптимізації обчислень" , 24-29.09.09, смт. Кацивелі, Інститут кібернетики НАНУ ім. В.М. Глушкова НАНУ. – Київ. – 2009.– С. 117-122.
11. Мочурад Л.І. Використання процедури розпаралелення при розрахунку електростатичних полів квадрупольних лінз та їх систем / Л.І. Мочурад// Матеріали XVIII міжнародної конференції з математичного моделювання МКММ-2017. – Херсон:ХНТУ, 2017. – С. 27-28.
 12. Мочурад Л.І. Ефективне розв'язування граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу з абелевою групою симетрії скінченного порядку/ Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXVII)" , 22-29.09. 2011 р., смт. Кацивелі (Крим), Міністерство освіти та науки України, Національна академія наук України, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – Київ.– 2011.– С. 129-131.
 13. Mochurad L.I. Numeral modelling of the potential fields of electron-optical systems of complicated structure / L.I. Mochurad // Proceedings of the International Conference "Integral Equations – 2010" 25-27 August 2010. – Ivan Franko National University of Lviv. – 2010. – P. 87-93.
 14. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики для наближеного розв'язування задач електронної оптики / Л.І. Мочурад // Технологічний аудит та резерви виробництва. – 2012. – №5/2(7) / матеріали міжнар. наук. конф. "Наукова періодика слов'янських країн в умовах глобалізації". Ч. 1. – К., 2012. – С. 35-36.
 15. Мочурад Л.І. Ефективне використання методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні краєвих задач з наявною симетрією в геометрії елементів межі / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник тез міжнародної конфе-

- ренції "Інтегральні рівняння – 2009", 24-26.01.09, м. Київ.– ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАНУ, 2009. – С. 112-113.
16. Мочурад Л.І. Дослідження методики розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник матеріалів IV Між-вузівської науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", 30.03.09 – 10.04.09, м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка", 2009. – С. 38-39.
17. Мочурад Л.І. Наближене розв'язування задач електростатики із врахуванням специфіки вхідної інформації. / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін// Збірник матеріалів V Міжвузівської наук.-техн. конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні", березень 2010 року, м. Львів. – ІППТ при НУ "Львівська політехніка", 2010.– С. 268-269.
18. Мочурад Л.І. Особливості чисельного розв'язування граничних задач за наявності симетрії елементів межі. / Л.І. Мочурад // Збірник тез за матеріалами VIII науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників "Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні". – Львів. – 2012. – С. 310-311.

ДОДАТОК Б. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з НР

ФМІ НАН України

Д.Г. Досин



2017 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи

«Чисельне розв'язування задач електронної оптики з урахуванням симетрії граничних поверхонь» асистента кафедри «Системи штучного інтелекту» Національного університету «Львівська політехніка»
Мочурад Лесі Ігорівни

Цей акт підтверджує, що результати кандидатської дисертаційної роботи Мочурад Л.І. були використані у дослідженнях, пов'язаних із аналізом та моделювання електромагнітного випромінювання космічних об'єктів в діапазоні радіохвиль, які проводяться у відділі методів та систем дистанційного зондування ФМІ НАН України.

Впровадження дисертаційних досліджень Л.І. Мочурад полягає у наступному:

- за допомогою запропонованої системи методів вдалось провести розрахунок електромагнітних полів у процесі моделювання систем складної конфігурації з наявною геометричною симетрією, що є важливим внеском у розвиток чисельних методів для розв'язування різних класів крайових задач теорії потенціалу з абелевими групами симетрії скінченних порядків;
- створено усі передумови до процесу розпаралелення розрахунків електромагнітних полів у процесі моделювання складних систем, що є основними компонентами сучасних дослідницьких комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях.

Вказані результати кандидатських дисертаційних досліджень, дозволили:

- використовуючи систему Matlab і Surfer графічно представляти складні сучасні електростатичні поля з наявною геометричною симетрією, що є важливим при конструюванні систем аналізу електромагнітного випромінювання;
- отримати результати, що вказують на можливість подальшої оптимізації програмного забезпечення для рішення даних класів задач за критерієм мінімізації часу розрахунків за рахунок варіації кількості паралельних потоків та процесорних ядер комп'ютера.

**Завідувач відділу методів та систем дистанційного зондування
Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України**

д.т.н., проф.



Б.П. Русин



А К Т

про впровадження результатів дисертаційної роботи в навчальний процес
Мочурад Лесі Ігорівни
 «Чисельне розв'язування задач електронної оптики з урахуванням симетрії
 граничних поверхонь» представленої на здобуття наукового ступеня кандидата
 технічних наук за спеціальністю 01.05.02 Математичне моделювання та
 обчислювальні методи (технічні науки)

Комісія НУ «Львівська політехніка» у складі:

Голова комісії - директор Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій, д.т.н., професор Медиковського М.О.,

Члени комісії: завідувач кафедри «Системи штучного інтелекту», д.т.н., професор Шаховська Н.Б., професор кафедри «Системи штучного інтелекту», д.т.н., професор Камінський Р.М., старший викладач кафедри «Системи штучного інтелекту», к.т.н. Мельникова Н.І.

даним актом підтверджує, що проведені дисертантом дослідження виконувалися на кафедрі «Системи штучного інтелекту» Національного університету «Львівська політехніка». Основні положення та результати дисертаційної роботи Мочурад Лесі Ігорівни впроваджені у навчальний процес кафедри «Системи штучного інтелекту» Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій Національного університету «Львівська політехніка».

Впровадження результатів полягає у використанні дисертаційних досліджень в циклах лабораторних робіт, зокрема:

- результати розділу другого та третього використано для формалізованого комп'ютерного представлення моделей деяких просторових і плоских множин, які характеризуються розімкненістю та симетрією граничних поверхонь (ліній) (при викладанні дисципліни «Дискретна математика» для студентів першого рівня вищої освіти «бакалавр», що навчаються за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», тема № 2 «Множини та відношення», лабораторна робота № 1);

- результати розділу другого використано при описі програмних апаратів опрацювання алгоритмів з використанням процедур розпаралелення на основі

стандарту OpenMP (при викладанні дисципліни «Дискретна математика» для студентів першого рівня вищої освіти «бакалавр», що навчаються за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», тема № 8 «Основи теорії алгоритмів», лабораторна робота № 6);

• результати розділів другого та третього використано у якості змістовних прикладів при розгляді аналізу часової та об'ємної складності обчислювальних алгоритмів (при викладанні дисципліни «Дискретна математика» для студентів першого рівня вищої освіти «бакалавр», що навчаються за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», тема № 8 «Основи теорії алгоритмів», лабораторна робота № 6).

Директор ІКНІ,
д.т.н., професор

М.О. Медиковський

Завідувач кафедри СШ,
д.т.н., професор

Н.Б. Шаховська

Професор кафедри СШ,
д.т.н., професор

Р.М. Камінський

Старший викладач
кафедри СШ, к.т.н.

Н.І. Мельникова