

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет “Львівська політехніка”

**САФОНИК Андрій Петрович**



УДК 519.63:532.5

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНО-ЗБУРЕНИХ КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ  
ОЧИЩЕННЯ РІДИН ВІД БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЕНЬ**

**01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи**

**Автореферат**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі “Національний університет водного господарства та природокористування” (м. Рівне) Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант:** доктор технічних наук, професор

**Бомба Андрій Ярославович,**  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
завідувач кафедри інформатики та прикладної  
математики.

**Офіційні опоненти:**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник  
**Журавчак Любов Михайлівна,**  
Карпатське відділення Інституту геофізики  
ім. С.І. Суботіна НАН України, м. Львів,  
старший науковий співробітник відділу  
геоелектромагнітних методів;

доктор технічних наук, професор  
**Бейко Іван Васильович,**  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут”, м. Київ,  
професор кафедри математичної фізики;

доктор технічних наук, професор  
**Міщенко Віктор Олегович,**  
Харківський національний університет  
ім. В.Н. Каразіна, м. Харків,  
професор кафедри моделювання систем і технологій.

Захист відбудеться 01 липня 2016 р. о 9<sup>00</sup> годині в аудиторії 226 головного корпусу на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 у Національному університеті “Львівська політехніка” (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету “Львівська політехніка” (Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розіслано “ 30 ” травня 2016 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
доктор технічних наук, професор



Бунь Р.А.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Процеси очищення рідин шляхом фільтрування від багатокомпонентних сумішей широко поширені в багатьох галузях промисловості, причому очищення через пористі середовища є одним з найбільш складних технологічних процесів. Складність опису таких процесів полягає у тому, що домішки відрізняються як за геометрією, так і за своїми фізико-хімічними властивостями, причому можуть взаємодіяти між собою і перетворюватися з одного виду в інший. Процес захоплення домішкових частинок фільтром і відриву частинок осаду також залежить від багатьох факторів, таких як: швидкість течії, реагентів, які прискорюють або сповільнюють агрегацію домішкових частинок та інше.

Незважаючи на те, що в теорії рідкого стану на сьогоднішній день досягнуті значні успіхи, теоретичні результати в області масопереносу для багатокомпонентних рідких сумішей далекі від закінченості, що пов'язане з математичними складностями точного розв'язку багаточастинної задачі. Перевірка ж основних принципів, що закладаються в теорію, за допомогою фізичних експериментів, зазвичай, є утруднена, оскільки вони є досить вартісними і в них переважно є вплив сторонніх ефектів, що лише посилює роль математичного моделювання.

Математичний опис цих складних масообмінних процесів має емпіричний характер і не містить моделі для розрахунків фізичних властивостей і умов фазової рівноваги багатокомпонентних твердо-рідинних систем, моделі багатокомпонентної масопередачі в рідкій фазі, а також моделі опису гідродинаміки руху фаз. Існуючі математичні моделі процесів розподілу багатокомпонентних сумішей не дають можливості досліджувати вплив багатокомпонентного масопереносу та враховувати його при проектуванні та реконструкції очисних споруд.

Існуючі математичні моделі процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення не надають інструментів для прогнозування, керування та оперативних методів контролю, багато відповідних характерних параметрів не враховуються або задаються довільно. Зокрема, вхідна концентрація забрудненої рідини вважається однокомпонентною, що насправді є не так тощо. Також, на сьогоднішній день, є мало розробленими, безсистемними або взагалі відсутніми нелінійні "моделні механізми", що враховують різного роду зворотні впливи. Відсутніми є роботи, націлені на розробку математичного апарату для систем автоматизованого керування процесами очищення рідин різними типами фільтрів, що призводить до зниження експлуатаційних характеристик очисних систем. Не менш важливим є також ідентифікація невідомих параметрів, які входять у розроблені моделі і неможливим є їх визначення експериментальним шляхом. Багато з процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень взагалі є описаними тільки на основі експериментальних даних і не обґрунтовані математичним апаратом.

Таким чином, **актуальною** є науково-прикладна проблема розроблення математичних моделей та числово-асимптотичних методів розв'язання нелінійних регулярно та сингулярно збурених крайових задач процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення через пористі середовища, з урахуванням автоматизованого керування та ідентифікації невідомих параметрів, що, зважаючи на глобальні потреби людини у воді заданої якості в різних галузях (побут, промисловість, енергетика тощо), високу вартість на забезпечення води такої якості, забезпечить покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відповідності з планом науково-дослідних робіт Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП) та Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ) за темами: “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” з післядією при неповних даних” (№ держ. реєстр. 0109U001065); “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (№ держ. реєстр. 0112U001014); “Розробка та дослідження елементів і систем автоматизації та їх моделювання” (№ держ. реєстр. 0110U000823), “Дослідження та обґрунтування базових параметрів процесу осадження феромагнітних домішок в поліградієнтних фільтруючих загрузках” (№ держ. реєстр. 0114U001139), “Дослідження та теоретико-експериментальне обґрунтування основних параметрів процесу магнітного очищення водних середовищ” (№ держ. реєстр. 0112U001591), “Дослідження і удосконалення базових параметрів апаратів магнітного осадження феровмісних продуктів корозії теплоенергетичного обладнання” (№ держ. реєстр. 0114U001615). У рамках виконання цих робіт автор розробив нові математичні моделі процесів фільтрування та методи їх розв'язання, провів дослідження цих моделей.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води шляхом розроблення нових математичних моделей процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень через пористі середовища, з урахуванням автоматизованого керування та ідентифікації параметрів та розвиток числово-асимптотичних методів розв'язання відповідних нелінійно-збурених крайових задач.

Для досягнення поставленої мети ставились наступні задачі дослідження:

- розробити математичні моделі процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень шляхом фільтрування для випадків: домінування одних складових процесу над іншими; зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо);
- розробити методологію побудови числово-асимптотичного розкладу розв'язків відповідних модельних нелінійно-збурених задач, на основі отриманих розв'язків провести дослідження відповідних процесів очищення рідин;

- розробити методику ідентифікації невідомих параметрів процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення;
- на основі розроблених математичних моделей створити систему автоматизації процесу керування очищенням рідини від багатокомпонентного забруднення;
- розроблені методики узагальнити на моделювання та прогнозування процесів: очищення рідин багат шаровими фільтрами, прояснювачами із шаром завислого осаду; магнітними та біологічними фільтрами, відповідними “просторовими фільтрами”;
- передати в проектні організації та на об’єкти водоочищення розроблені апаратно-програмні комплекси, методики і результати імітаційного моделювання для безпосереднього використання.

**Об’єкт дослідження.** Технологічні процеси очищення рідин від багатокомпонентних домішок шляхом їх фільтрування у багатофазних середовищах (фільтрах) за умов домінування одних складових процесу над іншими.

**Предмет дослідження.** Нелінійні математичні моделі процесів очищення рідин шляхом фільтрування від багатокомпонентних домішок через пористі середовища, з урахуванням взаємовпливу характеристик процесу та фільтраційних параметрів, числово-асимптотичні методи розв’язання відповідних нелінійно-збурених диференціальних рівнянь за умов автоматизованого керування та ідентифікації параметрів.

**Методи дослідження.** У роботі використано методи математичної фізики та гідродинаміки для побудови математичних моделей процесів очищення рідин шляхом фільтрування; методи розв’язання задач із запізненням; числово-асимптотичні та аналітичні методи; загальні підходи до побудови модельних задач, у яких одні складові домінують над іншими; методи розв’язання обернених задач для ідентифікації невідомих параметрів; методи імітаційного моделювання; методику узагальнення класичних моделей.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему розвинення теорії математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень з урахуванням автоматизованого керування та ідентифікації параметрів при домінуванні одних компонент процесу над іншими, а також розвинення методів розв’язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води.

У процесі вирішення цієї проблеми отримано такі нові наукові результати:

1. Вперше розроблено математичну модель процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення для випадку домінування одних складових процесу над іншими, яка відрізняється від існуючих врахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо), на прикладі очищення рідини від багатокомпонентних

домішок у механічних, магнітних і біологічних фільтрах, запропоновано новий підхід в теоретичному обґрунтуванні прояснення води в шарі завислого осаду, що дозволяє використовувати для розрахунків підходи теорії збурення і, таким чином, подолати обчислювальну складність розрахунку, а також провести верифікацію моделі.

2. Вперше побудовано математичну модель процесу аеробного очищення стічних вод, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовин та узагальнено на процес очищення води у фільтри-освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок, а також запропоновано просторове узагальнення відповідної математичної моделі біологічного очищення, що дозволяє розраховувати потрібні параметри процесу очищення та оцінити точність отриманих розрахунків відповідно до результатів експериментальних досліджень.
3. Вперше побудовано математичну модель процесу магнітного осадження домішок в одно-, дво- та  $n$ -шаровому фільтрі, яка описує закономірності фільтрування й нагромадження домішок у пористій засипці, та узагальнено на процес магнітного осадження домішок в зернистому фільтруючому матеріалі з урахуванням напруженості магнітного поля, зворотного впливу характеристик процесу (концентрації осаду) на технологічні параметри, зокрема на: пористість, напруженість магнітного поля, коефіцієнт відриву від гранул фільтруючого матеріалу частинок домішок, коефіцієнт фільтрації, що забезпечує прийнятну точність розрахунків для реальних технологічних процесів очищення.
4. Вперше одержано асимптотичні та числово-асимптотичні розклади нелінійно-збурених модельних задач процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення (для одновимірного та просторового випадків), що дозволило розширити клас розв'язуваних задач і врахувати форму фільтра.
5. Вперше обґрунтовано спосіб визначення невідомих параметрів моделей очищення рідин від багатокомпонентних забруднень механічними, магнітними та біологічними фільтрами, що дає можливість застосувати методи обернених задач і, таким чином, наблизити клас розв'язуваних задач до реальних.
6. На основі розроблених математичних моделей процесів магнітного біологічного та механічного очищення рідин від багатокомпонентних забруднень розроблено автоматизовану систему керування відповідними процесами.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані теоретичні результати та розроблені числові методи є основою для розв'язання низки прикладних задач, а саме:

- ✓ визначення часу захисної дії фільтра та регенерації, що забезпечує ефективний режим його роботи;

- ✓ розроблення прикладних програм, які дозволяють оперативно розраховувати параметри процесів фільтрування;
- ✓ заміна натурних експериментів на комп'ютерні, що зменшить затрати на виробництво очисних систем, а також надасть економію фільтруючих матеріалів;
- визначення невідомих параметрів процесів фільтрування;
- розроблення системи автоматизації процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, що підвищує продуктивність роботи очисних споруд.

Результати роботи впроваджено:

- науково-дослідним виробничим бізнес-центром Національного університету водного господарства та природокористування (НДВБЦ НУВГП) в робочих проектах на об'єктах “Реконструкція очисних споруд м. Баранівка Житомирської обл.” та “Коригування робочого проекту “Реконструкція очисних споруд смт. Летичів Хмельницької обл.”;
- кооперативно-державним проектно-вишукувальним інститутом “Рівнеагропроект” на об'єкті “Будівництво об'єкту автодорожнього сервісу (кемпінг) вул. Бродівського, 96, с. Опарипси Радивилівського району Рівненської області”;
- малим приватним підприємством “Мікроком-сервіс” в проектно-розрахункових роботах при розробці системи очищення технологічних водних середовищ від залізовмісних домішок на котельнях виробничо-житлового комунального господарства;
- кафедрою водопостачання, водовідведення та бурової справи Національного університету водного господарства та природокористування на станції знезалізнення “Тоша”.

Отримані у роботі математичні моделі та числово-асимптотичні методи розв'язування нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування, алгоритми та графіки використовуються при читанні курсів “Числові методи”, “Математичні задачі енергетики” та “Моделювання природних та техногенних процесів” (кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій НУВГП); “Методи комплексного аналізу”, “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами” та “Сучасні проблеми прикладної математики” (кафедра інформатики та прикладної математики РДГУ). Запропоновані моделі та алгоритми використовувалися для розв'язання відповідних задач у науково-дослідній лабораторії “Процеси і апарати фізико-хімічних методів очистки” кафедри фізики НУВГП, науково-дослідній лабораторії “Математичне моделювання нелінійних збурень процесів та систем” кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дисертаційної роботи одержано автором самостійно. У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: в монографії [1] автору належить написання 3 розділу, у роботах здобувачеві належать: [4, 21, 26] – принципи побудови математичної моделі магнітного осадження; [27, 29, 46] – спосіб визначення невідомого масообмінного

коефіцієнта; [38, 43, 53, 54, 57, 64] – перенесення методології знаходження асимптотичного наближення розв’язку модельної задачі магнітного осадження, виконання числових розрахунків та здійснення їх аналізу; [7, 12, 16, 28] – побудова математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, [36, 63, 65] – розробка методу розв’язання відповідної задачі та отримання її розв’язку, проведення комп’ютерних експериментів та здійснення їх аналізу; [33] – проведення розрахунку параметрів магнітного фільтра осаджувача; [8-11, 13, 17, 20] – побудова математичної моделі сорбційного фільтра, фільтра-освітлювача, прояснювача із шаром завислого осаду, процесу аеробного очищення стічних вод; [3, 5, 19] – автором сформульовано та обґрунтовано спосіб визначення невідомого масообмінного коефіцієнта, та розроблено програмний комплекс для його знаходження; [22, 30, 32, 35, 45] – перенесення методології знаходження асимптотичного наближення розв’язку відповідних модельних задач; [40, 44, 47, 48, 50] – автору належить постановка задач і розробка числових методів і алгоритмів та участь у проведенні числових розрахунків і аналіз результатів; [14, 18, 41] – побудова математичної моделі  $n$ -шарового магнітного фільтра та асимптотичного наближення розв’язку відповідної модельної задачі, виконання числових розрахунків та здійснення їх аналізу; [6, 23] – перенесення методології знаходження асимптотичного наближення розв’язку відповідної модельної задачі, виконання числових розрахунків, обговорення результатів та здійснення їх аналізу; [51, 61, 62] – побудова математичної моделі магнітного осадження та [55, 56] – біологічного очищення, перенесення методології знаходження асимптотичного наближення розв’язку відповідної модельної задачі та [15, 58, 59] – розробка системи автоматизації відповідних процесів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні наукові результати роботи доповідалися і обговорювалися на наукових конференціях і семінарах різного рівня, зокрема: IV, V, VI та VIII Міжнародних конференціях імені академіка І. І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика” (Київ, 2011, 2012, 2013 та 2015), XXXI науково-технічній конференції “Модельовання” (Київ, 2012), VIII International Conference “Porous Materials. Theory and Experiment” (INTERPOR’12) (Lviv-Briukhovychi, 2012), Всеукраїнській науковій конференції “Математичне моделювання та математична фізика” (Кременчук, 2011), XVII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (до 350 річчя Львівського національного університету імені Івана Франка) (Львів, 2011), 5th International Conference “Advanced computer systems and networks: design and application” (Lviv, 2011), International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (Skhidnytsia, 2011), II, III та IV міжнародній науково-практичній конференції “Проблеми інформатики та комп’ютерної техніки” (Чернівці, 2013, 2014, 2015), International Conference “Computer Science & Engineering 2013” (CSE-2013) (Lviv, 2013), The V international conference on information technologies and computer engineering “ITSE-2015” (Івано-Франківськ, 2015), III international conference “Mathematics for life sciences” (Rivne, 2015), XXI Міжнародній конференції “Контроль і управління в складних системах” (КУСС-2014) (Вінниця, 2014),



III Міжнародній науково-практичній конференції “Стратегічні рішення інформаційного розвитку економіки, суспільства та бізнесу” (Рівне-Дніпропетровськ, 2014), International scientific conference of young scientists and students “Water management – state and prospect of development” (Rivne, 2010), V міжнародній науковій конференції Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (Кам’янець-Подільський, 2012), Conference young scientists “Innovative technologies in water management complex” (Rivne, 2012), XXV Международной научной конференции “Математические методы в технике и технологиях «ММТТ – 25»” (Саратов, 2012), Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2013), Міжнародній науково-технічній конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем управління організаційно-технічними та технологічними комплексами” (Київ, 2014), Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015), I Всеукраїнській науково-технічній конференції “Комп’ютерні технології: інновації, проблеми, рішення 2015” (Житомир, 2015), Міжнародному конгресі ЕТЕВК–2011 “Екологія, технологія, економіка, водопостачання, каналізація” (Ялта, 2011).

У повному обсязі робота доповідалася на об’єднаному науковому семінарі кафедр автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій і прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування (керівник – д.т.н., проф. Древецький В.В.), на науковому семінарі ХНУ ім. В.Н. Каразіна (керівники – д.ф.-м.н., проф. Гандель Ю.В., д.т.н., проф. Міщенко В.О.), на об’єднаному тематичному науковому семінарі Національного університету “Львівська політехніка” та Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача (керівник – д.ф.-м.н., проф. Костробій П.П.), на об’єднаному тематичному науковому семінарі Тернопільського національного економічного університету та Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (керівник – д.т.н., проф. Дивак М.П.).

**Публікації.** За основними матеріалами роботи опубліковано 65 наукових праць, у тому числі: 1 монографія у співавторстві, 30 статей у фахових наукових виданнях з технічних наук, 5 статей опубліковано у закордонних журналах, 11 праць опубліковано без співавторів, отримано 1 патент на корисну модель.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновку, списку літератури та додатків і вміщує 278 сторінок основного тексту. Загальний обсяг роботи 345 сторінок, список літератури налічує 348 найменувань.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** проаналізовано стан проблеми, обґрунтовано актуальність, практичну і теоретичну цінність тематики, що досліджується та її зв’язок з науковими програмами, планами, темами, виділено коло основних задач, визначено мету та загальну методику дослідження, наведено також основні

результати, отримані в роботі, їх практичне значення, особистий внесок здобувача та дані про апробацію результатів, описано структуру дисертації.

У **першому розділі** розглянуто математичні моделі, що описують процеси очищення рідин від багатокomпонентних забруднень. Зокрема найбільш відомі математичні моделі теорії очищення рідин шляхом фільтрування, наведені в наукових працях Д.М. Мінца, Ю.М. Шехтмана, С.В. Ізбаша, А.Н. Патрашева, С.Л. Мацкрле, Е.В. Веницианова, К.І. Ives, та ін., є ідеалізовані і обмежені, орієнтовані в першу чергу на отримання простих розрахункових формул для обчислення основних технологічних характеристик. Сучасні ж експериментальні та теоретичні дослідження в напрямку моделювання процесів фільтрування базуються на доробках О.Я. Олійника, А.М. Тугая, В.Л. Полякова, П.О. Грабовського, В.О. Орлова, В.М. Сівака, М. Elimelech, L. Song, J.E. Saiers, J. Skopp, T. Vaumann, R.E. Martin, R. Rajagopalan та багатьох інших дослідників. Низку робіт присвячено розробці нових фільтрів та визначенню гідравлічних характеристик фільтра (на основі моделювання відповідних процесів), як з поверхневим, так і з об'ємним принципом фільтрування. Такими задачами займалися Целищев Д. В., Константинов С. Ю., Гарипов А. А., Тук Д. Є., Валулін С. С. та ін. Складову частину побудованих математичних моделей становлять результати досліджень суміжних задач масопереносу висвітлених у працях І.В. Сергієнка, В.С. Дейнеки, В.В. Скопєцького, С.І. Ляшка, В.М. Булавацького, Я.Й. Бурака, Я.Г. Савули, Б.В. Гери, Л.М. Журавчак, Я.Д. П'янила, Є.Я. Чаплі, О.Ю. Чернухи, В.І. Лаврика, А.П. Власюка та ін. У роботах А.Я. Бомби і в кандидатській дисертації здобувача вперше розв'язано наукові задачі моделювання процесів однокомпонентного фільтрування через пористі середовища, з урахуванням зворотного вплив характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо), а також дифузійно-масообмінного збурення та розвинено числово-асимптотичні методи розв'язання відповідних нелінійних регулярно і сингулярно збурених крайових задач.

У розділі також проаналізовано відомі підходи та методи до моделювання процесів очищення рідини від багатокomпонентного забруднення шляхом фільтрування, розглянуто основні феноменологічні моделі процесів фільтрування у пористому середовищі. Здійснено огляд наукової літератури, присвяченої процесам фільтрування рідин, моделюванню процесів очищення рідин шляхом фільтрування, наведено загальну методологію розв'язання задач теорії фільтрування, зокрема, методика розв'язання сингулярно збурених крайових задач типу “фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін”. Обґрунтовано доцільність розроблення математичних моделей, визначення невідомих параметрів процесу очищення, а на їх основі автоматизованих систем керування очисними спорудами. У цьому ж розділі здійснено загальну постановку задач дослідження.

У **другому розділі** вирішено проблему врахування різного роду збурень та зворотних впливів для математичного моделювання процесів очищення рідин шляхом фільтрування від багатокomпонентних домішок у пористих середовищах.

У найпростішому випадку для двокомпонентної концентрації (п. 2.1) задача очищення води шляхом фільтрування має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_1)}{\partial t} + v \frac{\partial c_1}{\partial x} + k_1(c_1 - \varepsilon\rho) = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(\sigma(\rho)c_2)}{\partial t} + v \frac{\partial c_2}{\partial x} + k_2(c_2 - \varepsilon\rho) = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta(\rho)(k_1 c_1 + k_2 c_2) - \alpha(\rho)\rho, \end{cases} \quad (1)$$

$$c_1|_{x=0} = c^*(t), \quad c_2|_{x=0} = c_*(t), \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}|_{x=L} = 0,$$

$$c_1|_{t=0} = 0, \quad c_2|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho^*(x), \quad (2)$$

де  $c_i(x, t)$  ( $i=1, 2$ ) – концентрації домішок у рідкому середовищі, що фільтрується;  $\rho(x, t)$  – концентрація домішок, осаджених у фільтруючій засипці;  $\beta(\rho)$  – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу,  $\beta(\rho) = \beta_0 - \varepsilon\beta_*\rho(x, t)$ ;  $\alpha(\rho)$  – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул засипки домішкових частинок,  $\alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho(x, t)$ ;  $v$  – швидкість фільтрування,  $c_*(t)$ ,  $c^*(t)$  – концентрації домішкових частинок на вході фільтра,  $\sigma(\rho)$  – пористість фільтруючої насадки  $\sigma(x, t) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x, t)$  ( $\sigma_0$  – вихідна пористість насадки);  $D_1 = b_1\varepsilon$ ,  $D_2 = b_2\varepsilon$ ,  $\beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, b_1, b_2, k_1, k_2, \varepsilon$  – жорсткі параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти  $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho)$  – м'які параметри і знаходяться дослідним способом),  $\varepsilon$  – малий параметр.

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових частинок в насадці, змінюються відповідні параметри фільтрування.

Розв'язки системи (1) за умов (2) знайдено у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} c_i(x, t) &= c_{i,0}(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j}(x, t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \underline{U}_{i,j}(\underline{\xi}, t) + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^j \tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t) + R_{c_i}(x, t, \varepsilon), \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j(x, t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \underline{P}_j(\underline{\mu}, t) + \sum_{j=0}^{2n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t) + R_\rho(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $R_{c_j}, R_\rho$  – залишкові члени,  $c_{i,j}(x, t)$ ,  $\rho_j(x, t)$  ( $i=1, 2; j=\overline{0, n}$ ) – члени регулярних частин асимптотики,  $\underline{U}_{i,j}(\underline{\xi}, t)$ ,  $\tilde{U}_{i,j}(\tilde{\xi}, t)$  ( $i=1, 2; j=\overline{0, n+1}$ ),  $\underline{P}_j(\underline{\mu}, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\tilde{\mu}, t)$  ( $j=\overline{0, 2n+1}$ ) – функції типу примежового шару (відповідно

поправки на вході та на виході фільтраційного потоку),  $\tilde{\xi} = x \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\tilde{\mu} = x \cdot \varepsilon^{-1/2}$ ,  
 $\tilde{\xi} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ ,  $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1/2}$  – відповідні регуляризуючі перетворення.

Далі (п. 2.2) розглянуто більш загальний випадок – модель процесу фільтрування рідини від багатокомпонентного забруднення з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо). Відповідна модельна задача має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left( \sum_{i=1}^m k_i c_i \right) - \alpha(\rho)\rho + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (4)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \frac{\partial c_i}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad c_i|_{t=0} = c_i^*(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^*(x). \quad (5)$$

Після підстановки (3) в (4) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій  $c_{i,j}$  і  $\rho_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + k_i c_i = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta_0 \left( \sum_{i=1}^m k_i c_{i,0} \right) - \alpha_0 \rho_0, \\ c_{i,0}|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho_0|_{x=0} = \rho^*(t), \quad c_{i,0}|_{t=0} = c_i^*(x), \quad \rho_0|_{t=0} = \rho^*(x), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} - k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t} c_{i,j} = g_{i,j}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\beta_* \rho_{j-1} \left( \sum_{i=1}^m k_i c_{i,j} \right) - \alpha_* \rho_{j-1} \rho_j, \\ c_{1,i}|_{x=0} = 0, \quad c_{2,i}|_{x=0} = 0, \quad \rho_i|_{x=0} = 0, \quad c_{1,i}|_{t=0} = 0, \quad c_{2,i}|_{t=0} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (7)$$

У п. 2.3 наведено більш практична (реальна) задача, стосовно моделювання процесу очищення у просторових сорбційних фільтрах, що мають вид однозв’язного криволінійного паралелепіпеда  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ , обмеженого гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями (вхід та вихід)  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ , а також поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  (рис. 1).

Для цього випадку розроблено просторову модель типу конвекція-дифузія-масообмін для моделювання процесу очищення рідини від багатоконпонентних домішок. Припустивши, що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на розглянутий шар. Концентрація забруднення є багатоконпонентною

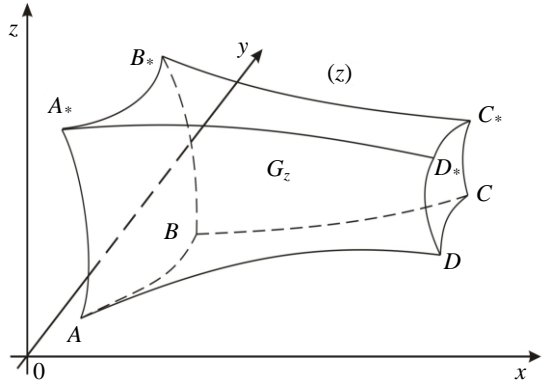


Рис. 1. Просторова фізична область  $G_z$  (фільтр)

$$C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t)),$$

де  $C_i$  – концентрація  $i$ -ї компоненти домішки ( $i = \overline{1, m}$ ) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування для області  $G = G_z \times (0, \infty)$  описано такою модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i = D_i \Delta C_i + \varepsilon \alpha(P)P, & i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \beta(P) \left( \sum_{i=1}^m k_i C_i \right) - \varepsilon \alpha(P)P, \end{cases} \quad (8)$$

$$C_i \Big|_{ABB_1A_1} = C_{i,*}(M, t), \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_1C_1} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_1A_1 \cup BCC_1B_1 \cup ABCD \cup A_1B_1C_1D_1} = 0,$$

$$C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (9)$$

$$\vec{v} = \kappa(P) \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad (10)$$

$$\varphi \Big|_{ABB_1A_1} = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{CDD_1C_1} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_1A_1 \cup BCC_1B_1 \cup ABCD \cup A_1B_1C_1D_1} = 0, \quad (11)$$

де  $P(x, y, z, t)$  – концентрація осаду у внутрішній точці  $(x, y, z)$  області завантаження у момент часу  $t$ ;  $\sigma(x, y, z)$  – пористість середовища;  $\vec{\nabla}$  – оператор Гамільтона;  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  – оператор Лапласа;  $D_i = d_{0i} \varepsilon$  – коефіцієнт дифузії домішки у рідині;  $\varepsilon$  – малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншим, а саме, що дифузійний і десорбційний складові цього процесу є малі порівняно з іншими його складовими);  $C_{i,*}(M, t)$ ,  $C_{i,0}^0(x, y, z)$  – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області  $G$ ;  $M$  – довільна точка відповідної

поверхні;  $\varphi$  – фільтраційний потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ );  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості фільтрації ( $|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$ );  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації середовища;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

У припущенні, що розв’язок задачі (10), (11) на просторове квазіконформне відображення  $G_w \mapsto G_z \left( G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\} \right)$  – відповідна  $G_z$  область комплексного потенціалу) відомий, зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості  $\vec{v}$ , обчислено фільтраційну витрату  $Q$ . Тоді, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у системі (8) та умовах (9), приходимо до відповідної задачі для області  $G_w$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial\varphi} = \\ & = \varepsilon d_{0i} \left( v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial\psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial\eta} \right) + \varepsilon\alpha(\rho)\rho, \\ & \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left( \sum_{i=1}^m k_i c_i \right) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \quad c_{i,\varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \\ & c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ & c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} & c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ & \rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ & b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla}\psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla}\eta)^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\psi, \\ & d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\eta. \end{aligned}$$

Важливим питанням є врахування взаємодії компонент між собою у процесі фільтрування, так, у п. 2.4 розроблено та обґрунтовано модель і числово-асимптотичне наближення розв’язку відповідної сингулярно збуреної задачі процесу очищення рідин від багатокомпонентних забруднень за умов взаємодії компонент типу “хижак-жертва”. Також проведено порівняння натурних даних з результатами численних обчислювальних експериментів та розрахунковими даними інших авторів. Аналіз порівняння показав краще співпадання отриманих даних у порівнянні з існуючими аналогами.

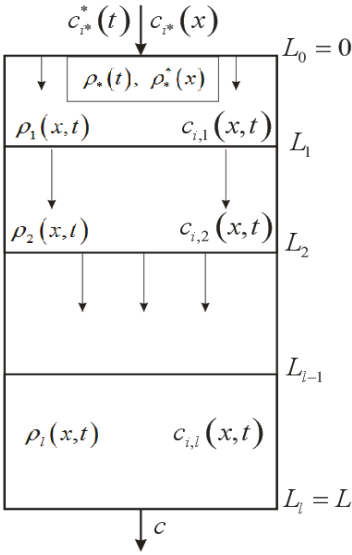


Рис. 2. Схематичне зображення  $n$ -шарового фільтра в перерізі

Як показують експериментальні дослідження, кращі результати очищення дають фільтри, які складаються з декількох шарів, що мають різну як фізичну так і геометричну структуру. Так, у п. 2.5 розглянуто просторово-одновимірний процес очищення рідини фільтруванням у  $n$ -шаровому фільтрі-шарі товщиною  $L$  (рис. 2), що ототожнюється з відрізком  $[0, L]$  осі  $0x$ .

Припустивши, що частинки забруднення можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення, відриву, сорбції, десорбції), а також впливати на розглянутий шар, запропоновано таку модельну задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}, \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_k = \{x: L_{k-1} < x < L_k, 0 < t < \infty\}, \\ k = \overline{1, l-1}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left( \sum_{i=1}^m q_i c_i \right) - \alpha(\rho)\rho + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \frac{\partial c_i}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}|_{x=L} = 0,$$

$$c_i|_{t=0} = c_{*i}^*(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho^*(x), \quad (15)$$

$$[c_i]_{x=L_k} = 0, \quad [\rho]_{x=L_k} = 0, \quad \left[ D_{i,k} \frac{\partial c_i}{\partial x} + vc_i \right]_{x=L_k} = 0, \quad \left[ D_{*k} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L_k} = 0. \quad (16)$$

Особливістю отриманого розв'язку є методика уточнення відомої класичної моделі шляхом переходу до відповідної "збуреної" задачі, що дозволяє зберегти класичні форми законів, які описують процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові її розв'язку, не починаючи "спочатку", доповнювати відомі "незбурені" розв'язки різними поправками.

На основі отриманих розв'язків розроблено програмний комплекс, на базі якого проведено численні обчислювальні експерименти з розв'язання тестово-дослідницьких та прикладних задач.

При підготовці питної води з природних джерел централізованого водопостачання використовується система, що складається з прояснювачів і фільтруючих пристроїв. Ці пристрої компактно об'єднані в установці з плаваючим фільтруючим завантаженням, що показала позитивні результати. Прогнозування процесу очищення води фільтром-прояснювачем із шаром завислого осаду проведено у п. 2.6, відповідна математична модель має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \left( (1 - \varepsilon(P + \bar{\alpha}C))C \right)}{\partial t} = -\gamma P(M, t - \tau)C(M, t - \tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C + D_C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha U(M, t - \tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} P - g\rho(1 - \varepsilon(P + \bar{\alpha}C))(z - f_1^*(x, y)), \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\beta P(M, t - \tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} U + D_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \end{array} \right. (x, y, z, t) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (17)$$

$$C|_{ABCD} = C_*(M, t), \quad P|_{ABCD} = P_*(M, t), \quad U|_{ABCD} = U_*(M, t),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABB, A_s \cup CDC, D_s} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABB, A_s \cup CDC, D_s} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABB, A_s \cup CDC, D_s} = 0,$$

$$C(x, y, z, \tilde{t}) = C_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad P(x, y, z, \tilde{t}) = P_0^0(x, y, z, \tilde{t}),$$

$$U(x, y, z, \tilde{t}) = U_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0; \quad (18)$$

$$\bar{v} = \kappa(P) \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (19)$$

$$\varphi|_{ABCD} = \varphi_*, \quad \varphi|_{A, B, C, D_s} = \varphi^*, \quad (20)$$

де  $C(M, t)$ ,  $P(M, t)$ ,  $U(M, t)$  – відповідно, концентрації домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії у внутрішній точці  $(x, y, z)$  області завантаження у момент часу  $t$ ;  $\bar{\nabla}$  – оператор Гамільтона,  $\gamma$  – коефіцієнт, що характеризує захоплення забруднених частинок пластівцями,  $\alpha$ ,  $\beta$  – відповідно, коефіцієнти, що характеризують кількість реагенту для утворення пластівців та пластівців утворених реагентом за одиницю часу,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\rho$  – густина,  $\bar{\alpha}$  – коефіцієнт трансформації (забруднень у пластівці),  $D_C$ ,  $D_U$  – коефіцієнти дифузії, причому  $D_C = b_C \varepsilon$ ,  $D_U = b_U \varepsilon$ ,  $0 < b_C \leq 1$ ,  $0 < b_U \leq 1$ ,  $\varepsilon$  – малі параметри,  $\tau > 0$  – запізнення. Слід зазначити, що функції  $C_*(M, t)$ ,  $P_*(M, t)$ ,  $U_*(M, t)$ ,  $C_0^0(M, t)$ ,  $P_0^0(M, t)$ ,  $U_0^0(M, t)$  є достатньо гладкими і узгодженими в кутових точках області їх задання. Крім цього вважаємо, що функції  $C_0^0(M, t)$ ,  $P_0^0(M, t)$ ,  $U_0^0(M, t)$  при  $t = -\tau$  та  $t = 0$  задовольняють умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв'язку  $C = C(M, t)$ ,  $P = P(M, t)$ ,  $U = U(M, t)$  цієї задачі при  $t = \tau n$  ( $n = 1, 2, \dots$ );  $M$  – біжуча точка відповідної поверхні;  $\varphi$  – фільтраційний



потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ );  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості фільтрації ( $|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$ );  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

**Третій розділ** присвячено дослідженню та аналізу багатофазних процесів фільтрування у біологічних фільтрах, що є одним із найбільш поширених способів очищення стічних вод.

Одним із способів біологічної очистки є вилучення забруднення освітлювачем із шаром завислого осаду. На сьогоднішній день математичні моделі відповідних процесів є практично відсутніми, тому у п. 3.1 побудовано математичну модель процесу очищення води у освітлювачі із шаром завислого осаду, в якому одночасно протікають адсорбція, конвекція та масообмін:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} - (\beta + \gamma)C, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \begin{cases} \beta(C^0 - C) - \Phi(x)P, & P(x,t) < P_*^*, \\ P_*^*, & P(x,t) \geq P_*^*, \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

$$C|_{x=0} = C^0(t), P|_{x=0} = 0, C|_{t=0} = C_0(x), P|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$v = \kappa_\Phi(P) \cdot \text{grad } H, \quad (23)$$

де  $\Phi(x) = e^{-\frac{(x-L)^2}{\varepsilon}}$ ,  $C^0(t)$ ,  $C_0(x)$  – концентрація домішок, що поступає на прояснювач та в початковий момент часу,  $\kappa_\Phi(P) = \kappa_0 - \lambda P(x,t)$  – коефіцієнт фільтрації ( $\kappa_0, \lambda$  – параметри, які характеризують початкове значення коефіцієнта фільтрації та його зміну з часом вздовж шару завислого осаду),  $H$  – гідравлічний напір вздовж шару завислого осаду в певний момент часу,  $L$  – висота шару завислого осаду.

На відміну від попереднього випадку, в якому не враховується вплив бактерій на процес очищення, у п. 3.2 розроблено математичну модель процесу очищення стічних вод від біогенних елементів, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = \Phi(U(x, t - \tau))B - \lambda B - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi(U(x, t - \tau))B - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_s} \Phi(U(x, t - \tau))B - v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
B|_{x=0} &= B^*(t), \quad U|_{x=0} = U^*(t), \quad C|_{x=0} = 0, \\
\frac{\partial B}{\partial x}|_{x=L} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad , \\
B|_{t=0} &= 0, \quad C|_{t=0} = 0, \quad U|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

де  $B$  – концентрація бактерій,  $\mu_{\max}$  – максимальна швидкість їх росту бактерій,  $U$  – концентрація забруднення (субстрату) в рідині,  $K_S$  – константа спорідненості субстрату до мікроорганізму,  $\lambda$  – швидкість відмирання клітин,  $v$  – швидкість руху речовини,  $\sigma_e$  – ефективна пористість ( $\sigma_e = k_a \rho + \sigma$ ,  $k_a$  – коефіцієнт адсорбції бактерій,  $\rho$  – густина середовища,  $\sigma$  – пористість),  $q$  – коефіцієнт пропорційності, який зв'язує кількість клітин, що утворилися при їх поглинанні субстратом,  $C$  – концентрація біологічно неокисної речовини,  $q_S$  – коефіцієнт пропорційності, що зв'язує кількість утвореної органічно неокисної речовини з поглиняним субстратом,  $\beta$  – коефіцієнт, який характеризує кількість захоплених частинок біологічно неокисної речовини фільтром,  $D_C$  – коефіцієнт дифузії,  $D_C = b_c \varepsilon$ ,  $0 < b_c \leq 1$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр,  $L$  – довжина фільтра,  $\Phi(U) = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S}$ .

Розв'язування задачі (24)-(25) із запізненням  $\tau$  на часових проміжках  $[(n-1)\tau, n\tau]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) замінено послідовним розв'язанням  $n$  задач без запізнення:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial B^{[n]}}{\partial t} &= (\Phi_{nr} - \lambda) B^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B^{[n]}}{\partial x}, \\
\frac{\partial U^{[n]}}{\partial t} &= -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x}, \\
\sigma \frac{\partial C^{[n]}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho q_S} \Phi_{nr} B^{[n]} - v \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x} - \beta C + \varepsilon b_c \frac{\partial^2 C^{[n]}}{\partial x^2}, \\
B^{[n]}|_{x=0} &= B^*(t), \quad U^{[n]}|_{x=0} = U^*(t), \quad C^{[n]}|_{x=0} = 0, \\
B^{[n]}|_{t=0} &= 0, \quad C^{[n]}|_{t=0} = 0, \quad U^{[n]}|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \\
\Phi_{nr} &= \Phi(x, t) = \Phi(U^{[n-1]}(x, t - \tau)), \quad U^{[0]}(x, 0) = 0.
\end{aligned} \right. \tag{26}$$

Тут  $B^{[n]}$ ,  $U^{[n]}$ ,  $C^{[n]}$  – відповідно концентрації бактерій, органічної речовини і біологічно неокисної в пористому середовищі на часовому проміжку  $[(n-1)\tau, n\tau]$ .

Узагальнення задачі біологічного очищення на просторовий випадок було проведено у п. 3.3, а саме: побудовано просторову математичну моделі процесу

очищення стічної води від біогенних елементів, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі. Відповідна модельна задача має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} = (\Phi(u) - \lambda)b - \frac{v^2}{\sigma_e} \frac{\partial b}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{q_*} \Phi(u)b - v^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{\rho} \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \varepsilon b_V \left( v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \\ \sigma \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\rho q_{s*}} \Phi(u)b - v^2 \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \beta c + \varepsilon b_C \left( v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} b(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= b_*(\psi, \eta, t), \quad b(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \\ u(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= u_*(\psi, \eta, t), \quad u_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \\ u_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= u_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = u_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = u_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ u(\varphi, \psi, \eta, 0) &= 0, \\ c(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= 0, \quad c_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= c_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = c_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c(\varphi, \psi, \eta, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

де  $b = b(\varphi, \psi, \eta, t) = B(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ ,

$$u = u(\varphi, \psi, \eta, t) = U(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b(\varphi_*, \psi, \eta, t) = b_*(\psi, \eta, t) = B_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$u(\varphi_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t) = U_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = \bar{\nabla} \psi^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = \bar{\nabla} \eta^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi,$$

$$d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta.$$

Особливістю таких задач є те, що в залежності від співвідношення значень граничних потенціалів  $\phi_*$ ,  $\phi^*$ , можливі різні випадки формування течії в області  $G_z$ , а отже – побудови відповідної області комплексного потенціалу  $G_\omega$ . Тому поряд із розробкою алгоритму розв'язання відповідної нелінійної оберненої задачі на квазіконформне відображення  $G_\omega \rightarrow G_z$  та побудови асимптотики розв'язку відповідної сингулярно збуреної задачі, яка крім відомих типів приміжових функцій містить нові – функції внутрішнього шару в околах ліній розділу течії та в околах точок їх звороту, що суттєво залежить від значення керуючого потенціалу.

Для випадку врахування температурного режиму у п. 3.4 побудовано математичну модель конвективної дифузії з урахуванням малої молекулярної реакції забруднюючих речовин та температурного режиму:

$$D_i \left( \tilde{C}_{xx}^i(x, y, t) + \tilde{C}_{yy}^i(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{C}_x^i(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{C}_y^i(x, y, t) - k(\tilde{T}) \cdot a_i \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{C}_t^i(x, y, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (29)$$

$$D_4 \left( \tilde{N}_{xx}(x, y, t) + \tilde{N}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{N}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{N}_y(x, y, t) + k(\tilde{T}) \cdot a_4 \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{N}_t(x, y, t), \quad (30)$$

$$D_5 \left( \tilde{T}_{xx}(x, y, t) + \tilde{T}_{yy}(x, y, t) \right) - v_x(x, y) \tilde{T}_x(x, y, t) - v_y(x, y) \tilde{T}_y(x, y, t) + k \cdot \prod_{j=1}^3 (\tilde{C}^j(x, y, t))^{a_j} = \tilde{T}_t(x, y, t), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^i \Big|_L &= \tilde{C}_*^i(M, t), \quad \tilde{C}^i \Big|_L = \tilde{C}^{i*}(M, t), \quad \tilde{C}^i(x, y, 0) = \tilde{C}_0^{i0}(x, y), \\ \tilde{N} \Big|_L &= \tilde{N}_*(M, t), \quad \tilde{N} \Big|_L = \tilde{N}^*(M, t), \quad \tilde{N}(x, y, 0) = \tilde{N}_0^0(x, y), \\ \tilde{T} \Big|_L &= \tilde{T}_*(M, t), \quad \tilde{T} \Big|_L = \tilde{T}^*(M, t), \quad \tilde{T}(x, y, 0) = \tilde{T}_0^0(x, y), \end{aligned} \quad (32)$$

$$(v_x, v_y) = \text{grad } \varphi(x, y), \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi \Big|_L = \varphi_*, \quad \varphi \Big|_L = \varphi^*, \quad (33)$$

де  $\tilde{C}^i(x, y, t)$ ,  $\tilde{N}(x, y, t)$  – відповідно, концентрації чотирьох сортів розчинних речовин фільтраційної течії в точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\tilde{T}(x, y, t)$  – температура середовища,  $M$  – біжуча точка відповідної кривої,  $D_i = s_i \cdot \varepsilon$  – коефіцієнти дифузії ( $i = \overline{1, 4}$ ,  $s_i$  – задані додатні дійсні числа),  $D_5 = s_5 \cdot \varepsilon$  – коефіцієнт теплової дифузії,  $k(\tilde{T}) = k^*(\tilde{T}) \cdot \varepsilon$ , причому  $k^*(\tilde{T})$  – функція швидкості хімічної реакції,  $k = k^* \cdot \varepsilon$ ,  $k^*$  – константа швидкості теплоутворення внаслідок хімічної реакції,  $\varphi$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  – відповідно потенціал та компоненти його швидкості (швидкості фільтрації в пористому середовищі  $G_z$ ),  $\sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)} > v_* \gg \varepsilon$ ,  $\tilde{C}_*^i(M, t)$ ,  $\tilde{C}^{i*}(M, t)$ ,  $\tilde{C}_0^{i0}(x, y)$ ,  $\tilde{N}_*(M, t)$ ,  $\tilde{N}^*(M, t)$ ,  $\tilde{N}_0^0(x, y)$ ,  $\tilde{T}_*(M, t)$ ,  $\tilde{T}^*(M, t)$ ,  $\tilde{T}_0^0(x, y)$  – задані достатньо гладкі, сильно узгодженні (настільки, щоб можна було будувати нижче вказані асимптотичні розвинення розв'язку із заданою точністю) між собою на ребрах області  $G$  функції.

Попередньо розглянуті процеси відбуваються у біореакторі біологічного фільтра і не враховують таких компонент як пластівці та продуктів автолізу, які є у більшості систем очищення стічної води. З урахуванням цього у п. 3.5 побудовано математичну модель процесу біологічного очищення води у регенераторі аеротенка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = V_1 \frac{\partial P}{\partial x} + (-a_x + b_x L)P + \varepsilon k_2 PB - k_1 P + k_4 CP, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = V_2 \frac{\partial B}{\partial x} + (-a_z + b_z L)B - k_2 BP + k_1 P + k_4 CB, \\ \frac{\partial L}{\partial t} = V_3 \frac{\partial L}{\partial x} - \varepsilon(g_x P + g_z B)L, \\ \frac{\partial C}{\partial t} = (k_3 - \varepsilon k_4 P)C, \end{array} \right. \quad (34)$$

$$P|_{t=0} = P_0^*(x), \quad B|_{t=0} = B_0^*(x), \quad L|_{t=0} = L_0^*(x), \quad C|_{t=0} = C_0^*(x), \quad (35)$$

$$P(0, t) = P_*(t); \quad B(0, t) = B_*(t); \quad L(0, t) = B_*(t); \quad C(0, t) = B_*(t), \quad (36)$$

де  $P(x, t)$  – концентрація пластівців у рідкому середовищі, що фільтрується;  $B(x, t)$  – концентрація бактерій в розчині, що знаходиться в регенераторі;  $L(x, t)$  – концентрація продуктів автолізу, що утворилися внаслідок взаємодії бактерій з забрудненням;  $C(x, t)$  – концентрація забруднення, що надходить з вхідним розчином;  $k_1$  – швидкість ерозії пластівців,  $k_2$  – константа, що характеризує подальшу швидкість агрегації пластівців;  $m$  – константа;  $k_3$  і  $k_4$  – константи, які визначають швидкість утворення та окислення продуктів автолізу;  $a_x$ ,  $a_z$  – швидкості відмирання пластівців і дисперсних бактерій;  $b_x$ ,  $b_z$  – константи, що характеризують швидкості утворення пластівців та дисперсних бактерій за рахунок розмноження;  $g_x$ ,  $g_z$  – швидкості споживання субстрату пластівцями і дисперсними бактеріями.

Для забезпечення більшої продуктивності біологічного фільтра, в п. 3.6 розроблено модель, яка враховує стимулювання активності бактерій завдяки введенню додаткового повітря та підтримання оптимальної температури середовища. При такому очищенні стічних вод мікроорганізми розмножуються, поглинаючи забруднення та кисень.

На основі розроблених математичних моделей побудовано програмний комплекс, на базі якого проведено численні обчислювальні експерименти з розв'язання тестово-дослідницьких та прикладних задач.

У **четвертому розділі** проведено дослідження зворотного впливу характеристик процесу очищення води шляхом фільтрування на характеристики середовища у випадку багатокомпонентності домішкових частинок у магнітних фільтрах.

Процес очищення рідких середовищ від феромагнітних домішок найбільш ефективно відбувається в намагнічених пористих насадках. У першому підрозділі цього розділу для випадку багатокомпонентності забруднення побудовано математичну модель осадження домішок у магнітному фільтрі з однорідною гранульованою фільтруючою насадкою з урахуванням зворотного впливу осаджених частинок на пористість, коефіцієнт масообміну, а також на коефіцієнт фільтрації:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(v(x,t)c_i(x,t))}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta(\rho) \left( \sum_{i=1}^m k_i c_i(x,t) \right) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho(x,t), \end{array} \right. \quad (37)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), \quad c_i|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (38)$$

$$v = \kappa(\rho) \cdot \text{grad } P, \quad (39)$$

$$\text{де } \alpha(\rho) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*\rho(x,t), \quad \sigma(\rho) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_*\rho(x,t), \quad \kappa(\rho) = \begin{cases} \kappa_0 - \varepsilon\gamma\rho(x,t), & \rho < \rho_c (t < \tau_c), \\ \kappa^0, & \rho = \rho_c (t \geq \tau_c), \end{cases}$$

$v = \text{const}$ , що є, наприклад, наслідком замкненості технологічного процесу,  $\kappa(\rho)$  – коефіцієнт фільтрування,  $\rho_c$  – концентрація граничного завантаження осаду,  $P$  – тиск,  $\beta = \beta_0 H^{0.75} v^{-1} d^{-2}$ ,  $H$  – напруженість магнітного поля,  $d$  – діаметр гранульованої насадки фільтру,  $\kappa^0 = \kappa_0 - \varepsilon\gamma\rho_c$ ,  $\alpha_0, \alpha_*, \sigma_0, \sigma_*, \kappa_0, \gamma, \varepsilon, \beta_0$  – жорсткі параметри (знаходяться дослідним шляхом або в результаті розв’язання обернених задач).

Розроблена модель є основою для уточнення таких параметрів процесу фільтрування, як час фільтроциклу (час стабільного очищення, на протязі якого ефективність процесу очистки практично не змінюється), гранична маса домішок в насадці, гранична величина перепаду тиску. При цьому, згідно формули  $\text{grad } P = v/\kappa(\rho)$  знайдено втрати тиску (напору) в результаті зменшення коефіцієнта фільтрації (за рахунок осадження домішок у гранульованій фільтруючій насадці), зокрема, час досягнення величиною градієнта заданого критичного значення (що є актуальним для автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у залежності від вихідних даних середовища); розподіли  $\text{grad } P$  на виході із фільтра та ефективності фільтра

$\Psi = \left( \sum_{i=1}^m c_i^* - \sum_{i=1}^m c_i \right) / \sum_{i=1}^m c_i^*$  у часі, що підтверджує відомі факти малої зміни ефективності та градієнта тиску відповідно до та після часу захисної дії фільтра при  $c_i^*(t) = c_i^* = \text{const}$ .

Розроблену модель магнітного осадження узагальнено на процеси фільтрування та регенерації (п. 4.2). Розв’язано модельну задачу типу “конвекція-масообмін” для процесу очищення водних середовищ у зернистому намагніченому фільтруючому матеріалі, яка враховує зворотній вплив характеристик процесу на фільтраційні (технологічні) параметри. В рамках цієї моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок в намагніченій фільтруючій загрузці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається. На рисунку 3, *b* наведено результати обчислюваного експерименту при  $c_1^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$ ,  $c_2^*(t) = 1 \text{ мг/дм}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,

$\alpha_0 = 0.35 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$ ,  $H = 60 \text{ кА/м}$ ,  $d = 2.4 \text{ мм}$ .  $\alpha_* = 1$ . Тут показано моменти досягнення критичного часу очищення для концентрацій  $c_1$  – крива 1 та  $c_2$  – крива 2.

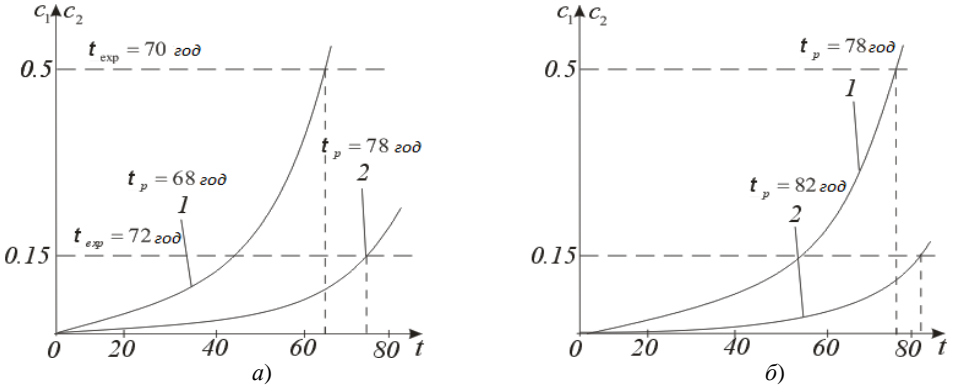


Рис. 3. Графіки розподілу концентрації забруднення на виході з фільтра для тришарового фільтра – (а) та одношарового фільтра – (б)

У п. 4.3 наведено оцінку ефективності для магнітного фільтра під час процесу очищення рідини від феромагнітних домішок, а також розраховано час ефективної роботи фільтра і його регенерації, а п. 4.4 присвячено просторовому узагальненню математичної моделі магнітного очищення рідин від багатоконпонентного забруднення. Відповідна модельна задача має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \sum_{l,g=1,l \neq g}^m k_{l,g} C_l C_g = \varepsilon \alpha_i P, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u C_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q P, i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (40)$$

$$C_i|_{ABB,A} = C_i^*(M, t), C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z),$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}}|_{ADD,A \cup BCC,B \cup ABCD \cup A,B,C,D} = 0,$$

$$P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (41)$$

$$\vec{v} = \kappa(P) \nabla \bar{\phi}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad (42)$$

$$\bar{\varphi}|_{ABB,A} = \bar{\varphi}_*, \quad \bar{\varphi}|_{CDD,C} = \bar{\varphi}^*,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \vec{n}}|_{ADD,A \cup BCC,B \cup ABCD \cup A,B,C,D} = 0. \quad (43)$$

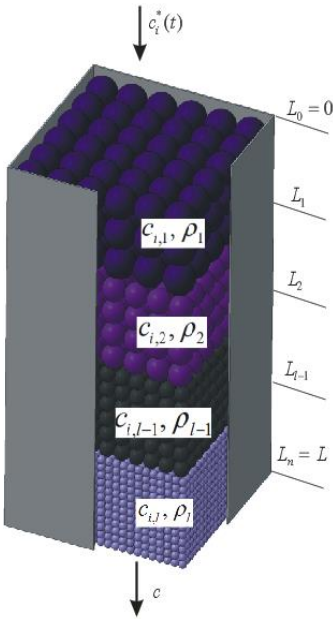


Рис. 4. Схематичне представлення n-шарового фільтра

На цій основі проведено відповідний комп'ютерний експеримент, результати якого підтверджують відомий факт, що продуктивність роботи фільтра суттєво залежить від вибору його форми.

У п. 4.5, на основі розроблених вище математичних моделей, побудовано узагальнену модель для  $n$ -шарового просторового фільтра (рис. 4). Проведено комп'ютерний експеримент, для різної кількості шарів засипки та визначено оптимальну їх кількість (рис. 3).

**У п'ятому розділі** розглядаються та вирішуються питання очищення рідини від багатокомпонентного забруднення в припущенні домінування одних складових процесу над іншими, а також розв'язання обернених задач на знаходження невідомих коефіцієнтів з метою ідентифікації параметрів процесу очищення, та з врахуванням зворотного впливу визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії).

У побудованих попередньо математичних моделях коефіцієнти визначались експериментально і, як правило, були постійними, що не давало повної картини процесу, тому у п. 5.1 побудовано нелінійну математичну модель процесу очищення стічної води сорбційним фільтром, що включає визначення масообмінного коефіцієнта. Відповідна модельна задача має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \varepsilon\alpha(t)\rho(x,t) + D_p \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (44)$$

$$c|_{x=0} = c_*(t), \quad c|_{l=0} = 0, \quad \rho|_{x=0} = 0, \quad \rho|_{l=0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \quad (45)$$

$$\alpha(t) \int_0^L \rho(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu(t), \quad (46)$$

де  $\alpha(t)$  – шуканий коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних від гранул засипки частинок,  $\mu(t)$  – функція, що характеризує масовий розподіл осаду з часом (знаходиться експериментальним способом), умова перевизначення (46) – призначено для знаходження  $\alpha(t)$ .

Розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних, більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу фільтрування різних технологічних водно-дисперсних систем.

У п. 5.2 побудовано математичну модель, яка описує закономірності магнітного осадження й нагромадження домішок у пористій засипці з врахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації осаду) на характеристики середовища, і включає можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта. Незважаючи на суттєві математичні проблеми, які тут виникають, запропонований алгоритм розв'язку відповідної збуреної задачі, зокрема,



припускає можливість визначення часу  $\tau_s$  захисної дії фільтра. Наведено результати розрахунків розподілу питомої концентрації й масового об'єму домішок (по довжині фільтруючої пористої засипки) для різних моментів часу. У рамках цієї моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій засипці залежно від вихідних даних забрудненого водного середовища, і так само приймати рішення щодо зміни потужності двигуна насоса подачі рідини у фільтр.

У п. 5.3 проведено узагальнення розробленої у п. 5.2 моделі на більш практичний випадок – процес фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення  $n$ -шаровим магнітним фільтром за умови ідентифікації масообмінних коефіцієнтів. Відповідна модельна задача має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\sigma(\rho_i)c_i)}{\partial t} = \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i - \frac{\partial(vc_i)}{\partial x} - \beta_i \left( \sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \varepsilon f_{m-1} \left( \sum_{\rho_1, \dots, \rho_u=1}^m h_{i, \rho_1, \dots, \rho_u} c_i^{\gamma_i} c_{\rho_1}^{\gamma_{\rho_1}} \dots c_{\rho_u}^{\gamma_{\rho_u}} \right), \\ i = \overline{1, m}, (x, t) \in G_l = \{x : L_{l-1} < x < L_l, 0 < t < \infty\}, l = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta_i \left( \sum_{p=1}^m q_p c_p \right) - \varepsilon\alpha_i(t)\rho_i, \end{array} \right. \quad (47)$$

$$c_i|_{x=0} = c_i^*(t), c_i|_{x=L_l} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, [c_i]_{x=L_l} = 0, [\rho_i]_{x=L_l} = 0, \quad (48)$$

$$\alpha_i(t) \int_0^{L_l} \rho_i(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \mu_i(t), \quad (49)$$

де  $h_{i, \rho_1, \dots, \rho_u}$  – коефіцієнт, що характеризує взаємодію між концентраціями компонентів домішок ( $h_{i, \rho_1, \dots, \rho_u} = 0$  при співпадінні індексів),  $\sigma_s, q_p, \varepsilon$  – тверді параметри, які характеризують відповідні коефіцієнти;  $\varepsilon$  – малий параметр;  $[L_{l-1}, L_l]$  –  $l$ -й шар фільтра ( $l = 1, 2, \dots, n$ ); в (48) [ ] – приріст відповідної функції у

даній точці  $x = L_l$ . Тут  $f_{m-1}(W_u) = \sum_{u=1}^{m-1} W_u$ , причому, з метою спрощення

розрахунків, у роботі розглядається випадок, коли  $f_{m-1}(W_u) = \sum_{p=1, i \neq p}^m h_{i, p} c_i c_p$ .

У п. 5.4 побудовано математичну модель процесу очищення рідин від багатокомпонентних домішок  $n$ -шаровим магнітним фільтром, що враховує зворотний вплив концентрації домішок рідини і осаду на характеристики завантаження (коефіцієнт пористості) і забезпечує можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта.

У п. 5.5 запропоновано числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень та ідентифікації масообмінного коефіцієнта, що дало можливість навести результати розрахунків розподілу концентрації домішок і масового об'єму

домішок по висоті фільтруючого пористого завантаження для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях швидкості фільтрування, і характеристик завантаження фільтра для сорбційних фільтрів з урахуванням зворотного впливу концентрації осаду на характеристики середовища й швидкість фільтрування, а також провести порівняльну характеристику даних, отриманих експериментальним шляхом, розрахованих на основі класичної моделі Мінца й отриманих в результаті розрахунків.

**У шостому розділі** на основі сформованих математичних моделей попередніх розділів розроблено автоматизовану систему керування процесом очищення рідин від багатоконпонентних забруднень.

Автоматизація водопідготовчих установок дозволяє зменшити трудозатрати на обслуговування і підвищити надійність роботи установок, покращити техніко-економічні показники за рахунок оптимізації та інтенсифікації технологічних процесів, забезпечити отримання води гарантованої якості. При автоматичному управлінні роботою фільтрів досягається зменшення питомих і загальних витрат хімічних реагентів і води на власні потреби. Впровадження автоматизації управління водопідготовчими установками дозволяє в 2-3 рази збільшити продуктивність цих установок без додаткових капітальних витрат на технологічне обладнання і будівництво, що є основним фактором, який визначає доцільність впровадження систем автоматизації водопідготовки теплоелектроцентралей та котельних.

В той же час при використанні магнітних фільтрів у системах очистки для визначення концентрації залізовмісних домішок у рідкому середовищі не розроблено універсального приладу, який би видавав сигнал зміни забруднення, а виміри проводять дослідним шляхом, що потребує значних матеріальних, трудових та часових ресурсів. Тому виникає необхідність в автоматизації відповідного процесу, яка реалізована в п. 6.1, де на основі математичної моделі (33)-(35) побудована імітаційна модель магнітного фільтра, розроблену в середовищі Simulink пакету MatLab (рис. 5 та рис. 6), яка надає можливість дослідити динаміку зміни концентрації феромагнітних частинок у рідині в певній точці фільтра з часом, а також застосовувати отримані розрахунки для автоматизації відповідного процесу.

Результати моделювання при наступних вхідних даних  $c_0^*(t) = 2 \text{ мг/дм}^3$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $v = 200 \text{ м/год}$ ,  $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $H = 60 \text{ кА/м}$ ,  $d = 24 \text{ мм}$  наведено на рис. 8, звідки, зокрема, бачимо, що магнітний фільтр протягом 75 год захоплюватиме феромагнітні домішки з рідини, та накопичуватиме їх, при цьому утвориться перепад тиску 163 кПа.

З рис. 7, а видно, що фільтр захоплює частинки протягом певного часу, а далі ефективність його дуже мала і концентрація часток на виході фільтра з часом падає, що підтверджує ефективність цього фільтра, як показано на рис. 7, б.

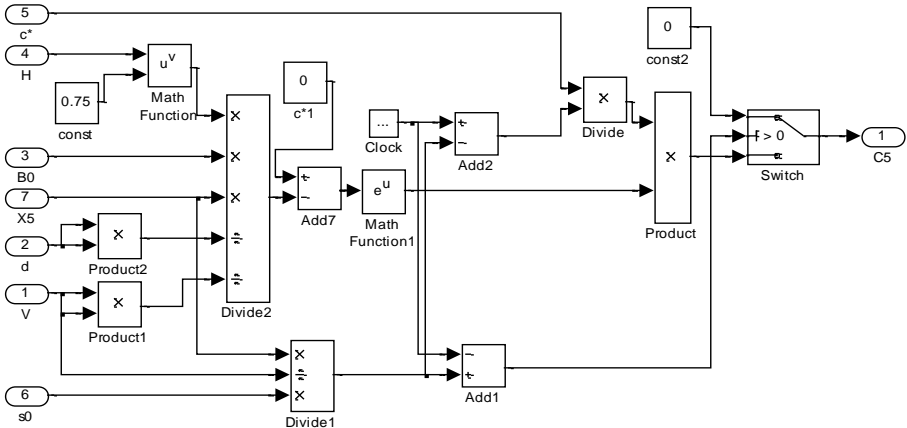


Рис. 5. Імітаційна модель зміни концентрації забруднення у рідкому середовищі

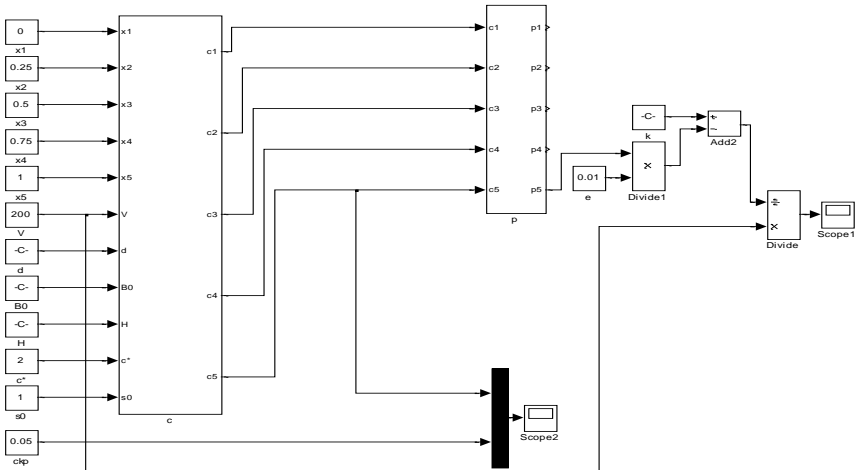


Рис. 6. Імітаційна модель для розрахунку періоду фільтроциклу та перепаду тиску

Проведений комп'ютерний експеримент показав, що час регенерації фільтра (10-30 с) значно менший часу його роботи (25-75 год), що відповідає і експериментальним даним, тому для ефективної автоматизації відповідного процесу достатньо системи із 2 фільтрів.

Для регулювання концентрації домішок у рідкому середовищі запропоновано систему, яка складається з 2 фільтрів, 4 датчиків тиску, програмованого логічного контролера TSX Micro 37-22 та 8 регулюючих клапанів (рис. 8), що забезпечує, окрім прогнозування, ще і процес регенерації фільтра.

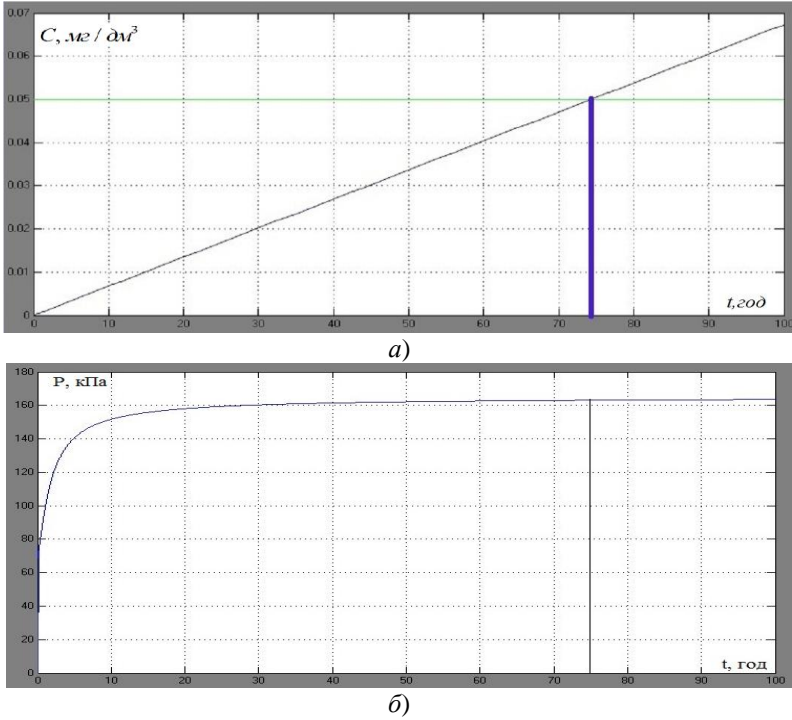


Рис. 7. Динаміка зміни концентрації домішок у рідині на виході з фільтра (а) та втрати напору в магнітному фільтрі (б)

У п. 6.2 розроблено автоматизовану систему фільтрування та регенерації фільтра на базі програмованого логічного контролера МІК-51, що дало можливість використання розробленої системи в котельних установках.

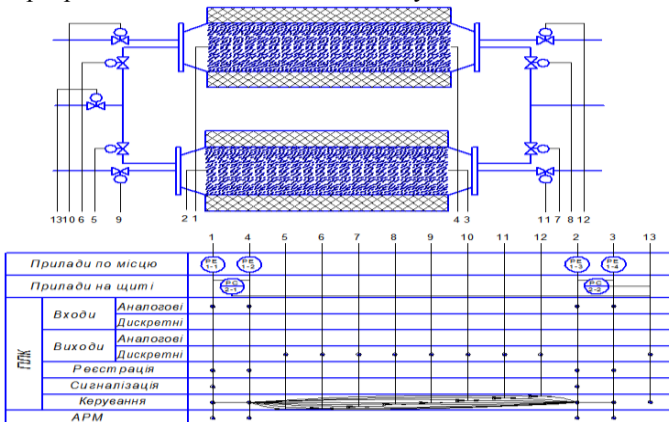
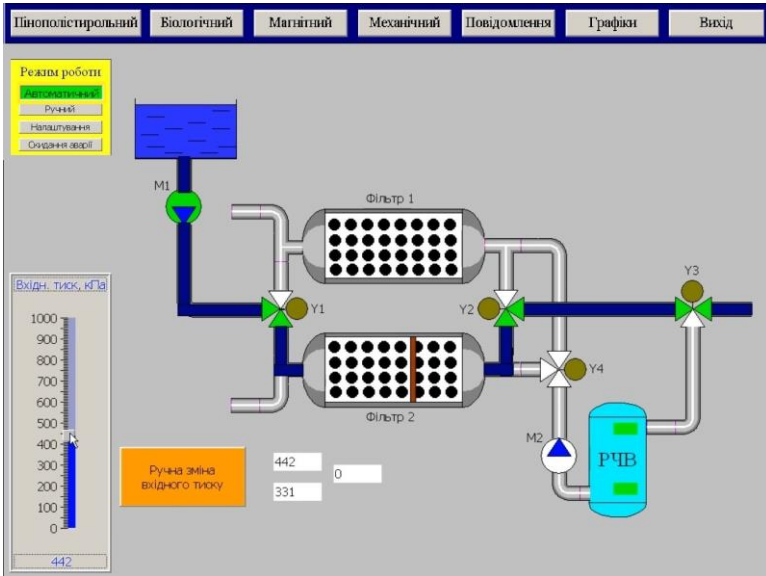
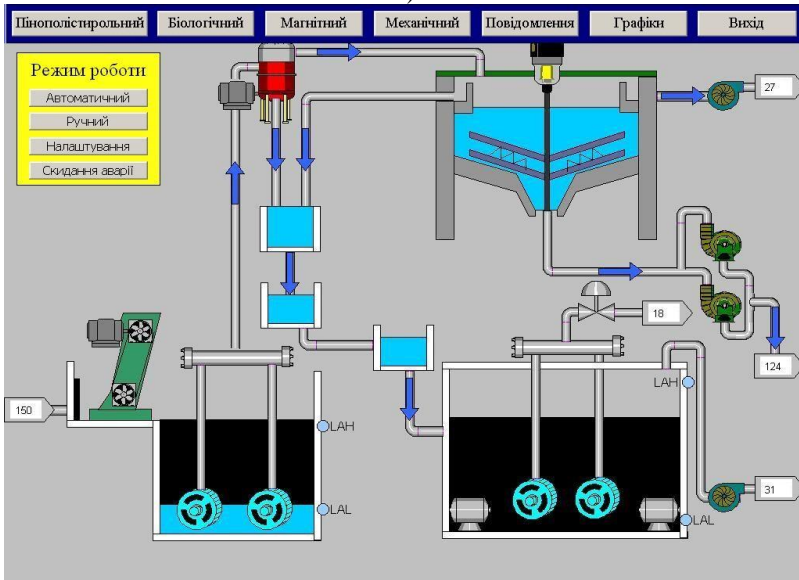


Рис. 8. Функціональна схема автоматизації



а)



б)

Рис. 9. SCADA система: а) магнітної, б) біологічної очистки води

На основі математичного апарату, розробленого у третьому розділі, у п. 6.3 розроблено систему автоматизації магнітної, механічної та біологічної очистки води, SCADA систему якої, зокрема, показано на рис. 9.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, в якому вирішено важливу науково-прикладну проблему розвинення теорії математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень з урахуванням автоматизованого керування та ідентифікації параметрів при домінуванні одних компонент процесу над іншими, а також розвинення методів розв'язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води.

Найбільш важливі наукові і практичні результати, висновки і рекомендації полягають у наступному:

1. Розроблено нову математичну модель процесу очищення дво- та багатокомпонентної концентрації забруднення стічних вод, яка враховує зворотній вплив на фільтраційні компоненти, зокрема, на пористість, коефіцієнт фільтрації, коефіцієнти захоплених частинок забруднення і відірваних частинок осаду, що дає можливість визначити важливі параметри процесу фільтрування (час захисної дії фільтра, граничне завантаження осаду, гранична втрата напору тощо). Розроблену математичну модель перенесено на процес очищення стічної води на сорбційних фільтрах зі змінною швидкістю фільтрування. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях швидкості фільтрування, та характеристик засипки фільтра. Проведено порівняльну характеристику даних отриманих дослідним шляхом і розрахованих на основі класичної моделі Мінца та показано переваги розробленої моделі.
2. Сформульовано та обґрунтовано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентних забруднень одно та  $n$ -шаровими сорбційними фільтрами. Розроблену математичну модель узагальнено на процес очищення води прояснювачем із шаром завислого осаду, що адекватно описує фізичну суть технологічних процесів прояснення води, формування осаду, умов виносу надлишкової його частини за межі корпусу установки та зміну втрат напору по висоті завислого шару, і дозволяє для досліджуваних умов обчислити значення згаданих параметрів у кожний момент часу.
3. На основі узагальнення моделей типу Моно розроблено нову математичну модель процесу аеробного очищення стічної води в пористому середовищі, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокисної речовини в пористому середовищі. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі, що надає можливість автоматизованого визначення оцінки ефективної роботи біофільтра, зокрема, часу припинення подачі бактерій, а отже суттєво зменшувати вартість процесу очищення.

4. Розроблено просторову математичну модель, що описує основні закономірності очищення стічної води у біофільтрі, і алгоритм розв'язання відповідної сингулярно збуреної задачі. Одержані формули та графічні залежності між величинами є ефективні для проведення теоретичних досліджень, спрямованих на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). Як показують розрахунки, після певного моменту часу можна припинити подачу бактерій у біофільтр і це не вплине на ріст бактерій у фільтрі, а також на процес фільтрування, що у свою чергу значно зменшить вартість процесу очищення.
5. Сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води в освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової задачі для системи диференціальних рівнянь типу "конвекція-дифузія-масообмін". Отримано розрахункові залежності концентрацій домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії з метою інженерного прогнозування залежності між затратами на виробництво фільтра-освітлювача та ступенем ефективності його роботи.
6. Встановлено зв'язок між розподілом концентрації розчинних речовин та функцією швидкості хімічної реакції. Це дає можливість передбачити вибір хімічно активних речовин, що візьмуть участь у реакціях, з метою ефективного очищення стічних вод.
7. Побудовано математичну модель біологічної очистки, що описує закономірності процесів зміни концентрацій пластівців, дисперсних бактерій, продуктів автолізу і субстрату в регенераторі аеротенка, тобто в першій фазі процесу очищення. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації забруднення та бактерій протягом часу очистки рідини.
8. Побудовано математичну модель, для випадку змінної вхідної швидкості, що описує закономірності магнітного осадження та накопичення домішок у пористій фільтруючій загрузці та враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної збуреної задачі з визначення розподілу концентрацій домішок та осаду, а також часу  $\tau_z$  захисної дії фільтруючої загрузки, змінної величини  $gradP(x,t)$ , зокрема, граничної величини перепаду тиску  $\Delta P$ . Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої загрузки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини загрузки  $L$ , що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) загрузки. В рамках цієї моделі передбачається можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій загрузці в залежності від вихідних даних водного середовища, що очищається.

9. Побудовано математичну модель, що описує закономірності фільтрування й нагромадження домішок у пористій засипці і включає можливість визначення невідомого масообмінного коефіцієнта.
10. Сформульовано та обґрунтовано просторове узагальнення математичної моделі процесу очищення рідини від багатокомпонентного забруднення, яка, в припущенні домінування конвективних складових цього процесу над іншими, враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнт пористості, дифузії), і включає спеціальним чином задану додаткову умову (умову перевизначення) для знаходження невідомого малого масообмінного коефіцієнта. Побудований розв'язок відповідної оберненої задачі дає можливість істотно наблизити числові розрахунки до реальних експериментальних даних (у порівнянні з класичними, феноменологічними моделями), більш точно прогнозувати й розраховувати ефективність процесу осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем. Аналіз результатів дослідження показав, що задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом.
11. Розроблено математичну модель магнітного фільтра, яка дозволяє визначити час захисної дії фільтра при змінній концентрації феромагнітних домішок, що надходять у фільтр і перепад тиску, який виникає при цьому. Проведено моделювання такої системи з використанням додатку Simulink та М-функції *pdepe* програмного середовища MatLab. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок та осаду по довжині магнітного фільтра. Отримані результати моделювання з використанням додатку Simulink та М-функції *pdepe* корелюють з експериментальними даними, що підтверджує адекватність отриманих розрахунків. На основі отриманих даних розроблено систему автоматизації, яка забезпечує допустиму концентрацію залізовмісних домішок на виході фільтра здійснюючи переведення потоку рідини між двома фільтрами системи.
12. Отримано розв'язок модельної задачі процесу очищення водних середовищ у зернистому намагніченому фільтруючому матеріалі, проведено автоматизацію системи для постійної очистки води з врахуванням зміни параметрів потоку, яка керує двома фільтрами з постійним переведенням потоку рідини і регенерацією попереднього фільтра, а також визначено часи ефективної очистки та регенерації фільтра.
13. За результатами виконаних на основі розроблених моделей та обчислювальних методів експериментів імітаційного моделювання процесів фільтрування води на очисних спорудах м. Баранівка Житомирської обл., смт. Летичів Хмельницької обл., с. Опарипси Радивилівського р-н Рівненської обл., станції знезалізнення "Гоща" встановлено кількісні характеристики впливу пульсацій вхідної концентрації на час захисної дії фільтра, оптимальні конструктивні та технологічних параметри процесу очищення води, що дало економічний ефект за рахунок скасування відповідних експериментів на спорудах. Також отримано економічний ефект за рахунок впровадження системи автоматизації МПП "Мікроком-сервіс" у процесі магнітного очищення.



## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних : Монографія / Бомба А. Я., Гаврилук В. І., Сафоник А. П., Фурсачик О. А. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
2. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient / A. P. Safonyk // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – Vol. 9. – 2015. – P. 189–192. (входить до наукометричних баз: ISI (Thomson Reuters), Scopus, American Mathematical Society (AMS)).
3. Safonyk A. Mathematical modelling process of liquid filtration taking into account reverse influence of process characteristics on medium characteristics / Andrii Safonyk, Andrii Bomba // *International Journal of Applied Mathematical Research*. – Vol. 4, No. 1. – 2015. – P. 1–7. (входить до наукометричних баз: Directory of Open Access Journals (DOAJ), German National Serials Database (ZDB), CAS (USA), Computer Science Directory (USA), Zentralblatt MATH (Germany), ProQuest (USA)).
4. Bomba A. Identification of mass transfer distribution factor and its account for magnetic filtration process modeling / Andrey Ya. Bomba, Andrey P. Safonyk, Elena A. Fursachik // *Journal of Automation and Information Sciences*. – Vol. 45, Is. 4. – 2013. – P. 16–22. (входить до наукометричної бази Scopus).
5. Бомба А. Я. Идентификация коэффициента учета массообмена при моделировании процесса магнитного фильтрования / Бомба А. Я., Сафоник А. П., Фурсачик Е. А. // *Проблемы управления и информатики*. – 2013. – № 2. – С. 49–54. (входить до наукометричних баз: “Реферативный журнал” (Росія, Москва, ВИНТИ), “Математическое ревю” (“Math. Review”, США, Американское математическое общество), “Прикладная механика” (“Applied mechanics Reviews”, США, Американское общество инженеров-механиков)).
6. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // *Доповіді НАН України*. – 2014. – № 11. – С. 26–32. (входить до наукометричної бази ISI (Thomson Reuters)).
7. Бомба А. Я. Математическое моделирование процесса фильтрования жидкости от многокомпонентного загрязнения с учетом обратного влияния характеристик процесса на характеристики среды / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // *Электронное моделирование : междунар. науч.-теорет. журн.* – 2012. – Т. 34, N 3. – С. 47–58. (входить до наукометричних баз: Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, ВИНТИ РАН).
8. Safonyk A. Simulation of multicomponent pollution fluid filtering process using n-layer filters / Andrij Safonyk, Oleksandr Naumchuk // *Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. – 2014. – № 4. – P. 28–31. (входить до наукометричної бази Index Copernicus).

9. Bomba A. Mathematical modeling of aerobic wastewater treatment in porous medium / Bomba Andrij, Safonyk Andrij // *Zeszyty Naukowe. Wyższej Szkoły Informatyki i Umiejętności. Łódź : Poland.* – Vol. 12, Nr 1. – 2013. – P. 21–29. (входить до наукометричної бази BazTech).
10. Bomba A. Ya. Identification of mass-transfer coefficient in spatial problem of filtration / Bomba A. Ya., Safonyk A. P. // *Mathematical Modeling and Computing.* – Vol. 1, No. 2. – 2014. – P. 134–142.
11. Бомба А. Я. Про моделювання процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень у сорбційних фільтрах / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* – 2012. – Вип. 16. – С. 32–41.
12. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // *Проблемы машиностроения.* – Т. 15. – 2012. – № 5-6. – С. 49–55.
13. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі // А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // *Математичне та комп'ютерне моделювання.* – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2011. – Вип. 5. – С. 36–44.
14. Бомба А. Я. Математическое моделирование процессов фильтрования жидкостей от многокомпонентного загрязнения в  $n$ -шаровых фильтрах / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // *Компьютерная математика.* – 2014. – № 1. – С. 9–18.
15. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання та автоматизація процесу магнітного очищення води / А. П. Сафоник, І. М. Таргоній // *Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал.* – 2014. – № 2(83). – С. 117–122.
16. Бомба А. Я. Моделирование процессов фильтрования жидкостей от многокомпонентного загрязнения в  $n$ -шаровых магнитных фильтрах в условиях идентификации массообменных коэффициентов / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // *Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Прикладна математика".* – 2014. – № 3(117). – С. 32–39.
17. Бомба А. Я. Моделювання процесу очищення води фільтром-освітлювачем із шаром завислого осаду / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // *Проблемы машиностроения.* – Т. 17. – 2014. – № 4. – С. 36–43.
18. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення стічної води / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.* – 2011. – Вип. 6 (71). – С. 31–36.
19. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // *Математичне та комп'ютерне.* – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2012. – Вип. 7. – С. 37–44.

20. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного очищення рідин від багатокomпонентних феромагнітних домішок / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. – 2012. – № 1037. – Вип. 20. – С. 18–27.
21. Гаращенко В. І. Математичне моделювання процесів магнітного фільтрування і регенерації та оцінка їх ефективності / Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені І. Пулюя. – 2012. – № 2(66). – С. 242–248.
22. Сафоник А. П. Математичне моделювання сингулярно збурених процесів конвективної дифузії з урахуванням масообміну та температурного режиму / Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 2 (50). – Рівне : НУВГП, 2010. – С. 229–237.
23. Гаращенко В. І. Теоретичні основи процесу осадження магнітних домішок в намагнічених феромагнітних загрузках / Гаращенко В. І., Гаращенко О. В., Лебедь О. О., Сафоник А. П., Кочергіна О. Д. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 1 (65). – Рівне : НУВГП, 2014. – С. 390–397.
24. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання процесу біологічного очищення води у регенераторі аеротенка / Сафоник А. П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 2 (66). – Рівне : НУВГП, 2014. – С. 114–122.
25. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання і дослідження процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П. // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування: Зб. наук. пр. – Вип. 4 (68). – Рівне : НУВГП, 2015. – С. 190–200.
26. Бомба А. Я. Задача ідентифікації масообмінного параметра сингулярно збуреного процесу очищення рідин від багатокomпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. – 2015. – № 1156. – Вип. 26. – С. 36–45.
27. Бомба А. Я. Математичний аналіз параметрів і моделі процесу магнітного осадження домішок / Бомба А. Я., Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вісник Інженерної академії України. – 2012. – № 3-4. – С. 198–203.
28. Бомба А. Я. Моделювання процесу магнітного очищення рідких середовищ від феродомішок у випадку змінної швидкості / Бомба А. Я., Гаращенко В. І., Сафоник А. П., Гаращенко О. В. // Вода і водоочисні технології. Науково технічні вісті. – 2011. – № 3. – С. 49–57.
29. Сафоник А. П. Моделювання процесу магнітного осадження домішок у рівноциклічній насадці з визначенням масообмінного коефіцієнта / А. Сафоник, В. Гаращенко, І. Астрелін, О. Гаращенко // Вісник Інженерної академії України. – 2013. – № 3-4. – С. 116–120.

30. Бомба А. Я. Математичне моделювання аеробного процесу очищення стічної води в пористому середовищі / Бомба А. Я., Сафоник А. М., Гіроль А. М., Lagod G. // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Вип. 42. – Одеса, 2011. – С. 9–16.
31. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання та автоматизація процесу фільтрування та регенерації в магнітному фільтрі / А. П. Сафоник // Вісник Інженерної академії України. – 2015. – № 1. – С. 202–208.
32. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу прояснення стічної води у прояснювачі / А. П. Сафоник, А. М. Гіроль, В. А. Савченко // Науковий вісник будівництва. – Вип. 63. – Харків : ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2011. – С. 401–407.
33. Пат. 78422 Україна, МПК В01D 35/06 (2006.1). Магнітний фільтр-осаджувач / Гаращенко В. І., Гаращенко О. В., Скрипник І. Г., Сафоник А. П. // Власник Національний університет водного господарства та природокористування. – UA 78422; зареєстровано 25.03.2013.
34. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу фільтрування двокомпонентних стічних вод з урахуванням зворотного впливу / Сафоник А. П. // Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика. – 2010. – Вип. 7(16). – С. 193–198.
35. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод у пористому середовищі / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // IV Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ, 2011. – С. 47.
36. Бомба А. Я. Моделювання процесу сорбційного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // V Міжнародна конференція до 90-річчя від дня народження І. І. Ляшка Обчислювальна та прикладна математика. – Київ, 2012. – С. 37.
37. Бомба А. Я. Про моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення за умов ідентифікації масообмінного коефіцієнта / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // VI Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка Обчислювальна та прикладна математика. – Київ, 2013. – С. 64–65.
38. Бомба А. Я. Ідентифікація коефіцієнта процесу очищення рідин від багатокомпонентного забруднення n-шаровим просторовим фільтром / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // VIII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка Обчислювальна та прикладна математика. – Київ, 2015. – С. 27–28.
39. Сафоник А. П. Математичне моделювання процесу очищення рідини шляхом фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища / Сафоник А. П. // XXXI науково-технічна конференція “Моделювання”. – Київ, 2012. – С. 41.
40. A. Bomba, Mathematical modeling of magnetic treatment process of liquids from multicomponent pollution / A. Bomba, A. Safonyk // VIII International Conference POROUS MATERIALS. Theory and Experiment (INTERPOR'12). – Lviv, 2012. – P. 17–18.

41. Bomba A. Ya Simulation of biological treatment of water in aeration tanks regenerator / Bomba A. Ya., Safonyk A. P. // Mathematics for life sciences: Abstracts of III Int. Conference. – Rivne, 2015. – P. 6–7.
42. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу аеробного очищення / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Всеукраїнська наукова конференція “Математичне моделювання та математична фізика”. – Кременчук, 2011. – С. 23–24.
43. Сафоник А. П. Ідентифікація малого масообмінного коефіцієнта в задачі магнітного фільтрування / Сафоник А. П., Фурсачик О. А. // XVII Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. – Львів, 2011. – С. 92.
44. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод шляхом фільтрування / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // International Conference “Problems of Decision Making Under Uncertainties” (PDMU-2011). – Lviv, 2011. – P. 38–39.
45. Сафоник А. П. Розв'язок одного класу обернених сингулярно збурених задач типу “конвекція-дифузія” з невідомими джерелами забруднення / Сафоник А. П., Фурсачик О. А. // Всеукраїнська науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки”. Тези доповідей. – Чернівці : Видавничий дім “Родовід”, 2013. – С. 59–61.
46. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання процесу магнітного очищення рідин з ідентифікацією масообмінного коефіцієнта / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // III міжнародна науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки”. Тези доповідей. – Чернівці : Видавничий дім “Родовід”, 2014. – С. 70–72.
47. Safonyk A. P. Computer simulation of biological treatment of water in aeration tanks regenerator and identification of mass transfer coefficient / Safonyk A. P., Bilyk A. V. // IV Міжнародна науково-практична конференція “Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки” Тези доповідей. – Чернівці : Видавничий дім “Родовід”, 2015. – С. 68–69.
48. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі очищення води від багатокомпонентного забруднення / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // XVII Міжнародний симпозіум “Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики” (МДОЗМФ-2015). – Харків, 2015. – С. 37–39.
49. Сафоник А. П. Моделювання та автоматизація процесу магнітного фільтрування води / А. П. Сафоник, І. М. Таргоній // XXI Міжнародна конференція “Контроль і управління в складних системах” (КУСС-2014). – Вінниця, 2014. – С. 42.
50. Сафоник А. П. Моделирование процесса очистки сточной воды в осветлителе / А. П. Сафоник // Сборник трудов XXV Международной научной конференции “Математические методы в технике и технологиях” (ММТТ-25). – Саратов, 2012. – Том 2. – С. 127–129.

51. Бомба А. Я. Ідентифікація масообмінного коефіцієнта в задачі типу конвекція-дифузія-масообмін / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Тези доповідей V міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. – Кам'янець-Подільський, 2012. – С. 18.
52. Сафоник А. П. Комп'ютерне моделювання і дослідження процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 146.
53. Safonyk A. Modeling of fluid filtering n-layer filters with multicomponent pollution / Safonyk Andriy, Danylyshyna Nadiya // International Conference “Computer Science & Engineering 2013” (CSE-2013). – Lviv, 2013. – P. 84–85.
54. Safonyk A. The nonlinear mathematical modeling processes of filtration taking into account reverse influence / Safonyk Andriy // International Scientific Conference of Young Scientists and Students “Water Management – State and Prospect of Development”. – Rivne, 2010. – P. 260–263.
55. Бомба А. Я. Математичне моделювання процесу магнітного осадження домішок у багатошаровому фільтрі з визначенням масообмінного коефіцієнта / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // III Міжнародна науково-практична конференція “Стратегічні рішення інформаційного розвитку економіки, суспільства та бізнесу”. – Дніпропетровськ, 2014. – С. 51.
56. Сафоник А. П. Про ідентифікацію масообмінних коефіцієнтів у задачі фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення / А. П. Сафоник // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – С. 144.
57. Сафоник А. П. Автоматизація процесу очищення стічних вод від нафти з використанням магнітних фільтрів / А. П. Сафоник, І. М. Таргоній // Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем управління організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – К : НУХТ, 2014. – С. 89–90.
58. Сафоник А. П. Автоматизація процесу магнітного осадження домішок / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне : РВВ РДГУ, 2013. – 145 с.
59. Сафоник А. П. Автоматизація процесу знезалізнення технічної води / Сафоник А. П., Таргоній І. М. // Збірник тез I Всеукраїнської науково-технічної конференції “Комп'ютерні технології: інновації, проблеми, рішенн”. – Житомир, 2015. – С. 85–86.
60. Andrii Safonyk Model of magnetic filter in systems of fluid cleaning / Andrii Safonyk, Andrii Koval // The fifth International conference on information technologies and computer engineering. – Ivano-Frankivsk, 2015. – P. 206–207.

61. Safonyk A. P. Computer simulation of cleaning fluid from multicomponent pollution by multilayer filter / Safonyk A. P. // Proceedings of the International Scientific Conference “Modern Problems of Mathematical Modeling and Computational Methods”. – Rivne : EPD RSHU, 2015. – P. 228.
62. Safonyk Andriy. Identification of unknown mass-transfer coefficient in tasks of the convection-diffusion-mass-transfer / Safonyk Andriy, Mamay Lyudmyla // “Innovative technologies in water management complex” collected articles of young scientists. – Rivne, 2012. – P. 233–236.
63. Сафоник А. П. Про моделювання процесів фільтрування рідин від багатокомпонентного забруднення у n-шарових фільтрах / А. П. Сафоник // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне, 2013. – С. 131.
64. Бомба А. Я. Моделювання нелінійних процесів фільтрування рідин від багатокомпонентних забруднень з урахуванням зворотних впливів та дифузійно-масообмінних збурень / Бомба А. Я., Сафоник А. П. // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне, 2013. – С. 35.
65. Сафоник А. П. Математичне моделювання аеробного процесу очищення стічної води в пористому середовищі / Сафоник А. П., Гіроль А. М. // Збірка доповідей міжнародного конгресу ЕТЕВК – 2011 “Водопостачання, каналізація, екологія, технологія, економіка”. – Ялта, 2011. – С. 210–212.

## А Н О Т А Ц І Ї

**Сафоник А. П. Моделювання нелінійно-збурених керованих процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти і науки України, Львів, 2016.

Виходячи з проблем моделювання, дослідження та оптимізації параметрів процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень розвинено теорію математичного моделювання нелінійних технологічних процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень з урахуванням автоматизованого керування та ідентифікації параметрів при домінуванні одних складових процесу над іншими, а також розроблено методологію розв’язання відповідних нелінійно-збурених задач, що націлено на покращення якості та підвищення інтенсивності механізмів очистки води. Зокрема, побудовано та досліджено нові моделі процесів очищення рідин від багатокомпонентного забруднення у одно-, дво- та багатошарових сорбційних фільтрах, фільтрах-проянювачах із шаром завислого осаду, магнітних та біологічних фільтрах тощо; запропоновано спосіб ідентифікації невідомих параметрів та автоматизації відповідних процесів. Одержано асимптотичні та

числово-асимптотичні розклади відповідних нелінійно-збурених модельних задач, а також обернених задач, задач із запізненням, задач на оптимізацію параметрів систем тощо. На основі розроблених математичних моделей процесів магнітного біологічного та механічного очищення рідин від багатокомпонентних забруднень розроблено автоматизовану систему керування відповідними процесами.

**Ключові слова:** багатокомпонентне забруднення, процес очищення рідин шляхом фільтрування, зворотний вплив, математичне моделювання, задача з запізненням, сингулярно збурена задача, чисельно-асимптотичний метод, автоматизація процесу фільтрування, конвекція, дифузія, масообмін.

**Сафоник А. П. Моделирование нелинейно-возмущенных управляемых процессов очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Национальный университет “Львівська політехніка”, Министерство образования и науки Украины, Львов, 2016.

Исходя из проблем моделирования, исследования и оптимизации параметров процессов очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений развито теорию математического моделирования нелинейных технологических процессов очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений с учетом автоматизированного управления и идентификации параметров при доминировании одних составляющих процесса в соответствии с другими, а также разработана методология решения соответствующих нелинейно-возмущенных задач, нацеленных на улучшение качества и повышение интенсивности механизмов очистки воды. В частности, построены и исследованы новые модели процессов очистки жидкостей от многокомпонентного загрязнения в одно-, двух- и многослойных сорбционных фильтрах, фильтрах-осветлителях с шаром зависшего осадка, магнитных и биологических фильтрах и т.п.; предложен метод идентификации неизвестных параметров и автоматизации соответствующих процессов. Получены асимптотические и численно-асимптотические разложения соответствующих нелинейно-возмущенных модельных задач, а также обратных задач, задач с опаздыванием, задач на оптимизацию параметров систем и т.п. На основе разработанных математических моделей процессов магнитной, биологической и механической очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений разработана автоматизированная система управления соответствующими процессами.

**Ключевые слова:** многокомпонентное загрязнение, процесс очистки жидкостей путем фильтрования, обратное воздействие, математическое моделирование, задача с опозданием, сингулярно возмущенная задача, численно-асимптотический метод, автоматизация процесса фильтрования, конвекция, диффузия, массообмен.



**Safonyk A. P. The modelling of nonlinear perturbed controlled processes of cleaning fluids from multicomponent contamination.** – Manuscript.

The thesis is presented for the Doctor of Technical Science degree by specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computing methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2016.

Based on the simulation problems, the study and optimization of parameters of liquid purification processes from multicomponent contaminants, the theory of mathematical modeling of nonlinear processes of cleaning fluid from the multicomponent contaminants was developed. It is based on automated control and parameter identification with the domination of one over the other components of the process, as well as a methodology for solving the corresponding nonlinear perturbed problems, which is aimed at improving the quality and intensity of water treatment mechanisms. In particular, new models of fluid purification processes from multicomponent contamination in single, yards and multilayer sorption filters, clarifiers, filters with the ball hung sediment, magnetic and biological filters, were built and explored; a method for the identification of unknown parameters and automation of the corresponding processes were proposed. An asymptotic and the number of asymptotic expansions of the corresponding nonlinear perturbed model problems and inverse problems, problems with being late, problems at optimization of system parameters and others were obtained. On the basis of the mathematical models of processes of magnetic biological and mechanical purification of liquids from multicomponent pollution, an automated system of process control was developed.

A mathematical model of the process of aerobic purification of waste water was built, it takes into account the interaction of bacteria, organic and biologically non-oxidizing substances and generally to water purification process in the filter illuminators with the influence of the dose of the reagent and irreversible coagulation of the impurity particles. Spatial generalization of the corresponding mathematical models of biological purification was suggested. It allows the calculation of the parameters needed cleansing process and to assess the accuracy of the calculations according to the results of experimental studies.

A mathematical model of the process of deposition of magnetic impurities in single, yards and the n-ball filter was built. It describes the laws of filtration and accumulation of impurities in the porous filling and generalizes the process of deposition of magnetic impurities in the granular filter material in view of the magnetic field strength. It also describes the reverse impact of the process characteristics (sludge concentration) on the process parameters, in particular: the porosity of the magnetic field strength, the coefficient of separation of particles of granules of the filter material impurities filtering coefficient, which provides acceptable accuracy for calculations actual purification processes.

Asymptotic and numerical-asymptotic expansions of the nonlinear perturbed model based on problems of purification processes from multicomponent fluids contamination (for one-dimensional and three-dimensional cases) were obtained. It expands the class of tasks and takes into account the shape of the filter.

A method for determining the unknown parameters of the multi-pollution mechanical, magnetic and biological filters fluid purification models was offered. It makes it possible to apply the methods of inverse problems and, thus, extend the class of tasks to practical.

**Key words:** multicomponent contamination, cleaning process liquids by filtration, reverse impact, mathematical modeling, problem with delay, singularly perturbed problem, numerical-asymptotic method, automation of filtration process, convection, diffusion, mass transfer.

Підписано до друку 23.05.2016 р. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.  
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times.  
Друк різнографічний. Ум.-друк. арк. 1,9.  
Тираж 100 прим. Зам. № 5183.

---

---

*Видавець і виготовлювач*  
*Редакційно-видавничий відділ Національного університету*  
*водного господарства та природокористування,*  
*33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного*  
*реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів*  
*видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*