

Міністерство освіти і науки України
Національний лісотехнічний університет України

На правах рукопису

ШИМАНСЬКИЙ ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ



УДК 004.942; 674.047

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО
ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ
У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник:
Соколовський Ярослав Іванович
доктор технічних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Учений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 35.052.05



/Р.А. Бунь/

Львів – 2015

ЗМІСТ

| | |
|---|-----------|
| ВСТУП..... | 5 |
| РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ У КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ..... | 11 |
| 1.1. Аналіз операторів інтегрування і диференціювання дробового порядку та їх різні інтерпретації | 11 |
| 1.2. Аналіз процесу неізотермічного вологоперенесення у деревині..... | 16 |
| 1.3. Аналіз реологічних моделей в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння | 22 |
| 1.4. Аналіз методів реалізації моделей..... | 27 |
| 1.4.1. Аналітичні методи..... | 27 |
| 1.4.2. Чисельні методи..... | 29 |
| 1.5. Висновки | 31 |
| РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ | 33 |
| 2.1. Основні співвідношення математичного апарату диференціювання дробового порядку | 33 |
| 2.2. Математична модель неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою | 35 |
| 2.3. Скінченно-різницева реалізація моделі..... | 38 |
| 2.4. Програмне забезпечення обчислення динаміки температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння..... | 40 |
| 2.5. Валідація та верифікація моделі..... | 45 |
| 2.6. Висновки | 55 |
| РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ | 57 |
| 3.1. Основні співвідношення математичного апарату інтегрування дробового порядку | 57 |

| | |
|---|----|
| 3.2. Дослідження фрактальних реологічних моделей | 59 |
| 3.2.1 Фрактальна модель Фойгта..... | 60 |
| 3.2.2 Фрактальна модель Максвелла..... | 62 |
| 3.2.3 Фрактальна модель Кельвіна..... | 64 |
| 3.3. Математична модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння | 66 |
| 3.4. Скінченно-різницева реалізація моделі..... | 69 |
| 3.5. Програмне забезпечення обчислення динаміки компонент напружено-деформівного стану капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння | 72 |
| 3.6. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів Работнова | 77 |
| 3.7. Валідація та верифікація моделі | 82 |
| 3.8. Висновки | 88 |

РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

90

| | |
|---|-----|
| 4.1. Інтерфейс прикладного програмного забезпечення для обчислення температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння | 90 |
| 4.2. Аналіз динаміки температури та вологовмісту у деревині під час сушіння | 95 |
| 4.3. Аналіз динаміки компонент напружено-деформівного стану деревини під час сушіння..... | 113 |
| 4.4. Аналіз розподілу вологісних полів та компонент напружено-деформівного стану при змінній температурі | 127 |
| 4.5. Визначення термодинамічних функцій фрактальних реологічних моделей | 132 |
| 4.6. Висновки | 137 |

РОЗДІЛ 5 МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ВИСУШУВАЛЬНІЙ ДЕРЕВИНІ З УРАХУВАННЯМ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ.....

139

| | |
|--|------------|
| 5.1. Методика вимірювання напружень у висушувальній деревині..... | 140 |
| 5.2. Прикладне програмне забезпечення для обчислення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини з урахуванням фрактальної структури.. | 143 |
| 5.3. Висновки | 147 |
| ВИСНОВКИ | 148 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 150 |
| ДОДАТОК А ВИЗНАЧЕННЯ ДРОБОВОГО ПАРАМЕТРА АПРОКСИМАНТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПОВЗУЧОСТІ ДЕРЕВИНИ | 175 |
| ДОДАТОК Б РОЗПОДІЛ МОДЕЛЬОВАНИХ КОМПОНЕНТІВ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЗГУЩЕННІ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ СІТКИ | 177 |
| ДОДАТОК В ЗМІНА ВОЛОГОВМІСТУ ТА КОМПОНЕНТ НАПРУЖЕНЬ ПРИ ДВОСТУПЕНЕВОМУ РЕЖИМІ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З УРАХУВАННЯМ ЇЇ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ | 181 |
| ДОДАТОК Г ПАТЕНТ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ | 186 |
| ДОДАТОК Д АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ | 190 |

ВСТУП

Актуальність теми. Технологічний процес сушіння капілярно-пористих матеріалів, зокрема деревини, визначається зв'язком тепломасоперенесення та деформування. Матеріал деревини характеризується високою гідрофобністю, значною мінливістю фізико-механічних властивостей у напрямках анізотропії, складною природою просторових кореляцій, наявністю ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що зумовлюються залишковими напруженнями. Розвиток напружень в умовах неізотермічного вологоперенесення та наявність залишкового напружено-деформівного стану є одними із основних стримувальних факторів інтенсифікації процесу сушіння. Велику роль у вирішенні цього завдання відіграє вдосконалення існуючих та побудова нових математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів під час сушіння, що враховують складний комплекс взаємопов'язаних процесів та увесь спектр властивостей матеріалу.

Отримані принципово важливі науково-практичні результати не повною мірою відображають усю складність та багатогранність динаміки розвитку напружень та деформацій у деревині під час сушіння, зокрема у них не врахована складна природа просторових кореляцій, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації у матеріалі. Тому побудова математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння є актуальним науковим завданням і дає змогу вирішувати завдання вибору раціональних параметрів цього технологічного процесу для підвищення якості висушеної деревини.

Зв'язок роботи із науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у межах науково-дослідних робіт Національного лісотехнічного університету України, а саме:

- “Математичне і програмне забезпечення автоматизації розрахунку

багатофазних термодинамічних систем”, № держреєстрації 0110U000657, 2011-2012 рр.;

- “Програмно-алгоритмічні засоби та інформаційні технології автоматизації досліджень енерго-ефективних процесів сушіння деревини”, № держреєстрації 0113U001268, 2013-2014 рр.;

- “Математичне моделювання нерівноважних деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у середовищах з фрактальною структурою”, № держреєстрації 0115U002316, 2015-2017 рр.

Дисертантові належать математичні моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння, прикладне програмне забезпечення чисельної реалізації моделей, спосіб визначення повних напружень на поверхні висушеної деревини за величиною підведеного механічного зусилля до еталону.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розроблення математичних моделей та встановлення закономірностей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких задач:

- синтезувати математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння середовищ з фрактальною структурою;
- розробити математичну модель в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння;
- розробити алгоритм знаходження чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку, що описують вказані вище моделі;
- розробити програмне забезпечення для чисельної реалізації моделей та апроксимації експериментальних даних повзучості деревини;
- провести аналіз та встановити закономірності тепломасоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих

матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння;

- розробити методику вимірювання напружень у висушеній деревині.

Об'єкт дослідження – процеси неізотермічного вологоперенесення та деформування у капілярно-пористих матеріалах під час сушіння.

Предмет дослідження – математичні моделі тепло- і вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано такі методи досліджень:

- методи матфізики, механіки спадкових середовищ та апарату інтегро-диференціювання дробового порядку для розроблення математичних моделей;
- скінченно-різницеві та апроксимаційні методи для реалізації математичних моделей;
- методи об'єктно-орієнтованого аналізу та проектування програмного забезпечення;
- методи статистичного моделювання для перевірки адекватності моделей.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- розроблено нову математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, яка дає можливість розширити її множину реалізацій, врахувати анізотропію змінних тепломеханічних характеристик, пружні, в'язко-пружні та залишкові деформації деревини, усадку гігроскопічних матеріалів, наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації, що притаманні середовищам з фрактальною структурою;
- вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з анізотропними теплофізичними характеристиками для нерегулярного та регулярного режимів процесу сушіння, яка на відміну від відомих, розширює множину її реалізацій

шляхом врахування фрактальної структури та матеріалу;

- вперше досліджено двовимірне в'язко-пружне деформування деревини, як середовища з фрактальною структурою, в умовах неізотермічного вологоперенесення та встановлено закономірності впливу технологічних параметрів режиму сушіння, анізотропії змінних тепломеханічних характеристик на розподіли температури, вологовмісту і компонент напружено-деформівного стану, що дають змогу оцінити залишкові напруження у висушуваній деревині;
- вперше отримано скінченно-різницевої апроксимації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння, які за допомогою дробового параметра α враховують наявність ефектів «пам'яті» та самоорганізації у матеріалі під час реалізації цих моделей.

Практичне значення роботи. Розроблені математичні моделі та прикладне програмне забезпечення можуть бути використані для створення систем автоматизованого скінченно-різницевого розрахунку температури, волого-вмісту та компонент напружень під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з урахуванням їх фрактальної структури та технологічних параметрів агента сушіння.

Запропонований алгоритм апроксимації та отримані розрахункові співвідношення реологічної поведінки деревини за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів дає змогу підвищити точність апроксимації експериментальних даних.

Розроблено методику вимірювання напружень на поверхні висушуваної деревини для контролю та виявлення напружень, зокрема залишкових.

Результати дисертаційної роботи використано на ВКФ “Ледас-Україна” (м. Хуст, Закарпатська область, акт від 17.04.2015 р.) для аналізу розподілів температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння, що дає можливість здійснити вибір режимних параметрів для забезпечення необхідної якості продукції. Результати наукових

досліджень використано та відображено у програмах навчальних дисциплін кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України: “Математичне моделювання в інформаційних технологіях проектування”, “Обчислювальні методи механіки суцільного середовища”, “Моделювання систем”, “Штучні нейронні мережі” (акт від 24.03.2015 р.). За результатами досліджень отримано один патент України на корисну модель.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи належать особисто здобувачу. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить [108, 182, 184, 190, 193] – удосконалення математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння; [111, 185, 186, 187, 188, 191] – розроблення математичної моделі в’язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння; [189, 194, 212] – адаптація скінченно-різницевого методу для знаходження чисельного розв’язку моделей; [109, 110, 180, 181, 195] – аналіз закономірностей розподілу характеристик процесів неізотермічного вологоперенесення та в’язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння; [168] – спосіб визначення повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу за величиною підведеного механічного зусилля до еталону; [211] – апроксимація експериментальних даних реологічної поведінки деревини лінійною комбінацією дробово-експоненціальних функцій.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- 4th and 6th International Conferences of Young Scientists “Computer Science and Engineering” (Lviv, 2010, 2013);
- 6th International Conference of Computer Science and Informational Technologies CSIT-2011 (Lviv, 2011);
- Науково-практичній конференції “Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті INFOTECH – 2011” (Севастополь, 2011);

- VI науково-практичній конференції з міжнародною участю “Математичне та імітаційне моделювання систем”, МОДС 2011 (Чернігів, 2011);
- Міжнародному молодіжному форумі “Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті” (Харків, 2012);
- Міжнародних наукових конференціях “Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту” (Херсон, 2011, 2013, 2014);
- Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2013, 2014);
- III науково-технічній конференції “Обчислювальні методи та системи перетворення інформації” (Львів, 2014);
- 13-th International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics” (Svalyava, 2015);
- Науково-практичній конференції професорсько-викладацького складу НЛТУ України в період 2009 - 2015 рр.;
- Дисертаційна робота у повному обсязі доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі у Західному науковому центрі НАН України та МОН України (науковий керівник семінару, д.т.н., проф. Воробель Р. А.), Львів, 2015.

Публікації. Основні результати роботи опубліковано у 21 праці, зокрема: 6 статей у наукових фахових виданнях, 14 публікацій у матеріалах наукових конференцій. Отримано один патент України на корисну модель.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота загальним обсягом 193 сторінки складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаної літератури і додатків. Основний текст викладено на 149 сторінках, містить 66 рисунків та 12 таблиць. Бібліографічний список складається з 215 назв.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ У КАПЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ

1.1. Аналіз операторів інтегрування і диференціювання дробового порядку та їх різні інтерпретації

У листі від 30 вересня 1695 Лопіталь цікавився у Лейбніца про n -кратну похідну від лінійної функції $f(x) = x, \frac{d^n x}{dx^n}$. Він поставив питання про те, яким буде результат коли $n = \frac{1}{2}$. Вважається, що саме цей лист дав поштовх для розвитку теорії дробових обчислень. Більшість авторів приводять саме цю дату, як день народження так званого фрактального числення.

Після Лопіталя і Лейбніца фрактальним численням займалися дуже багато відомих вчених. Фур'є, Ейлер, Лаплас - найвідоміші серед тих, хто займався цим математичним апаратом. Багато з них вводили власні позначення та методології, які б відповідали концепції інтегрування та диференціювання дробового порядку.

Для опису нестационарних процесів, як правило, використовують оператори інтегрування та диференціювання, які зумовлюють накладання певних умов на протікаючі процеси та узагальнюють їх властивості. Сьогодні у багатьох галузях науки з'являються нові структури, для опису яких використання звичайних диференціальних рівнянь є недостатнім. Натомість їх можна адекватно описати за допомогою математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку. Фрактальним численням прийнято називати область математичного аналізу, в якій досліджуються оператори диференціювання та інтегрування будь-якого дійсного порядку [47, 74, 85, 89, 132, 137, 138, 159, 161, 167, 177]. В останні кілька десятиліть виникла гостра

необхідність застосування цього апарату в різних областях науки, таких як: класична і квантова фізика, теорія поля, фізика твердого тіла, динаміка рідини, аеродинаміка, стохастичний аналіз, обробка зображень [95].

Рівняння, що містять оператори інтегрування або диференціювання дробового порядку, широко використовуються для опису поведінки або стану реального фізичного середовища або процесу. Існує багато явищ і процесів, для яких є характерною фрактальність або наявність ефекту пам'яті. Математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку є найкращим методом для побудови моделей таких систем [208]. Механізм пам'яті може бути різним залежно від типу процесу, разом з тим феноменологічний опис багатьох процесів з цією властивістю може мати одну основу. Дробове числення в теорії таких систем стає незамінним, що можна порівняти з класичним аналізом у механіці суцільних середовищ [162, 173].

Останнім часом широко використовують оператори інтегрування та диференціювання дробового порядку в теорії в'язко-пружності [177]. Використання даних операторів для опису співвідношень між напруженнями та деформаціями дало змогу врахувати наявність необоротних явищ, зумовлених реологічними властивостями матеріалу [21, 116]. Дослідження напружено-деформівного стану у в'язко-пружних тілах відіграють важливу роль при оцінці їх міцності і надійності під час технологічної обробки.

Основи використання фрактального числення в автоматизованому управлінні закладені в працях S. Manabe [69, 70]. У роботах [16, 90, 93] досліджуються елементи управління, динамічні системи і фрактальні контролери, що базуються на використанні інтегралів і похідних дробового порядку.

Існують різні варіанти введення операцій дробового інтегро-диференціювання, зокрема, підходи Рімана-Ліувілля, Капуто, Грюнвальда-Летнікова, та їх різноманітні модифікації [177]. На певних класах функцій ці операції приводять до однакових результатів. Як приклад, можна навести

дробове інтегро-диференціювання абсолютно інтегрованої функції на скінченному відрізку за Ріманом-Ліувілем, що співпадає з відповідними операціями за Грюнвальдом-Летніковим [132]. Розглянемо детальніше модифікації цих операторів.

Інтеграл дробового порядку визначаються із загальновідомої формули Коші зведення n-кратного інтегралу до однократного [45, 177]:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt. \quad (1.1)$$

Таким чином, замінивши n у виразі (1.1) на неціле значення, отримаємо визначення інтегралу дробового порядку:

$$I_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt; \quad (1.2)$$

$$I_{b-}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad (1.3)$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ - гамма-функція Ейлера.

Інтеграл (1.2) називають лівостороннім інтегралом, (1.3) – правостороннім. Також, (1.2) та (1.3) прийнято називати дробовими інтегралами Рімана-Ліувілля.

Серед одновимірних лінійних диференціальних рівнянь найбільш вивченими є рівняння, що містять похідну дробового порядку за Ріманом-Ліувілем. Ця похідна додатного порядку $\alpha > 0$ визначається таким чином [45, 177]:

$$D^{\alpha} f = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}} d\tau \right); \quad (1.4)$$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}; \quad (1.5)$$

$$[\alpha] \in N; \quad (1.6)$$

$$0 < \{\alpha\} < 1. \quad (1.7)$$

З 80-х років ХХ-го століття почалось вивчення та використання модифікованих похідних Рімана-Ліувілля додатного порядку. До них можна віднести оператор дробового диференціювання за Капуто, який визначається таким співвідношенням [11]:

$$D^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_a^t \frac{d^{[\alpha]+1} f(\tau)}{d\tau^{[\alpha]+1}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}}. \quad (1.8)$$

За Грюнвальдом-Летніковим цю похідну можна зобразити таким чином [132, 177]:

$$D^\alpha f = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} f(x-k\tau). \quad (1.9)$$

Загальновідомо, що похідні та інтеграли цілого порядку мають чіткі фізичні та геометричні інтерпретації, які дозволяють використовувати їх для вирішення прикладних завдань у різних галузях науки.

Натомість, у випадку операторів інтегрування та диференціювання дробового порядку, що являють собою область математичного аналізу, яка на даний момент дуже швидко розвивається, їхні інтерпретації не є настільки очевидними. З моменту появи цих операцій жодна із запропонованих геометричних і фізичних тлумачень не були визнані широким загалом. Конференція з методів трансформації та спеціальних функцій у Варні (1996) показали, що дана проблема не була вирішена, і з тих пір ситуація досі не змінилася [36, 48, 66].

Потреба у вищезазначених геометричних і фізичних інтерпретаціях є загально визнаною, кілька авторів спробували їх надати. Багато зусиль було присвячено спробі зв'язати дробові інтеграли і похідні з одного боку, і фрактальну геометрію – з іншого [31, 79, 82, 120]. Однак, у працях R. Rutman [101, 102] було показано, що цей підхід не узгоджується.

I. Podlubny запропонував геометричну та фізичну інтерпретацію дробового інтегро-диференціювання за Ріманом-Ліувілем, яка на сьогодні користується найбільшою популярністю. У своїх роботах він переконує, що його фізична інтерпретація дробового інтегрування є відповідною до сучасних

уявлень про простір і час. Також зазначено, що запропонований підхід до геометричного тлумачення дробового інтегрування може бути використаний для розроблення нової теорії геометричної і фізичної інтерпретацій інтегралів згорток Вольтерівського типу [89-91, 93].

Згідно з його працями, геометрична інтерпретація заснована на представленні правостороннього дробового інтеграла Рімана-Ліувілля у вигляді інтеграла від заданої функції по іншій функції:

$$I^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau); \quad (1.10)$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha + (t-\tau)^\alpha). \quad (1.11)$$

Функція $g_t(\tau)$ має наступні властивості:

$$t_1 = kt; \quad (1.12)$$

$$\tau_1 = k\tau; \quad (1.13)$$

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau). \quad (1.14)$$

На рис. 1.1 сірим кольором показано фігуру, площа якої відповідає інтегралу (1.10) порядку α , а на площині (f, g) зображено фігуру, площа якої відповідає цьому ж інтегралу при $\tau = g_t(t)$. Своєю чергою, у площині (f, τ) показано фігуру, площа якої дорівнює інтегралу (1.10) при $\alpha = 1$.

Проблему фізичної інтерпретації дробових операторів у своїх роботах висвітлювали Р. Р. Нігматулін, І. Podlubny, В. Е. Тарасов та інші [82, 89, 201]. Опираючись на дані роботи можна зробити висновок, що математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку є незамінним інструментом для опису: ефекту «пам'яті» у середовищі; надповільних процесів дифузійного типу; систем, для яких є характерною просторова нелокальність.

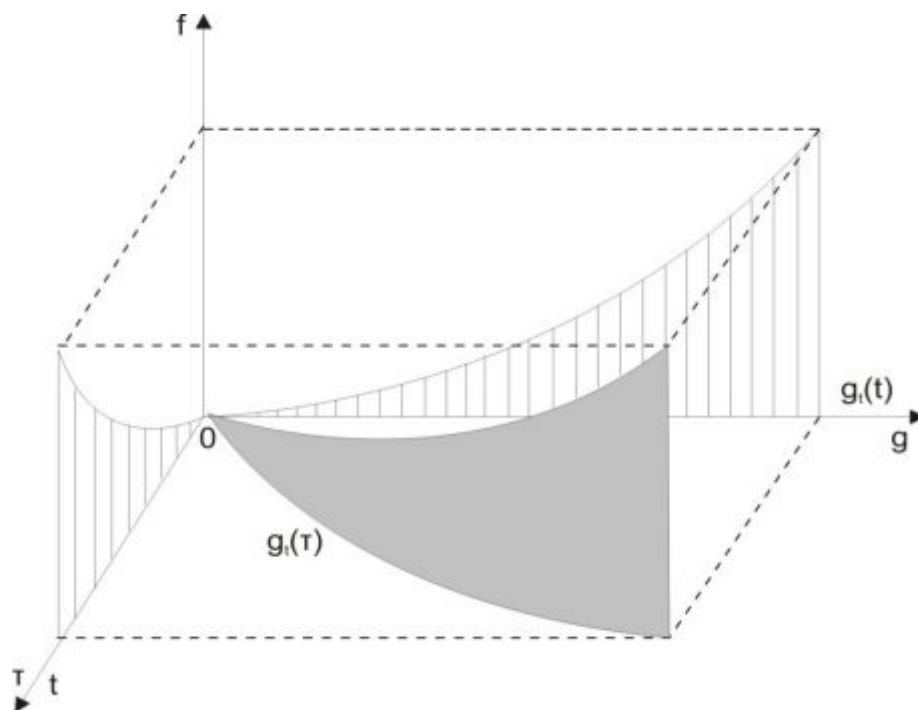


Рис. 1.1. Геометрична інтерпретація інтегралу дробового порядку, що була запропонована I. Podlubny

Проблему ймовірнісної інтерпретації дробових операторів у своїх роботах розглядали А. А. Станіславський, Ж. А. Т. Machado [65, 200]. Проаналізувавши ці праці, можна прийти до таких висновків щодо ймовірнісної інтерпретації дробових операторів, зокрема: дробовий показник має прямий зв'язок з відповідним параметром ймовірнісного розподілу; характер цього розподілу вказує на наявність довгострокової «пам'яті» у процесі; релаксація в свою чергу описується дробово-степеневою спадною функцією.

1.2. Аналіз процесу неізотермічного вологоперенесення у деревині

Деревина є одним з найбільш широко використовуваних будівельних матеріалів у світі. Однією з причин її популярності, як будівельного і виробничого продукту, є те, що вона володіє багатьма важливими властивостями, у тому числі: низькою щільністю, високою ударною міцністю, низькою теплопровідністю і ефузивністю (тобто, приємними на дотик,

незалежно від температури, властивостями). Інша причина полягає у тому, що енергія, що витрачається для обробки однієї тонни деревини, в декілька разів менша за кількість енергії, необхідної для виробництва однієї тонни сталі або алюмінію. У контексті сталого розвитку, деревина розглядається як поновлюваний ресурс, він має природну здатність зберігати енергію та зменшувати викиди вуглекислого газу при використанні в якості будівельного матеріалу та бути альтернативним видом палива [131]. Ці факти свідчать про те, що попит на вироби з деревини ймовірно збільшиться в майбутньому, так як екологічно чисті продукти отримують все більше визнання.

Сушіння деревини є найбільш енергоємним і довготривалим процесом технологічної обробки пиломатеріалів. В Україні значною часткою техніки, що використовується для цього процесу, є сушарки конвективного типу. Вона є простою і відносно не дорогою. Проте, якість кінцевого продукту часто є низькою, а тривалість сушіння деревини надто довгим. Відповідно, постає питання підбору таких параметрів сушильної камери, при яких висушений пиломатеріал буде якомога вищої якості при найменшій тривалості цього процесу. На визначення кінцевої якості висушеної деревини здебільшого впливає розподіл напружень, що виникають внаслідок нерівномірного розподілу вологості у матеріалі [119, 124, 125, 136, 149, 154, 157, 166, 178, 203, 210, 215].

Актуальним науковим завданням є створення ефективної математичної моделі процесу сушіння деревини, яка б дозволила реалізувати автоматизацію управління цим процесом, підвищила б якість сушіння, зменшуючи споживання енергії і скорочуючи його тривалість. У свою чергу нагрівання матеріалу відбувається шляхом конвективної передачі енергії через його зовнішні поверхні при присутності теплових градієнтів [51, 80, 130, 143, 176].

Висушування деревини у сушильних камерах – це складний процес, який включає в себе як урахування тепло- і масообміну між поверхнею деревини і зволеним повітрям, так і внутрішнього тепло- та вологообміну у матеріалі.

Крім того, зміни вмісту вологи можуть викликати усадку і набухання матеріалу, що у свою чергу спричиняє зміну внутрішніх напружень. Труднощі, пов'язані з записом математичної моделі для опису процесу сушіння деревини також підкреслили той факт, що деревина є гетерогенним, гігроскопічним і сильно анізотропним пористим матеріалом.

Однією з перших робіт у розвитку математичної теорії для цієї галузі була праця [113], у якій одномірна модель дифузійного розподілу вологи застосовувалась для моделювання процесу сушіння взірця ялиці, а отримані результати валідувались з експериментальними даними. У роботі Whitaker [117] була запропонована узагальнена математична теорія для висушування капілярно-пористого матеріалу.

Розуміння механізму випаровування вологи і її руху під час процесу сушіння деревини є надважливим при побудові його моделі. У праці Cloutier [19] була розроблена скінченно-елементна модель неізотермічного вологоперенесення для опису процесу сушіння деревини на основі концепції вологісних потенціалів.

Cividini, Travan, Seyfarth та інші вчені [18, 49, 54, 107] запропонували математичні моделі, які враховували комбінації вакууму і мікрохвильових сушильних камер. Ця технологія скорочує тривалість сушіння до проміжку, що вимірюється хвилинами. Температура сушіння може бути дуже низькою, в діапазоні від 30 °C до 40 °C, що дозволяє уникнути термічного деградування і хімічних реакцій, які викликають зміну кольору деревини. Проте обладнання, необхідне для використання цієї технології, є доволі дорогим.

Аналізом основних способів сушіння капілярно-пористих матеріалів займався П. В. Білей [125-126, 129]. З його праць можна зробити висновок, що найдешевшим та найдоступнішим способом є конвективне сушіння деревини низькотемпературними режимами.

Вагомий внесок у розроблення математичних моделей неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння зробили

А. В. Ликов, П. С. Серговський, І. В. Кречетов, Г. С. Шубін, Б. Н. Уголев, П. В. Білей, І. М. Озарків, Б. І. Гайвась та інші [125, 134, 149, 154, 160, 164, 172, 178, 199, 203, 215]. Вони застосовували закон Фіка до деревини, як до капілярно-пористого колоїдного тіла, у процесі сушіння, згідно з яким за наявності градієнта гігроскопічної вологи у часі виникає дифузійний потік вологи.

Сучасна теорія сушіння капілярно-пористих матеріалів створена в основному А. В. Ликовим та його школою [152, 154-156]. Зокрема, вони розробили математичні моделі тепло- та масоперенесення у вигляді систем диференціальних рівнянь з початковими і граничними умовами, які дають змогу оцінити нестационарні поля вологовмісту та температури. Була запропонована математична модель процесу перенесення тепла і маси в капілярно-пористому матеріалі під час сушіння. При цьому, були зроблені наступні припущення для того, щоб спростити модель:

- початковий вологовміст і розподіл температури у взірці є однорідними;
- тверда, рідка та газова фази вологовмісту є неперервними;
- газовою фазою є водяна пара, яка поводить себе як ідеальний газ;
- зв'язний вологовміст має фізичні властивості, аналогічні вільному вологовмісту;
- силою гравітації можна знехтувати.

На підставі зроблених припущень, диференціальні рівняння, що описують процес перенесення тепла і вологи в деревині під час сушіння, можуть бути подані у такий спосіб:

- процес теплоперенесення:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla [\lambda \nabla T + a(1-\delta)\varepsilon\rho_0 r \nabla U + Q]; \quad (1.15)$$

- процес вологоперенесення:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \nabla [a\delta \nabla T + a \nabla U] \quad (1.16)$$

У правій частині рівняння (1.15) перший доданок характеризує передачу тепла за рахунок теплопровідності, що в свою чергу відповідає закону Фур'є. При поєднанні тепло- та вологоперенесення, на зміну температури також має вплив зміна вологості. Вона вважається незначною для капілярно-пористих тіл. Відповідно, другий доданок рівняння (1.15) є компонентою неізотермічної дифузії. Параметр Q характеризує джерело тепла, і він має найбільш очевидний вплив на процес теплоперенесення під час сушіння. В подальшому ми будемо розглядати процес конвективного сушіння деревини, тому приймемо $Q=0$.

У правій частині рівняння (1.16) перший доданок характеризує процес вологоперенесення, що відбувається внаслідок зміни температури (ефект Соре). Другий доданок описує зміну вологовмісту, що в свою чергу відповідає закону Фіка.

Описавши процес тепло- та вологоперенесення у капілярно-пористому матеріалі в процесі конвективного сушіння системою диференціальних рівнянь параболічного типу, потрібно додати початкові умови, які б визначали значення температури та вологовмісту у початковий момент часу:

$$\begin{cases} T|_{\tau=0} = T_0(\mathbf{x}); \\ U|_{\tau=0} = U_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.17)$$

Також потрібно описати процес передачі тепла та виділення вологи з матеріалу через його поверхню. Це можна зробити, визначивши граничні умови у такий спосіб:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T - t_c) - \rho_0(1 - \varepsilon)\beta(U - U_p); \quad (1.18)$$

$$a\delta \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + a \frac{\partial U}{\partial n} = \beta(U_p - U). \quad (1.19)$$

Таким чином, на швидкість передачі тепла через поверхню висушуваної деревини впливає різниця між температурою середовища та матеріалу, а також різниця між вологовмістом матеріалу та його рівноважним вологовмістом. В свою чергу на швидкість видалення вологи впливає швидкість нагрівання

матеріалу та різниця між вологовмістом матеріалу та його рівноважним вологовмістом.

Я. І. Соколовський [183] побудував математичну модель неізотермічного вологоперенесення деревини у процесі сушіння у якій пов'язані: температура, вологовміст, тиск парової суміші, напруження та деформації, а коефіцієнти, що входять в модель, залежать від шуканих величин. Описавши процес тепло- та вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах під час конвективного сушіння за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь з частковими похідними, ми нехтуємо тим фактом, що для цих матеріалів є характерними такі властивості як: складна природа просторових кореляцій, ефекти самоорганізації та наявність надповільного процесу дифузійного типу. Тому доцільним є використання математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку, який би дозволив врахувати вище наведені властивості капілярно-пористих матеріалів під час конвективного сушіння.

Опис процесу неізотермічного вологоперенесення базується на законах Фіка [152, 154-156]. Наслідком з другого закону є класичне диференціальне рівняння дифузії. Останнім часом сформувався підвищений інтерес до дослідження дифузійних процесів, що не в повній мірі підкоряються законам Фіка і для опису яких недостатньо використовувати класичні рівняння. Явища переносу, що виходять за рамки базових уявлень, спостерігаються, наприклад, в турбулентних потоках, аморфних напівпровідниках та капілярно-пористих середовищах. Вони отримали назву «аномальна дифузія». Досить повне уявлення про стан розвитку досліджень аномальної дифузії наведено в [72, 207].

Для опису «аномальних дифузійних» процесів використовується модифікований закон Фіка [88], що вимагає залучення математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку [177]. Таким чином, виникають початково-крайові задачі для диференціальних рівнянь з дробовими похідними.

Одна з проблем, що виникає при використанні дробових похідних, полягає в тому, що не існує їх однозначного визначення. Чисельні методи розв'язання задач для рівнянь з дробовими похідними прив'язані до виду обраної похідної, тому виникає необхідність аналізу та порівняння результатів, отриманих при використанні різних визначень і чисельних методів. Таке порівняння наведено у роботі [158] на прикладі задачі про поширення теплового імпульсу.

1.3. Аналіз реологічних моделей в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння

На виробі з дерева, як структурного будівельного матеріалу, попит завжди був високим. До переваг використання цього матеріалу можна віднести його високу міцність, жорсткість, екологічну чистоту матеріалу і високу вантажопідйомність. Незважаючи на це, сильна вологозалежність практично всіх механічних властивостей не дозволяє у повній мірі використовувати потенціал даного матеріалу. Залежна від часу довгострокова в'язко-пружна повзучість [41, 55] при змінних умовах навколишнього середовища [40, 42] може прискорити деградацію жорсткості і міцності деревини та привести до втрати структурної цілісності. Таким чином, актуальною залишається наукова задача вибору оптимальних параметрів сушіння деревини, при яких внутрішні напруження у ній будуть мінімальними.

Сушіння деревини включає в себе три основних змінних з часом процесів, а саме: теплообміну, вологообміну і зміни об'єму. Розвиток напружень і деформацій є наслідком вище зазначених процесів. Складність характеристик матеріалу деревини (структурної неоднорідності, анізотропії, біологічної мінливості реологічних властивостей, наявності ефекту «пам'яті» і т.д.) та їх залежність від вмісту вологи та температури ускладнюють розробку реалістичного математичного опису розподілу напружень і деформацій під час сушіння.

Як тільки вміст вологи в поверхневих шарах падає нижче точки насичення волокна, оболонка (зовнішня частина взірця) намагається зменшитися, а ядро розбухає. По мірі видалення вологи з ядра взірця, воно починає стискатися, натомість поверхневі шари розтягуються. Коли напруга при розтягуванні в зовнішніх шарах перевищує межу міцності деревини, це призводить до руйнування поверхні [121, 126, 128, 148, 150, 163, 165, 179, 213].

Для кращого розуміння механічних властивостей матеріалів, підданих деформаціям, використовують базові реологічні моделі. Вони забезпечують важливі аналітичні інструменти для прогнозування і моделювання реологічних властивостей матеріалу. Під час деформацій в'язко-пружних середовищ виникають як в'язкі, так і пружні властивості. Модель, що їх описує, повинна пов'язати напруження, деформації та їх похідні за часом [1]. Її важче сформулювати, ніж модель з лінійної теорії пружності, тому що знаходження її реологічних властивостей потребує вирішення нелінійних диференціальних рівнянь. Тому, запропоновано декілька моделей різної складності для характеристики в'язко-пружного матеріалу [17]. Для опису нелінійних властивостей таких матеріалів, потрібно змінити прості класичні моделі Максвелла і Фойгта або їх комбінації для включення нелінійних членів. Слід також зазначити, що при побудові реологічних моделей Фойгта (рис. 1.2, а) та Максвелла (рис. 1.2, б) використовувались паралельні та послідовні з'єднання пружної та в'язкої компоненти відповідно. В основу поведінки пружного елемента покладено закон Гука, в'язкого – закон в'язкості Ньютона.

Як правило, при використанні реологічних моделей для ізотропного матеріалу визначають тільки осьову деформацію або напруження, щоб охарактеризувати повзучість або релаксаційні параметри моделі. Тим не менш, також контролюють поперечні навантаження, щоб визначити співвідношення в'язко-пружності [53]. Використання такого підходу стає важким для анізотропних матеріалів, зокрема деревини. За допомогою аналізу експериментальних даних можуть бути оцінені параметри одновимірних

реологічних моделей, які в подальшому можна використовувати для опису властивостей у будь-якому напрямку. Але для ортотропного випадку, це не дозволяло врахувати багатовимірні ефекти.

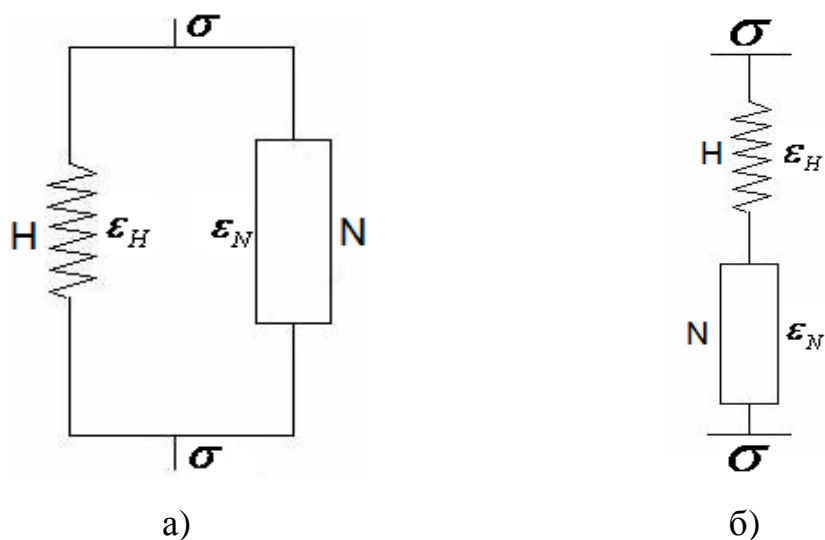


Рис. 1.2. Реологічні моделі: а) Фойгта; б) Максвелла

Було розроблено реологічні моделі, що описують динамічну поведінку в'язко-пружних матеріалів, до яких без сумніву можна віднести деревину. Проте, класичні моделі не враховують складну структуру та нелінійні властивості матеріалу. Тому останнім часом почали широко використовувати фрактальні реологічні моделі, для опису яких застосовується математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку [13, 52]. Для їхньої побудови, як базис, дуже часто вибирали класичні моделі Максвелла, Фойгта або Кельвіна.

Відповідно, як класичні, так і фрактальні моделі мають свої переваги та недоліки. Однією із переваг перших над другими є те, що їх використання приводить до застосування традиційних диференціальних рівнянь опису динамічних властивостей замість диференціальних рівнянь дробового порядку у фрактальних моделях [14]. Пошук розв'язку останнього є складнішою задачею ніж розв'язок звичайного. Проте, динамічна характеристика структур

в'язко-пружних матеріалів та нелінійність цієї задачі вимагають залучення саме апарату інтегро-диференціювання дробового порядку.

Деревина являє собою полімерний композиційний матеріал з характерними в'язко-пружними властивостями [20, 28, 43, 81, 99, 100], що означає існування пружної і в'язкої складової його механічної поведінки. Після розвантаження ідеально пружні матеріали повертають всю енергію, отриману під час навантаження, у той час як для в'язко-пружних матеріалів матиме місце затримка механічної реакції і розсіювання енергії. Пружність деревини головним чином визначається жорсткістю і орієнтацією кристалічної целюлози, мікрофібрил в шарі клітинної стінки [105], у той час як в'язкість походить від лігніну і геміцелюлози [81, 106]. В'язко-пружні властивості деревини є анізотропними і в значній мірі залежать від температури і вологості матеріалу [81].

Вагомий вклад у дослідження неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у процесі сушіння деревини здійснили Я. І. Соколовський та Б. П. Поберейко [169-171]. Була розроблена методика та проведені експерименти в'язко-пружної поведінки цього матеріалу. Отримані результати дозволили описати зв'язок між динамікою вологовмісту та температури, анізотропії змінних термофізичних властивостей, геометричних розмірів взірця та напруженнями у деревині під час сушіння [183, 196-198].

У роботах [123, 206] показано залежність залишкової деформації деревини від процесу навантаження та розвантаження взірця. З цих робіт також випливає, що після його розвантаження відбувається пружне відновлення, яке залежить від попереднього навантаження. Також виникають в'язко-пружні деформації, які з часом згасають. На рис 1.3 показано пружну і в'язко-пружну деформації, що виникають під час навантаження взірця та пружну, в'язко-пружну і залишкову деформації що виникають під час розвантаження. При цьому зв'язок між напруженнями та деформаціями можна виразити за допомогою інтегрального рівняння Больцмана-Вольтера:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.20)$$

тут $\Pi(t - \tau)$ - ядро повзучості.

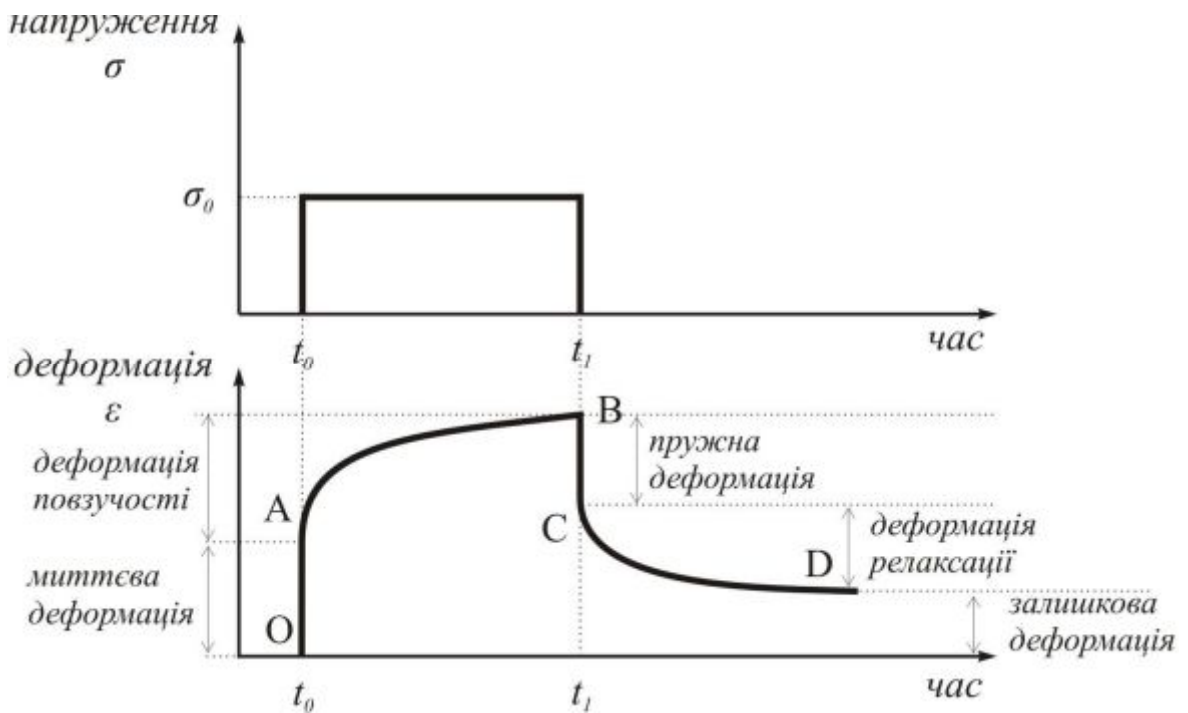


Рис. 1.3. Характеристика зміни напружень при навантаженні та розвантаженні
взірця

у зв'язку із труднощами ідентифікації ядер спадковості в рамках загальної нелінійної теорії Вольтера в ряді робіт побудовані спрощені варіанти, виходячи з реального характеру нелінійного деформування матеріалу [115, 146, 147, 151, 175]. Відомі роботи, в яких розв'язок задач в'язко-пружності побудовано на основі використання ядер у формі лінійної комбінації експоненціальних функцій [147, 151]. Однак більш перспективними вважаються дробово-експоненціальні ядра. Вони, як виявилось в [133-139, 144], найбільш ефективні при моделюванні процесів нелінійного в'язко-пружного деформування. Табуляція дробово-експоненціальних функцій наведена у [174]. Крім того, розроблені ефективні методи визначення параметрів дробово-експоненціальних ядер, що дозволяють досить точно моделювати процеси

повзучості і релаксації в'язко-пружних матеріалів, для яких є характерним ефект «пам'яті». Аналіз цих методів викладено в [35].

1.4. Аналіз методів реалізації моделей

Використання диференціальних рівнянь з частковими похідними є одним з найбільш важливих інструментів, що використовуються в галузі математичного моделювання нестационарних процесів. Проте, не існує узагальнених методів для вирішення таких рівнянь. Одним з найбільш відомих способів знайти розв'язок таких рівнянь є, безперечно, метод інтегральних перетворень [2, 15, 96].

Інтегро-диференціювання дробового порядку є узагальненням звичайних інтегралів і похідних цілих порядків. Вони з'являються при спробі удосконалення та модифікацій існуючих математичних моделей. Таким чином, постає необхідність у адаптації існуючих методів для знаходження розв'язку фрактальних моделей. На перший погляд перехід від методів вирішення традиційних диференціальних рівнянь до рівнянь з похідною дробового порядку не повинен бути складним процесом, але на практиці виникла необхідність у додаткових умовах для знаходження їх коректного розв'язку.

1.4.1. Аналітичні методи

Застосування диференціальних рівнянь дробового порядку в останні роки викликало значний інтерес для моделювання різних фізичних процесів. У свою чергу, математичні аспекти диференціальних рівнянь дробового порядку і методи їх вирішення обговорювалися багатьма авторами: метод ітерацій в [177], метод рядів в [122], метод перетворень Фур'є в роботах [5, 44], спеціальні методи для диференціальних рівнянь раціонального порядку або для рівнянь спеціального виду в [4, 46, 63, 73], застосування перетворення Лапласа [37, 38,

67, 68, 94], метод операційного числення в [39, 63]. Відзначимо, що в математичних трактатах з диференціальних рівнянь дробового порядку, як правило, використовується підхід Рімана-Ліувілля до розуміння похідної та інтеграла дробового порядку.

За основу береться дробова лівостороння похідна з відповідним дробовим інтегралом, який є природнім узагальненням формули Коші. Що стосується початкової задачі для диференціальних рівнянь з дробовими похідними в сенсі Рімана-Ліувілля, то є деякі проблеми з початковими умовами, які описані в [39, 63, 94]. Вони мають бути задані як початкові значення дробового інтеграла $I^{m-\alpha}$ та її класичних похідних порядку $k = 1, 2, \dots, m-1$. З іншого боку, при моделюванні реальних процесів початкові умови відображаються в термінах обмеження початкового значення шуканої функції та її похідних цілого порядку. Для того, щоб виконати цю вимогу, використовують альтернативне визначення дробової похідної за Капуто [12].

У серії робіт [37, 67, 68] дробова похідна Капуто була застосована в деяких найпростіших лінійних диференціальних рівняннях дробового порядку з постійними коефіцієнтами і отримано аналітичний розв'язок за допомогою перетворень Лапласа. Розглянемо застосування даного механізму для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь з похідною дробового порядку. Таке перетворення для функції $f(x)$ при $0 < x < \infty$ визначається наступним чином:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx. \quad (1.21)$$

Перетворення Лапласа для дробового інтегрального оператора Рімана-Ліувілля порядку $\alpha > 0$ може бути подано у вигляді:

$$L[I^{\alpha} f(x)] = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}. \quad (1.22)$$

Для похідної дробового порядку $m-1 < \alpha < m, m \in N$, цей оператор запишеться в наступній формі:

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)}{s^{m-\alpha}}. \quad (1.23)$$

Таким чином можна перетворити диференціальні рівняння з похідними дробового порядку в звичайні алгебраїчні рівняння та, розв'язавши їх, отримати шукану функцію Лапласа $F(s)$.

Свій внесок у розвиток аналітичних методів знаходження розв'язку диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку зробили вчені у працях [47, 89]. Протягом останніх десятиліть також використовувалися такі методи як: декомпозиції Адомейна [33, 76, 78, 98, 114], варіаційно-ітераційний метод [75, 83], метод гомотопічних збурень [77, 84, 112], спектральні методи [27, 50, 97, 103], а також інші методи [56, 118].

1.4.2. Чисельні методи

Недавно було розроблено математичні моделі в таких областях, як дослідження в'язко-пружності, електрохімії, дифузійних процесів і тощо, що формулюються в термінах похідних та інтегралів дробового порядку. Деякі з найбільш відомих прикладів застосування даного математичного апарату наведені в [3, 12, 32, 34, 71, 86]. Очевидно, що існує значний попит на засоби, які б дозволили знаходити чисельний розв'язок таких задач. Проте, ці алгоритми були розроблені в дуже обмеженій кількості. Інтеграл у визначенні похідних дробового порядку вказує, що вони є нелокальними операторами, що в свою чергу пояснює одну із основних цінностей їхнього застосування. Дробова похідна в деякій точці по часу або простору містить інформацію про функцію в скінченній кількості попередніх точок часової або просторової дискретизації відповідно. Таким чином, дані похідні можуть врахувати ефект пам'яті, яким володіють деякі середовища, до них можна віднести в'язко-пружні матеріали або полімери, а також наявність аномальних дифузійних процесів.

Врахування ефекту пам'яті дробовими похідними в математичних моделях приводить до зростання обчислювальних затрат при знаходженні

чисельного розв'язку. Будь-який алгоритм, що використовує дискретизацію похідних дробового порядку повинен брати до уваги її нелокальність, що приводить до підвищення вимог зберігання обчислювальних даних і складності алгоритму. Чисельні алгоритми знаходження розв'язку диференціальних та інтегральних рівнянь, що містять оператори дробового порядку можна знайти в літературі [6-10, 87], присвяченій так званим методам колокації для вирішення інтегральних рівнянь Вольтера-Абеля. У працях [57-62] вченими використовувались так звані дробово-лінійні багатокрокові методи для чисельного вирішення таких інтегральних рівнянь.

Також є багато праць, присвячених чисельним методам розв'язку диференціальних рівнянь дробового порядку. Вони засновані на композиції скінченно-різницевої схем, їх можна знайти в роботах Diethelm [23, 25, 26], Ford і Simpson [29, 30], Podlubny [92]. Фрактальне формулювання методів типу Адамса висвітлюється у роботах [22, 24].

Основним питанням для теорії та практики наближених методів є – точність розв'язку. Проблема узагальнюється таким чином, як покращити точність наближеного методу, не збільшуючи при цьому осциляцій, які з'являються при переході на кожний наступний ярус. Причина таких осциляцій – це дисперсія різницевої схеми по відношенню до диференціальної задачі, тобто відмінність (відставання або випередження) фазової швидкості сіткових гармонік від диференціальних гармонік. Звідси ясно, якою важливою є побудова таких схем для розв'язування диференціальних рівнянь, у яких враховані дисперсійні властивості неперервної моделі та зведений до мінімуму спотворюючий вплив цих властивостей.

Для опису аномальних дифузійних процесів використовується модифікований закон Фіка, що вимагає залучення математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку [153]. Тому, виникають початково-крайові задачі для диференціальних рівнянь з дробовими похідними. Для вирішення таких завдань розвиваються аналітичні методи, проте

найбільшого поширення набули чисельні методи [202]. Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що аналітичними методами вдається отримати тільки часткові розв'язки.

Похідну дробового порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ за Ріманом-Ліувілем можна записати [153, 202]:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(\tau^n)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{f'(\xi)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} d\xi \right], \quad (1.24)$$

де n - індекс відповідного часового інтервалу $[\tau^n; \tau^{n+1}]$.

Запишемо похідну $f'(\tau)$ на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ у вигляді скінченної різниці [145]:

$$\frac{df}{d\tau} \approx \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} \quad (\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n). \quad (1.25)$$

У свою чергу різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ можна записати наступним чином [153, 202]:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial \tau^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}. \quad (1.26)$$

Одна з проблем, що виникає при використанні дробових похідних, полягає в тому, що не існує їх однозначного визначення. Чисельні методи розв'язання задач для рівнянь з дробовими похідними прив'язані до виду обраної похідної, тому виникає необхідність аналізу та порівняння результатів, отриманих при використанні різних визначень і чисельних методів.

1.5. Висновки

У даному розділі проведено аналіз моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння. Показано, що деревина є капілярно-пористим матеріалом з складною природою просторових кореляцій та наявністю характерних для неї ефектів «пам'яті», самоорганізації і детермінованого хаосу. Відповідно, для створення

адекватних математичних моделей процесів, що протікають у деревині під час сушіння, та які б враховували усі згадані вище властивості цього матеріалу, доцільним є залучення нетрадиційних підходів, заснованих на застосуванні математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку.

Розглянуто основні праці, присвячені вивченню математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку. Опрацьовано ряд визначень фрактальних інтегралів та похідних. У порівнянні з традиційним апаратом, коли для кількісного опису досліджуваного явища використовувалися відповідні рівняння, що мають заданий клас розв'язків, застосування апарату інтегро-диференціювання дробового порядку дозволяє використовувати однопараметричний континуум диференціальних рівнянь. Фрактальний підхід вносить новий рівень розуміння динаміки співвідношення оборотних і необоротних процесів, в основі яких лежать самоорганізація та врахування ефекту «пам'яті».

Також, проведено огляд літературних джерел, присвячених пошуку розв'язку рівнянь, у яких використовується математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку. Виявлено ряд методів, що дозволяють знайти аналітичні розв'язки, проте їх застосування обмежено певним класом задач. Розглянуто також чисельні методи, використання яких приведе до отримання наближеного розв'язку, але коло їх застосування є значно ширшим в порівнянні з аналітичними.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

У цьому розділі побудовано математичну модель неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Використано математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку для опису цього процесу. Застосовано скінченно-різницевий метод для отримання чисельних значень модельованого процесу. Розроблено прикладне програмне забезпечення, заснованого на використанні скінченно-різницевого методу предиктор-коректор, для реалізації цієї математичної моделі. Основні результати опубліковані у працях [108, 182, 184, 190, 193, 194].

2.1. Основні співвідношення математичного апарату диференціювання дробового порядку

Використання традиційних методів опису протікання процесів у капілярно-пористих середовищах з фрактальною структурою приводить до створення математичних моделей, які не дають змогу в повному обсязі описати надповільні процеси дифузійного типу та не враховують такі властивості матеріалу як: ефекти «пам'яті», самоорганізації, детермінованого хаосу, складну систему просторових кореляцій та інші. Усі ці ознаки притаманні середовищам з фрактальною структурою і для того, щоб їх урахувати, доцільно використовувати математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку [85, 89].

Особливу увагу приділимо похідним дробового порядку α [47, 177], у випадку коли $0 < \alpha < 1$. Надалі розглядаючи такі похідні, вважатимемо, що значення дробового порядку змінюватиметься у вищевказаних межах.

Слід також зазначити, що математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку має доволі велику кількість неоднозначностей. Цей висновок можна зробити, спираючись лише на той факт, що існує декілька визначень похідної дробового порядку. Зокрема, оператор дробового диференціювання існує у розумінні Рімана-Ліувілля (1.4), Капуто (1.8), Грюнвальда-Летнікова (1.9).

Не залежно від визначення операторів диференціювання дробового порядку, для них є справедлива така властивість [132, 177]:

$$D^\alpha f|_{a^+} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right]. \quad (2.1)$$

Незважаючи на те, що існує декілька визначень для оператора диференціювання дробового порядку, для нього є справедливими властивості лінійності, масштабування аргумента та інші.

Зокрема, мають місце такі властивості лінійності:

$$D^\alpha [f(t) + g(t)] = D^\alpha f(t) + D^\alpha g(t); \quad (2.2)$$

$$D^\alpha [cf(t)] = cD^\alpha f(t). \quad (2.3)$$

Властивість масштабування аргументу для оператора диференціювання дробового порядку можна записати:

$$\frac{d^\alpha f(\beta t)}{dt^\alpha} = \beta^\alpha \frac{d^\alpha f(\beta t)}{d(\beta t)^\alpha}. \quad (2.4)$$

Це робить його придатним для вивчення масштабованої інваріантності. Існує зв'язок між масштабуванням локального аргументу нерегулярної функції та порядком дробової похідної.

Оператори диференціювання дробового порядку є адитивними по індексах:

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.5)$$

Для визначення похідної довільного дробового порядку зручно використовувати властивість послідовної композиції операторів:

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t); \quad (2.6)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n; \quad (2.7)$$

$$\alpha_i < 1. \quad (2.8)$$

Для будь-якої функції, що має неперервну похідну дробового порядку, є справедливим наступний аналог формули Тейлора:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(D^{\alpha+i} f)(a)}{\Gamma(\alpha+i+1)} (t-a)^{\alpha+i} + R_n(t). \quad (2.9)$$

Для операторів диференціювання дробового порядку, спираючись на аналог формули Тейлора, можна вивести таку властивість:

$$\int_a^b f(t)(D^\alpha g)(t)dt = \int_a^b g(t)(D^\alpha f)(t)dt. \quad (2.10)$$

Все більш очевидними стають переваги використання апарату інтегро-диференціювання дробового порядку для опису реальних динамічних об'єктів та процесів в різних галузях науки і техніки. Розробка підходів для отримання моделі дробового порядку реальних об'єктів і процесів та фізична інтерпретація похідних дробового порядку на сьогодні є актуальними науковими напрямками, які досить швидко розвиваються. Властивості цього апарату широко використовуються для розвитку чисельних методів і обчислювальних алгоритмів для розв'язку диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку.

2.2. Математична модель неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою

Описавши процес тепло- та вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах під час конвективного сушіння беручи за основу співвідношення (1.15) – (1.19), ми нехтуємо тим фактом, що для цих матеріалів є характерними такі властивості як: складна природа просторових кореляцій, ефекти самоорганізації та наявність надповільного процесу дифузійного типу. Тому

пропонується використовувати математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку, який дозволить врахувати вищенаведені властивості капілярно-пористих матеріалів під час процесу конвективного сушіння.

Під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою волога виділяється у всіх напрямках. Дерев'яний брусок можна розглядати як двовимірне тіло, оскільки розміри його поперечного перерізу є малими у порівнянні з довжиною, а коефіцієнт вологопровідності вздовж волокон є набагато більшим від цього коефіцієнту поперек волокон.

Беручи до уваги вище сказане, математичну модель зміни температури $T(\tau, \mathbf{x})$ та вологовмісту $U(\tau, \mathbf{x})$ під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою протягом часу $\tau \in [0, \tau_{end}]$ в осесиметричній області $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$ поперечного перерізу, центр якого збігається з початком координат, можна описати системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком [110, 182, 193, 194]:

$$\begin{cases} c(T, U)\rho(U)\frac{\partial^\alpha T(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2}\right) + \varepsilon\rho_0 r \frac{\partial^\alpha U(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha}; \\ \frac{\partial^\alpha U(\tau, \mathbf{x})}{\partial \tau^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_1(T, U)\frac{\partial U(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_2(T, U)\frac{\partial U(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_1(T, U)\delta(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_2(T, U)\delta(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2}\right). \end{cases} \quad (2.11)$$

До системи диференціальних рівнянь (2.11) додаються відповідні граничні умови 3-го роду, що характеризують взаємодію матеріалу із навколишнім середовищем. Зокрема, умови (2.12), (2.13) описують з якою швидкістю тепло буде передаватися через відповідну поверхню взірця та швидкість, з якою буде виділятися вологовміст через цю поверхню. Умови (2.14) та (2.15) враховують симетричність області задачі.

$$\begin{cases} \left.\lambda_1(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_1}\right|_{x_1=l_1} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_1\left(U(\tau, \mathbf{x})\Big|_{x_1=l_1} - U_p\right) = \alpha_1(T, U)\left(T(\tau, \mathbf{x})\Big|_{x_1=l_1} - t_c\right); \\ \left.\lambda_2(T, U)\frac{\partial T(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_2}\right|_{x_2=l_2} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_2\left(U(\tau, \mathbf{x})\Big|_{x_2=l_2} - U_p\right) = \alpha_2(T, U)\left(T(\tau, \mathbf{x})\Big|_{x_2=l_2} - t_c\right); \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(T,U)\delta(T,U)\frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{x_1=l_1} + a_1(T,U)\frac{\partial U(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{x_1=l_1} = \beta_1(U_p - U(\tau,\mathbf{x})\Big|_{x_1=l_1}) \\ a_2(T,U)\delta(T,U)\frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{x_2=l_2} + a_2(T,U)\frac{\partial U(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{x_2=l_2} = \beta_2(U_p - U(\tau,\mathbf{x})\Big|_{x_2=l_2}) \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = 0; \\ \frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0; \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(T,U)\delta(T,U)\frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} + a_1(T,U)\frac{\partial U(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = 0; \\ a_2(T,U)\delta(T,U)\frac{\partial T(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} + a_2(T,U)\frac{\partial U(\tau,\mathbf{x})}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

До системи диференціальних рівнянь (2.11) та граничних умов (2.12)-(2.15) також додаються початкові умови для нерегулярного режиму процесу сушіння, що характеризують значення температури та вологовмісту у початковий момент часу:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(\tau,\mathbf{x})\Big|_{\tau=0} = T_0(\mathbf{x}); \\ U(\tau,\mathbf{x})\Big|_{\tau=0} = U_0(\mathbf{x}). \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Для регулярного режиму, що характеризується відповідними значеннями критеріальних чисел Фур'є та Біо, початкові умови задаються функціями параболічного типу від просторових змінних. Тут, τ – час; x_1, x_2 – координатні осі; $U(\tau, \mathbf{x})$ – вологовміст; $T(\tau, \mathbf{x})$ – температура; $\lambda_i(T, U)$ – коефіцієнти теплопровідності; $a_i(T, U)$ – коефіцієнти вологопровідності; $U_p(t_c, \varphi)$ – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури середовища t_c і відносної вологості зовнішнього середовища φ ; $c(T, U)$ – питома теплоємність; $\rho(U)$ – густина; ρ_0 – базисна густина; ε – коефіцієнт фазового переходу; ν – швидкість руху агента сушіння; r – питома теплота пароутворення; $\alpha_i(T, U)$ – коефіцієнти теплообміну; $\beta(t_c, \varphi, \nu)$ – коефіцієнт вологообміну; $\delta(T, U)$ – термоградієнтний коефіцієнт; α – дробовий порядок похідної (характеризує

долю каналів, відкритих для протікання процесу); $T_0(\mathbf{x})$ – початкова температура; $U_0(\mathbf{x})$ – початковий вологовміст.

Таким чином, вдосконалено математичну модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах під час сушіння, що дозволяє врахувати їх фрактальну структуру, наявність аномальних дифузійних процесів та анізотропію тепломеханічних характеристик. Протікання згадуваного процесу не в повній мірі підкоряються законам Фіка, тому для його опису необхідне залучення математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку.

2.3. Скінченно-різницева реалізація моделі

Для моделювання процесу неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, що описується системою диференціальних рівнянь (2.11) з відповідними крайовими умовами 3-го роду (2.12) – (2.15) та початковими умовами (2.16), знайдено чисельні значення модельованого процесу за допомогою скінченно-різницевого методу.

Для цього вихідну диференціальну задачу у частинних похідних замінено відповідною різницевою схемою [50, 97, 153]. Тобто, для розв'язування неперервної задачі будують дискретну модель, характер поведінки якої описують різницеві рівняння. Очевидно, будь-яка дискретна модель не тотожна вихідній неперервній задачі.

Особливістю наближених методів є те, що кожному рівнянню можна поставити у відповідність велику кількість різницевих апроксимацій, що мають майже однакові характеристики. Тому побудова різницевої схеми, властивості якої якнайповніше відповідають вихідній диференціальній задачі, є основним завданням під час знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння скінченно-різницевим методом. Розвиток теорії різницевих схем

відбувається у таких напрямках, як покращення порядку апроксимації та зменшення кількості арифметичних операцій для знаходження розв'язків. Іншими словами, різницева схема повинна якомога краще моделювати властивості вихідного диференціального рівняння, до того ж кількість арифметичних дій, потрібних для знаходження розв'язку, має бути по можливості пропорційна кількості вузлів сітки.

Беручи до уваги різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α (1.26), явна різницева схема для системи диференціальних рівнянь (2.11) прийме вигляд [110, 193]:

$$\left\{ \begin{aligned} c(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \rho(U_{ij}^n) \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \lambda_1(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_{x_1}^2} + \\ &+ \lambda_2(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_{x_2}^2} + \varepsilon \rho_0 r \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}; \\ \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= a_1(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{U_{i-1j}^n - 2U_{ij}^n + U_{i+1j}^n}{h_{x_1}^2} + a_2(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{U_{ij-1}^n - 2U_{ij}^n + U_{ij+1}^n}{h_{x_2}^2} + \\ &+ a_1(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \delta(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{T_{i-1j}^n - 2T_{ij}^n + T_{i+1j}^n}{h_{x_1}^2} + a_2(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \delta(T_{ij}^n, U_{ij}^n) \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h_{x_2}^2}, \end{aligned} \right. \quad (2.17)$$

де h_{x_1} , h_{x_2} - кроки по просторових змінних x_1 та x_2 відповідно.

Аналогічним чином можна записати неявну різницеву схему для системи диференціальних рівнянь (2.11):

$$\left\{ \begin{aligned} c(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \rho(U_{ij}^{n+1}) \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= \lambda_1(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{T_{i-1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i+1j}^{n+1}}{h_{x_1}^2} + \\ &+ \lambda_2(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{T_{ij-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij+1}^{n+1}}{h_{x_2}^2} + \varepsilon \rho_0 r \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha}; \\ \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} &= a_1(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{U_{i-1j}^{n+1} - 2U_{ij}^{n+1} + U_{i+1j}^{n+1}}{h_{x_1}^2} + \\ &+ a_2(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{U_{ij-1}^{n+1} - 2U_{ij}^{n+1} + U_{ij+1}^{n+1}}{h_{x_2}^2} + \\ &+ a_1(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \delta(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{T_{i-1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i+1j}^{n+1}}{h_{x_1}^2} + \\ &+ a_2(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \delta(T_{ij}^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) \frac{T_{ij-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij+1}^{n+1}}{h_{x_2}^2}. \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

Застосувавши різницеву апроксимацію похідної першого порядку (1.25) отримаємо різницеві схеми апроксимації крайових умов (2.12) – (2.15):

$$\begin{cases} \lambda_1(T_{im}^n, U_{im}^n) \frac{T_{im}^n - T_{i-1m}^n}{h_{x_1}} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_1(U_{im}^n - U_P) = \alpha_1(T_{im}^n, U_{im}^n)(T_{im}^n - t_c), \\ \lambda_2(T_{mj}^n, U_{mj}^n) \frac{T_{mj}^n - T_{mj-1}^n}{h_{x_2}} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta_2(U_{mj}^n - U_P) = \alpha_2(T_{mj}^n, U_{mj}^n)(T_{mj}^n - t_c), \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} a_1(T_{im}^n, U_{im}^n) \delta(T_{im}^n, U_{im}^n) \frac{T_{im}^n - T_{i-1m}^n}{h_{x_1}} + a_1(T_{im}^n, U_{im}^n) \frac{U_{im}^n - U_{i-1m}^n}{h_{x_1}} = \beta_1(U_P - U_{im}^n), \\ a_2(T_{mj}^n, U_{mj}^n) \delta(T_{mj}^n, U_{mj}^n) \frac{T_{mj}^n - T_{mj-1}^n}{h_{x_2}} + a_2(T_{mj}^n, U_{mj}^n) \frac{U_{mj}^n - U_{mj-1}^n}{h_{x_2}} = \beta_2(U_P - U_{mj}^n), \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \frac{T_{i0}^n - T_{i-10}^n}{h_{x_1}} = 0; \\ \frac{T_{0j}^n - T_{0j-1}^n}{h_{x_2}} = 0; \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} a_1(T_{i0}^n, U_{i0}^n) \delta(T_{i0}^n, U_{i0}^n) \frac{T_{i0}^n - T_{i-10}^n}{h_{x_1}} + a_1(T_{i0}^n, U_{i0}^n) \frac{U_{i0}^n - U_{i-10}^n}{h_{x_1}} = 0; \\ a_2(T_{0j}^n, U_{0j}^n) \delta(T_{0j}^n, U_{0j}^n) \frac{T_{0j}^n - T_{0j-1}^n}{h_{x_2}} + a_2(T_{0j}^n, U_{0j}^n) \frac{U_{0j}^n - U_{0j-1}^n}{h_{x_2}} = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Для знаходження числових характеристик величин неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння використовувався скінченно-різницевий метод предиктор-коректор. В якості предиктора використовувався метод, заснований на явній різницевій схемі (2.17), в якості коректора – на неявній (2.18).

2.4. Програмне забезпечення обчислення динаміки температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

Для знаходження чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою

у процесі сушіння (2.11) – (2.16), розроблено прикладне програмне забезпечення мовою програмування MatLab 7.

Для створення прикладного програмного забезпечення реалізації математичної моделі (2.11) – (2.16) переглянено велику кількість середовищ та проаналізовано їх можливості. Перевагу надано середовищу MatLab 7 враховуючи його особливості:

- величезні можливості у роботі з матрицями;
- створення інтерфейсу користувача;
- зручні засоби для реалізації алгоритмів;
- містить велику бібліотеку математичних програм, що реалізують майже всі сучасні чисельні методи та функції;
- використання концепцій об'єктно-орієнтованого програмування;
- широкий спектр можливостей для побудови графічних залежностей та візуального аналізу даних.

На рис. 2.1 наведено діаграму варіантів використання знаходження чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою. Вона описує всі можливі дії, які може зробити користувач під час пошуку чисельного розв'язку задачі. Видно, що користувачу доступні такі можливості: задання часу моделювання, вибір породи деревини, задання геометричних розмірів, задання початкових значень температури та вологовмісту, задання параметрів агента сушіння, задання параметрів скінченно-різницевого методу, обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення. Дії, які можна виконувати у відповідному варіанті використання є такими:

- «Задання часу моделювання» - опрацьовує подію визначення користувачем часу, для якого буде шукатися чисельний розв'язок задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння;

- «Вибір породи деревини» - реалізує можливість вибору породи деревини, моделювання процесу сушіння якої буде реалізовуватися;
- «Задання геометричних розмірів» - дозволяє користувачеві внести геометричні розміри взірця, а саме ширину та довжину;
- «Задання початкових значень температури та вологовмісту» - дозволяє користувачеві задати числові значення початкової температури та вологовмісту взірця;
- «Задання параметрів сушильної камери» - дозволяє користувачеві внести інформацію про такі параметри сушильної камери як: температуру, швидкість руху та відносну вологість агента сушіння;
- «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення» - реалізовує алгоритм знаходження чисельного розв'язку задачі (2.11) – (2.16), використовуючи різницеві апроксимації (2.17) – (2.22). Виконання цього варіанту використання приводить до виконання наступних: обчислення значень коефіцієнтів диференціального рівняння, обчислення значень коефіцієнтів граничних умов, обчислення значень змінних коефіцієнтів.

Варіант використання «Обчислення значень коефіцієнтів диференціального рівняння» в залежності від вибраної породи деревини визначає наступні коефіцієнти математичної моделі: рівноважний вологовміст, базисну густину, коефіцієнт фазового переходу, питому теплоту пароутворення, дробовий порядок похідної. «Обчислення значень коефіцієнтів граничних умов» обчислює коефіцієнти тепло- та вологопровідності, тепло- і вологообміну залежно від температури та вологовмісту на границі взірця. «Обчислення значень змінних коефіцієнтів» обчислює значення коефіцієнтів, що змінюються в залежності від температури та вологовмісту. До змінних коефіцієнтів відносяться: коефіцієнт тепло- та вологопровідності, коефіцієнт тепло- та вологообміну, питома теплоємність, густина, термоградієнтний коефіцієнт.

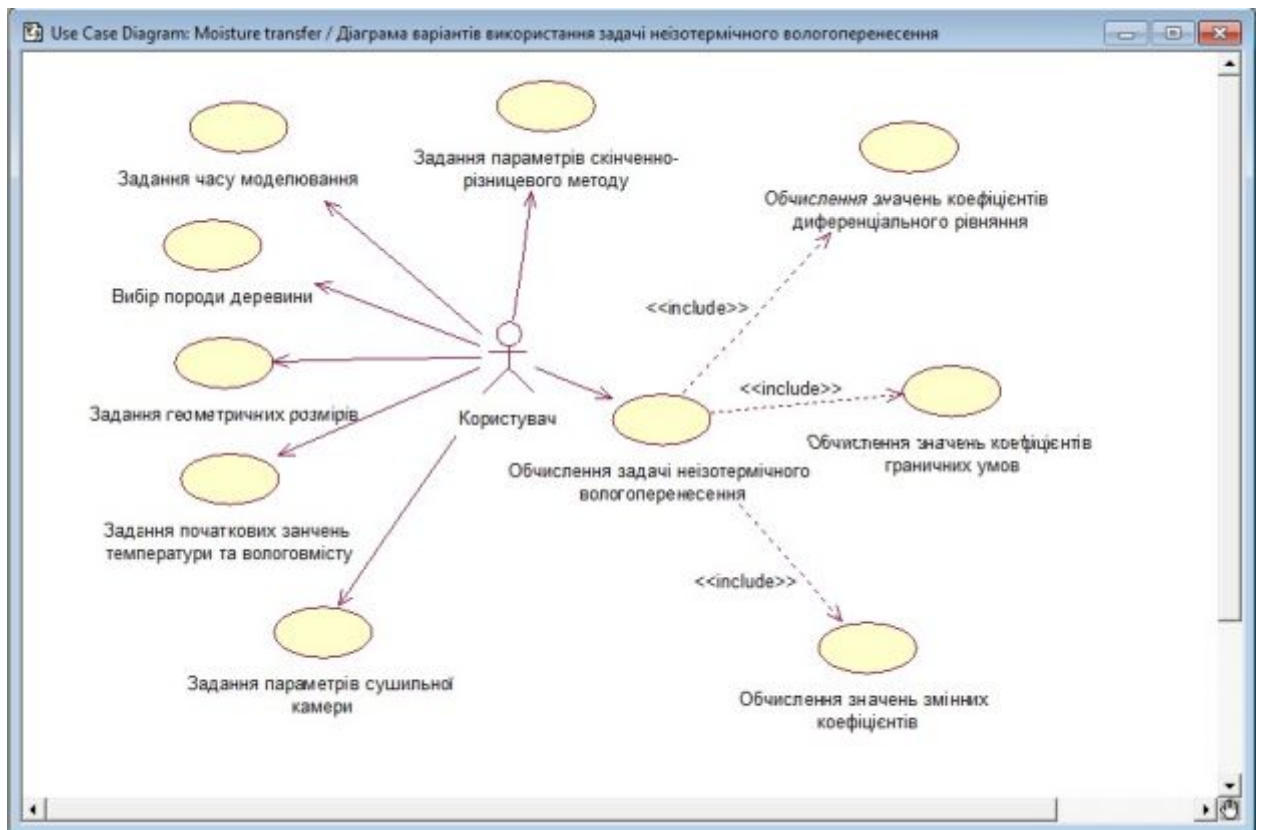


Рис. 2.1. Діаграма варіантів використання задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

На рис. 2.2 зображено діаграму послідовності, побудованої для варіанту використання «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення». Вона відображає послідовність дій, що виконуються при знаходженні чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою під час сушіння.

Проаналізувавши рис. 2.2 бачимо, що для знаходження чисельного розв'язку цієї задачі використовується два класи UserForm та Solver. Клас UserForm відноситься до стереотипу Boundary. Він призначений для реалізації можливості задання користувачем параметрів математичної моделі, геометричних розмірів взірця, параметрів агента сушіння та інших необхідних параметрів для знаходження чисельного розв'язку задачі (2.11) – (2.16).

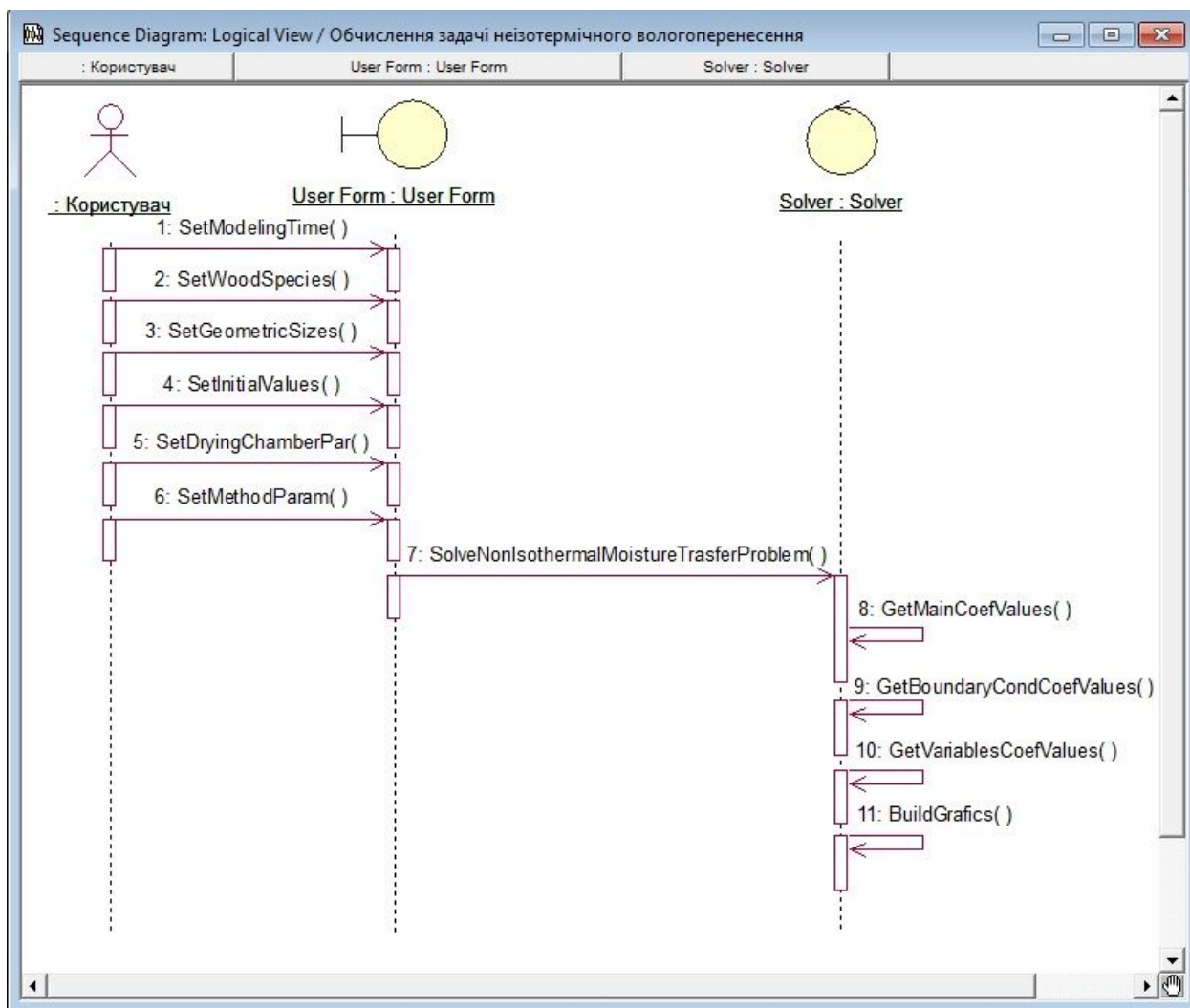


Рис. 2.2. Діаграма послідовності для варіанту використання «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення»

Об'єкт Solver відноситься до стереотипу Control. Він призначений для реалізації алгоритму знаходження чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Цей об'єкт містить методи, що дозволяють визначити необхідні матриці для зберігання та обчислення числових значень температури та вологовмісту, реалізувати метод предиктор-коректор з використанням скінченно-різницевої апроксимації (2.17) – (2.22), обчислити коефіцієнти математичної моделі для вибраної породи деревини та граничних умов, обчислити змінні коефіцієнти математичної моделі, що залежать від

температури та вологовмісту взірця, побудувати графічні залежності динаміки температури та вологовмісту.

До об'єкту `UserForm` відносяться наступні методи, що реалізують взаємодію користувача з програмним забезпеченням:

- `SetModelingTime()` – встановлення часу моделювання;
- `SetWoodSpecies()` – визначення породи деревини;
- `SetGeometricSizes()` – встановлення геометричних розмірів взірця;
- `SetInitialValues()` – встановлення початкових значень температури та вологовмісту;
- `SetDryingChamberPar()` – встановлення параметрів сушильної камери;
- `SetMethodParam()` – встановлення параметрів скінченно-різницевого методу.

Об'єкт `Solver` містить методи, що дозволяють контролювати процес знаходження чисельного розв'язку задачі:

- `SolveNonIsothermalMoistureTrasferProblem()` – реалізація алгоритму предиктор-коректор;
- `GetMainCoefValues()` – обчислення коефіцієнтів математичної моделі для вибраної породи деревини;
- `GetBoundaryCondCoefValues()` - обчислення коефіцієнтів граничних умов;
- `GetVariablesCoefValues()` – обчислення коефіцієнтів моделі, що змінюються в залежності від температури та вологовмісту;
- `BuildGrafics()` - побудова графічних залежностей динаміки температури та вологовмісту.

2.5. Валідація та верифікація моделі

Незважаючи на те, що задача неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах є доволі дослідженою, однак на даний момент

не існує адекватної математичної моделі, що описує цей процес у повній мірі, оскільки матеріал деревини є складним у своїй структурі. Як було описано вище, у цій роботі запропоновано використовувати математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку для опису модельованого процесу з урахуванням фрактальної структури деревини. Також запропоновано скінченно-різницеві схеми для знаходження чисельного розв'язку цієї задачі.

У цьому розділі підтверджено адекватність математичної моделі (2.11) – (2.16) та здійснено верифікацію програмного забезпечення, побудованого на скінченно-різницевих апроксимаціях (2.17) – (2.22) шляхом співставлення одержаних результатів з відомими експериментальними даними та результатами, отриманими іншими дослідниками у часткових випадках.

Покажемо, що чисельний метод предиктор-коректор заснований на схемах (2.17) – (2.22) є збіжним. Розглянемо задачу неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з урахуванням фрактальності матеріалу та без урахування цієї властивості. Для того, щоб урахувати фрактальну структуру матеріалу покладемо показник дробової похідної α , у системі диференціальних рівнянь (2.11), рівним значенню, визначеному із апроксимації експериментальних даних повзучості деревини. Щоб отримати чисельний розв'язок традиційної задачі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах, що не враховує фрактальну структуру матеріалу, покладемо показник дробової похідної рівним $\alpha = 1$. Чисельний експеримент обчислення динаміки температури та вологовмісту деревини у процесі сушіння наведемо для дуба з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння [123, 142]:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту - $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;

- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2$ м/с;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.02; 0.02]$ м.

Розглянемо поведінку чисельного розв'язку при згущенні розбиття. Позначимо через n - кількість точок розбиття по часовій координаті, m - по координаті x_1 , k - по координаті x_2 . Також позначимо через $U_{трад}$ значення вологовмісту традиційної моделі ($\alpha=1$), а через $U_{фракт}$ - значення вологовмісту моделі з урахуванням фрактальності матеріалу деревини. Для порівняльної характеристики беруться значення тільки вологовмісту, оскільки процес вологовидалення є повільнішим ніж процес нагрівання. Наведемо значення чисельного експерименту протягом перших 24 годин сушіння у різних геометричних точках взірця: $A(0;0)$ - центр взірця; $B(l_1/2; l_2/2)$ - середина відстані від центру взірця до його кутової точки; $C(l_1; l_2)$ - кутова точка прямокутного бруска.

Позначимо через $U_{трад}^1$ та $U_{фракт}^1$ вологовміст чисельного експерименту традиційної та фрактальної моделі описаного у табл. 2.1 відповідно. Через $U_{трад}^2$ та $U_{фракт}^2$ - вологовміст у табл. 2.2, а через $U_{трад}^3$ та $U_{фракт}^3$ - у табл. 2.3. Обчислимо максимальну за модулем відносну похибку методу при різних кількостях точок розбиття за формулою:

$$\varepsilon_{jk} = \max_i \left\{ \left| U^j \Big|_i - U^k \Big|_i \right| \right\} \quad (2.23)$$

Аналізуючи дані у табл. 2.1-2.3 та дані максимальних за модулем відносних похибок у табл. 2.4, приходимо до висновку, що метод заснований на різницевих схемах (2.17) – (2.22) є збіжним по часовій координаті, із застосуванням традиційного апарату інтегро-диференціювання та апарату інтегро-диференціювання дробового порядку, оскільки із збільшенням кількості точок розбиття максимальна відносна похибка на порядок зменшується. Аналогічним чином можна показати збіжність методу по просторових координатах.

Таблиця 2.1

Значення вологовмісту у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 160000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Геометричні точки взірця | | | | | |
|-------------|--------------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| | A(0;0) | | B($l_1 / 2; l_2 / 2$) | | C($l_1; l_2$) | |
| | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ |
| $\tau = 0$ | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 |
| $\tau = 3$ | 0,4035 | 0,4030 | 0,3500 | 0,3432 | 0,1126 | 0,1181 |
| $\tau = 6$ | 0,3593 | 0,3543 | 0,2753 | 0,2641 | 0,0979 | 0,1005 |
| $\tau = 9$ | 0,3107 | 0,3038 | 0,2260 | 0,2101 | 0,0843 | 0,0914 |
| $\tau = 12$ | 0,2393 | 0,2554 | 0,1958 | 0,1698 | 0,0886 | 0,0993 |
| $\tau = 15$ | 0,2020 | 0,2167 | 0,1486 | 0,1574 | 0,0717 | 0,0897 |
| $\tau = 18$ | 0,1667 | 0,1828 | 0,1392 | 0,1417 | 0,0644 | 0,0909 |
| $\tau = 21$ | 0,1647 | 0,1432 | 0,1045 | 0,1305 | 0,0720 | 0,0608 |
| $\tau = 24$ | 0,1241 | 0,1297 | 0,1125 | 0,1223 | 0,0712 | 0,0833 |

Таблиця 2.2

Значення вологовмісту у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 280000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Геометричні точки взірця | | | | | |
|-------------|--------------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| | A(0;0) | | B($l_1 / 2; l_2 / 2$) | | C($l_1; l_2$) | |
| | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ |
| $\tau = 0$ | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 |
| $\tau = 3$ | 0,4059 | 0,4058 | 0,3511 | 0,3476 | 0,1201 | 0,1194 |
| $\tau = 6$ | 0,3682 | 0,3643 | 0,2781 | 0,2747 | 0,1072 | 0,1071 |
| $\tau = 9$ | 0,3121 | 0,3057 | 0,2287 | 0,2265 | 0,1006 | 0,1017 |
| $\tau = 12$ | 0,2633 | 0,2580 | 0,1957 | 0,1934 | 0,0997 | 0,0978 |
| $\tau = 15$ | 0,2230 | 0,2176 | 0,1712 | 0,1685 | 0,0964 | 0,0952 |
| $\tau = 18$ | 0,1940 | 0,1879 | 0,1519 | 0,1487 | 0,0956 | 0,0933 |
| $\tau = 21$ | 0,1698 | 0,1633 | 0,1356 | 0,1346 | 0,0920 | 0,0931 |

| | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\tau = 24$ | 0,1507 | 0,1441 | 0,1260 | 0,1221 | 0,0920 | 0,0912 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

Таблиця 2.3

Значення вологовмісту у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 320000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Геометричні точки взірця | | | | | |
|-------------|--------------------------|-------------|-------------------------|-------------|-----------------|-------------|
| | A(0;0) | | B($l_1 / 2; l_2 / 2$) | | C($l_1; l_2$) | |
| | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 | 0,4000 |
| $\tau = 3$ | 0,4068 | 0,4061 | 0,3516 | 0,3485 | 0,1206 | 0,1198 |
| $\tau = 6$ | 0,3683 | 0,3647 | 0,2792 | 0,2753 | 0,1078 | 0,1073 |
| $\tau = 9$ | 0,3124 | 0,3068 | 0,2306 | 0,2266 | 0,1025 | 0,1022 |
| $\tau = 12$ | 0,2642 | 0,2581 | 0,1977 | 0,1938 | 0,0997 | 0,0994 |
| $\tau = 15$ | 0,2252 | 0,2192 | 0,1731 | 0,1694 | 0,0977 | 0,0975 |
| $\tau = 18$ | 0,1947 | 0,1892 | 0,1543 | 0,1509 | 0,0963 | 0,0960 |
| $\tau = 21$ | 0,1701 | 0,1652 | 0,1393 | 0,1363 | 0,0951 | 0,0949 |
| $\tau = 24$ | 0,1521 | 0,1478 | 0,1283 | 0,1257 | 0,0943 | 0,0941 |

Таблиця 2.4

Відносна похибка методу при різних кількостях точок розбиття

| Похибка | Геометричні точки взірця | | | | | |
|--------------------|--------------------------|-------------|-------------------------|-------------|-----------------|-------------|
| | A(0;0) | | B($l_1 / 2; l_2 / 2$) | | C($l_1; l_2$) | |
| | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ | $U_{трад}$ | $U_{фракт}$ |
| ε_{12} | 0,0273 | 0,0200 | 0,0311 | 0,0236 | 0,0312 | 0,0323 |
| ε_{13} | 0,0280 | 0,0220 | 0,0348 | 0,0240 | 0,0319 | 0,0341 |
| ε_{23} | 0,0022 | 0,0037 | 0,0037 | 0,0036 | 0,0031 | 0,0029 |

Проведемо порівняння результатів чисельного експерименту із чисельними результатами, отриманими іншими дослідниками в часткових випадках. Зокрема, у працях [123, 142] наведені результати обчислення

нестационарних температурно-вологісних полів у висушувальній деревині. Зокрема, опубліковано динаміку вологовмісту чисельного експерименту сушіння дуба протягом перших 30 годин з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту - $u_0 = 0.3 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 79 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 77 \%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.05; 0.05] \text{ м}$.

Позначимо через $U_{\text{досл}}$ значення вологовмісту отриманого дослідником вищенаведеної задачі під час проведення чисельного експерименту. Проаналізуємо відхилення отриманих значень за допомогою реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури та без її урахування від значень опублікованих у праці [123].

Аналізуючи дані у табл. 2.5 можна прийти до висновку, що математична модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою є адекватною. Похибка методу предиктор-коректор, заснованого на явній та неявній скінченно-різницевих схемах, по відношенню до розрахункових даних отриманих іншими дослідниками цієї задачі не перевищує 5%. Отже, можна зробити висновок, що математична модель (2.11) – (2.16) є адекватною, а скінченно-різницевий метод (2.17) – (2.22) є збіжним з прийнятною похибкою.

Таким чином було показано, що отримані чисельні результати традиційної моделі та моделі з урахуванням фрактальної структури матеріалу є адекватними у порівнянь з результатами отриманими іншими дослідниками в

часткових випадках. Порівняємо тепер отриману динаміку температури і вологовмісту з експериментальними даними.

Таблиця 2.5

Значення вологовмісту у різних геометричних точках взірця

| Час (год.) | Геометричні точки взірця | | | | | |
|-------------|--------------------------|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| | $B(l_1 / 2; l_2 / 2)$ | | | $D(l_1 / 2; l_2)$ | | |
| | $U_{\text{досл}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ | $U_{\text{досл}}$ | $U_{\text{трад}}$ | $U_{\text{фракт}}$ |
| $\tau = 0$ | 0,3000 | 0,3000 | 0,3000 | 0,3000 | 0,3000 | 0,3000 |
| $\tau = 3$ | 0,2954 | 0,3120 | 0,3130 | 0,1023 | 0,1021 | 0,1032 |
| $\tau = 6$ | 0,2903 | 0,3053 | 0,3077 | 0,0957 | 0,0960 | 0,0976 |
| $\tau = 9$ | 0,2871 | 0,2884 | 0,2909 | 0,0907 | 0,0918 | 0,0942 |
| $\tau = 12$ | 0,2709 | 0,2682 | 0,2724 | 0,0899 | 0,0913 | 0,0922 |
| $\tau = 15$ | 0,2544 | 0,2535 | 0,2554 | 0,0897 | 0,0855 | 0,0910 |
| $\tau = 18$ | 0,2398 | 0,2380 | 0,2411 | 0,0839 | 0,0895 | 0,0902 |
| $\tau = 21$ | 0,2248 | 0,2232 | 0,2280 | 0,0849 | 0,0839 | 0,0896 |
| $\tau = 24$ | 0,2156 | 0,2128 | 0,2166 | 0,0865 | 0,0846 | 0,0892 |
| $\tau = 27$ | 0,2039 | 0,1973 | 0,2066 | 0,0808 | 0,0815 | 0,0888 |
| $\tau = 30$ | 0,1916 | 0,1874 | 0,1980 | 0,0859 | 0,0825 | 0,0885 |

У своїй роботі [215] Г. С. Шубін навів динаміку температури для соснового взірця у процесі сушіння з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту - $u_0 = 0.37 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 100 \text{ }^\circ\text{C}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.02505; 0.02505] \text{ м}$.

Проведемо чисельний експеримент, ввівши параметри моделі (2.11) – (2.16) аналогічні вхідним параметрам експерименту.

На рис. 2.3 зображено криві зміни температури чисельного експерименту та експериментальних даних. Проаналізувавши їх можна зробити наступні висновки:

- Протягом перших 40 хвилин сушіння числові значення температури з урахуванням та без урахування фрактальної структури мало відрізняються одне від одного. Проте вони не більше ніж на 12% менші від експериментальних даних;
- Після 40 хвилин сушіння спостерігається наступний характер розподілу. При використанні традиційної моделі ($\alpha = 1$) температура відрізняється максимум на 7%. Враховуючи фрактальну структуру матеріалу відхилення отриманих результатів від експериментальних даних не перевищує 2%.

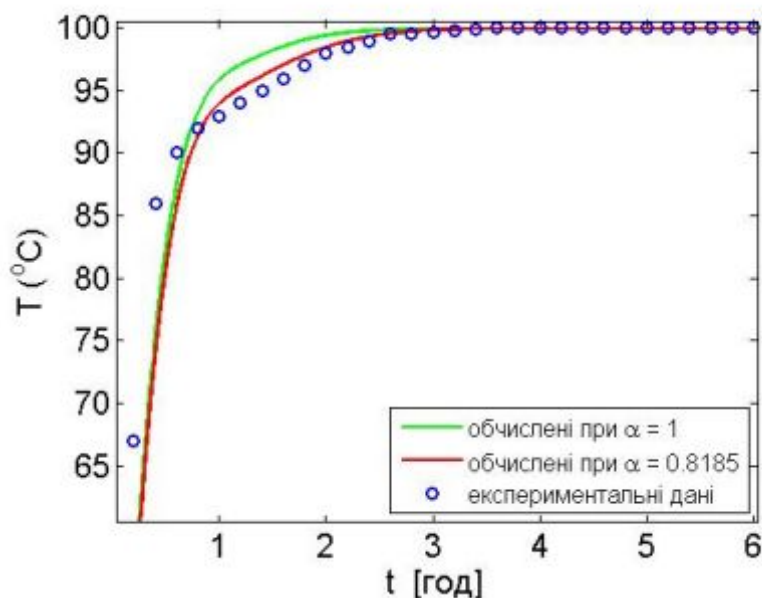


Рис. 2.3. Динаміка температури у порівнянні із експериментальними даними

Експериментальні дані динаміки вологовмісту деревини у процесі сушіння подав Г. С. Шубін [214, 215]. Як взірець брався дубовий брусок з

такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту - $u_0 = 0.5 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.027; 0.027] \text{ м}$.

Динаміка вологовмісту отримана шляхом проведення чисельного експерименту у порівнянні з експериментальними даними зображено на рис. 2.4. Проаналізувавши її бачимо, що при використанні традиційної моделі ($\alpha = 1$) обчислені значення температури відрізняються від експериментальних на 6,5%. Врахувавши фрактальну структуру матеріалу, відхилення не перевищують 2,5%.

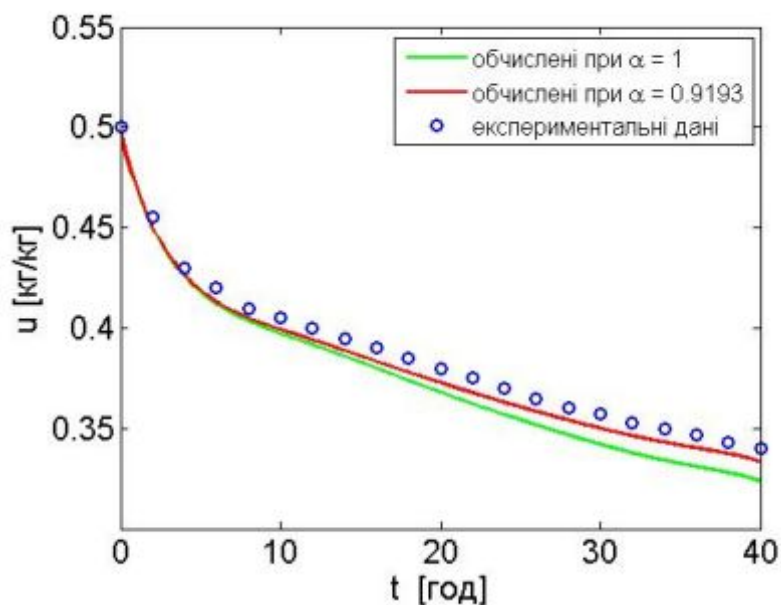


Рис. 2.4. Динаміка вологовмісту у порівнянні із експериментальними даними

За допомогою статистичного критерію на базі коефіцієнта кореляції, оцінимо кількісне відхилення результатів, отриманих за математичною

моделлю (2.11) – (2.16) та експериментальними даними. Він дозволяє встановити ступінь кореляційного зв'язку між величинами.

Цей критерій має такий вигляд

$$|t_v| = \frac{|\rho_{V\bar{V}}|}{\sqrt{1 - \rho_{V\bar{V}}^2}} \sqrt{n-2}, \quad (2.24)$$

де n – кількість точок, для яких проводиться порівняння величин.

Якщо виконується умова $|t_v| < t_v$, то з ймовірністю $P=1-\nu$ можна стверджувати, що між величинами V і \bar{V} існує «тісний» кореляційний зв'язок. В інакшому разі з ймовірністю $P=1-\nu$ гіпотеза про такий зв'язок відкидається.

Коефіцієнт кореляції $\rho_{V\bar{V}}$ між величинами визначається за відношеннями

$$\rho_{V\bar{V}} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{сеп})(\bar{v}_i - \bar{v}_{сеп})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{сеп})^2 \sum_{i=1}^n (\bar{v}_i - \bar{v}_{сеп})^2}}, \quad (2.25)$$

де $v_{сеп} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$; $\bar{v}_{сеп} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i$.

Таблиця 2.6

Дослідження адекватності математичної моделі у порівнянні з експериментальними даними [214, 215]

| | Геометричні точки взірця | | |
|----------------------------|--------------------------|--|------------------------------------|
| | A(0;0) | B(l ₁ /2;l ₂ /2) | C(l ₁ ;l ₂) |
| $\rho_{U_{трад} U_{експ}}$ | 0,999787 | 0,998196 | 0,999989 |
| $ t_{U_{трад}} $ | 145,3826 | 49,88151 | 628,7917 |
| $\rho_{U_{фркт} U_{експ}}$ | 0,999848 | 0,999556 | 0,999996 |
| $ t_{U_{фркт}} $ | 171,8838 | 100,5835 | 1048,703 |

Аналіз результатів адекватності математичної моделі (2.11) – (2.16) наведено у табл. 2.6. В них показані значення $|t_{U_{трад}}|$ та $|t_{U_{фракт}}|$ для $n=11$ і $\nu=0,02$. Оскільки для всіх обчислень, які характеризують різні точки дерев'яного бруса, виконується умова $|t_{\nu}| \geq t_{\nu}$, то з ймовірністю $\nu=0,02$ можна стверджувати про адекватність характеру зміни результатів чисельного розрахунку за математичною моделлю (2.11) – (2.16).

Таким чином, опираючись на наведені вище результати можна прийти до висновку, що використання математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку є ефективним для опису процесу неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах у процесі сушіння. Він дозволяє врахувати складну структуру будови матеріалу та описати надповільні процеси дифузійного типу, що мають місце під час сушіння. Можна також підсумувати, що показник дробової похідної визначає долю відкритих каналів для протікання таких процесів.

2.6. Висновки

Опираючись на основні закони термодинаміки та беручи за основу задачу неізотермічного вологоперенесення деревини у процесі сушіння побудовано математичну модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою, що дозволяє врахувати складну природу просторових кореляцій, наявність ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.

Отримано скінченно-різницеву апроксимацію системи диференціальних рівнянь та граничних умов задачі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою, застосування якої дозволить знайти чисельний розв'язок даної задачі.

Розроблено прикладне програмне забезпечення, засноване на скінченно-різницевій апроксимації похідної дробового порядку, що надає можливість обчислити динаміку температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння.

Обґрунтовано адекватність та проведено верифікацію математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння шляхом співставлення отриманих результатів з експериментальними даними та даними отриманими іншими дослідниками, а також виявлення кореляційних залежностей між ними. Доведено збіжність скінченно-різницевого методу предиктор-коректор, що заснований на явній та неявній скінченно-різницевій апроксимації диференціальних рівнянь моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, шляхом аналізу відносних похибок залежно від сітки розбиття часової та просторових координат.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ У ПРОЦЕСІ СУШІННЯ

У цьому розділі побудовано математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Використано математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку для опису цього процесу. Застосовано скінченно-різницевий метод для отримання динаміки компонент напружень у висушуваній деревині. Апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів. Основні результати опубліковано у працях [110, 111, 185-189, 191, 212].

3.1. Основні співвідношення математичного апарату інтегрування дробового порядку

Суттєвою особливістю інтегро-диференціювання дробового порядку є можливість узагальнення математичних об'єктів та понять. Також можна відзначити широку універсалізацію операцій дробового інтегро-диференціювання.

Як вже було сказано у підрозділі 1.1, визначення інтегралів дробового порядку отримується із формули Коші (1.1), зведення n -кратного інтегралу до однократного, шляхом заміни n на неціле значення. Існують поняття лівостороннього дробового інтегралу Рімана-Ліувілля (1.2) та правостороннього (1.3) [47, 177].

Відзначимо наступний зв'язок між операторами $I_{a+}^{\alpha} f$ та $I_{b-}^{\alpha} f$:

$$QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha} Q; \quad (3.1)$$

$$QI_{b-}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha} Q, \quad (3.2)$$

де Q - оператор «відображення»: $(Qf)(x) = f(a+b-x)$.

Справедливою є формула дробового інтегрування по частинах, що має вигляд:

$$\int_a^b f(x)(I_{a+}^{\alpha} g)(x) dx = \int_a^b g(x)(I_{b-}^{\alpha} f)(x) dx. \quad (3.3)$$

Дробове інтегрування володіє властивостями, згідно з якими, при вкладенні інтегралів дробового порядку, результатом буде інтеграл, порядок якого дорівнюватиме сумі порядків відповідних інтегралів:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f; \quad (3.4)$$

$$I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f. \quad (3.5)$$

Також слід відмітити зв'язок між операторами інтегрування та диференціювання дробового порядку і провести аналогію з традиційними операторами. Звичайне диференціювання $\frac{d}{dx}$ та інтегрування $\int_a^x \dots dt$ є взаємно оберненими операціями, якщо диференціювання застосовується зліва, тобто $\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(t) dt \equiv \varphi(x)$, але $\int_a^x \varphi'(t) dt \neq \varphi(x)$. Аналогічна властивість притаманна для операцій інтегрування та диференціювання дробового порядку. Рівність (3.6) виконується для довільної сумованої функції $\varphi(x)$:

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \varphi. \quad (3.6)$$

Для довільної функції $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_1)$ має місце властивість:

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f. \quad (3.7)$$

Якщо у виразі (3.7) допустити, що $f(x) \in L_1(a,b)$ має сумовану похідну $D_{a+}^{\alpha} f$, то властивість (3.7) прийме вигляд:

$$I_{a+}^{\alpha} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-a)}(a), \quad (3.8)$$

де $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$, $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f$.

Опираючись на вище наведені властивості дробового інтегрування та його зв'язок із диференціюванням дробового порядку, що в свою чергу було описано у підрозділі 2.2, можна зробити висновок, що математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку є зручним інструментом для побудови універсальних математичних моделей процесів, що мають нелінійний характер протікання.

3.2. Дослідження фрактальних реологічних моделей

Заміна реальних тіл їх ідеалізованими моделями ґрунтується на тому факті, що здебільшого їх деякі властивості проявляються чіткіше. Тоді можна, відкидаючи все неістотне, побудувати ідеалізовану модель, якій властиві саме ці домінуючі властивості. Зокрема, беручи до уваги тільки властивості пружності і в'язкості, можна побудувати простіші реологічні моделі, які використовуються у дослідженнях з теорії в'язко-пружності. Ці моделі утворюються шляхом послідовного або паралельного з'єднання пружного та в'язкого елементів. В основі пружного елемента лежить закон Гука, а в'язкого – закон в'язкості Ньютона [147, 183, 198, 203, 209].

Побудовані таким чином простіші моделі не будуть враховувати такі властивості матеріалу як: ефекти «пам'яті», самоорганізації, детермінованого хаосу та складна природа просторових кореляцій, що є характерними для деревини. Тому пропонується для запису закону в'язкості Ньютона використовувати математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку, який дозволить врахувати вище згадані властивості матеріалу деревини. Таким чином, для опису властивостей в'язкого елемента використання цього математичного апарату дає змогу створити новий елемент, який в подальшому будемо називати фрактальним. Він володітиме всіма властивостями в'язкого елемента та дозволить враховувати ефекти «пам'яті»,

самоорганізації, детермінованого хаосу та складну природу просторових кореляцій у матеріалі [13, 17, 52].

3.2.1 Фрактальна модель Фойгта

Класична модель Фойгта складається із паралельного з'єднання пружного та в'язкого елементів. Фрактальна модель Фойгта, зображена на рис. 3.1, утворюється із класичної шляхом заміни в'язкого елемента фрактальним. Це стає можливим завдяки застосуванню математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку для запису закону в'язкості Ньютона. Поклавши показник дробової похідної рівним $\alpha = 1$ ми можемо перейти від фрактальної моделі до класичної [110, 185, 186].

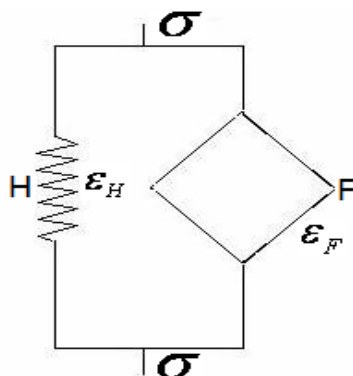


Рис. 3.1. Фрактальна модель Фойгта

Для фрактальної моделі Фойгта напруження визначаються таким чином:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_F. \quad (3.9)$$

Деформація моделі є рівною деформаціям пружного та фрактального елементів:

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_F. \quad (3.10)$$

Напруження через деформації у пружному елементі можна записати:

$$\sigma_H = E\varepsilon_H. \quad (3.11)$$

У фрактальному елементі аналогічна залежність буде такою:

$$\sigma_F = E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F. \quad (3.12)$$

Відтак, напруження у фрактальній моделі Фойгта через деформації можна виразити:

$$\sigma = E\varepsilon + E\eta^\alpha D^\alpha \varepsilon. \quad (3.13)$$

Для фрактальної моделі Фойгта функція релаксації матиме вигляд:

$$R(t) = E \left(h(t) + \frac{\eta_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right). \quad (3.14)$$

В свою чергу функція повзучості запишеться:

$$H(t) = E(\delta(t) + \eta_0 I_{-\alpha}(t)); \quad (3.15)$$

$$I_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1} h(t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.16)$$

де (3.16) - ядро Абеля.

Ядро релаксації для фрактальної моделі Фойгта буде мати вигляд:

$$K(t) = \frac{1}{E\eta_0} \vartheta_{\alpha-1}(t); \quad (3.17)$$

$$\vartheta_\alpha(\beta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{t^{k(\alpha+1)+\alpha}}{\Gamma[(\alpha+1)(k+1)]}; \quad (3.18)$$

$$\vartheta_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k(\alpha+1)+\alpha}}{\Gamma[(\alpha+1)(k+1)]}, \quad (3.19)$$

де (3.18) – дробово-експоненціальний оператор Работнова, (3.19) – дробово-експоненціальний оператор Работнова при $\beta=1$ [174].

Ядро повзучості визначається як резольвента ядра релаксації, в свою чергу воно прийме вигляд:

$$\Pi(t) = \frac{1}{E} \left(1 - E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{\eta_0} \right) \right); \quad (3.20)$$

$$E_\alpha(\beta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{t^k}{\Gamma[(\alpha k + 1)]}; \quad (3.21)$$

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma[(\alpha k + 1)]}, \quad (3.22)$$

де (3.21) – функція Міттаг-Леффлера, (3.22) – функція Міттаг-Леффлера при $\beta=1$.

3.2.2 Фрактальна модель Максвелла

Класична модель Максвелла складається із послідовного з'єднання пружного та в'язкого елементів. Фрактальна модель Максвелла зображена на рис. 3.2, аналогічно як і модель Фойгта, утворюється із класичної шляхом заміни в'язкого елемента фрактальним. Перехід від фрактальної моделі Максвелла до класичної здійснюється аналогічно [110, 185, 186].

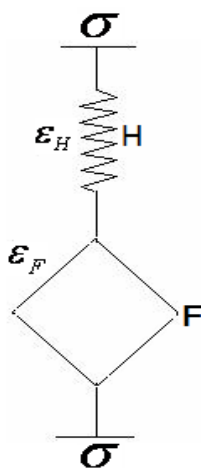


Рис. 3.2. Фрактальна модель Максвелла

Для фрактальної моделі Максвелла напруження є рівним напруженню у пружному та в'язкому елементах моделі:

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_F. \quad (3.23)$$

Деформація моделі визначається як сума деформацій пружного та в'язкого елементів відповідно:

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_F. \quad (3.24)$$

Використовуючи властивості оператора диференціювання дробового порядку, деформації можна записати таким чином:

$$D^\alpha \varepsilon = D^\alpha \varepsilon_H + D^\alpha \varepsilon_F. \quad (3.25)$$

Як і у фрактальній моделі Фойгта, напруження у пружному елементі фрактальної моделі Максвелла записуються:

$$\sigma_H = E \varepsilon_H \quad (3.26)$$

Відповідно, деформації через напруження можна виразити у такій формі:

$$D^\alpha \varepsilon_H = \frac{1}{E} D^\alpha \sigma_H. \quad (3.27)$$

У фрактальному елементі напруження через деформації та деформації через напруження запишуться у вигляді:

$$\sigma_F = E \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F; \quad (3.28)$$

$$D^\alpha \varepsilon_F = \frac{1}{E \eta^\alpha} \sigma_F. \quad (3.29)$$

Таким чином, деформації у фрактальній моделі Максвелла через напруження виражаються так:

$$D^\alpha \varepsilon = \frac{1}{E} \left(D^\alpha \sigma + \frac{1}{\eta^\alpha} \sigma \right). \quad (3.30)$$

Для фрактальної моделі Максвелла функція релаксації матиме вигляд:

$$R(t) = E \left(1 + E E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{\eta_0} \right) \right) h(t). \quad (3.31)$$

Функція повзучості:

$$H(t) = E \left(h(t) + \frac{1}{\eta_0} \mathfrak{D}_{\alpha-1} \left(-\frac{t}{\eta_0} \right) \right). \quad (3.32)$$

Відповідно, ядро релаксації буде таким:

$$K(t) = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1}{\eta_0} I_{-\alpha}(t) \right). \quad (3.33)$$

Ядро повзучості виглядатиме:

$$\Pi(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) \eta_0} t^\alpha \right) h(t). \quad (3.34)$$

Таким чином, було наведено основні співвідношення, які характеризують реологічну поведінку ідеалізованого тіла, що утворюється шляхом послідовного з'єднання пружного та фрактального елементів.

3.2.3 Фрактальна модель Кельвіна

Класична модель Кельвіна складається із послідовного з'єднання моделі Фойгта та пружного елемента. Відповідно, фрактальна модель Кельвіна, зображена на рис. 3.3, утворюється послідовним з'єднанням фрактальної моделі Фойгта та пружного елемента [110, 185].

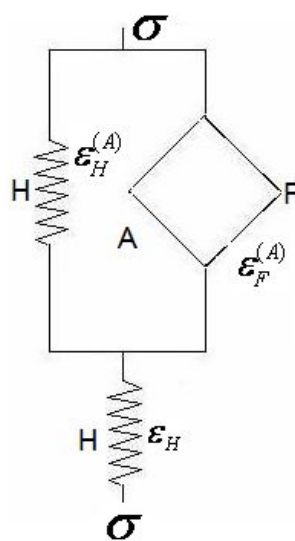


Рис. 3.3. Фрактальна модель Кельвіна

На рис. 3.3 фрактальну модель Фойгта позначимо символом «А». Відповідно, основні реологічні співвідношення для цієї моделі будуть мати вигляд:

$$\sigma^{(A)} = \sigma_H^{(A)} + \sigma_F^{(A)}; \quad (3.35)$$

$$\varepsilon^{(A)} = \varepsilon_H^{(A)} = \varepsilon_F^{(A)}; \quad (3.36)$$

$$\sigma_H^{(A)} = E_1 \varepsilon_H^{(A)}; \quad (3.37)$$

$$\sigma_F^{(A)} = E_1 \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F^{(A)}; \quad (3.38)$$

$$\sigma^{(A)} = E_1 \varepsilon_H^{(A)} + E_1 \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F^{(A)}. \quad (3.39)$$

Для фрактальної моделі Кельвіна напруження є рівним напруженню у фрактальній моделі Фойгта, що входить у її склад, та напруженню у пружному елементі:

$$\sigma = \sigma^{(A)} = \sigma^{(H)}. \quad (3.40)$$

Деформація моделі визначається як сума деформацій моделі Фойгта та пружного елемента відповідно:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(A)} + \varepsilon^{(H)}. \quad (3.41)$$

Зв'язок між деформаціями та напруженнями у пружному елементі моделі Кельвіна записується:

$$\sigma^{(H)} = E_2 \varepsilon^{(H)}; \quad (3.42)$$

$$\varepsilon^{(H)} = \frac{1}{E_2} \sigma^{(H)}. \quad (3.43)$$

Відповідно, напруження через деформації можна представити у такому вигляді:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_H^{(A)} + E_1 \eta^\alpha D^\alpha \varepsilon_F^{(A)} = E_2 \varepsilon^{(H)}. \quad (3.44)$$

Враховуючи вище наведені рівності, зв'язок між напруженнями та деформаціями у фрактальній моделі Кельвіна визначається так:

$$\sigma(t) + bD^\alpha \sigma(t) = \tilde{E}_0 \varepsilon(t) + \tilde{E}_1 D^\alpha \varepsilon(t), \quad (3.45)$$

тут, $D^\alpha f$ - оператор диференціювання дробового порядку, а:

$$\tilde{E}_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}; \quad (3.46)$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{E_1 E_2 \eta^\alpha}{E_1 + E_2}; \quad (3.47)$$

$$b = \frac{E_1 \eta_0^\alpha}{E_1 + E_2}. \quad (3.48)$$

Для фрактальної моделі Кельвіна функція релаксації матиме такий вигляд:

$$R(t) = \frac{E_1}{b} \left(h(t) + \left(1 - \frac{bE_0}{E_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{b} \right) \right). \quad (3.49)$$

Вільна енергія визначатиметься:

$$\Psi = -\frac{C_p}{2T_0} \Delta T^2 + \frac{2}{2R(0)} \left[\int_0^t \frac{\tilde{E}_1}{b} \left(h(\tau) + \left(1 - \frac{b\tilde{E}_0}{\tilde{E}_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{\tau^\alpha}{b} \right) \right) d\varepsilon_T(\tau) \right]^2 \quad (3.50)$$

Відповідно, функція розсіювання енергії буде наступною:

$$W^* = -\frac{1}{R(0)} \int_0^t \int_0^{t'} \left[\frac{\tilde{E}_1}{b} \left(h(t'-\tau_1) + \left(1 - \frac{bE_0}{E_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{1}{b}(t'-\tau_1) \right) \right) \right] \times \quad (3.51)$$

$$\times \frac{\tilde{E}_1}{b} \left(\delta(t'-\tau_2) - \left(\frac{1}{b} - \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_1} \right) \mathfrak{D}_{\alpha-1} \left(-\frac{1}{b}, t'-\tau_2 \right) \right) d\varepsilon_T(\tau_1) d\varepsilon_T(\tau_2).$$

Як можна побачити із вище наведених фрактальних моделей, функція релаксації та ядра релаксації визначаються за допомогою функції Міттаг-Леффлера. А у функції розсіювання енергії та ядрах повзучості присутній дробово-експоненціальний оператор Работнова. Тому, пропонується апроксимувати експериментальні дані повзучості деревини лінійною комбінацією дробово-експоненціальних операторів Работнова.

3.3. Математична модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

Для моделювання напружено-деформівного стану під час сушіння деревини з урахуванням анізотропії в'язко-пружних властивостей та фрактальної структури матеріалу протягом часу $\tau \in [0, \tau_{end}]$ в осесиметричній області поперечного перерізу $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2): x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$, центр якого збігається з початком координат, знайдемо компоненти векторів переміщень та

напружень, які задовольняють рівняння рівноваги, що лежить в основі досліджень напружено-деформівного стану [110, 123, 185]:

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2); \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0. \quad (3.54)$$

Граничні умови, що враховують симетричність області задачі є такими:

$$u_1|_{x_1=0} = 0 \quad \text{та} \quad u_1|_{x_2=0} = 0; \quad (3.55)$$

$$u_2|_{x_1=0} = 0 \quad \text{та} \quad u_2|_{x_2=0} = 0. \quad (3.56)$$

Також додаються граничні умови, що показують відсутність будь-яких зовнішніх зусиль, прикладених до матеріалу:

$$\sigma_{11}|_{x_1=l_1} = 0 \quad \text{та} \quad \sigma_{11}|_{x_2=l_2} = 0; \quad (3.57)$$

$$\sigma_{22}|_{x_1=l_1} = 0 \quad \text{та} \quad \sigma_{22}|_{x_2=l_2} = 0. \quad (3.58)$$

Для задачі в'язко-пружності компоненти деформацій і напружень можуть бути представлені:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}); \quad (3.59)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}). \quad (3.60)$$

Співвідношення між переміщеннями (3.52) та деформаціями (3.59), запишуться таким чином:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2. \quad (3.61)$$

Зв'язок між компонентами напружень (3.60) та деформацій (3.59) деревини у процесі сушіння з урахування фрактальної структури середовища можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь з похідною дробового порядку, які можна отримати з інтегральних рівнянь в'язко-

пружності, що в свою чергу засновуються на спадковій теорії Больцмана-Вольтерра:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \sigma_{11}}{\partial \tau^\alpha} = & C_{11} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{11} R_{11}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \\ & + C_{12} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{12} R_{12}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}); \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \sigma_{22}}{\partial \tau^\alpha} = & C_{21} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{11}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T1}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{21} R_{21}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{T1}) + \\ & + C_{22} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{22}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T2}}{\partial \tau^\alpha} \right) - C_{22} R_{22}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{T2}); \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^\alpha \sigma_{12}}{\partial \tau^\alpha} = 2C_{33} \left(\frac{\partial^\alpha \varepsilon_{12}}{\partial \tau^\alpha} - \frac{\partial^\alpha \varepsilon_{T3}}{\partial \tau^\alpha} \right) - 2C_{33} R_{33}(\tau - s, T, U) (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{T3}). \quad (3.64)$$

де $\varepsilon_{\mathbf{T}} = (\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, 0)^T$ - вектор деформацій, що зумовлений змінними градієнтами температури ΔT та вмісту вологи ΔU відповідно:

$$\varepsilon_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{T1} \\ \varepsilon_{T2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \Delta T + \beta^{(1)} \Delta U \\ \alpha^{(2)} \Delta T + \beta^{(2)} \Delta U \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

а C_{ij} – компоненти тензора пружності анізотропного тіла:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

тут, $E_{11}(T, U), E_{22}(T, U)$ – модулі Юнга; $\nu_1(T, U), \nu_2(T, U)$ – коефіцієнти Пуассона; $\mu(T, U)$ – модуль зсуву; $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ – коефіцієнти температурного розширення та вологісного всихання, відповідно..

До системи диференціальних рівнянь з похідною дробового порядку додаються початкові умови, що випливають із гіпотези про природній стан тіла. Припускається, що у початковий момент часу напруження і деформації тіла у будь-якій його точці дорівнюють нулю.

$$\sigma_{ij} \Big|_{\tau=0} = 0; \quad i, j = 1, 2; \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_{ij}|_{\tau=0} = 0; \quad i, j = 1, 2. \quad (3.68)$$

Для визначення критеріїв вибору ядра релаксації необхідно враховувати особливості реологічної поведінки деревини та той факт, що цей матеріал має фрактальну структуру. Виходячи з проведених раніше досліджень [123, 142, 175, 183], вибираємо це ядро у вигляді:

$$R = R(t, \tau) = R_1(t - \tau) + R_2(\tau - t) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i E_{\alpha}(\psi_i, t - \tau) \right] h(\tau) h(\tau_{rel} - \tau) + \left[\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j E_{\alpha}(\chi_j, \tau - t) \right] h(\tau - \tau_{rel}). \quad (3.69)$$

Як було сказано вище, ядро релаксації є резольвентою ядра повзучості. В свою чергу, ядро повзучості деревини визначається з експериментальних даних повзучості.

Таким чином, було побудовано математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою, що враховує складну природу просторових кореляції у матеріалі, наявність ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.

3.4. Скінченно-різницева реалізація моделі

Для моделювання напружено-деформівного стану під час сушіння деревини з урахуванням анізотропії в'язко-пружних властивостей та фрактальної структури матеріалу, що описується рівностями (3.53), (3.54), (3.61) – (3.64), початковими умовами (3.67), (3.68) та граничними умовами (3.55) – (3.58), знайдемо чисельні значення вектора переміщень (3.52), компонентів деформацій (3.59) та напружень (3.60) за допомогою скінченно-різницевого методу.

Аналогічно, як і для задачі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, замінимо диференціальні рівняння цієї задачі відповідною різницевою апроксимацією. Також приймемо, що похідна дробового порядку α на відріжку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ є

похідною у розумінню Рімана-Ліувілля (1.24). Різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ візьмемо у вигляді (1.26).

Побудуємо явну різницеву схему для апроксимації системи диференціальних рівнянь (3.62) – (3.64):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = & \\ C_{11} \left(\frac{\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{11}R_{11}(\tau^n - s, T, U)(\varepsilon_{11}^n - \varepsilon_{T1}^n) + & (3.70) \\ + C_{12} \left(\frac{\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{12}R_{12}(\tau^n - s, T, U)(\varepsilon_{22}^n - \varepsilon_{T2}^n); & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{22}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = & \\ C_{21} \left(\frac{\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{21}R_{21}(\tau^n - s, T, U)(\varepsilon_{11}^n - \varepsilon_{T1}^n) + & (3.71) \\ + C_{22} \left(\frac{\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{22}R_{22}(\tau^n - s, T, U)(\varepsilon_{22}^n - \varepsilon_{T2}^n); & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{12}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{12}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = & \\ 2C_{33} \left(\frac{\varepsilon_{12}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{12}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T3}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T3}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{33}R_{33}(\tau^n - s, T, U)(\varepsilon_{12}^n - \varepsilon_{T3}^n) & (3.72) \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна побудувати неявну різницеву схему для апроксимації системи диференціальних рівнянь (3.62) – (3.64):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = & \\ C_{11} \left(\frac{\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{11}R_{11}(\tau^{n+1} - s, T, U)(\varepsilon_{11}^{n+1} - \varepsilon_{T1}^{n+1}) + & (3.73) \\ + C_{12} \left(\frac{\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{12}R_{12}(\tau^{n+1} - s, T, U)(\varepsilon_{22}^{n+1} - \varepsilon_{T2}^{n+1}); & \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{22}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} =$$

$$C_{21} \left(\frac{\varepsilon_{11}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{11}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T1}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T1}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{21} R_{21}(\tau^{n+1} - s, T, U) (\varepsilon_{11}^{n+1} - \varepsilon_{T1}^{n+1}) +$$

$$+ C_{22} \left(\frac{\varepsilon_{22}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{22}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T2}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T2}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{22} R_{22}(\tau^{n+1} - s, T, U) (\varepsilon_{22}^{n+1} - \varepsilon_{T2}^{n+1});$$
(3.74)

$$\frac{\sigma_{12}|_{ij}^{n+1} - \sigma_{12}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} =$$

$$2C_{33} \left(\frac{\varepsilon_{12}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{12}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} - \frac{\varepsilon_{T3}|_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{T3}|_{ij}^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \right) - C_{33} R_{33}(\tau^{n+1} - s, T, U) (\varepsilon_{12}^{n+1} - \varepsilon_{T3}^{n+1}).$$
(3.75)

Використовуючи різницеву апроксимацію похідної першого порядку (1.25) побудуємо різницеві схеми апроксимації диференціальних рівнянь (3.61):

$$\varepsilon_{11}|_{ij}^n = \frac{u_1|_{i+1j}^n - u_1|_{ij}^n}{h_{x_1}};$$
(3.76)

$$\varepsilon_{22}|_{ij}^n = \frac{u_2|_{ij+1}^n - u_2|_{ij}^n}{h_{x_2}};$$
(3.77)

$$\varepsilon_{12}|_{ij}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1|_{ij+1}^n - u_1|_{ij}^n}{h_{x_2}} + \frac{u_2|_{i+1j}^n - u_2|_{ij}^n}{h_{x_1}} \right).$$
(3.78)

Також знайдемо скінченно-різницеві апроксимації диференціальних рівнянь рівноваги (3.53), (3.54):

$$\frac{\sigma_{11}|_{i+1j}^n - \sigma_{11}|_{ij}^n}{h_{x_1}} + \frac{\sigma_{12}|_{ij+1}^n - \sigma_{12}|_{ij}^n}{h_{x_2}} = 0;$$
(3.79)

$$\frac{\sigma_{22}|_{ij+1}^n - \sigma_{22}|_{ij}^n}{h_{x_2}} + \frac{\sigma_{12}|_{i+1j}^n - \sigma_{12}|_{ij}^n}{h_{x_1}} = 0.$$
(3.80)

Для знаходження числових характеристик величин задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, використано скінченно-різницевий метод предиктор-коректор. В якості предиктора використано метод заснований на явній різницевій схемі (3.70) – (3.72), в якості коректора – на неявній (3.73) –

(3.75). Також застосовувались скінченно-різницеві апроксимації диференціальних рівнянь рівноваги (3.79), (3.80) та диференціальних рівнянь зв'язку деформацій та переміщень (3.76) – (3.78).

3.5. Програмне забезпечення обчислення динаміки компонент напружено-деформівного стану капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

Для знаходження чисельного розв'язку задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння (3.52) – (3.69), було розроблено прикладне програмне забезпечення мовою програмування MatLab 7.

У підрозділі 2.4 описано переваги цього середовища, що брались до уваги при створенні програмного забезпечення для розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення. При знаходженні чисельного розв'язку задачі (3.52) – (3.69) основні переваги середовища MatLab 7 були такі:

- велика кількість вбудованих функцій для знаходження розв'язку задач інтерполяції та апроксимації;
- широкий набір статистичних функцій, статистичної регресії та інших функцій математичної статистики та аналізу експериментальних даних;
- спеціально розроблений клас, що дозволяє працювати з розрідженими матрицями.

За аналогією до задачі неізотермічного вологоперенесення було побудовано діаграму варіантів використання для знаходження чисельного розв'язку задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, що зображена на рис. 3.4.

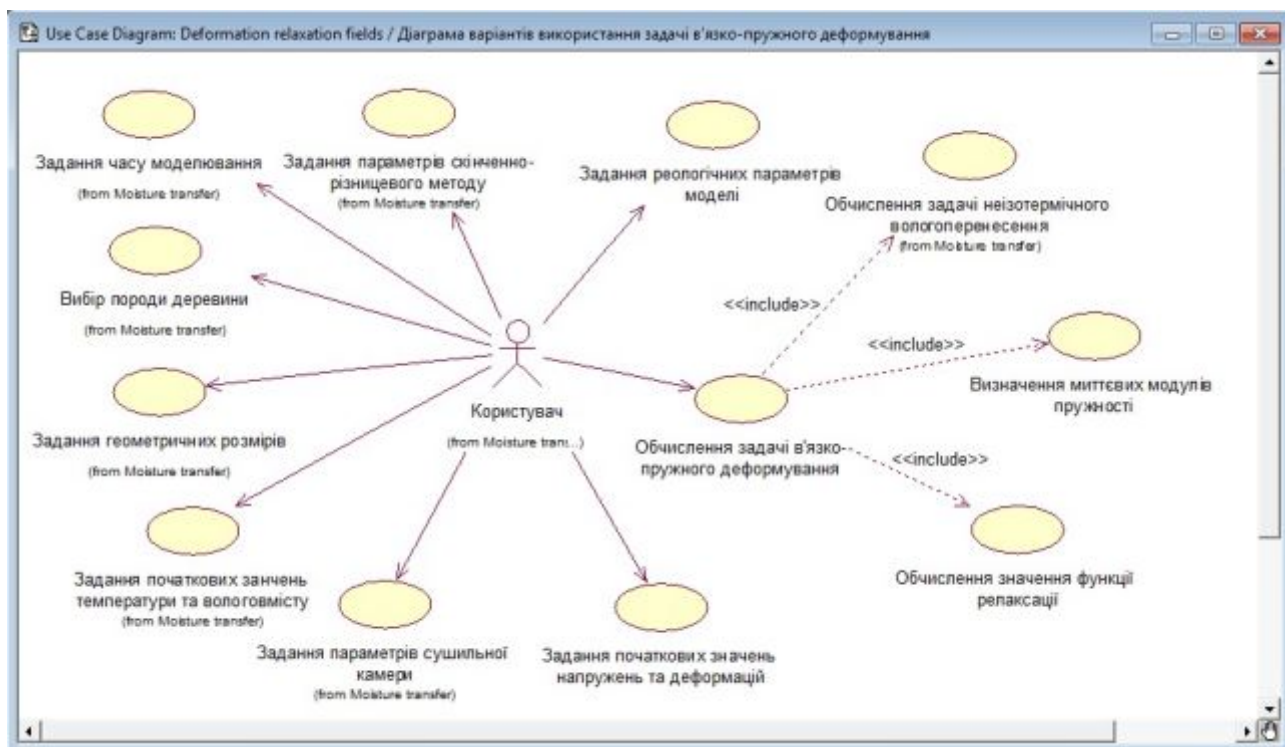


Рис. 3.4. Діаграма варіантів використання задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

Бачимо, що варіант використання «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення» є розширенням варіанту використання «Обчислення задачі в'язко-пружного деформування». Це зроблено через той факт, що для визначення числових значень компонентів векторів переміщень, напружень та деформацій, мають бути відомими значення температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Очевидно, що на цій діаграмі також мають бути присутні варіанти використання, виконання яких є необхідним для варіанту «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення», а саме: «Задання часу моделювання», «Вибір породи деревини», «Задання геометричних розмірів», «Задання початкових значень температури та вологовмісту», «Задання параметрів сушильної камери».

Попри наведені вище можливості користувач має наступні опції при знаходженні розв'язку задачі в'язко-пружного деформування: «Задання

реологічних параметрів моделі», «Задання початкових значень напружень та деформацій», «Обчислення задачі в'язко-пружного деформування». Дії, які передбачені у цих варіантах використання є наступними:

- «Задання реологічних параметрів моделі» - дозволяє задавати модулі Юнга, коефіцієнти Пуасона та модуль зсуву;
- «Задання початкових значень напружень та деформацій» - дозволяє користувачеві задати початкові значення компонентів напружень та деформацій;
- «Обчислення задачі в'язко-пружного деформування» - реалізовує алгоритм знаходження чисельного розв'язку задачі (3.52) – (3.69), використовуючи різницеві апроксимації (3.70) – (3.80). Виконання цього варіанту використання приводить до можливого виклику варіанту використання «Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення» та автоматичного виконання наступних: «Визначення миттєвих модулів пружності», «Обчислення значення функції релаксації».

«Обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення» описано у підрозділі 2.4, а варіанти використання, що будуть викликатися автоматично робитимуть наступні дії:

- «Визначення миттєвих модулів пружності» - реалізує обчислення числових значень миттєвих модулів пружності, що залежать від температури, вологовмісту та часу [183];
- «Обчислення значення функції релаксації» - дозволяє обчислити значення функції релаксації (3.69), коефіцієнти якої обчислені шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості деревини.

На рис. 3.5 зображено діаграму послідовності, побудованої для варіанту використання «Обчислення задачі в'язко-пружного деформування». Вона відображає послідовність дій, що виконуються для знаходження чисельного

розв'язку задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння.

Як і для знаходження чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення, так і для задачі в'язко-пружного деформування у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою використовуються ті ж об'єкти UserForm та Solver, описані в підрозділі 2.4.

Попри вище описані можливості, об'єкт UserForm також призначений для задання користувачем реологічних параметрів математичної моделі в'язко-пружного деформування та початкових значень напружень і деформацій задачі (3.52) – (3.69).

Об'єкт Solver також призначений для реалізації алгоритму знаходження чисельного розв'язку задачі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Він містить методи, що дозволяють визначити значення миттєвих модулів пружності, обчислити функцію релаксації, реалізувати метод предиктор-коректор з використанням скінченно-різницевої апроксимації (3.70) – (3.80), побудувати графічні залежності динаміки компонент напружень та деформацій на взірці залежно від часу та просторових координат.

Окрім описаних у підрозділі 2.4, до об'єкту UserForm відносяться наступні методи:

- SetReologicalParams() – задання реологічних параметрів моделі, таких як: модулі Юнга, коефіцієнти Пуасона та модуль зсуву;
- ChoseTempAndMoistureField() – визначає чи обчислювати повторно задачу неізотермічного вологоперенесення, чи використати попередньо обчислені значення температури і вологовмісту;
- SetReologicalInitialValues() – задання початкових значень напружень та деформацій.

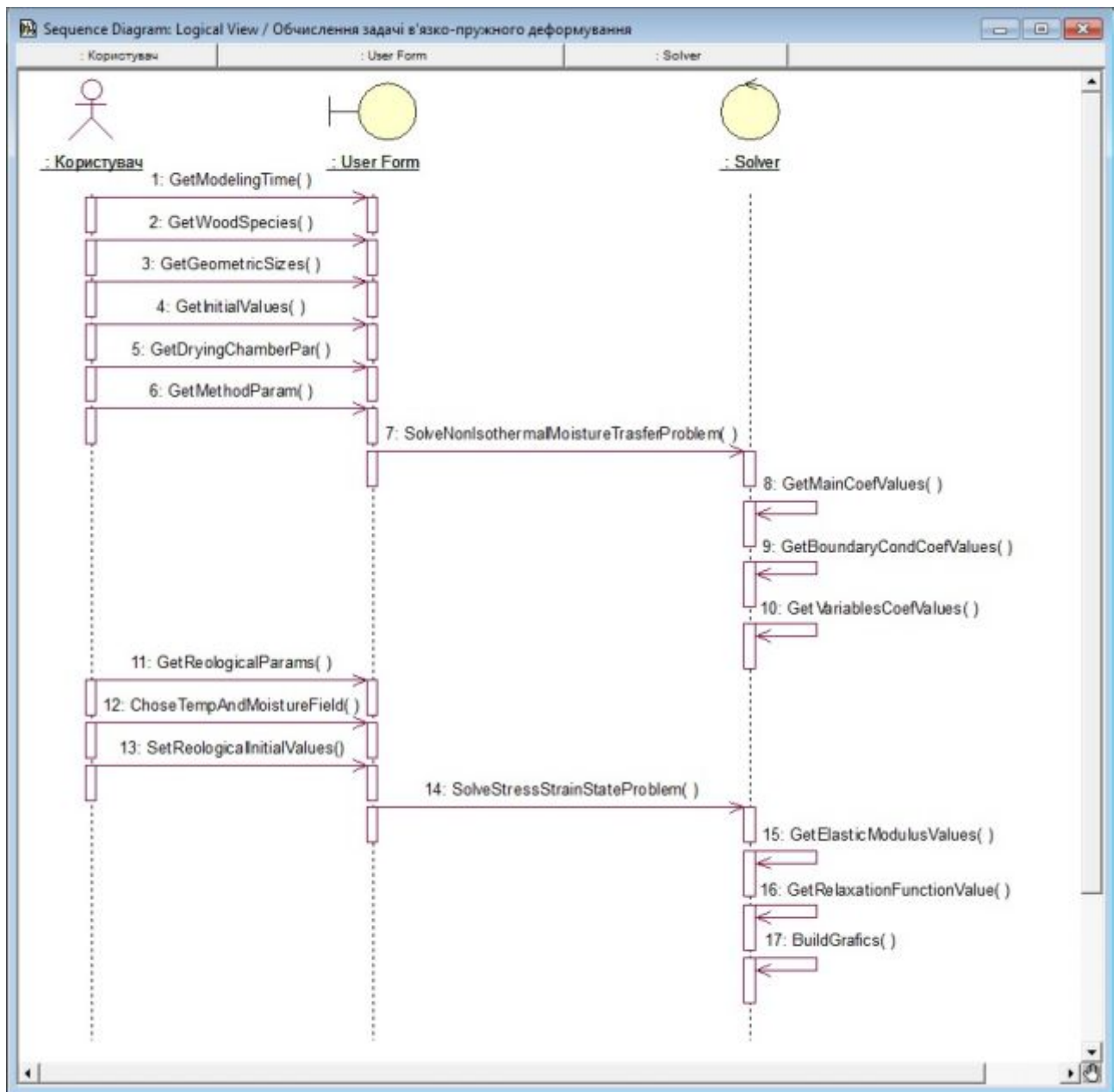


Рис. 3.5. Діаграма послідовності для варіанту використання «Обчислення задачі в'язко-пружного деформування»

Об'єкт Solver також містить методи, що дозволяють контролювати процес знаходження чисельного розв'язку задачі в'язко-пружного деформування:

- `SolveStressStrainStateProblem()` – реалізація алгоритму методу предиктор-коректор знаходження чисельного розв'язку моделі;

- `GetElasticModulusValues()` – обчислення значень миттєвих модулів пружності;
- `GetRelaxationFunctionValue()` – обчислення значення функції релаксації;
- `BuildGrafics()` – побудова графічних залежностей динаміки компонент напружень та деформацій.

3.6. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів Работнова

Повзучість матеріалу – це процес зростання деформацій з часом у тілі, навантаженого постійними навантаженнями. Явище повзучості виникає у матеріалах різної природи: дереві, металах, пластмасах, бетоні та інших. Фізичні механізми повзучості є індивідуальними для кожного із матеріалів. Також дослідження повзучості показують, що форма протікання цього процесу є схожою лиш на перший погляд, а різні матеріали вимагають різних підходів для опису певних феноменів, що є характерними для відповідного матеріалу. Особливо нас буде цікавити матеріал деревини. Визначаючи функцію опису процесу повзучості будемо враховувати той факт, що для цього матеріалу є характерними такі явища як ефекти «пам'яті» та детермінованого хаосу.

Визначення повзучості деревини є відправним пунктом для обчислення основних реологічних характеристик матеріалу під час сушіння. Для їх дослідження використовують принцип в'язко-пружної спадковості. Він в свою чергу приводить до побудови інтегральних рівнянь.

Гіпотеза спадковості була введена Больцманом, який на підставі принципу суперпозиції отримав інтегральні рівняння. Використовуючи трохи інші міркування, Вольтером також була виведена форма запису спадкової в'язко-пружності. Він припустив, що повна деформація тіла складається з миттєвої деформації, що визначається напруженням, яке діє в цей момент часу,

підкорюючись закону Гука, і спадкової деформації, яка «пам'ятає» історію навантаження матеріалу. Для лінійного напруженого стану зв'язок між напруженнями та деформаціями описується через інтегральні рівняння, що включають ядра повзучості $\Pi(t-\tau)$ та релаксації $R(t-\tau)$ у вигляді [203, 205]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t \Pi(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau; \quad (3.81)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + E \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (3.82)$$

Функція повзучості $\Pi(t-\tau)$, яка є ядром інтегрального рівняння, відображає вплив одиничного напруження $\sigma(t)$, діючого одиничний проміжок часу, в момент часу t . Функція релаксації $R(t-\tau)$ є резольвентою ядра повзучості $\Pi(t-\tau)$.

Рівняння теорії спадковості дозволяють шляхом підбору різних ядер якнайповніше і найбільш точно відобразити реологічні характеристики матеріалу, зумовлені дією зовнішніх чинників. Основна проблема використання теорії спадковості для вирішення практичних завдань полягає у виборі ядер в інтегральних рівняннях (3.81), (3.82). Експоненціальна залежність деформацій та повзучості від часу у експериментальних дослідженнях набула найбільшого поширення. Недоліком цього підходу є те, що він не враховує розмиття релаксаційного спектру та ефекту «пам'яті» у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою, до яких належить деревина. Ю. М. Работнов запропонував використовувати дробово-експоненціальні функції для опису процесу повзучості у таких матеріалах [174].

Визначимо дробовий параметр α математичних моделей (2.11) – (2.16), (3.52) – (3.68), опрацювавши експериментальні дані повзучості залежно від температури та вологовмісту. Функцію повзучості деревини визначимо у вигляді лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів Работнова (3.18) [110].

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi(t, \tau) = \Pi_1(t - \tau) + \Pi_2(\tau - t) = \frac{1}{\sigma_0} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{\alpha}(\nu_i, t - \tau) \right] h(\tau) h(\tau_{rel} - \tau) + \\ + \frac{1}{\sigma_0} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \varepsilon_{\alpha}(\mu_j, \tau - t) \right] h(\tau - \tau_{rel}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Застосувавши метод найменших квадратів, знайдено коефіцієнти апроксиманти експериментальних даних повзучості (3.83) та дробовий параметр α для різних порід деревини.

На рис. 3.6 та табл. А.1 наведені значення дробового параметра α для сосни в залежності від температури та вологовмісту, визначеного шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості цього матеріалу. Проаналізувавши дані на графіку та у таблиці, приходимо до висновку, що із збільшенням температури або вологовмісту вплив фрактальної структури сосни зменшується. Температура, у свою чергу, має більший вплив на зазначений параметр, ніж вологовміст.

Як відомо з літературних джерел та енциклопедичних даних є «твердіші» і «м'якші» породи деревини. Вище згадані породи деревини у порядку від «м'якшої» до «твердішої» можна вишикувати наступним чином: сосна, береза, бук, дуб. Проаналізувавши дані із табл. А.1 – А.4 та рис. 3.6-3.9, встановлено залежність дробового параметра α від початкової температури, вологовмісту та породи деревини. Для матеріалів із більшою густиною α менше відхиляється від одиниці, що свідчить про невеликий вплив фрактальних властивостей матеріалу. Натомість зі зниженням початкової температури або вологовмісту ці властивості проявляються істотніше. Отже, врахування знайдених показника α та ядер релаксації під час реалізації цих математичних моделей дає змогу отримати динаміку температури, вологовмісту та компонент напружень, включаючи залишкові напруження у висушуваній деревині з урахуванням наявних у ній ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.

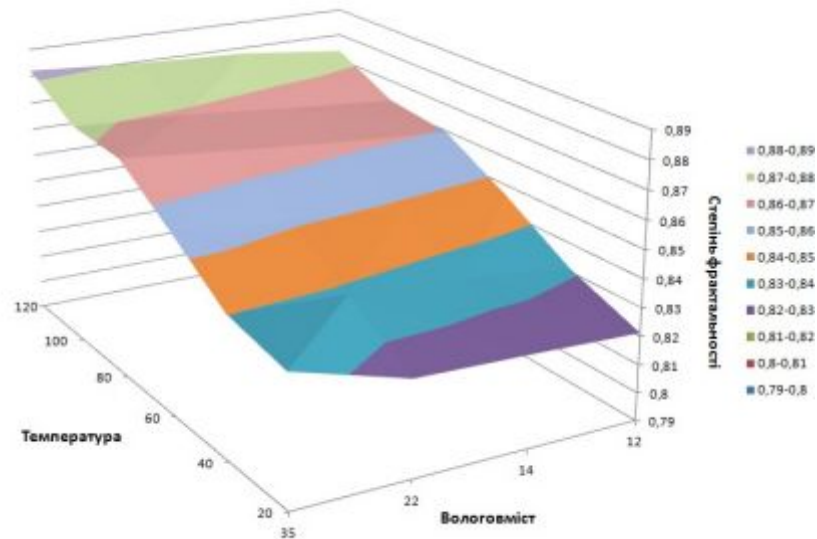


Рис. 3.6. Дробовий параметр α для сосни залежно від температури та вологовмісту

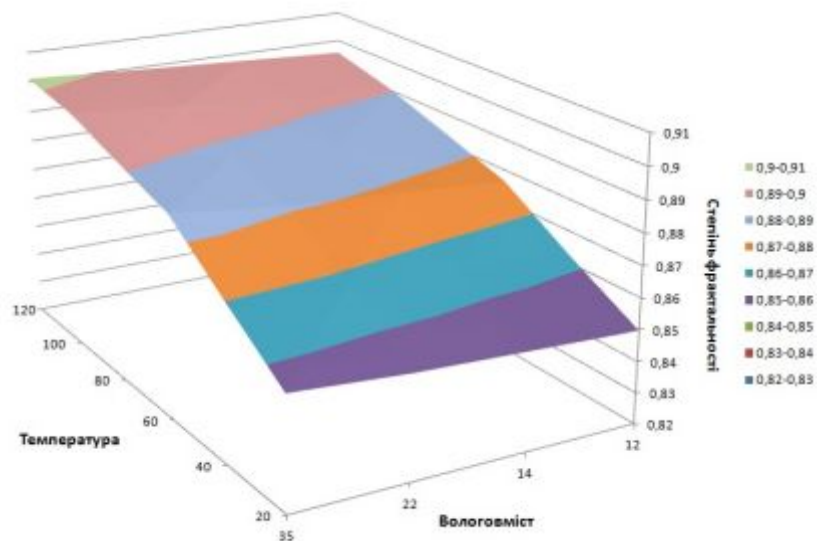


Рис. 3.7. Дробовий параметр α для берези залежно від температури та вологовмісту

У диференціальних рівняннях (3.62) – (3.64) математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння є присутня функція релаксації. Вона утворюється шляхом побудови резольвенти ядра повзучості у таким чином:

$$R(t, \tau, \lambda) = \Pi^{(1)}(t, \tau) + \lambda \Pi^{(2)}(t, \tau) + \dots + \lambda^{n-1} \Pi^{(n)}(t, \tau) + \dots, \quad (3.84)$$

де $\Pi^{(i)}(t, \tau)$ – ітеровані ядра, що обчислюються:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(t, \tau) &= \Pi(t, \tau), \\ \Pi^{(2)}(t, \tau) &= \int_0^t \Pi^{(1)}(t, \tau) \Pi(s, \tau) ds, \\ \Pi^{(3)}(t, \tau) &= \int_0^t \Pi^{(2)}(t, \tau) \Pi(s, \tau) ds, \\ &\dots \\ \Pi^{(n)}(t, \tau) &= \int_0^t \Pi^{(n-1)}(t, \tau) \Pi(s, \tau) ds, \end{aligned} \quad (3.85)$$

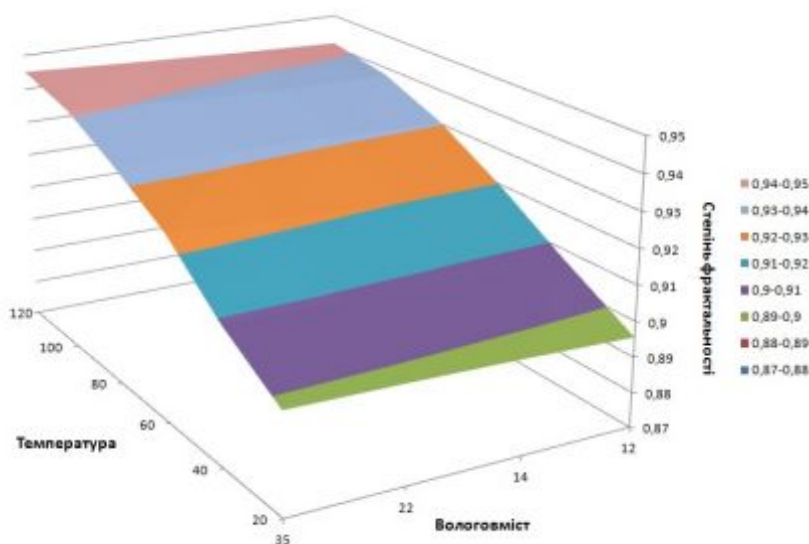


Рис. 3.8. Дробовий параметр α для бука залежно від температури та вологовмісту

Таким чином, було апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних функцій та виокремлено їх дробовий параметр, що характеризує вплив фрактальної структури матеріалу. Отримано коефіцієнти ядер повзучості та релаксації, які є необхідними для реалізації математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою.

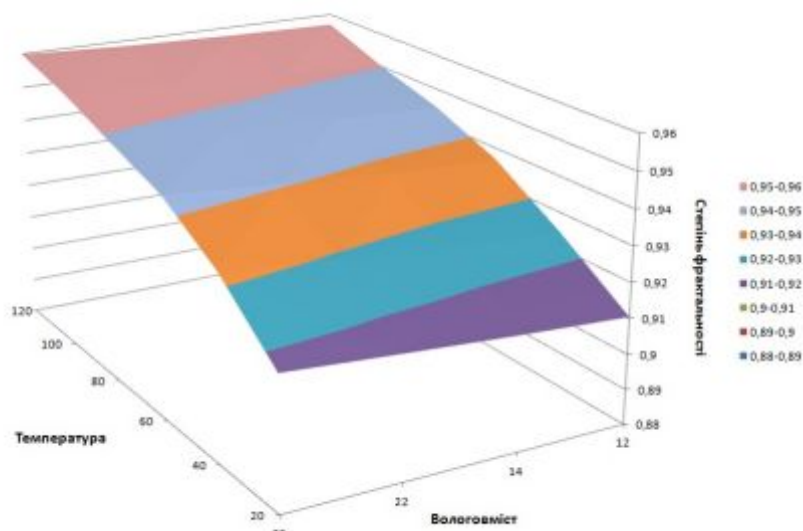


Рис. 3.9. Дробовий параметр α для залежно від температури та вологовмісту

3.7. Валідація та верифікація моделі

Скористаємось принципом, за яким було доведено адекватність математичної моделі неізотермічного вологоперенесення, описаного у підрозділі 2.5, для підтвердження адекватності математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння (3.52) – (3.69). Проведемо верифікацію програмного забезпечення, побудованого на скінченно-різницевих апроксимаціях (3.70) – (3.80), шляхом співставлення одержаних результатів з результатами, отриманими іншими дослідниками у часткових випадках. Порівняльну характеристику модельованих процесів з експериментальними даними провести не вдасться, оскільки відсутні достатньо точні методи контролю напруженого стану деревини у процесі сушіння.

Покажемо, що чисельний метод заснований на схемах (3.70) – (3.80) є збіжним. Розглянемо задачу в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури у процесі сушіння та без урахування цієї властивості матеріалу. Чисельний експеримент визначення

динаміки компонент напружень деревини у процесі сушіння наведемо для дуба з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60 \%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

Розглянемо поведінку чисельного розв'язку при збільшенні точок розбиття. Також позначимо через $\sigma_{11}^{трад}$ значення компоненти напруження σ_{11} традиційної моделі ($\alpha = 1$), а через $\sigma_{11}^{фракт}$ – значення з урахуванням фрактальної структури деревини. Аналогічно, введемо позначення $\sigma_{22}^{трад}$, $\sigma_{22}^{фракт}$, $\sigma_{12}^{трад}$, $\sigma_{12}^{фракт}$ для компонент σ_{22} та σ_{12} відповідно. Наведемо значення чисельного експерименту протягом перших 48 годин сушіння у різних геометричних точках взірця.

Позначимо через $\sigma_{11}^1_{трад}$, $\sigma_{11}^1_{фракт}$, $\sigma_{22}^1_{трад}$, $\sigma_{22}^1_{фракт}$, $\sigma_{12}^1_{трад}$, $\sigma_{12}^1_{фракт}$ компоненти напружень знайдені за допомогою чисельної реалізації традиційної та фрактальної моделі, значення яких наведені у табл. 3.1 відповідно. Через $\sigma_{11}^2_{трад}$, $\sigma_{11}^2_{фракт}$, $\sigma_{22}^2_{трад}$, $\sigma_{22}^2_{фракт}$, $\sigma_{12}^2_{трад}$, $\sigma_{12}^2_{фракт}$ – значення у табл. 3.2, а через $\sigma_{11}^3_{трад}$, $\sigma_{11}^3_{фракт}$, $\sigma_{22}^3_{трад}$, $\sigma_{22}^3_{фракт}$, $\sigma_{12}^3_{трад}$, $\sigma_{12}^3_{фракт}$ – у табл. 3.3. Обчислимо максимальну за модулем відносну похибку методу при різних кількостях точок розбиття за формулою:

$$\varepsilon_{jk}^\sigma = \max_i \left\{ \left| \sigma^j \Big|_i - \sigma^k \Big|_i \right| \right\} \quad (3.86)$$

Аналізуючи дані у табл. 3.1-3.3 та дані максимальних за модулем відносних похибок у табл. 3.4, приходимо до висновку, що метод заснований на різницевих схемах (3.70) – (3.80) є збіжним по часовій координаті, із

застосуванням традиційного апарату та апарату інтегро-диференціювання дробового порядку, оскільки із збільшенням кількості точок розбиття максимальна відносна похибка на порядок зменшується. Аналогічним чином можна показати збіжність методу по просторових координатах.

Таблиця 3.1

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 160000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (ГОД.) | Точка $C(l_1; l_2)$ | | | | | |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{град}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{град}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{град}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 1,763927 | 1,774767 | 1,034013 | 0,841178 | 1,077366 | 0,950297 |
| $\tau = 12$ | 3,678311 | 3,840904 | 1,581104 | 1,605817 | 1,71727 | 1,748205 |
| $\tau = 18$ | 3,803971 | 3,462201 | 1,486387 | 1,503731 | 1,637553 | 1,66355 |
| $\tau = 24$ | 2,51836 | 2,431769 | 1,105146 | 1,037718 | 1,217884 | 1,247705 |
| $\tau = 30$ | 1,17547 | 1,238446 | 0,892541 | 0,644046 | 1,180634 | 1,04845 |
| $\tau = 36$ | 1,009229 | 1,265973 | 0,503042 | 0,565366 | 0,895057 | 0,916745 |
| $\tau = 42$ | 0,679895 | 0,781374 | 0,3228 | 0,510683 | 0,731873 | 0,789862 |
| $\tau = 48$ | -0,09316 | 0,248495 | 0,101307 | 0,27251 | 0,579825 | 0,595779 |

Таблиця 3.2

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 280000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (ГОД.) | Точка $C(l_1; l_2)$ | | | | | |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{град}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{град}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{град}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 2,045776 | 1,919913 | 1,037572 | 0,979401 | 1,094897 | 1,051749 |
| $\tau = 12$ | 4,022712 | 3,958426 | 1,805892 | 1,768358 | 1,786576 | 1,757834 |
| $\tau = 18$ | 3,813164 | 3,825807 | 1,715096 | 1,707464 | 1,657728 | 1,661795 |
| $\tau = 24$ | 2,513341 | 2,556259 | 1,255632 | 1,279818 | 1,355664 | 1,364532 |

| | | | | | | |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\tau = 30$ | 1,569339 | 1,636101 | 0,885872 | 0,937181 | 1,171608 | 1,199154 |
| $\tau = 36$ | 1,191149 | 1,276987 | 0,691774 | 0,749153 | 0,999257 | 1,04003 |
| $\tau = 42$ | 0,683123 | 0,824839 | 0,505235 | 0,565383 | 0,823077 | 0,865443 |
| $\tau = 48$ | 0,121614 | 0,278562 | 0,286305 | 0,343574 | 0,655142 | 0,704409 |

Таблиця 3.3

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 320000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (ГОД.) | Точка $C(l_1; l_2)$ | | | | | |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 2,0519 | 1,9209 | 1,0469 | 0,9814 | 1,1040 | 1,0603 |
| $\tau = 12$ | 4,0588 | 3,9758 | 1,8113 | 1,7698 | 1,7959 | 1,7683 |
| $\tau = 18$ | 3,8148 | 3,8296 | 1,7305 | 1,7356 | 1,6672 | 1,6721 |
| $\tau = 24$ | 2,5422 | 2,5769 | 1,2805 | 1,2927 | 1,3662 | 1,3778 |
| $\tau = 30$ | 1,6006 | 1,6684 | 0,9153 | 0,9391 | 1,1807 | 1,2033 |
| $\tau = 36$ | 1,1975 | 1,3066 | 0,7160 | 0,7541 | 1,0131 | 1,0494 |
| $\tau = 42$ | 0,7007 | 0,8458 | 0,5225 | 0,5733 | 0,8303 | 0,8787 |
| $\tau = 48$ | 0,1221 | 0,2816 | 0,3022 | 0,3581 | 0,6564 | 0,7096 |

Таблиця 3.4

Відносна похибка методу при різних кількостях точок розбиття

| Похибка | Компоненти | | | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\varepsilon_{12}^{\sigma}$ | 0,3939 | 0,3977 | 0,2287 | 0,2931 | 0,1378 | 0,1507 |
| $\varepsilon_{13}^{\sigma}$ | 0,4252 | 0,4299 | 0,2441 | 0,2950 | 0,1483 | 0,1548 |
| $\varepsilon_{23}^{\sigma}$ | 0,0360 | 0,0323 | 0,0295 | 0,0282 | 0,0138 | 0,0133 |

Для того, щоб показати адекватність математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною

структурою у процесі сушіння, проведемо порівняння отриманих розподілів компонент напружень із чисельними результатами, отриманими іншими дослідниками в часткових випадках. Зокрема, у праці [104] наведені результати динаміки зміни напружень для взірця, виготовленого із ялини Дугласа. Були опубліковані дані чисельного експерименту протягом перших 25 годин сушіння з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 450 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.22 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 80 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 65 \%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.023; 0.023] \text{ м}$.

Позначимо через $\sigma_{11}^{\text{досл}}$ значення компоненти напружень σ_{11} отриманої дослідником під час проведення чисельного експерименту для задачі описаної у праці [104]. Проаналізуємо відхилення отриманих значень досліджуваного процесу із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без від значень опублікованих у зазначеній праці.

Аналізуючи дані у табл. 3.5 можна прийти до висновку, що математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння є адекватною. Максимальне відхилення значення компоненти напружень σ_{11} обчисленого дослідником та за допомогою даної математичної моделі становить: у точці $B(l_1/2; l_2/2)$ без урахування фрактальної структури матеріалу становить 6,7%, з урахуванням – 4,8%; у точці $C(l_1; l_2)$ без урахування – 11,5%, з урахуванням – 6,1%.

Таблиця 3.5

Значення компоненти напружень σ_{11} у різних геометричних точках взірця

| Час (год.) | Геометричні точки взірця | | | | | |
|---------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------|--------------------------|---------------------------|
| | $B(l_1/2; l_2/2)$ | | | $C(l_1; l_2)$ | | |
| | $\sigma_{11}^{досл}$ | $\sigma_{11\text{трад}}$ | $\sigma_{11\text{фракт}}$ | $\sigma_{11}^{досл}$ | $\sigma_{11\text{трад}}$ | $\sigma_{11\text{фракт}}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 2.5$ | 0,25 | 0,2682 | 0,2682 | 0,67 | 0,7125 | 0,7124 |
| $\tau = 5$ | 0,47 | 0,4921 | 0,4903 | 1,18 | 1,3155 | 1,3093 |
| $\tau = 7.5$ | 0,51 | 0,5436 | 0,5381 | 1,73 | 1,9418 | 1,9323 |
| $\tau = 10$ | 0,63 | 0,6758 | 0,6636 | 2,16 | 2,3924 | 2,3567 |
| $\tau = 12.5$ | 0,78 | 0,8345 | 0,8187 | 2,69 | 3,0752 | 2,8895 |
| $\tau = 15$ | 0,86 | 0,8953 | 0,8932 | 3,34 | 3,6891 | 3,5458 |
| $\tau = 17.5$ | 0,855 | 0,9134 | 0,8981 | 3,32 | 3,5834 | 3,4623 |
| $\tau = 20$ | 0,854 | 0,8953 | 0,8834 | 3,30 | 3,4938 | 3,4149 |
| $\tau = 22.5$ | 0,853 | 0,8814 | 0,8771 | 3,29 | 3,4017 | 3,3887 |
| $\tau = 25$ | 0,852 | 0,8633 | 0,8705 | 3,28 | 3,3312 | 3,3693 |

Користуючись статистичним критерієм на базі коефіцієнта кореляції (2.24), (2.25) перевіримо гіпотезу про існування кореляційного зв'язку між величинами $\sigma_{11}^{досл}$ та $\sigma_{11\text{трад}}$ і $\sigma_{11\text{фракт}}$, значення яких наведені у табл. 3.5. Відповідно, отримаємо кількісну оцінку розходження результатів, отриманих за математичною моделю в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою (3.52) – (3.69) та даними опублікованими у [104].

Аналізуючи результати адекватності математичної моделі у табл. 3.6 можна побачити, для всіх обчислень виконується умова $|t_v| \geq t_v$. Відповідно з ймовірністю $\nu = 0,02$ можна стверджувати про адекватність характеру зміни результатів чисельного розрахунку за математичною моделлю.

Таблиця 3.6

Дослідження адекватності математичної моделі у порівнянні з експериментальними даними [104]

| | Геометричні точки взірця | |
|--|--------------------------|---------------|
| | $B(l_1/2; l_2/2)$ | $C(l_1; l_2)$ |
| $\rho_{\sigma_{11\text{трад}} \sigma_{11}^{\text{досл}}}$ | 0,9989 | 0,9967 |
| $\left t_{\sigma_{11\text{трад}}} \right $ | 65,6333 | 36,6469 |
| $\rho_{\sigma_{11\text{фракт}} \sigma_{11}^{\text{досл}}}$ | 0,9997 | 0,9989 |
| $\left t_{\sigma_{11\text{фракт}}} \right $ | 115,4816 | 62,79347 |

Таким чином було показано, що отримані чисельні результати традиційної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів та моделі з урахуванням фрактальної структури деревини у процесі сушіння є адекватними у порівнянь з результатами отриманими іншими дослідниками в часткових випадках.

3.8. Висновки

Використовуючи основні закони механіки спадкових середовищ та математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку отримано нові математичні моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, що дозволяє врахувати складну природу просторових кореляцій, наявність ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу.

Отримано скінченно-різницеву апроксимацію основних рівнянь реологічної поведінки деревини у процесі сушіння з урахуванням її фрактальної структури, що дозволяє знайти чисельний розв'язок задачі в'язко-

пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння.

Розроблено прикладне програмне забезпечення для знаходження компонент напружень деревини у процесі сушіння з урахуванням її фрактальної структури.

Апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів, що дозволяє підвищити точність апроксимації.

Обґрунтовано адекватність та проведено верифікацію математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння шляхом аналізу похибок та виявлення кореляційного зв'язку між отриманими результатами та експериментальними даними. Доведено збіжність скінченно-різницевого методу, що використовується для знаходження чисельного розв'язку цієї задачі.

РОЗДІЛ 4

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТА В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

На основі розробленої математичної моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння досліджено динаміку температури, вологовмісту та компонент напружень у деревині залежно від її породи, геометричних розмірів та параметрів агента сушіння. Основні результати опубліковані у працях [109, 110, 180, 181, 185, 195].

4.1. Інтерфейс прикладного програмного забезпечення для обчислення температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння

Як уже було сказано у підрозділах 2.4 та 3.5, прикладне програмне забезпечення для знаходження чисельного розв'язку задачі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння було розроблено з використанням середовища MatLab 7. У цих підрозділах також наведено діаграми варіантів використання, що описують основні можливості користувача, та діаграми послідовностей, що відображають алгоритм виклику методів під час виконання певного варіанту використання.

Середовище MatLab 7 також надає великий спектр можливостей для розроблення інтерфейсу користувача та зручні механізми підключення вже готових програм, написаних мовою MatLab. Інтерфейс розробленого прикладного програмного забезпечення для знаходження чисельного розв'язку поставленої задачі зображено на рис. 4.1.

Математична модель неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування

Меню

Половини геометричних розмірів взірця

Довжина (м)

Ширина (м)

Час моделювання

Час моделювання (год)

Кількість точок розбиття по:

Часовій координаті

Координаті X

Координаті Y

Параметри агента сушіння

Температура середовища (C)

Швидкість агента (м/с)

Відносна вологість (%)

Початкові значення

Температура (C)

Вологовміст (кг/кг)

Порода деревини

Порода деревини

Обчислити задачу неізотермічного вологоперенесення

Коефіцієнти Пуассона

V1

V2

Температурні та вологісні поля

Розв'язати повторно задачу неізотермічного вологоперенесення?

Так

Обчислити задачу в'язко-пружного деформування

Рис. 4.1. Інтерфейс розробленого прикладного програмного забезпечення для обчислення задачі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння

Як можна бачити із рис. 4.1 графічний інтерфейс складається із 8 областей, у які входять 13 полів для введення значень, 2 випадаючих меню та 2 кнопки.

В області «Половини геометричних розмірів взірця» знаходяться два поля, у яких можна задати значення половини довжини та ширини поперечного перерізу бруска.

В області «Кількість точок розбиття по» можна ввести кількість вузлів скінченно-різницевого розбиття по часовій та просторових координатах. Мінімальні значення їх кількості визначаються із умов збіжності скінченно-різницевого методу. Згущення скінченно-різницевої сітки приведе не лише до підвищення точності розв'язку, але й до збільшення кількості обчислень, що в свою чергу збільшить час моделювання.

В області «Початкові значення» задаються початкова температура та вологовміст висушуваної деревини.

В області «Час моделювання» задається час моделювання процесу сушіння деревини. Слід зазначити, що дана величина вимірюється в годинах, проте під час знаходження чисельного розв'язку моделі вона переводиться в секунди для збереження відповідності між розмірностями використовуваних величин.

В області «Параметри агента сушіння» задаються основні властивості агента сушіння такі як: температура – визначає температурний режим процесу сушіння; швидкість агента – задає його швидкість руху по сушильній камері; відносна вологість – визначає відносний вологовміст.

В області «Порода деревини» за допомогою випадаючого меню існує можливість вибрати її породу, для якої буде проводитись чисельний експеримент.

В області «Коефіцієнти Пуассона» відповідно можна задати числові значення коефіцієнтів Пуассона, які будуть використовуватись при розрахунку напружено-деформівного стану.

При програмуванні додатків з графічним інтерфейсом користувача середовище MatLab надає можливість обробки подій, що послідовно виникають при виборі користувачем того чи іншого елемента інтерфейсу. При натисканні на кнопку, завершенні вводу тексту в рядок введення, натисканні на клавішу Enter, установці або скиданні прапорця виникає подія Callback відповідного елемента інтерфейсу. Для обробки даної події потрібно запрограмувати функцію і пов'язати її з подією Callback елемента управління.

На графічному інтерфейсі, що зображений на рис. 4.1 знаходиться кнопка «Обчислити задачу неізотермічного вологоперенесення». Її натискання приводить до запуску алгоритму обчислення числових значень температури та вологовмісту капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Callback функція дає можливість передачі вхідних даних основній процедурі знаходження чисельного розв'язку та виклику m-файлу в якому вона реалізована. Її програмна реалізація є такою:

```
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
global t_end poroda l1 l2 T0 U0 Tc v fi n k1 k2
t_end = GetModelingTime(handles);
poroda = GetWoodSpecies(handles);
[l1, l2] = GetGeometricSizes(handles);
[T0, U0] = GetInitialValues(handles);
[Tc, v, fi] = GetDryingChamberPar(handles);
[n, k1, k2] = GetMethodParam(handles);
SolveNonIsothermalMoistureTrasferProblem;
```

Кнопка «Обчислити задачу в'язко-пружного деформування» дозволяє обчислити числові значення компонент напружень деревини у процесі сушіння. Для їх знаходження мають бути відомі значення температури та вологовмісту. Тому, у реалізації Callback функції зазначеної кнопки передбачена можливість

повторного обчислення числових значень цих теплофізичних характеристик або використання вже обчислених. Її програмний код буде мати вигляд:

```

function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
global v1 v2
[v1, v2] = GetReologicalParams(handles);
ReCalculate = ChoseTempAndMoistureField(handles);
SetReologicalInitialValues(handles);
if ReCalculate == 1
    global t_end poroda l1 l2 T0 U0 Tc v fi n k1 k2
    t_end = GetModelingTime(handles);
    poroda = GetWoodSpecies(handles);
    [l1, l2] = GetGeometricSizes(handles);
    [T0, U0] = GetInitialValues(handles);
    [Tc, v, fi] = GetDryingChamberPar(handles);
    [n, k1, k2] = GetMethodParam(handles);
    SolveNonIsothermalMoistureTrasferProblem;
end
SolveStressStrainStateProblem;

```

Таким чином, можна підсумувати, що розроблений програмний інтерфейс є інформативним, зрозумілим для користувача, дозволяє задати усі необхідні вхідні параметри математичної моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Також слід відмітити можливість повторного використання попередньо отриманих величин температури та вологовмісту під час обчислення числових значень компонент напружено-деформівного стану. Це дає можливість суттєво зменшити час виконання програми. Побудова графічних залежностей відбувається автоматично. Їх кількість дозволяє у

повній мірі оцінити величину та характер зміни числових значень модельованих процесів.

4.2. Аналіз динаміки температури та вологовмісту у деревині під час сушіння

У цьому підрозділі ставиться за мету дослідити вплив геометричних розмірів, породи деревини, анізотропії тепломеханічних властивостей і параметрів агента сушіння на динаміку температури та вологовмісту за допомогою математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою (2.11) – (2.16) під час сушіння.

Поперечний переріз дерев'яного бруска та точки, які будуть використовуватися для порівняння числових значень модельованих процесів, зображено на рис. 4.2. Тут l_1 та l_2 – це половини тангентального і радіального розмірів відповідно. Як можна бачити, точка $A(0;0)$ знаходиться у центрі взірця, точка $B(l_1/2; l_2/2)$ – у середині, $C(l_1; l_2)$ – у куті прямокутного бруска.

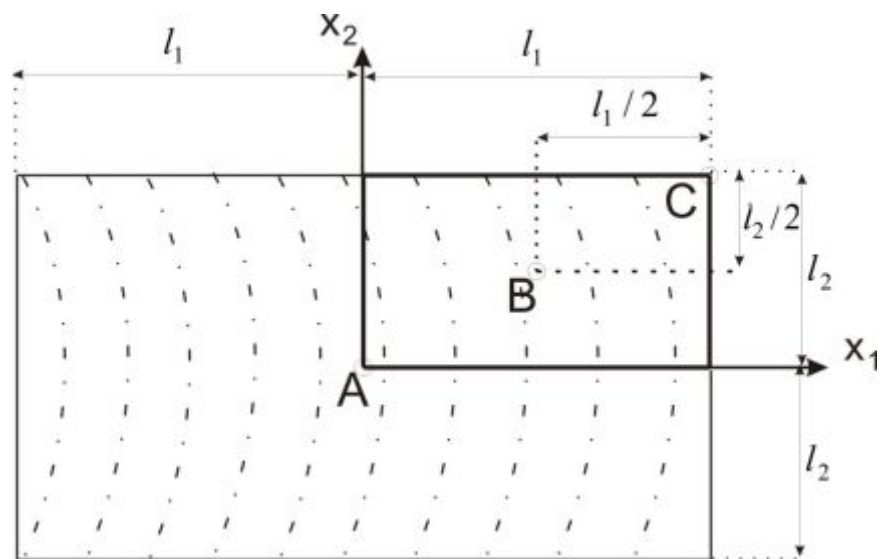


Рис. 4.2. Поперечний переріз дерев'яного бруска

Проаналізовано вплив геометричних розмірів взірця на розподіл температури та вологовмісту. Для проведення чисельного експерименту вибрано дубовий брусок з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$.

Розглянуто результати реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою для взірців із різними геометричними розмірами.

На рис. 4.3, 4.4 зображено графіки зміни температури бруска з розмірами рівними $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ та $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.05]$ відповідно. З рис 4.3 видно, що температура збільшується на всіх гранях рівномірно, оскільки поперечний переріз бруска має форму квадрата. На рис. 4.4 можна побачити, що температура зростає швидше на грані, розмір якої є меншим. Також видно, що незалежно від розмірів взірця вона зростає швидше у точках, які знаходяться ближче до поверхні матеріалу, ніж до його центру.

Показано відмінність динаміки температури чисельного експерименту математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури у процесі сушіння та без її урахування. Аналогічно, як у підрозділі 2.5, для врахування фрактальної структури матеріалу показник дробової похідної α покладемо рівним значенню, визначеному із апроксимації експериментальних даних повзучості деревини. Відповідно, для нехтування фрактальною структурою матеріалу, покладемо $\alpha = 1$.

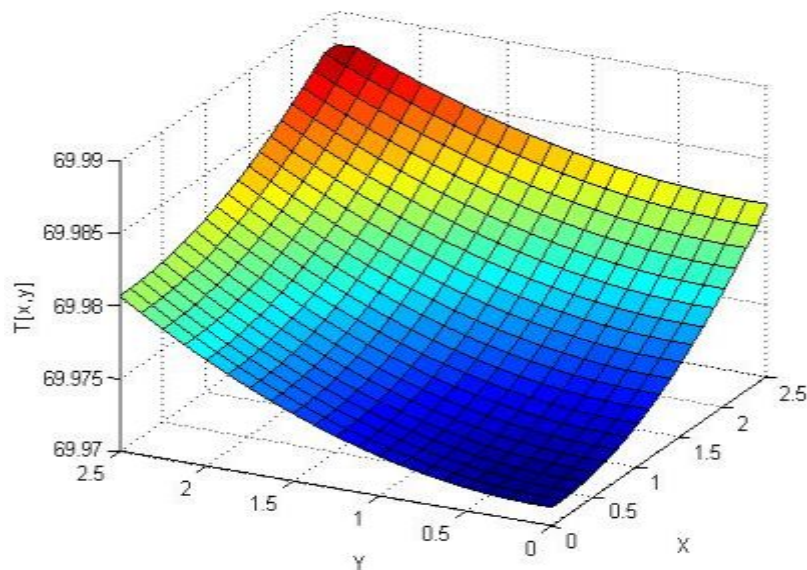


Рис. 4.3. Розподіл температури на взірці з розмірами $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ після трьох годин сушіння

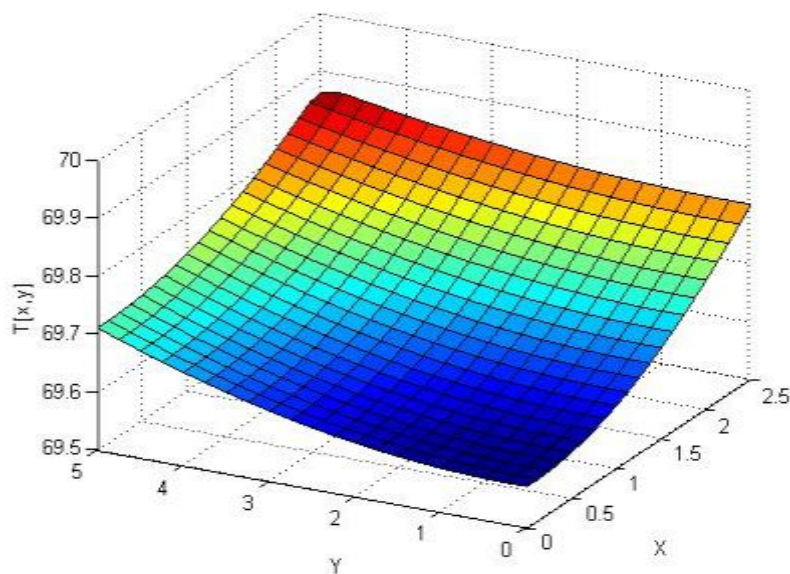


Рис. 4.4. Розподіл температури на взірці з розмірами $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.05]$ після трьох години сушіння

На рис. 4.5 показано динаміку температури на бруску, поперечний переріз якого має форму квадрата, у різних його точках. Як можна бачити, температура у точках взірця, ближчих до границі піднімається швидше, ніж у

точках ближчих до його центру. Також видно вплив фрактальної структури матеріалу. Слід відмітити, що за рахунок неоднорідної структури деревини, зростання температури відбувається дещо повільніше. Цей факт можна пояснити наявністю капілярів та пор, частково заповнених повітрям. Як відомо, значення коефіцієнту теплопровідності повітря є меншим ніж деревини. Тому прослідковується ефект уповільнення процесу її нагрівання. Його можна враховувати лише за допомогою використання математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку для побудови математичної моделі неізотермічного вологоперенесення.

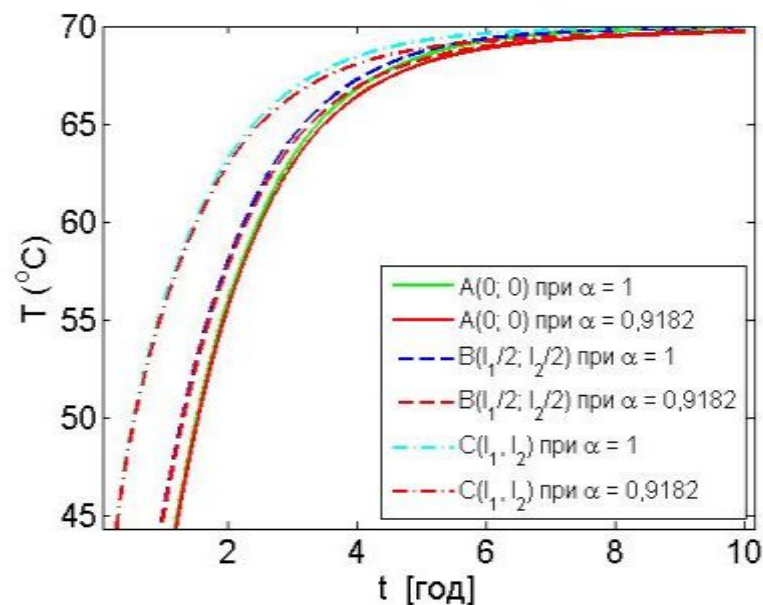


Рис. 4.5. Зміна температури у різних геометричних точках зрізці розміром $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$

На рис. 4.6 зображено динаміку температури у точці $A(0;0)$ на зрізках, геометричні розміри яких відносяться один до одного у наступних пропорціях: $\frac{l_2}{l_1} = 1, \frac{l_2}{l_1} = 2, \frac{l_2}{l_1} = 3$ при $l_1 = 0.025$ та $l_2 = 0.025, l_2 = 0.05, l_2 = 0.075$ відповідно. Також наведено результати реалізації моделі з урахуванням фрактальної структури середовища та без її урахування. Дивлячись на цей рисунок можна зробити

висновок, що із збільшенням розмірів взірця температура у його центрі буде повільніше підніматись до значення температури агента сушіння.

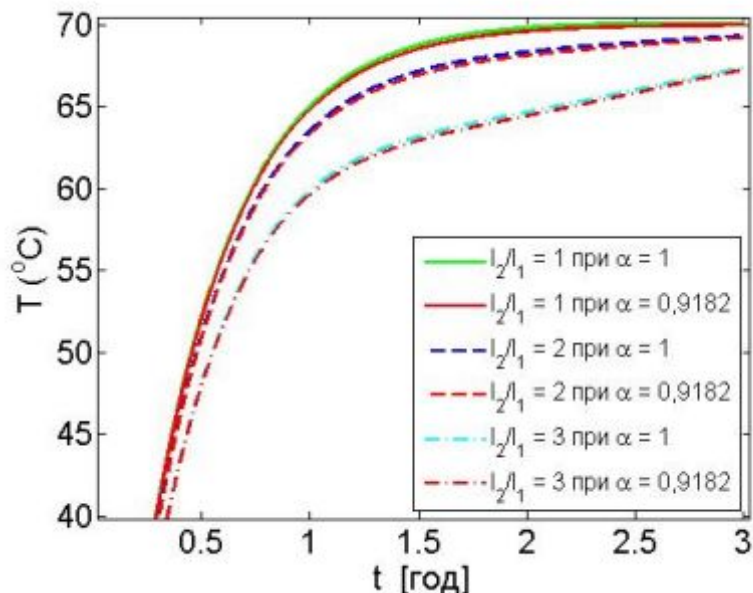


Рис. 4.6. Зміна температури у точці $A(0;0)$ на взірцях із різними геометричними розмірами

Розглянуто розподіл вологовмісту деревини під час сушіння залежно від геометричних розмірів взірця. На рис. 4.7 зображено графічну залежність зміни вологовмісту бруска з геометричними розмірами рівними $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$. Аналізуючи її бачимо, що видалення вологи через усі грані відбувається рівномірно, так як поперечний переріз бруска має форму квадрата. Вологовміст зменшується швидше у точках ближчих до поверхні матеріалу ніж до його центру.

На рис. 4.8 зображено графічну залежність зміни вологовмісту бруска з геометричними розмірами рівними $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.05]$. Бачимо, що інтенсивність вологовидалення є вищою на грані, геометричний розмір якої є меншим. Цей факт можна пояснити тим, що вона прогрівається швидше. Це підтверджує рис. 4.3, 4.4.

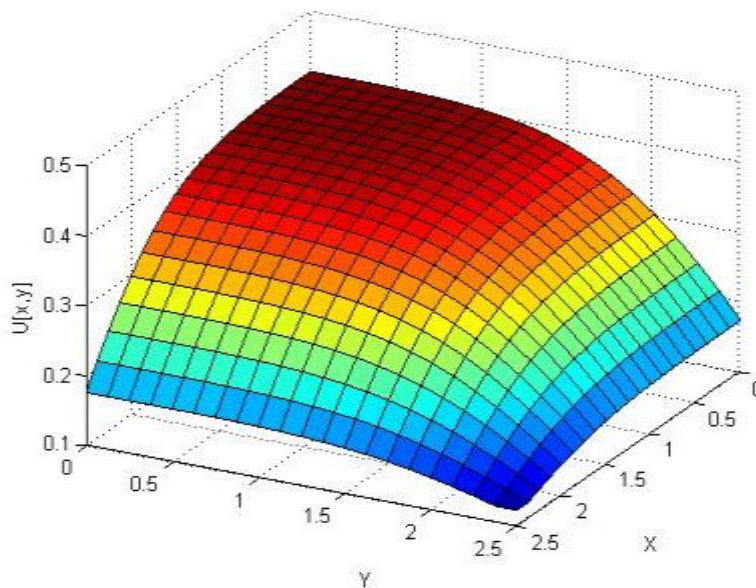


Рис. 4.7. Розподіл вологовмісту на взірці з розмірами $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ після трьох години сушіння

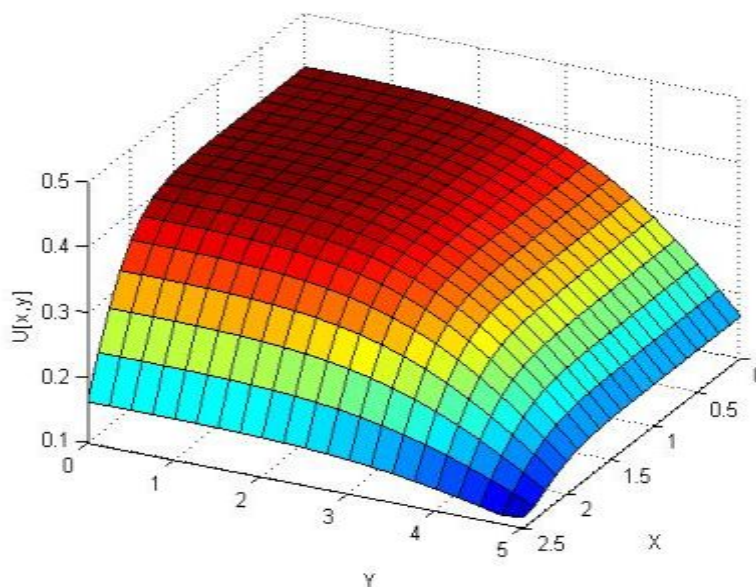


Рис. 4.8. Розподіл вологовмісту на взірці з розмірами $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.05]$ після трьох години сушіння

Показано відмінність величин вологовмісту отриманих за допомогою реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-

пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури у процесі сушіння та без її урахування.

Проаналізувавши графічні залежності динаміки вологовмісту дубового бруска з поперечним перерізом у формі квадрата протягом 24 годин сушіння, зображених на рис. 4.9, приходимо до висновку, що у точках ближчих до поверхні взірця вологовміст швидше встановлюється рівним значенню рівноважного вологовмісту. Врахування фрактальної структури висушуваної деревини дозволяє моделювати процес уповільнення вологовидалення, що зумовлюється складною структурою матеріалу, наявністю пор, капілярів та інших нелінійних властивостей. Також особливу увагу привертає той факт, що згідно з результатами реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння, вплив цієї структури на динаміку вологовмісту проявляється у істотніше у точках ближчих до центру взірця, ніж у точках ближчих до його границь.

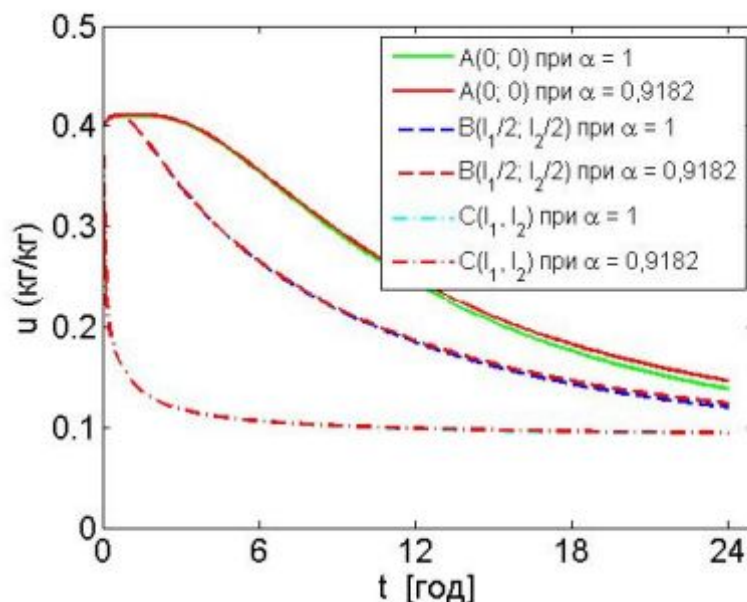


Рис. 4.9. Зміна вологовмісту у різних геометричних точках взірця розміром $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$

На рис. 4.10 зображено динаміку вологовмісту у точці $A(0;0)$ на взірцях виготовлених з однієї породи деревини, але з різними пропорційними співвідношеннями геометричних розмірів. Здійснено реалізацію математичної моделі (2.11)–(2.16) з урахуванням фрактальної структури середовища та без її урахування. Із цього рисунку випливає, що зі збільшенням розмірів взірця, його вологовміст повільніше прямуватиме до рівноважного вологовмісту. Видно, що із збільшенням розмірів матеріалу вплив фрактальної структури стає істотнішим.

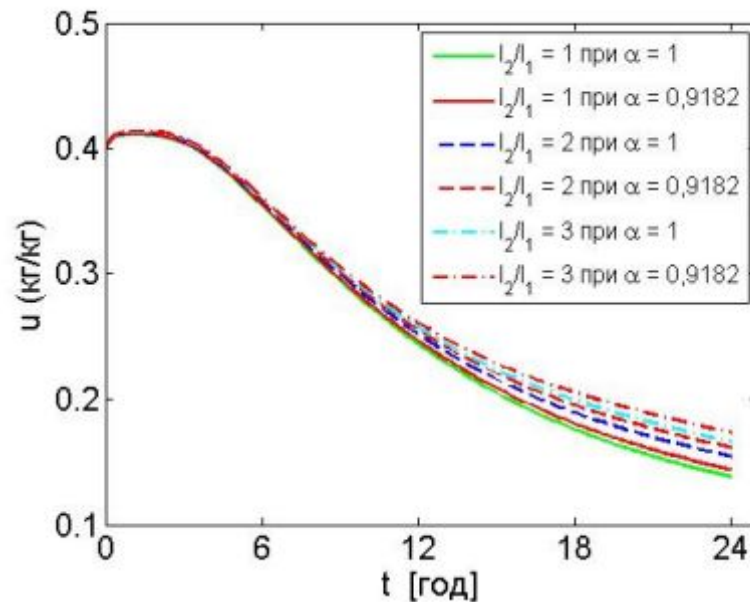


Рис. 4.10. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ на взірцях із різними геометричними розмірами

Динаміка температури та вологовмісту деревини у процесі сушіння залежить від її породи. Для аналізу цієї залежності проведено чисельний експеримент для брусків з різних порід деревини та однаковими геометричними розмірами, параметрами агента сушіння, початковими температурою та вологовмістом. Значення фізичних параметрів та параметрів агента сушіння будуть такими:

- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4$ кг/кг;

- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

Розглянуто результати моделювання математичної моделі неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою під час сушіння для взірців із різних порід деревини. На рис. 4.11 – 4.13 наведено динаміку температури у процесі сушіння брусків із поперечним перерізом у формі квадрата виготовлених з таких порід деревини: дуб, бук та сосна відповідно. Аналізуючи їх робимо висновок, що деревина, базисна густина якої є вищою, прогрівається повільніше. Вплив фрактальної структури на зміну температури у матеріалах із нижчою базисною густиною є суттєвішим ніж у твердіших матеріалах.

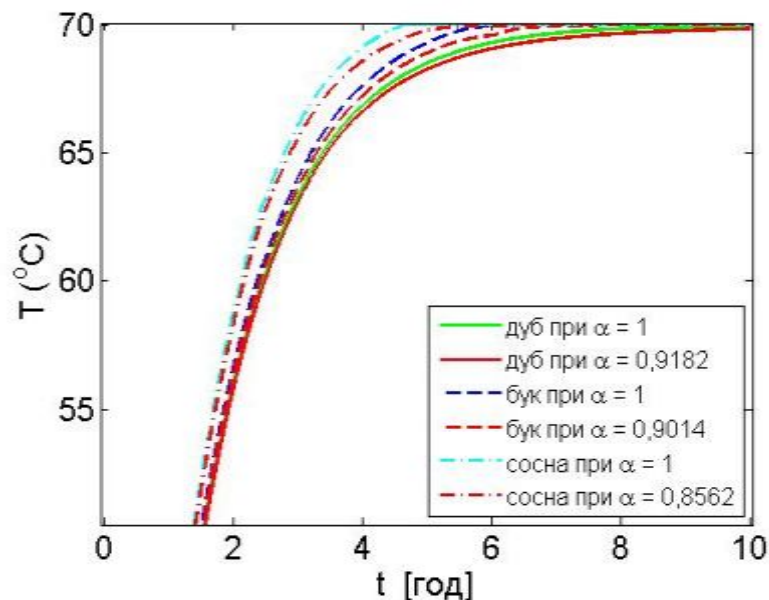


Рис. 4.11. Зміна температури у точці $A(0;0)$ на взірці залежно від породи деревини

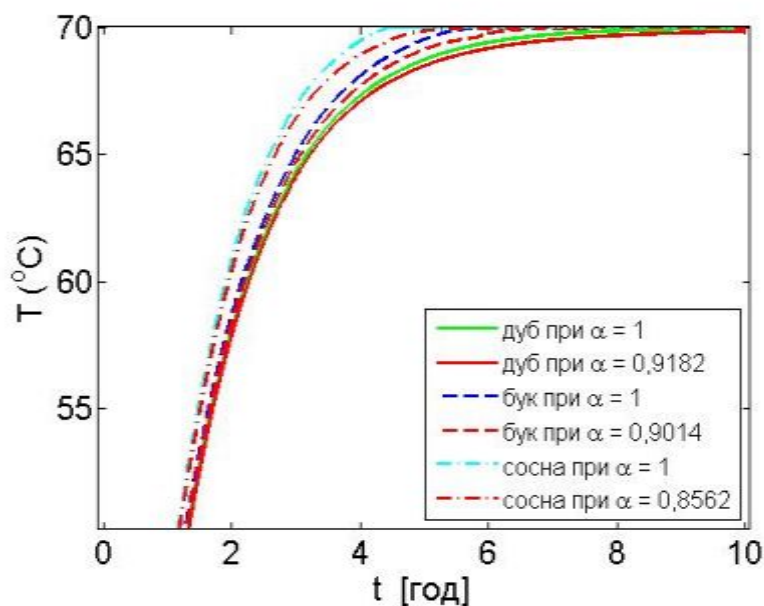


Рис. 4.12. Зміна температури у точці $B(l_1/2; l_2/2)$ на взірці залежно від породи деревини

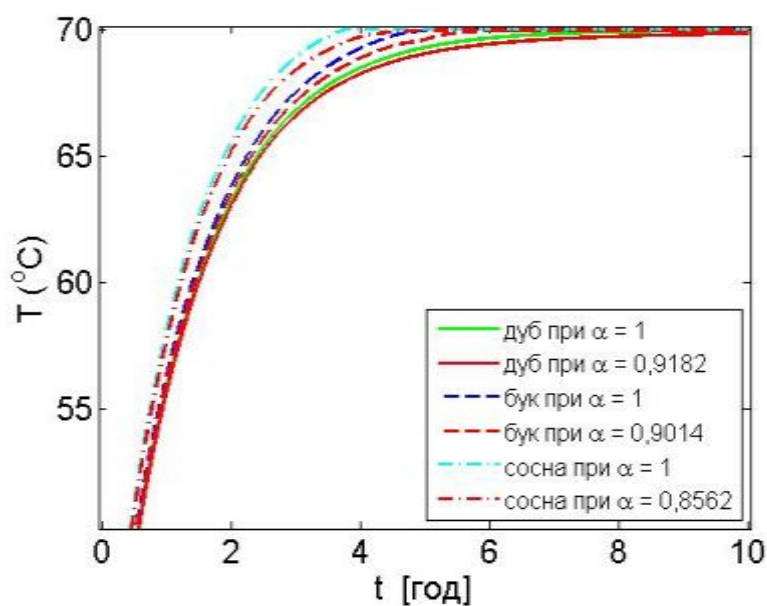


Рис. 4.13. Зміна температури у точці $C(l_1; l_2)$ на взірці залежно від породи деревини

На рис. 4.14 – 4.16 зображені графічні залежності динаміки вологовмісту у процесі сушіння брусків із різних порід деревини, половини геометричних розмірів поперечного перерізу яких рівні $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025]$. Із цих графіків

можна зробити такі висновки про вплив породи деревини та фрактальної структури матеріалу на зміну вологовмісту. Зокрема, вологість видаляється повільніше для порід з більшою базисною густиною. Це можна пояснити зокрема ще й тим, що такі породи прогріваються повільніше. Також, урахування фрактальної структури матеріалу дозволяє описати ефект уповільнення процесу вологовидалення, що зумовлено наявністю капілярів, пор та неоднорідної структури. Ця структура у більшій мірі впливає на зміну вологовмісту у матеріалах з меншою базисною густиною та у точках взірця ближчих до його центру. Для висушуваної деревини з однаковими геометричними розмірами, початковими значеннями температури і вологовмісту та параметрами агента сушіння, значення вологовмісту після 24 годин сушіння із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування у центрі бруска будуть відрізнятися: для дубового взірця – 2,7%; букового – 3,8%; соснового – 5,2%.

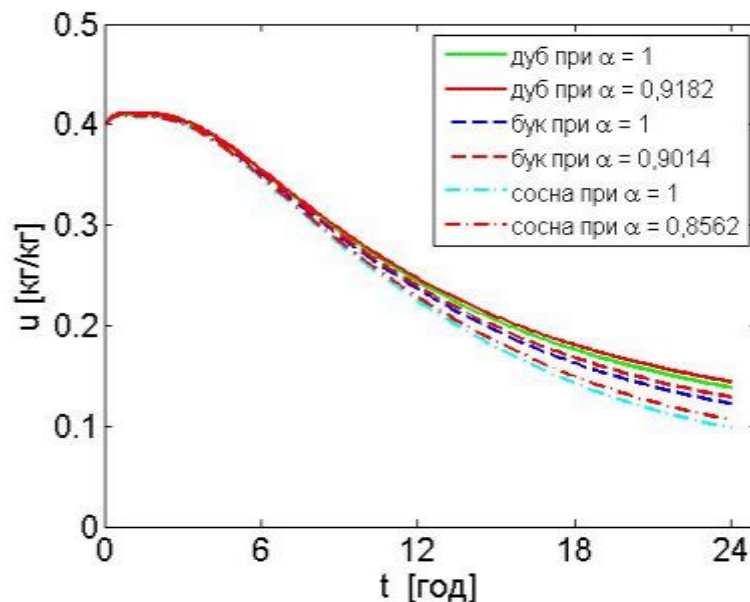


Рис. 4.14. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ на взірці залежно від породи деревини

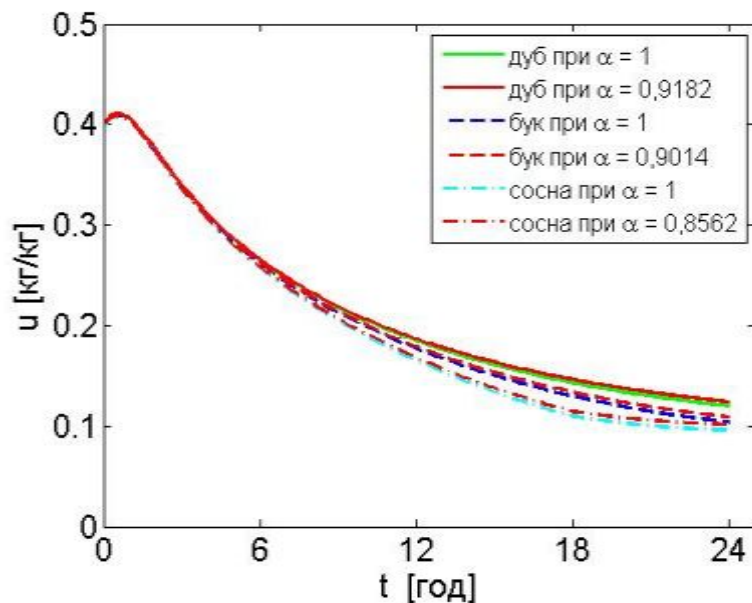


Рис. 4.15. Зміна вологовмісту у точці $B(l_1/2; l_2/2)$ на взірці залежно від породи деревини

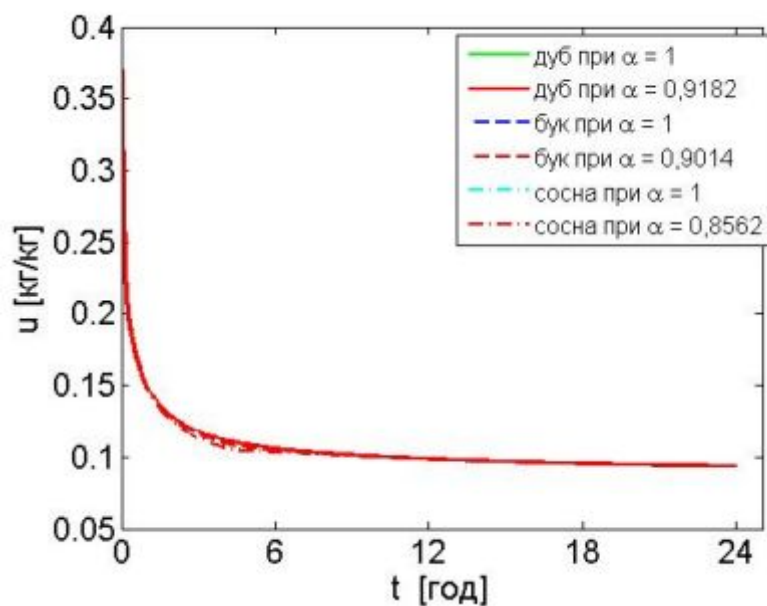


Рис. 4.16. Зміна вологовмісту у точці $C(l_1; l_2)$ на взірці залежно від породи деревини

Проаналізувавши зв'язок між динамікою температури та вологовмісту, розмірами взірця і породою деревини покажемо також залежність досліджуваних величин від анізотропії теплофізичних властивостей матеріалу.

Коефіцієнти, що входять в математичну модель неізотермічного вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою, вважаються анізотропними, тобто залежними від температури та вологовмісту. До них можна віднести коефіцієнти: теплопровідності, теплообміну, вологообміну, вологопровідності, термоградієнтний коефіцієнт, рівноважна вологість та густина. Зокрема, їх можна обчислити за такими співвідношеннями [123, 183, 215]:

$$\lambda_1 = 0.00222UT + 10^{0.295 \lg 100U - 1.022}; \quad (4.1)$$

$$\lambda_2 = 1.06 \cdot \lambda_1; \quad (4.2)$$

$$\alpha_1 = 8.35 \cdot (0.00625T_c + 2.1) \cdot \left(\frac{v}{0.0083T_c + 1.37} \right)^{0.8} \cdot T^{-0.2}; \quad (4.3)$$

$$\beta_1 = (0.527(T_c + 10)^{2.06} \cdot 10^{-4} + 0.04)((5v + 3.5) - (0.0017v + 0.0116)(100\varphi - 45)^2) \cdot 10^{-7}; \quad (4.4)$$

$$\beta_2 = 1.05 \cdot \beta_1; \quad (4.5)$$

$$\delta = ((5.55 - 0.013T) - 0.00242 \cdot (100U - (72 - 0.39T))^2) \cdot 10^{-2}; \quad (4.6)$$

$$U_p = 10.6^\varphi \cdot (0.0327 - 0.00015 \cdot T); \quad (4.7)$$

$$\rho = \rho_0(1 + U). \quad (4.8)$$

Також ці коефіцієнти залежать від породи деревини. Для сосни вони обчислюються таким чином:

$$\alpha_2 = 1.25 \cdot \alpha_1; \quad (4.9)$$

$$a_1 = 10^{-10 \cdot (9.36 \lg(T+273) - 22.6)}. \quad (4.10)$$

Для бука:

$$\alpha_2 = 1.30 \alpha_1; \quad (4.11)$$

$$a_1 = 10^{-10 \cdot (9.36 \lg(T+273) - 22.97)}. \quad (4.12)$$

Для дуба:

$$\alpha_2 = 1.35 \cdot \alpha_1; \quad (4.13)$$

$$a_1 = 10^{-10 \cdot (9.36 \lg(T+273) - 23.13)} \quad (4.14)$$

Коефіцієнт вологопровідності впоперек волокон визначається:

$$a_2 = 1.10 \cdot a_1 \quad (4.15)$$

Для проведення чисельного експерименту вибрано буковий взірець з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 530 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

На рис. 4.17 – 4.18 зображено динаміку температури та вологовмісту у центрі букового бруска під час сушіння з урахуванням анізотропії теплофізичних властивостей та фрактальної структури матеріалу та без їхнього урахування. Дивлячись на ці графіки, можна зробити такі висновки про зміну температури та вологовмісту. Значення температури з урахуванням анізотропії та без її урахування суттєво не відрізняються, різниця між цими випадками не перевищує 0,5%. Істотніший вплив спостерігається на зміну вологовмісту, різниця між цими випадками коливається в межах 5%. Також можна побачити вплив фрактальної структури деревини на цю динаміку.

Розглянуто динаміку температури та вологовмісту деревини під час сушіння залежно від фізичних параметрів матеріалу. Здійснено її аналіз в залежності від параметрів агента сушіння, а саме його швидкості руху та температури.

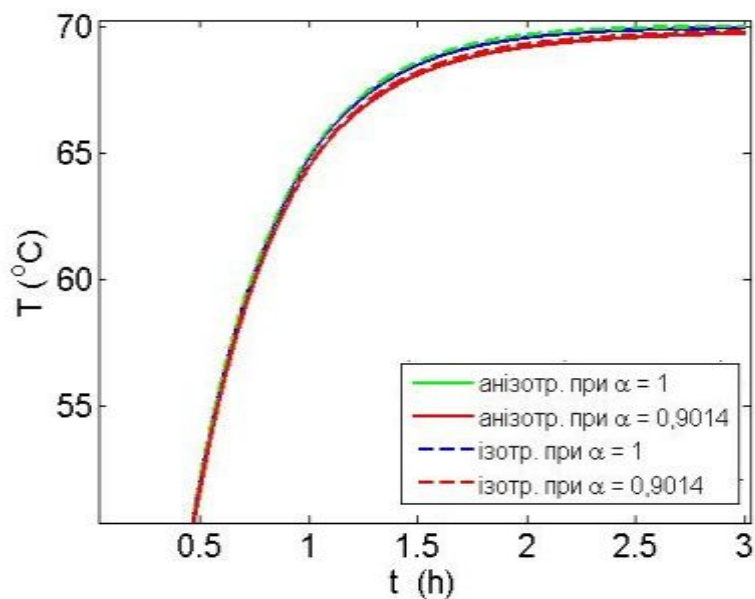


Рис. 4.17. Зміна температури у точці $A(0;0)$ з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування

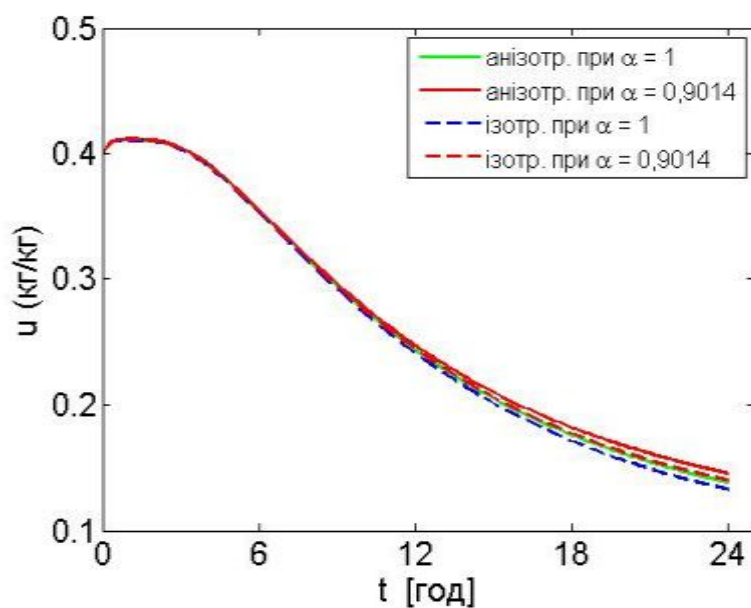


Рис. 4.18. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування

Проведено чисельний експеримент для соснового взірця з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу залежно від параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

На рис. 4.19 зображено динаміку температури соснового бруска з урахуванням фрактальної структури матеріалу у процесі сушіння та вказаними вище фізичними та геометричними параметрами для таких значень температури агента сушіння: $t_c = 60 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_c = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ відповідно. Аналізуючи даний графік бачимо, що із зростанням температури агента сушіння інтенсивність прогрівання взірця пришвидшується. Вплив фрактальної структури матеріалу на динаміку температури є суттєвішим з підвищенням температурного режиму сушіння. Інші параметри сушильної камери, такі як швидкість руху агента сушіння та його відносна вологість, не суттєво впливають на досліджувану динаміку.

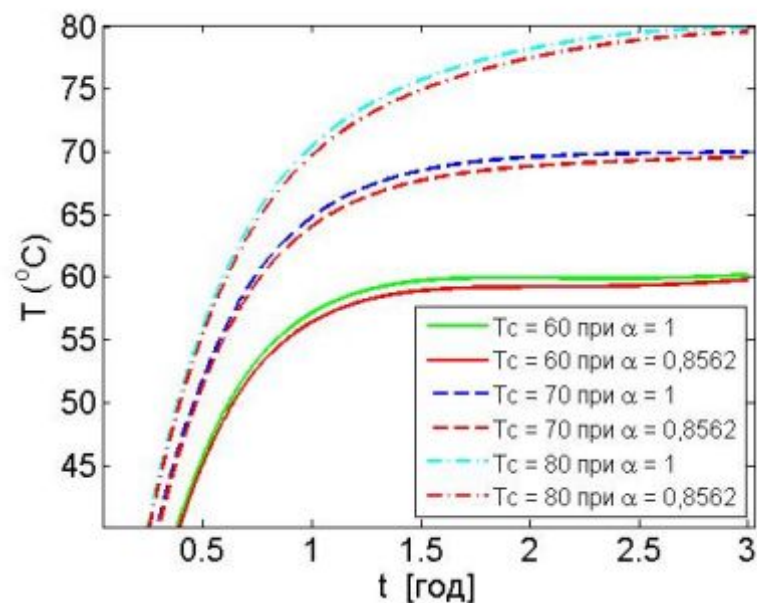


Рис. 4.19. Зміна температури у точці $A(0;0)$ залежно від температури агента сушіння

На рис. 4.20 наведено зміну вологовмісту на взірці залежно від температури агента сушіння та з такими параметрами сушильної камери: $\varphi = 60\%$; $\nu = 2$. Аналізуючи цю графічну залежність робимо висновок, що зі збільшенням температури середовища, інтенсивність вологовидалення зростає, а вплив фрактальної структури матеріалу на динаміку вологовмісту зменшується.

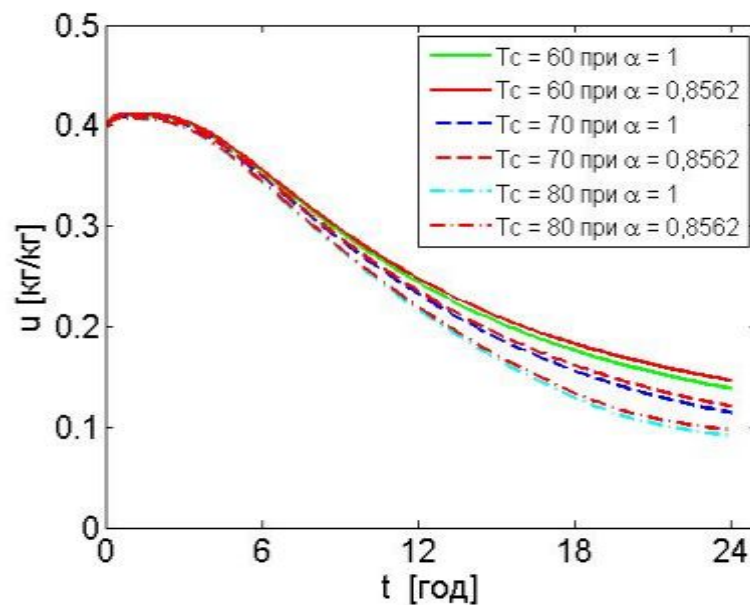


Рис. 4.20. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ залежно від температури агента сушіння

Розглянуто вплив відносної вологості агента сушіння на зміну вологовмісту. Для цього моделювалось сушіння соснового за температури агента сушіння $t_c = 70$ та швидкості його руху $\nu = 2$. Динаміку зміни вологовмісту залежно від відносної вологості агента сушіння зображено на рис. 4.21. Аналізуючи цю графічну залежність приходимо до висновку, що із збільшенням відносної вологості інтенсивність вологовидалення зменшується, а вплив фрактальної структури матеріалу на зміну вологовмісту стає істотнішим. Значення вологовмісту в центрі соснового бруска із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування за відносної вологості $\varphi = 50\%$ відрізняються на 3,2%, для $\varphi = 60\%$ – на 4,4%, а для $\varphi = 70\%$ – на 7,1%.

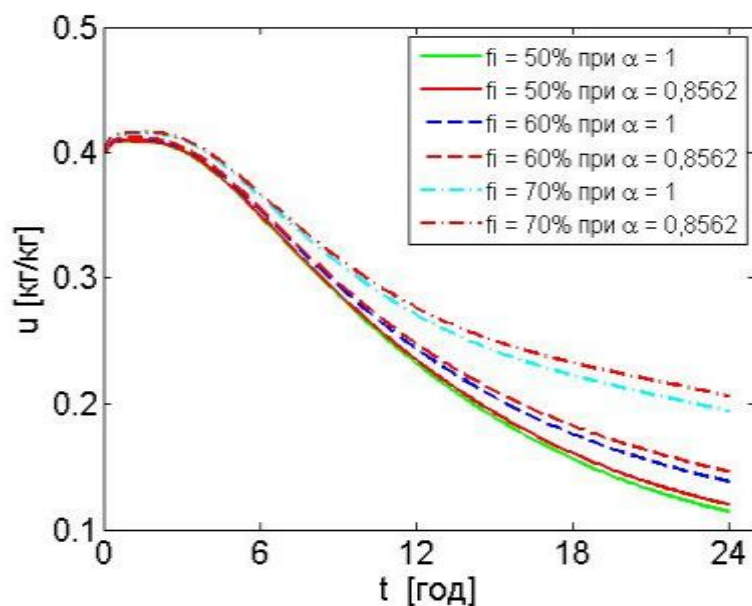


Рис. 4.21. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ залежно від відносної вологості агента сушіння

На рис. 4.22 зображено динаміку вологовмісту залежно від швидкості руху агента сушіння та з такими параметрами сушильної камери: $t_c = 70$; $\varphi = 60\%$. Аналізуючи цей графік можна прийти до висновку, що із збільшенням швидкості руху агента сушіння інтенсивність вологовидалення збільшується, а вплив фрактальної структури матеріалу на динаміку вологовмісту зростає.

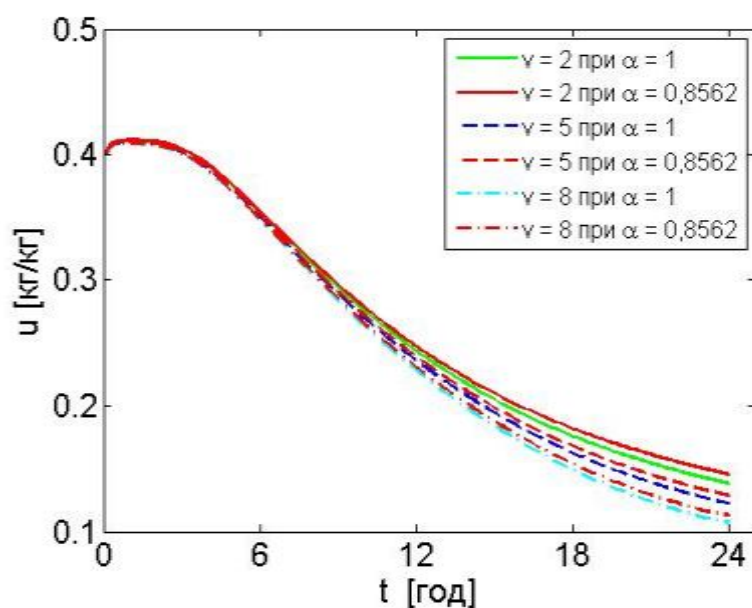


Рис. 4.22. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ залежно від швидкості руху агента сушіння

Таким чином, проаналізовано динаміку температури та вологовмісту у висушуваній деревині залежно від геометричних розмірів, породи, параметрів агента сушіння, урахування фрактальної структури матеріалу. Врахування цієї структури матеріалу деревини дає можливість моделювати надповільні процеси дифузійного типу, що протікають у колоїдному капілярно-пористому матеріалі під час сушіння. Встановлено вплив фрактальної структури на динаміку температури та вологовмісту залежно від геометричних точок взірця та породи деревини. Виявлено зв'язок між параметрами агента сушіння та впливом фрактальної структури матеріалу на відповідні динаміки.

4.3. Аналіз динаміки компонент напружено-деформівного стану деревини під час сушіння

У цьому підрозділі метою є дослідити вплив геометричних розмірів, породи деревини, анізотропії тепломеханічних властивостей та параметрів агента сушіння на динаміку компонент напружень за допомогою реалізації математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою під час сушіння (3.52) – (3.69).

Проаналізовано динаміку напружень у взірці залежно від його геометричних точок. Для проведення чисельного експерименту вибрано буковий брусок з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 530 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

Показано відмінність між величинами компонент напружень отриманих за допомогою реалізації математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з урахуванням фрактальної структури у процесі сушіння та без її урахування. Для врахування фрактальної структури матеріалу покладено показник дробової похідної α рівним значенню, визначеному шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості деревини. Для нехтування фрактальною структурою матеріалу встановлено значення $\alpha = 1$.

У процесі сушіння деревини вологовміст у центральних шарах матеріалу збільшується, а в поверхневих – зменшується. Це в свою чергу приводить до появи напружень різних знаків: у поверхневих шарах – додатніх, що характерні для процесу стискання; у центральних – від'ємних, які притаманні розтягуванню. На рис. 4.23 – 4.25 зображено графічні залежності зміни компонент напружень σ_{11} , σ_{22} та σ_{12} протягом 48 годин сушіння, що підтверджують даний факт. Бачимо, що сила напружень у поверхневих шарах є більшою, ніж у центральних. В свою чергу у центрі взірця, напруження є відносно малими. Із цих малюнків також видно вплив фрактальної структури, зокрема, появу залишкових напружень у висушуваній деревині.

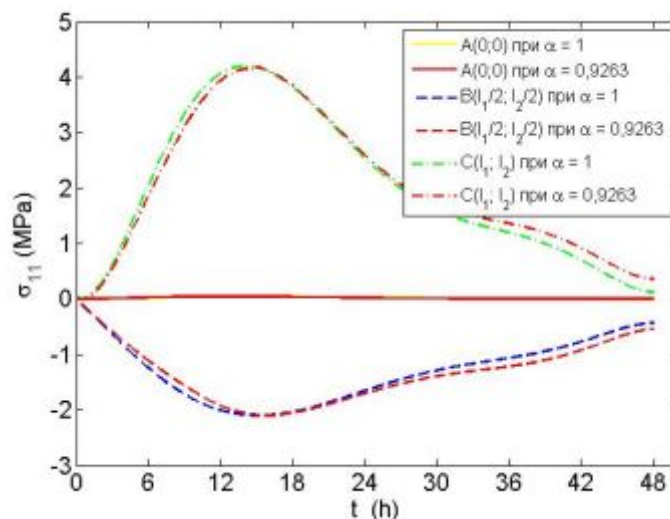


Рис. 4.23. Зміна компоненти напружень σ_{11} у взірці розміром $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ залежно від геометричних точок

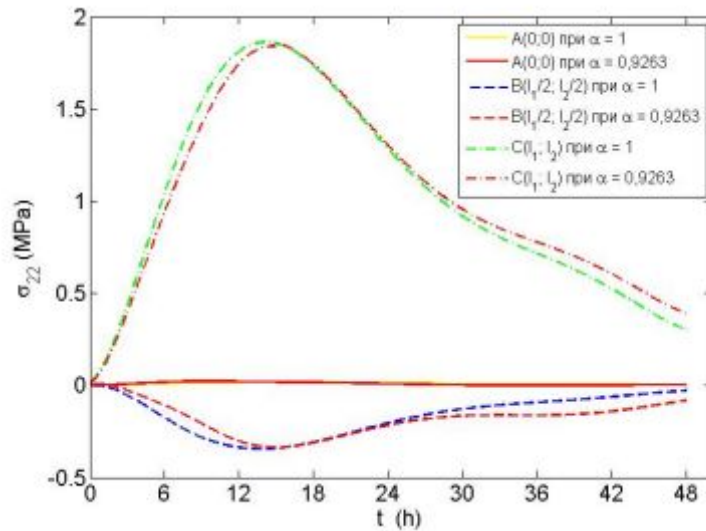


Рис. 4.24. Зміна компоненти напружень σ_{22} у взірці розміром $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ залежно від геометричних точок

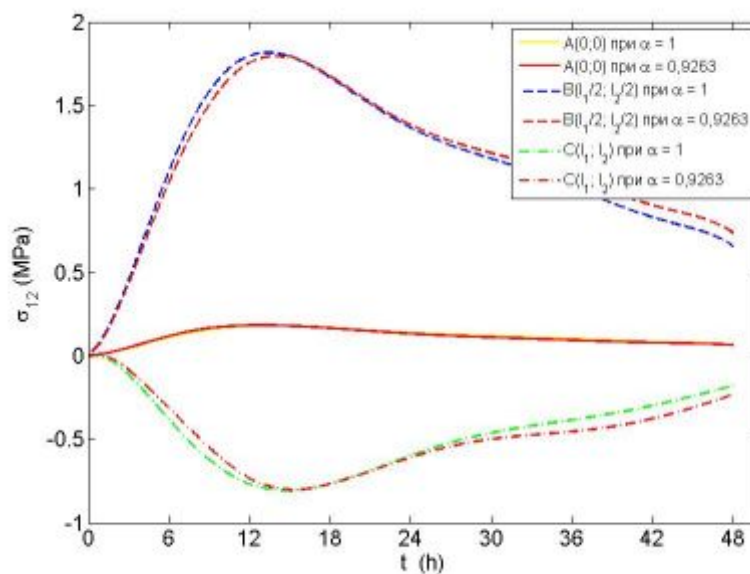


Рис. 4.25. Зміна компоненти напружень σ_{12} у взірці розміром $[l_1 \times l_2] = [0.025 \times 0.025]$ залежно від геометричних точок

Розглянуто результати реалізації математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння залежно від геометричних розмірів взірця. Для проведення

чисельного експерименту вибрано дубовий брусок з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$.

На рис. 4.26 – 4.28 зображено динаміку компонент напружень у точці $C(l_1; l_2)$ взірця протягом 48 годин сушіння. Можна побачити, що змінюючи пропорційні залежності між довжинами граней взірця характер кривих напружень міняється суттєво. Зокрема, це спостерігається зі зміною пропорційних співвідношень з $l_2/l_1 = 3$ до $l_2/l_1 = 2$. Цей факт також підтверджено у роботі [123, 141].

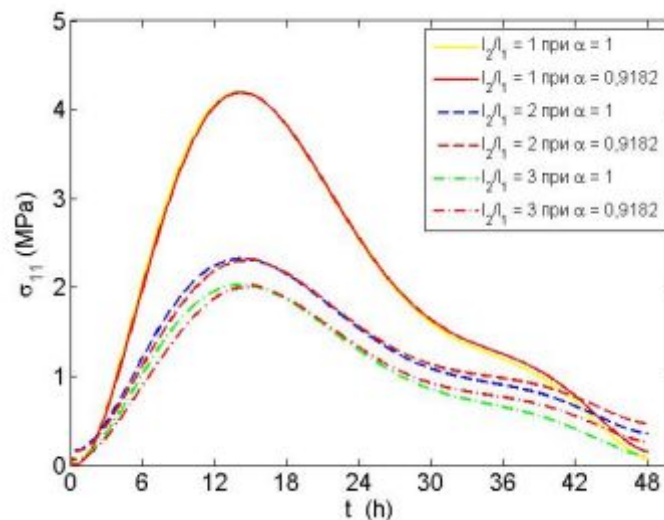


Рис. 4.26. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ на взірці залежно від його геометричних розмірів

Аналізуючи поведінку кривих уа рис. 4.26 – 4.28 можна зробити висновок, що зі збільшенням співвідношення між сторонами взірця фрактальна

структура матеріалу суттєвіше впливає на динаміку компонент напружень та залишкові напруження у висушуваній деревині. Зокрема можна побачити, що при $l_2/l_1=1$ різниця між напруженнями із урахуванням фрактальної структури та без її урахування не перевищує 4,1%, при $l_2/l_1=2$ – 8,4%, при $l_2/l_1=3$ – 15,7%

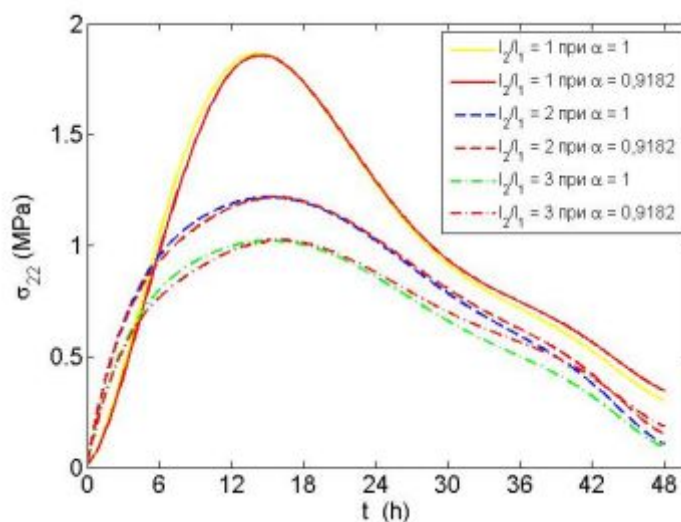


Рис. 4.27. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ на взірці залежно від його геометричних розмірів

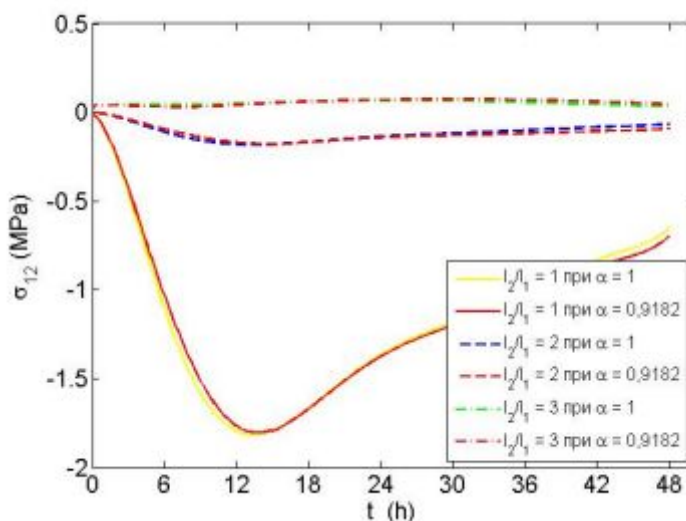


Рис. 4.28. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ на взірці залежно від його геометричних розмірів

Проаналізовано залежність компонент напружено-деформівного стану деревини від її породи та фрактальної структури. Чисельний експеримент проведено для брусків із поперечним перерізом у формі квадрата та такими значеннями фізичних параметрів матеріалу і параметрів агента сушіння:

- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4$ кг/кг;
- початкова температура $T_0 = 20$ °C ;
- температура середовища $t_c = 70$ °C ;
- відносна вологість $\varphi = 60$ % ;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2$ м/с;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025]$ м.

Графічні залежності на рис. 4.29 – 4.31 зображують динаміку компонент напружень у деревині залежно від її породи. Проаналізувавши їх, можна зробити висновок, що для порід деревини з приблизно однаковою густиною, таких як дуб і бук, напруження відрізняються не більше ніж на 12,5%. Натомість для матеріалів із меншою густиною динаміка напружень має інший характер. Числові значення компонент напружень у таких матеріалах є в декілька разів меншими. Проте, тип напружень у всіх взірцях зберігається однаковим.

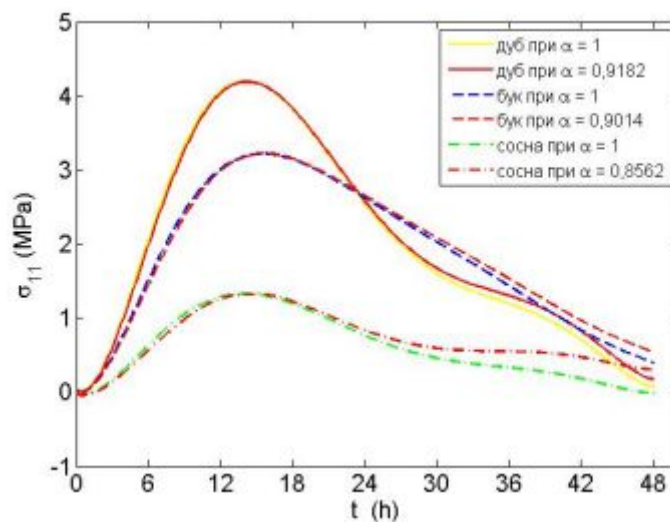


Рис. 4.29. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ для взірців із різних порід

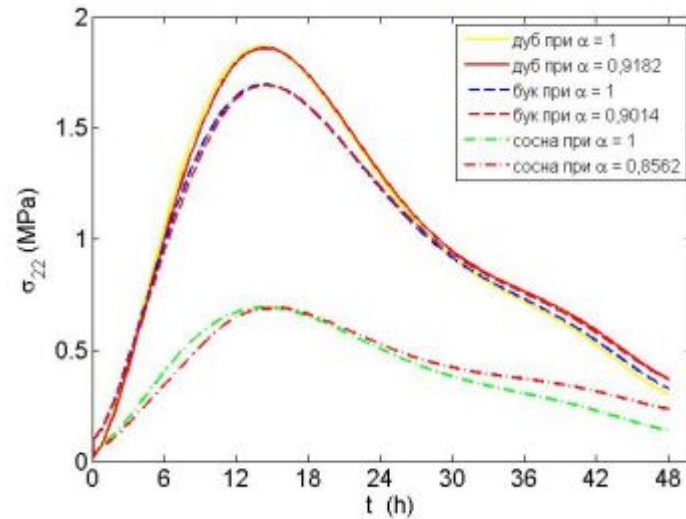


Рис. 4.30. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ для взірців із різних порід

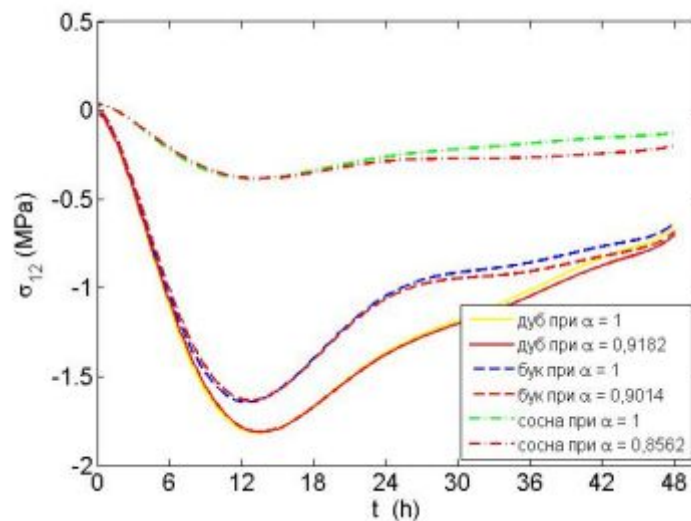


Рис. 4.31. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ для взірців із різних порід

Проаналізовано вплив фрактальної структури деревини на динаміку компонент напружено-деформівного стану залежно від її породи. Зокрема для порід із меншою густиною показник α більше відхиляється від 1, ніж для твердіших порід. Аналізуючи рис. 4.29 – 4.31 можна бачити, що відмінність між кривими напружень із урахуванням фрактальної структури середовища та без її урахування для твердіших порід не перевищують 5,7%. Натомість різниця для

порід із меншою густиною – може досягати 22,7%. Тому, робимо висновок, що для м'яких порід деревини фрактальна структура матеріалу має більший вплив на динаміку зміни напружень, ніж для «твердих». Зокрема, за однакових режимів сушіння та геометричних розмірів взірця величини залишкових напружень для порід із меншою густиною є вищими ніж для твердіших порід.

Коефіцієнти, що входять в математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння, за аналогією до моделі неізотермічного вологоперенесення, є анізотропними. Зокрема, до таких коефіцієнтів можна віднести модуль Юнга [123, 183]:

$$E_1 = 1200 + 3130U + 9.5T + 24.2UT; \quad (4.16)$$

$$E_2 = 1.6E_1. \quad (4.17)$$

До цієї моделі також входять коефіцієнти Пуассона та модуль зсуву, які використовуються для визначення компонент тензора пружності (3.66). Вони визначаються за такими співвідношеннями [123, 142]:

$$\nu_1 = 0.35; \quad (4.18)$$

$$\nu_2 = 0.38; \quad (4.19)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.20)$$

Проаналізовано вплив анізотропії тепломеханічних властивостей деревини на динаміку напружень у ній під час сушіння. Для проведення чисельного експерименту вибрано дубовий брусок з такими значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 560 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;

- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів вірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

Показано вплив анізотропії тепломеханічних властивостей деревини із урахуванням фрактальної структури деревини на динаміку компонент напружень під час сушіння. На рис. 4.32-4.34 показано динаміку компонент напружень у дубовому бруску під час 48 годин сушіння з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування. Дивлячись на ці графіки можна зробити такі висновки: врахування анізотропії тепломеханічних характеристик істотноше впливає на зміну компонент σ_{11} та σ_{12} , а відповідні значення можуть відрізнятися на 40% для σ_{11} та 80% для σ_{12} ; різниця для компоненти σ_{22} не перевищує 8%. Також можна оцінити вплив фрактальної структури деревини залежно від урахування анізотропії тепломеханічних властивостей.

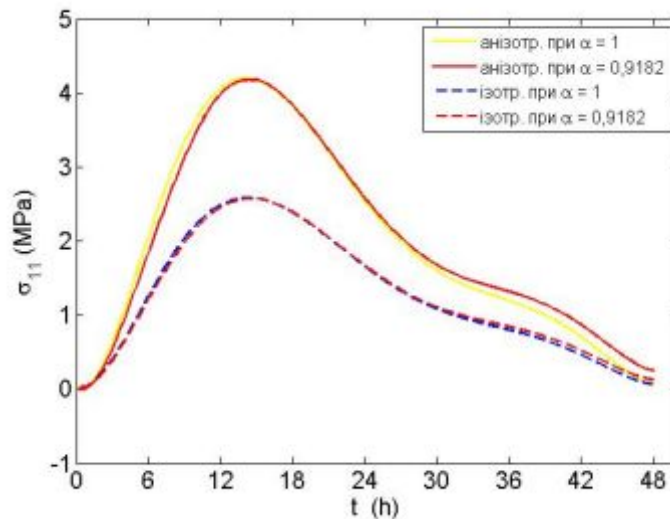


Рис. 4.32. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування

Проаналізовано вплив параметрів сушильної камери на динаміку компонент напружень у висушуваній деревині. Проведено ряд чисельних експериментів опрацювавши які виявлено, що напруження більшою мірою

залежать від температури та відносної вологості агента сушіння ніж від швидкості його руху.

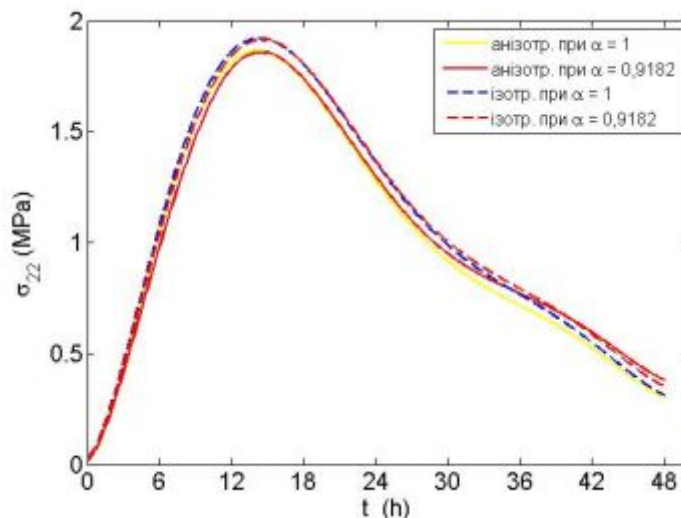


Рис. 4.33. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування

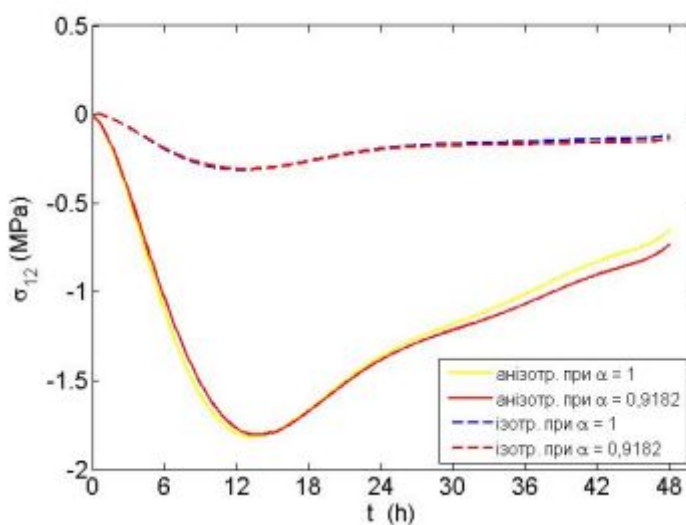


Рис. 4.34. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ з урахуванням анізотропії тепломеханічних властивостей та без її урахування

Для оцінки впливу температури середовища на динаміку компонент напружень у деревині вибрано сосновий брусок з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу і параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$;

- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4$ кг/кг;
- початкова температура $T_0 = 20$ °C ;
- відносна вологість $\varphi = 60$ % ;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2$ м/с;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025]$ м.

На рис. 4.35 – 4.37 наведено графічні залежності зміни компонент напружень соснового бруска під час сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу залежно від температури агента сушіння. Аналізуючи ці криві можна прийти до висновку, що з підвищенням температурного режиму сушіння на 10 °C напруження у висушуваній деревині збільшуються суттєво, різниця може сягати 33%. Натомість із зменшенням температури агента сушіння на 10 °C спостерігається уповільнення розвитку напружень. За підвищення температурного режиму вплив фрактальної структури матеріалу є суттєвішим ніж за зниження. Ці висновки також справедливі і для інших порід деревини.

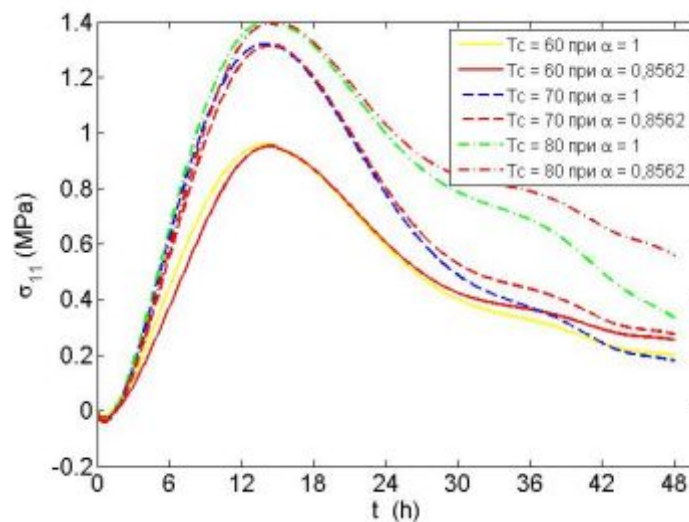


Рис. 4.35. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від температури агента сушіння

Врахування фрактальної структури деревини, дає змогу оцінити залишкові напруження, що виникають у процесі сушіння. Видно, що з інтенсифікацією режиму сушіння різниця між отриманими значеннями компонент напружень з урахуванням фрактальної структури та без урахування може сягати 28%.

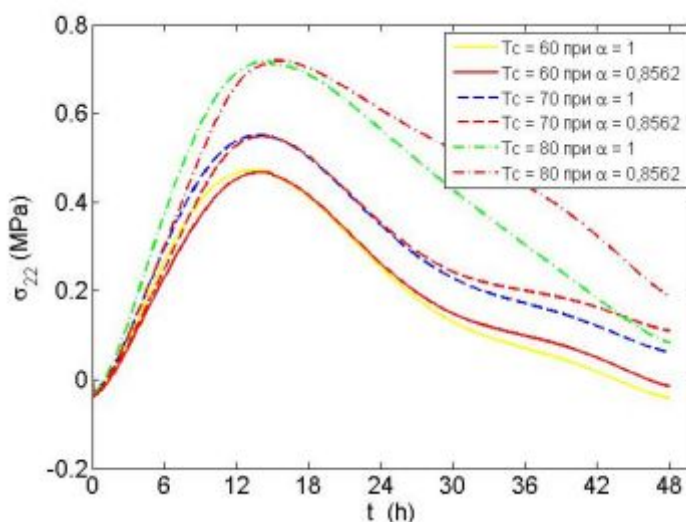


Рис. 4.36. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від температури агента сушіння

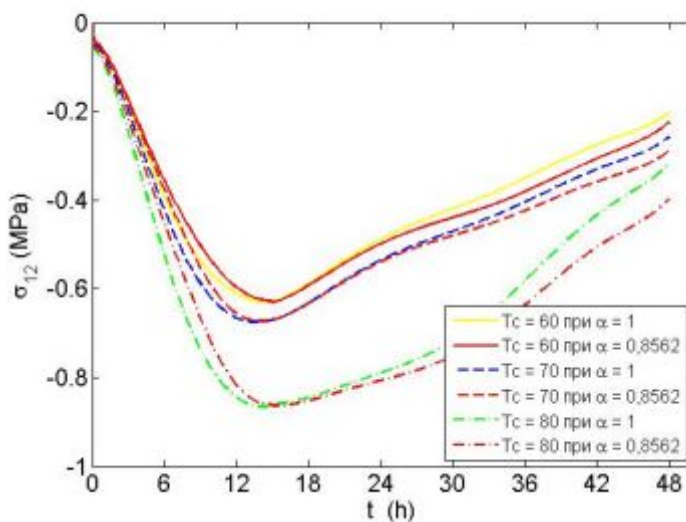


Рис. 4.37. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від температури агента сушіння

Отже, за збільшення температури агента сушіння залишкові напруження у висушуваній деревині накопичуються інтенсивніше.

З метою аналізу впливу відносної вологості агента сушіння на динаміку компонент напружень проведено чисельний експеримент для соснового бруска з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу і параметрів сушильної камери:

- базисна густина $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$;
- половини геометричних розмірів взірця $[l_1; l_2] = [0.025; 0.025] \text{ м}$.

На рис. 4.38 – 4.40 зображено динаміку компонент напружень у сосновому взірці протягом 48 годин сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу залежно від відносної вологості агента сушіння.

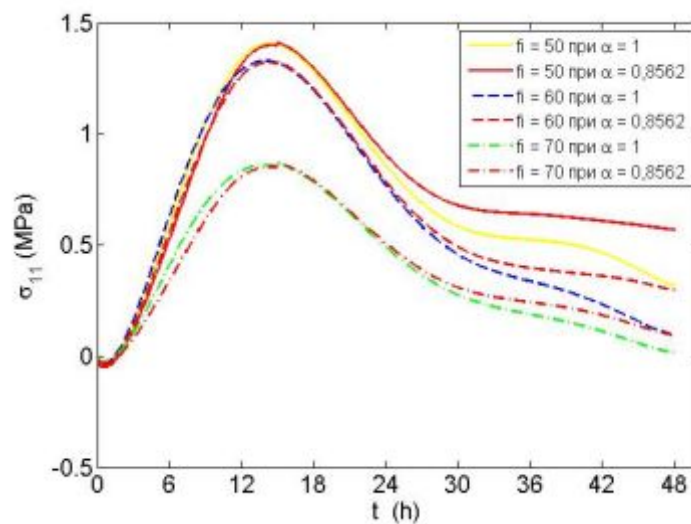


Рис. 4.38. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від відносної вологості агента сушіння

Аналізуючи ці графічні залежності на рис. 4.38 – 4.40 бачимо, що збільшення відносної вологості веде до зменшення числових значень компонент напружень. Цей ефект можна пояснити тим, зі збільшенням відносної вологості зменшується швидкість вологовидалення через границі взірця, що в свою чергу зменшує градієнти вологовмісту. При збільшенні відносної вологості на 20% абсолютні значення компонент напружень зменшуються на 38%.

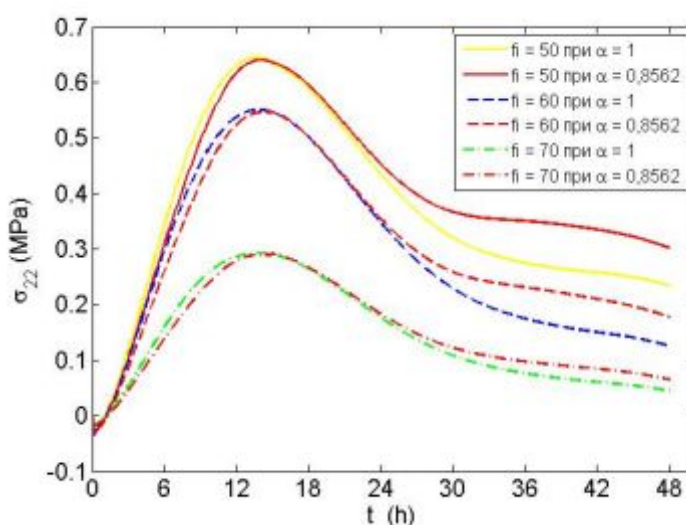


Рис. 4.39. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від відносної вологості агента сушіння

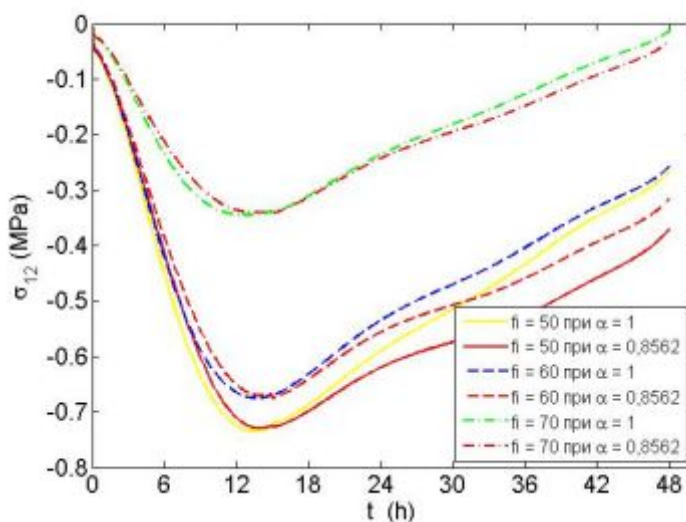


Рис. 4.40. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ залежно від відносної вологості агента сушіння

Показано, що фрактальна структура матеріалу суттєвіше впливає на динаміку компонент напружено-деформівного стану за інтенсифікації режиму сушіння, зокрема різниця між кривими може сягати 23,4%.

Отже, зі зниженням відносної вологості агента сушіння залишкові напруження у висушуваній деревині накопичуються інтенсивніше.

Таким чином, проаналізовано динаміку компонент напружено-деформівного стану у висушуваній деревині залежно від її геометричних розмірів, поріди, параметрів агента сушіння та урахування фрактальної структури матеріалу. Показано вплив фрактальних властивостей матеріалу, до яких належать ефекти «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу на розвиток напружень, включаючи залишкові напруження, залежно від геометричних точок взірця та породи деревини. Виявлено зв'язок між параметрами сушильної камери та впливом фрактальної структури на відповідні динаміки.

4.4. Аналіз розподілу вологісних полів та компонент напружено-деформівного стану при змінній температурі

Процес конвективного сушіння деревини зі застосуванням одноступеневого режиму є довготривалим. Основною вимогою є те, що потрібно отримати висушений матеріал необхідної якості за найкоротший період перебування в сушильній камері. З цієї точки зору одноступеневий режим також є малоефективним, оскільки для зменшення часу сушіння необхідно підвищити його температурний режим. Це може зумовити ріст напружень, які в свою чергу приведуть до небажаних деформацій деревини. Тому використовують багатоступеневі режими сушіння [125, 178] з метою удосконалення цього технологічного процесу. Перехід між ступенями багатоступеневого режиму сушіння відбувається за умови встановлення вологовмісту матеріалу в певне значення. Воно визначається породою

висушеної деревини, її геометричними розмірами, типом сушильної камери, кількістю ступенів режиму сушіння, тощо.

Проведено порівняння динаміки температури і вологовмісту та компонент напружень для одно- та двоступеневого режимів сушіння взірців з однаковими геометричними розмірами залежно від породи деревини. Показано вплив фрактальної структури матеріалу на відповідні динаміки.

Для проведення чисельного експерименту зі застосуванням одноступеневого режиму сушіння вибрано сосновий брусок з наступними значеннями фізичних параметрів матеріалу та параметрів агента сушіння:

- базисна густина $\rho_0 = 460 \text{ кг/м}^3$;
- початкове значення вологовмісту $u_0 = 0.4 \text{ кг/кг}$;
- початкова температура $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$;
- температура середовища $t_c = 70 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 60\%$;
- швидкість руху агента сушіння $v = 2 \text{ м/с}$.

Моделювання двоступеневого режиму сушіння проведемо для такого ж взірця. Перший ступінь двоступеневого режиму буде визначатися наступними параметрами агента сушіння:

- температура середовища $t_c = 60 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 65\%$.

З досяганням вологовмісту значення рівного $u = 0.2 \text{ кг/кг}$, процес сушіння переходить у другий ступінь, який буде визначатися:

- температура середовища $t_c = 77 \text{ }^\circ\text{C}$;
- відносна вологість $\varphi = 30\%$.

На рис. 4.41 та у додатку В зображено динаміку вологовмісту у центрі соснового бруска для одно- та двоступеневого режимів сушіння з урахуванням фрактальної структури матеріалу.

Проаналізувавши параметри сушильної камери та графічну залежність протягом перших ≈ 18 год. сушіння бачимо, що вологовидалення відбувається інтенсивніше під час одноступеневого режиму, ніж у першому ступені двоступеневого режиму сушіння. Після переходу до другого ступеня інтенсивність вологовидалення із деревини зростає у порівнянні з одноступеневим режимом, що пояснюється підвищенням температурного режиму.

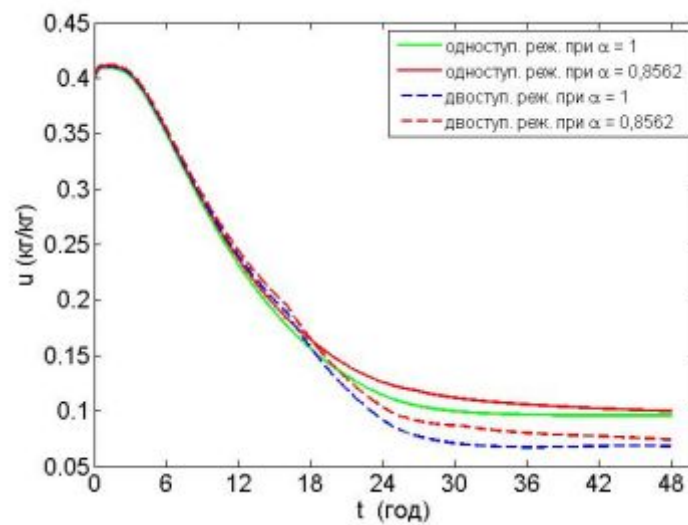


Рис. 4.41. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння соснового бруска

Гradient температури та вологості зумовлюють появу стискаючих та розтягуючих напружень у висушуваному матеріалі. Перехід від одного ступеня багатоступеневого режиму сушіння до іншого змінює швидкість висихання деревини, що в свою чергу впливає на абсолютні значення компонент радіальних та тангентальних напружень.

На рис. 4.42-4.44 зображено динаміку компонент напружень під час сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою для одно- та двоступеневого режимів. Проаналізувавши дані графічні залежності приходимо до висновку, що з використанням двоступеневого режиму сушіння, отримаємо висушену деревину вищої якості, оскільки максимальні абсолютні значення

компонент напружень будуть меншими на 15%, а залишковий вологовміст – на 35% у порівнянні з одноступеневим режимом. Цей факт зумовлений тим, що перший ступень одноступеневого режиму сушіння є «м'якшим», тобто вологовміст видаляється повільніше. Це в свою чергу зумовлює зниження інтенсифікації розвитку абсолютних значень компонент напружень.

З переходом до другого ступеня двоступеневого режиму процес сушіння інтенсифікується, тобто підвищується температура агента сушіння та знижується його відносна вологість. Проте, це не приводить до значного розвитку напружень, оскільки велика частина зв'язної води видаляється під час активності першого ступеня двоступеневого режиму.

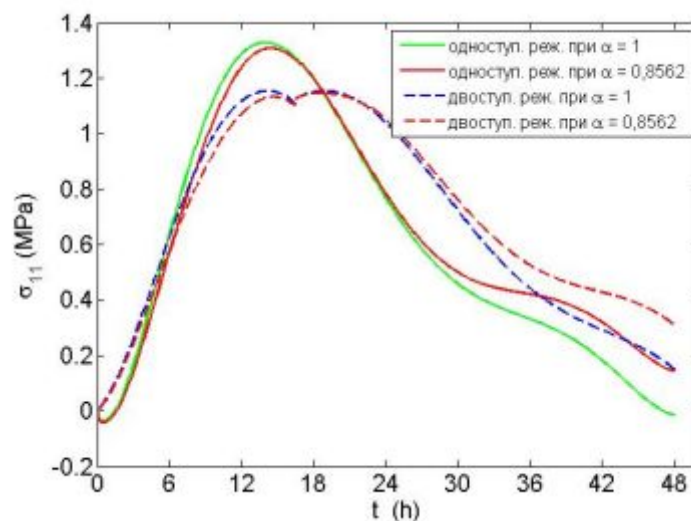


Рис. 4.42. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння соснового бруска

Величини компонент напружень σ_{11} після 48 годин сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування за одноступеневого режиму відрізняються на 20,7 %, а за двоступеневого – 21,1 %. Отже, застосування двоступеневого режиму сушіння дає змогу зменшити максимальні значення нормальних і тангентальних напружень у висушуваній

деревині. Проте інтенсифікація процесу сушіння на другому ступені цього режиму зумовлює зростання залишкових напружень.

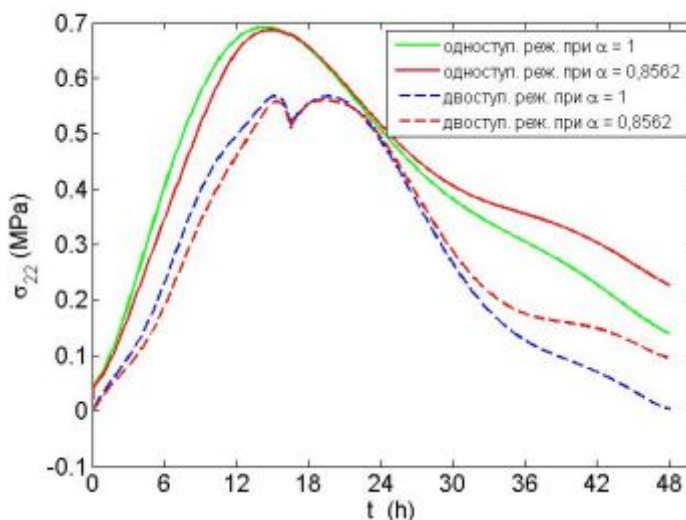


Рис. 4.43. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння соснового бруска

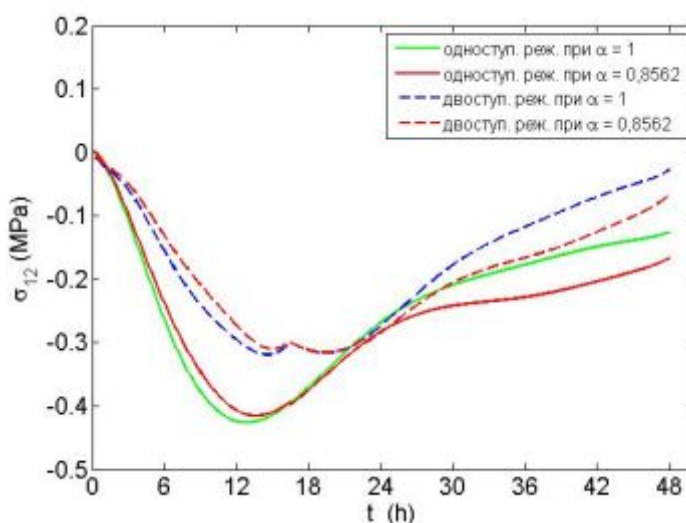


Рис. 4.44. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння соснового бруска

Таким чином, розглянуто двоступеневий режим сушіння деревини та здійснено порівняння із одноступеневим. Співставлено динаміку температури, вологовмісту та компонент напружено-деформівного стану із урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування для відповідних режимів.

Зроблено висновок, про доцільність застосування двоступеневого режиму сушіння.

4.5. Визначення термодинамічних функцій фрактальних реологічних моделей

Для ефективного використання деревини, як будівельного матеріалу, важливою задачею є визначення її реологічних властивостей. Під дією короткочасних навантажень вона поводить себе, як пружне тіло. При довготривалих навантаженнях, змінах температури або вологовмісту реологічні властивості цього матеріалу визначаються законами в'язко-пружності. Важливою складовою таких властивостей є ядро релаксації, що залежить від тривалості навантажень, градієнтів температури та вологовмісту. Як було сказано у попередніх розділах деревина належить до середовищ з фрактальною структурою. Для неї є характерними такі властивості як: наявність ефектів «пам'яті», детермінованого хаосу, надповільних процесів дифузійного типу. Ці властивості описуються за допомогою ядер релаксації утворених з використанням дробово-експоненціальних операторів. Показано їх динаміку залежно від часу для традиційної та фрактальної моделей Кельвіна (3.49), що в свою чергу є узагальненням елементарної реологічної одиниці матеріалу деревини.

На рис. 4.45 наведено зміну значень ядра релаксації традиційної та фрактальної моделей Кельвіна залежно від породи деревини та геометричних точок взірця. Як можна бачити на цих графічних залежностях числові значення зростають з часом та з переходом від центру взірця до його границь. Також варто зауважити, що у всіх цих точках характер розподілу є однаковим. Проте, у точці $C(l_1; l_2)$ спостерігається стрибок у 3,5% на початкових моментах часу.

Враховуючи фрактальну структуру матеріалу характер динаміки ядер релаксації суттєво змінюється у порівнянні з традиційною моделлю. Із

збільшенням відхилення дробового параметра α від одиниці, що є характерним для порід деревини із меншою густиною, числові значення ядра релаксації зростають швидше у порівнянні з твердішими породами. Слід зазначити, що для різних порід деревини різниця між числовими значеннями ядра традиційної моделі є порівняно малою ніж для фрактальної.

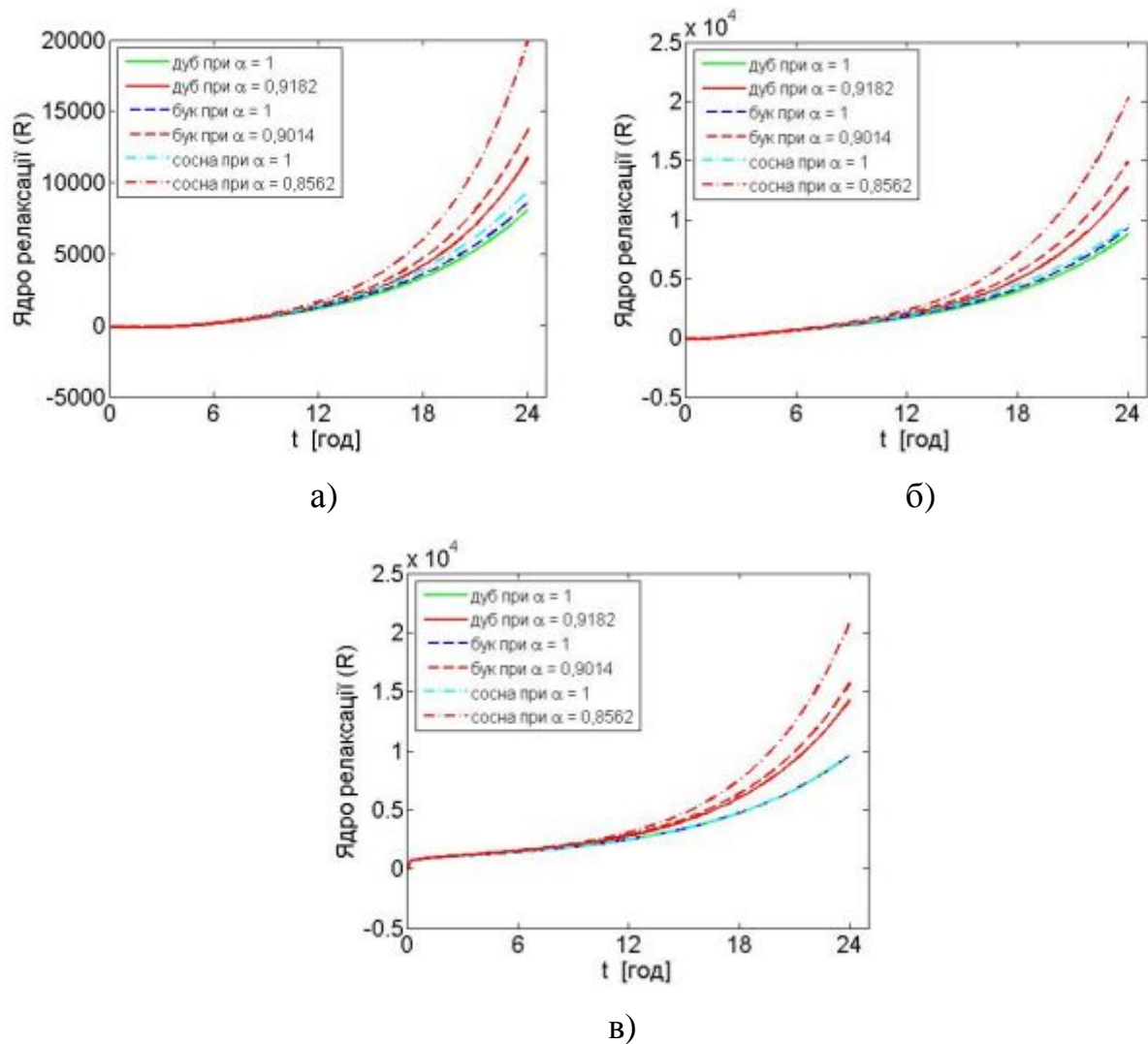


Рис. 4.45. Ядро релаксації для різних порід деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування у точках взірця:

а) $A(0;0)$; б) $B(l_1/2; l_2/2)$; в) $C(l_1; l_2)$

Для необоротних процесів не вся внутрішня енергія перетворюється у роботу. Відповідно різницю між внутрішньою енергією системи та енергією

придатною для виконання роботи називають вільною енергією. Ця величина в свою чергу виступає критерієм протікання процесу та оцінкою необхідної енергії під час виконання роботи. Для опису вільної енергії фрактальної моделі Кельвіна використовують співвідношення (3.50). Щоб отримати вигляд цієї термодинамічної функції для традиційної моделі достатньо покласти $\alpha = 1$.

На рис. 4.46 зображено динаміку вільної енергії для традиційної та фрактальної моделей Кельвіна залежно від породи деревини та геометричних точок взірця. Різниця між числовими значеннями функції вільної енергії для традиційної моделі є порівняно малою ніж для фрактальної. Вільна енергія швидко зростає до певного значення протягом перших 45 хвилин сушіння. Для твердіших порід це значення є більшим ніж для порід із меншою густиною. Після чого вільна енергія зменшується на незначну величину протягом наступних 12 годин, а в подальшому повертається до попереднього рівня. Зазначимо, що для різних геометричних точок взірця характер динаміки функції вільної енергії є схожим. Відомим є той факт, що після припинення необоротного процесу вільна енергія буде прямувати до свого мінімального значення. Таким чином, отримані результати підтверджують те, що в'язко-пружне деформування деревини у процесі сушіння є необоротним процесом.

До основних термодинамічних функцій деревини у процесі сушіння відносять функцію розсіювання енергії або як її ще називають ентропію. Вона характеризує втрату енергії при необоротних процесах. Тобто, відображає ту частину енергії системи, що розсіялась або деградувала в тепловій формі і не може бути використана для здійснення роботи. Із другого закону термодинаміки випливає, що ентропія зростає для необоротних процесів, або залишається незмінною для оборотних. Ентропія є мірою неоднорідності, невпорядкованості системи. Її зростання вказує, що система переходить до хаотичнішого стану. Для опису функції розсіювання енергії у фрактальній моделі Кельвіна використовується співвідношення виду (3.51). Аналогічним чином поклавши $\alpha = 1$ переходимо до традиційної моделі.

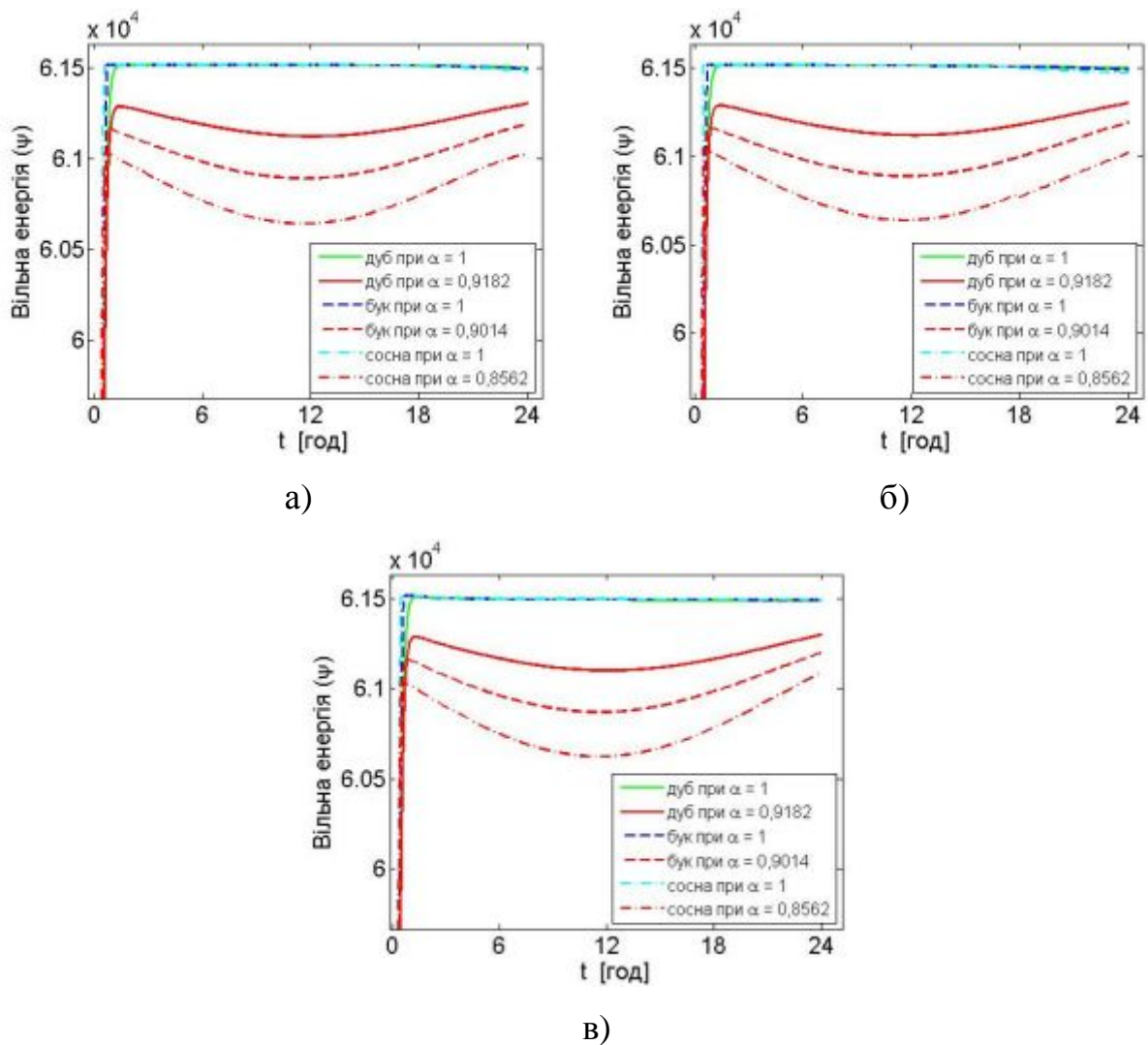


Рис. 4.46. Функція вільної енергії для різних порід деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування у точках взірця:

а) $A(0;0)$; б) $B(l_1/2;l_2/2)$; в) $C(l_1;l_2)$

На рис. 4.47 зображено динаміку функції розсіювання енергії для традиційної та фрактальної моделей Кельвіна залежно від породи деревини та геометричних точок взірця. Аналізуючи ці графічні залежності можна прийти до таких висновків. Протягом перших 12 годин сушіння функція розсіювання енергії у центрі взірця (точка $A(0;0)$) є близькою до нуля. Це вказує на те, що енергія, затрачена на нагрівання та вологовидалення в цей проміжок часу, майже у повній мірі перетворюється у роботу. Для точки $B(l_1/2;l_2/2)$ схожий

розподіл спостерігається протягом перших 5 годин сушіння. Для цих двох точок при подальшому сушінні розсіювання енергії починає зростати за експоненціальним законом. Також зазначимо, для порід із меншою густиною розсіювання енергії є вищим, ніж для твердіших порід.

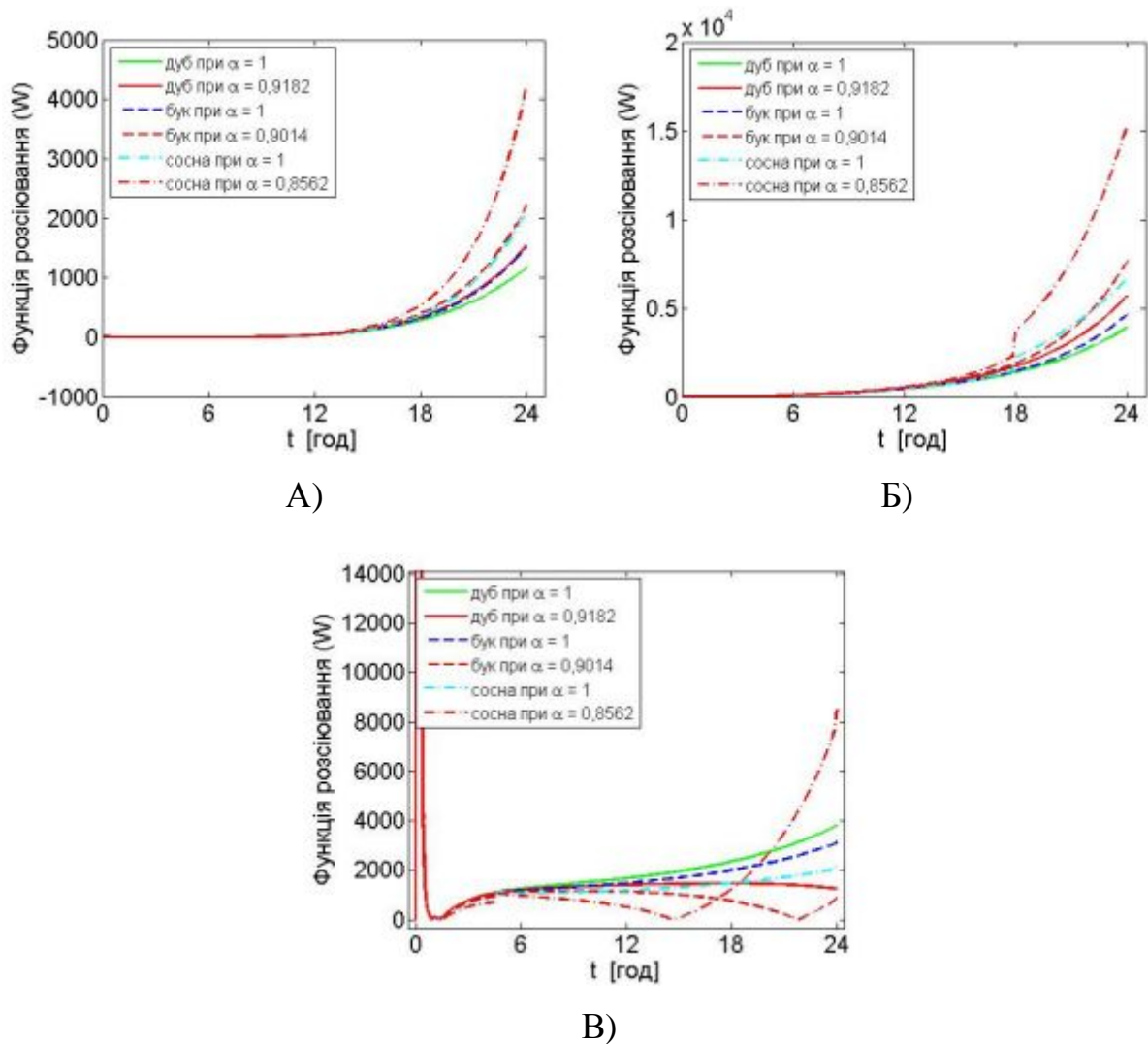


Рис. 4.47. Функція розсіювання енергії для різних порід деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування у точках взірця: А) $A(0;0)$; Б) $B(l_1/2; l_2/2)$; В) $C(l_1; l_2)$

Враховуючи фрактальну структуру матеріалу береться до уваги його неоднорідність, наявність ефектів «пам'яті» та детермінованого хаосу. Нехтування цими властивостями деревини приводить до узагальнення

математичної моделі, яка у свою чергу не в достатній мірі описує розсіювання енергії. Цей факт також спостерігається при здійсненні аналізу графічних залежностей на рис. 4.47.

Значною мірою відрізняється динаміка функції розсіювання енергії для точки $C(l_1; l_2)$. Протягом першої години сушіння вона швидко зростає до значення $1.7 \cdot 10^6$ і опускається до нуля. Для традиційної моделі після першої години сушіння ентропія зростає значно повільнішими темпами. Наприклад для дуба вона досягає значення $3.98 \cdot 10^4$ після 24 годин сушіння. Для фрактальної моделі після першої години сушіння функція розсіювання енергії має значно складніший характер розподілу. Її значення спочатку зростають, а потім спадають до нуля у вигляді параболи. Інтервал часу, на якому це відбувається залежить від породи деревини. Після цього перепаду ентропія зростає за експоненціальним законом.

Отримано основні термодинамічні функції для простіших фрактальних реологічних моделей. Проаналізовано вплив фрактальної структури матеріалу деревини на їх числові значення.

4.6. Висновки

У цьому розділі проаналізовано розподіли та динаміки температури і вологовмісту отриманих внаслідок реалізації математичної моделі неізотермічного вологоперенесення та динаміки компонент напружень – внаслідок реалізації моделі в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння з урахуванням її фрактальної структури залежно від геометричних розмірів, точок взірця, температури, відносної вологості та швидкості руху агента сушіння. Це дає змогу кількісно оцінити вплив ефектів «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу притаманних деревині на зміну температури, вологовмісту та компонент напружень під час сушіння. Аналіз відповідних динамік залежно від параметрів агента сушіння дає можливість

визначити раціональні параметри процесу сушіння для підвищення якості висушеної деревини.

Проаналізовано динаміку температури і вологовмісту та компонент напружень для двоступеневого режиму сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та без її урахування залежно від геометричних розмірів та параметрів агента сушіння.

Отримано функції релаксації, вільної енергії та ентропії для реологічних моделей Максвелла, Фойгта та Кельвіна, що враховують фрактальну структуру матеріалу. Це дає змогу розширити множину застосування цих моделей та обчислити їх термодинамічні характеристики, які враховують ефекти «пам'яті», самоорганізації та детермінованого хаосу матеріалу. Також проаналізовано динаміку цих функцій для фрактальних реологічних моделей порівняно з класичними моделями.

РОЗДІЛ 5

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ВИСУШУВАЛЬНІЙ ДЕРЕВИНІ З УРАХУВАННЯМ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

В основу методики визначення компонент напружень деревини у процесі сушіння покладено:

- розроблені у другому розділі математична модель неізотермічного вологоперенесення капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння та алгоритм її реалізації;
- математичну модель в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння та алгоритм знаходження її чисельного розв'язку наведених у третьому розділі;
- апроксимаційні залежності функцій реологічної поведінки деревини з урахуванням фрактальної структури отриманих з експериментальних даних повзучості деревини;
- програмну реалізацію моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння та аналіз впливу цієї структури на динаміку температури і вологовмісту та компонент напружень і деформацій.

Для вимірювання повних напружень на поверхні висушуваної деревини розроблено новий прямий спосіб, на який отримано деклараційний патент на корисну модель. З метою практичного застосування математичної моделі і її програмної реалізації розроблено прикладне програмне забезпечення для знаходження апроксимаційних залежностей експериментальних даних реологічної поведінки деревини з врахуванням її фрактальної структури. Основні матеріали даного розділу подано у працях [168, 211].

5.1. Методика вимірювання напружень у висушувальній деревині

Для подальшого використання деревини, як будівельного матеріалу необхідно її попередньо висушити. Під час цього процесу важливим є уникнути її надмірного деформування. Дефекти, що виникають внаслідок цього обмежують нормальну обробку та використання деревини. Деформації зумовлені дією напружень, що виникають у матеріалі під час сушіння, які в свою чергу з'являються внаслідок зміни вмісту вологи та температури. Щоб звести до мінімуму несприятливі деформації необхідно задати оптимальні параметри агента сушіння. Для цього використано результати чисельного моделювання процесу в'язко-пружного деформування деревини під часу сушіння.

Використання математичного моделювання процесу сушіння деревини має важливе значення для цього технологічного процесу, оскільки дозволяє наперед визначити величини напружень, що виникнуть при заданих параметрах агента сушіння для певної породи. Проте, фізико-механічні властивості взірців, виготовлених із однієї породи деревини, можуть суттєво відрізнятися. Тому доцільним є поєднання математичного моделювання з поточним контролем компонент напружено-деформівного стану деревини під час сушіння. Таке поєднання дозволяє підвищити ефективність роботи оператора сушильної камери.

Деревина характеризується анізотропією механічних властивостей, складною просторовою будовою матеріалу, наявністю ефектів «пам'яті» та самоорганізації, які також залежать від вологовмісту та температури. Тому методика вимірювань повних напружень у висушуваному пиломатеріалі базується на дослідженнях описаних у попередніх розділах. А саме, у розділі 2 наведено математичну модель неізотермічного вологоперенесення та програмне забезпечення, що її реалізує, у розділі 3 – модель в'язко-пружного деформування та відповідне програмне забезпечення для її реалізації, що

враховує усі наведені вище властивості даного матеріалу. Також враховано, що деформації у деревині під час сушіння складаються з пружної, в'язко-пружної та залишкової складової.

Запропонована методика забезпечує пряме вимірювання повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу за величиною підведеного механічного зусилля до еталону, виготовленого з вимірюваного матеріалу. Вона дозволяє вимірювати напруження та деформації, що виникають внаслідок зміни вологовмісту та температури матеріалу і відповідно визначити показник його якості.

В основі даного методу лежить така ідея, що величина напружень визначається величиною підведеного зовнішнього навантаження до еталону, яке компенсує різницю деформацій у висушеному пиломатеріалі та еталоні. Загальна деформація ε_{MAT} на поверхні висушуваного пиломатеріалу (рис. 5.1, позначення 1) дорівнює сумі двох складових ε_T та ε_{II} :

$$\varepsilon_{MAT} = \varepsilon_T + \varepsilon_{II}. \quad (5.1)$$

Складова ε_T визначає деформацію, яка виникає внаслідок перепаду вологовмісту за товщиною матеріалу, а ε_{II} визначається вологовмістом поверхні матеріалу.

Загальні деформації у еталоні ε_{ETAL} (рис. 5.1, позначення 3) дорівнюють значенню величини ε_{II} , що обґрунтовується рівністю вологовмісту еталону U_{ETAL} та відносній вологості поверхні вимірювального матеріалу $U_{ВИДН}$ [203]:

$$\varepsilon_{ETAL} = \varepsilon_{II}. \quad (5.2)$$

Відповідно, різниця деформацій на поверхні матеріалу та еталоні дорівнює значенню величини ε_T :

$$\varepsilon_{MAT} - \varepsilon_{ETAL} = \varepsilon_T. \quad (5.3)$$

Для компенсації даної різниці та подальшого визначення напружень на поверхні вимірювального матеріалу достатньо до еталону підвести механічне

зусилля F (рис. 5.1, позначення 5), абсолютне значення якого дорівнює величині напружень на поверхні вимірювального пиломатеріалу.

Запропонований спосіб має свої переваги і недоліки. Головною його перевагою є пряме вимірювання компонент напружень на поверхні висушеного матеріалу. Даний спосіб може бути використаний для контролю та регулювання напружень у деревині під час сушіння, що в свою чергу дозволить підвищити якість висушеного матеріалу за рахунок своєчасного виявлення критичних напружень на його поверхні.

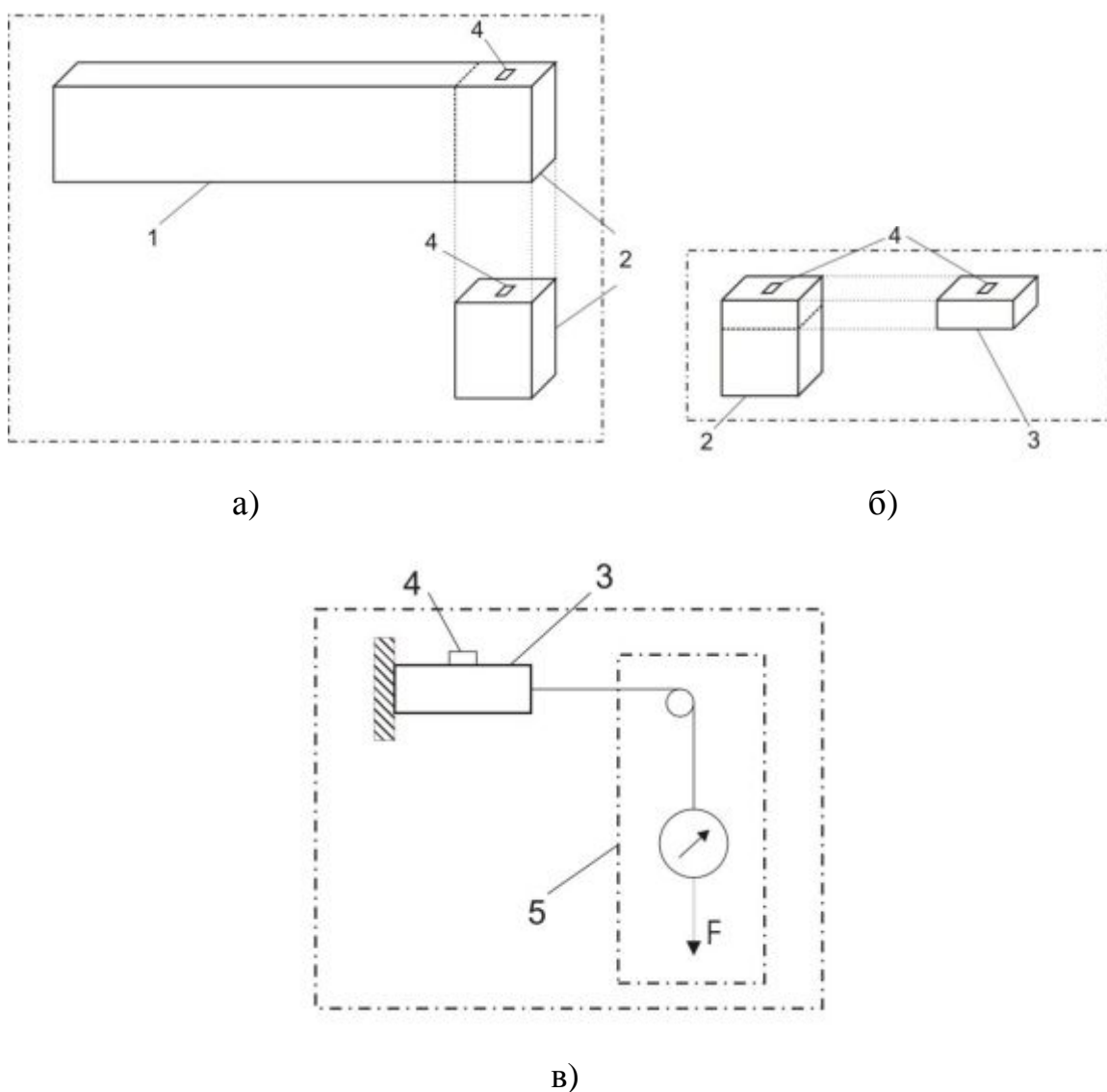


Рис. 5.1. Структурна схема прямого вимірювання напружень на поверхні висушених пиломатеріалів, де: 1 – висушений тангентальний пиломатеріал; 2 – брусок; 3– зразок; 4 – тензодавач; 5 – зразок механічного зусилля

Даний метод моніторингу напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння дає змогу контролювати тільки тангентальні напруження на поверхні матеріалу. Проте, у регулярному періоді даного технологічного процесу особливу увагу також треба приділяти напруженням у внутрішніх точках матеріалу, а не тільки на поверхні, тому такий підхід дає лише часткову інформацію про загальний стан напружень.

Отже, запропоновану методику вимірювання повних напружень на поверхні висушуваного пиломатеріалу можна використовувати при моделюванні та контролі процесу сушіння деревини з урахуванням її фрактальної структури. Запропонований прямий метод використовувався для валідації математичної моделі в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння.

5.2. Прикладне програмне забезпечення для обчислення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини з урахуванням фрактальної структури

Для визначення фізико-механічних параметрів математичної моделі неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння розроблено прикладне програмне забезпечення у середовищі MatLab 7. Зокрема, за його допомогою стає можливим визначення коефіцієнтів ядер повзучості та релаксації, що записується як лінійна комбінація дробово-експоненціальних операторів та відповідний дробовий параметр цих операторів [211].

На рис. 5.2 зображено інтерфейс прикладного програмного забезпечення для визначення, коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини та відповідного дробового параметра шляхом апроксимації експериментальних даних повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів

Работнова (3.19). Як можна бачити на формі знаходяться блоки: «Температурно-вологісні показники», «Порода деревини», «Дані повзучості», «Результат» та кнопка «Визначити коефіцієнти».

Визначення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки

Меню

Температурно-вологісні показники

Температура (C)

Вологовміст (кг/кг)

Порода деревини

Порода деревини

Дані повзучості

| Час | Деформації |
|--------|------------|
| 0.0500 | 9.3000 |
| 10 | 11.0600 |
| 20 | 12.2700 |
| 30 | 13.1800 |
| 40 | 14.1500 |
| 50 | 14.5200 |

Визначити коефіцієнти

Результат

Дробова складова alpha

Коефіцієнти ядер реологічної поведінки

| | omega | nu | eta | mu |
|---|--------|---------|---------|---------|
| 1 | 6.6820 | -0.3807 | -0.3807 | -0.0507 |
| 2 | 0.0439 | 2 | 4 | 2.3054 |
| 3 | 4.1467 | 0.2468 | -0.2532 | -0.0751 |
| 4 | 0.0219 | 2 | 4 | 0.5496 |

Рис. 5.2. Інтерфейс програмного забезпечення для обчислення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини

У блоці «Температурно-вологісні показники» задаються значення температурно-вологісних характеристик матеріалу. Блок «Порода деревини» призначений для вибору породи деревини для якої будуть визначатися ядра повзучості та релаксації. Блок «Дані повзучості» призначений для завантаження експериментальних даних повзучості деревини у вигляді таблиці розміром

$N \times 2$, де N - кількість вимірювань. У першому стовпці даної таблиці записано значення часової змінної, а у другому відповідно значення деформацій.

Кнопка «Визначити коефіцієнти» призначена для виклику процедури обчислення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини. У блоці «Результат» виводяться вихідні дані процесу апроксимації експериментальних даних повзучості деревини, а саме, значення дробового параметра оператора Работнова та відповідних коефіцієнтів шуканої апроксиманти.

На рис. 5.3 зображено діаграму послідовності, побудованої для процедури знаходження коефіцієнтів ядер повзучості та релаксації деревини за допомогою дробово-експоненціального оператора.

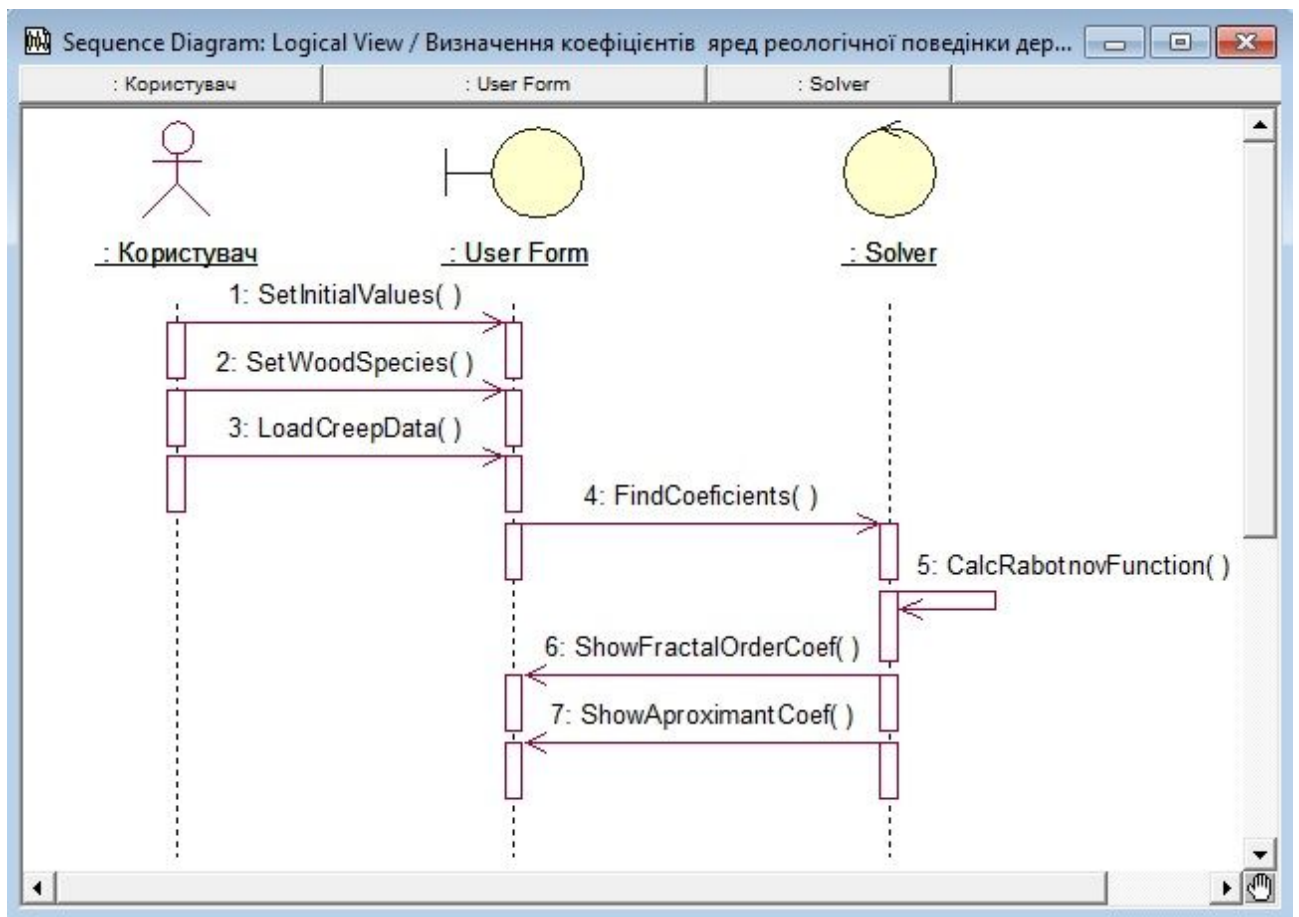


Рис. 5.3. Діаграма послідовності для обчислення коефіцієнтів ядер реологічної поведінки деревини

Дивлячись на рис. 5.3 бачимо, що для цього використовуються два об'єкти UserForm та Solver, основні методи яких були вже описані у розділах 2.4 та 3.5. У цьому додатку об'єкт UserForm використовується для задання користувачем температурно-вологісних показників, породи та експериментальних даних повзучості деревини. Об'єкт Solver у свою чергу призначений для реалізації процедури знаходження апроксиманти.

У цьому програмному додатку використовуються наступні методи об'єкту UserForm, що не були описані в попередніх розділах, а саме:

- LoadCreepData() – завантажує експериментальні дані повзучості деревини із зовнішнього носія інформації;
- ShowFractalOrderCoef() – відображає дробову складову оператора Работнова;
- ShowAproximantCoef() – виведення коефіцієнтів апроксиманти експериментальних даних повзучості деревини, утвореної лінійною комбінацією дробово-експоненціальних функцій.

До об'єкту Solver додані методи:

- FindCoeficients() – реалізація алгоритму побудови апроксиманти експериментальних даних повзучості;
- CalcRabotnovFunction() – обчислення дробово-експоненціального оператора Работнова.

Таким чином, беручи до уваги методику вимірювання повних напружень на поверхні висушеної деревини та розроблений пакет прикладного програмного забезпечення описаного в розділах 2, 3 та 5, практичні рекомендації щодо вибору параметрів режиму сушіння будуть такими:

- опрацьовуючи експериментальні дані повзучості деревини, визначити відповідні параметри математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння;

- налаштувати раціональні параметри агента сушіння опираючись на результати моделювання даного процесу;
- в залежності від вологовмісту висушеної деревини встановити відповідний режим сушіння.

Реологічні випробування зразків проводились за методикою описаною в працях [140, 142, 169]. Ці дані є відправним пунктом для встановлення відповідних параметрів математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння. Шляхом математичного моделювання обчислюються значення температурних і вологісних полів та компонент напружень, що розвиваються під час сушіння деревини. Опираючись на числові значення вологісних полів приймається рішення про встановлення наступного режиму сушіння чи продовження процесу сушіння в активному на даний момент режимі.

5.3. Висновки

У даному розділі запропоновано методику прямого вимірювання повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу за величиною підведеного механічного зусилля до еталону.

Наведено інтерфейс прикладного програмного забезпечення для знаходження коефіцієнтів апроксиманти експериментальних даних повзучості деревини, побудованої у вигляді лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів, та відповідного дробового параметра.

Наведено практичні рекомендації щодо вибору режиму сушіння. Вони покликані допомогти визначити раціональні параметри агента сушіння та регулювати процес переходу до наступного режиму сушіння, що в свою чергу приводить до підвищення якості висушеної деревини та енергоефективності технологічного процесу сушіння деревини.

ВИСНОВКИ

У дисертації вирішено актуальне наукове завдання побудови та реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою під час сушіння, зокрема деревини, що має важливе значення для обґрунтування раціональних параметрів та підвищення ефективності технологічного процесу за умови забезпечення необхідної якості продукції.

1. Отримано математичну модель в'язко-пружного деформування деревини під час сушіння з урахуванням її фрактальної структури, яка дає змогу врахувати ефекти «пам'яті» і самоорганізації у висушуваній деревині, усадку гігроскопічних матеріалів, анізотропію змінних тепломеханічних характеристик та уможлиблює оцінити компоненти напружено-деформівного стану і залишкові напруження, що зумовлені змінними градієнтами температури та вологовмісту.

2. Вдосконалено двовимірну математичну модель неізотермічного вологоперенесення у процесі сушіння деревини, як матеріалу з анізотропними теплофізичними характеристиками, для регулярного та нерегулярного режимів, яка на відміну від відомих, дає змогу розширити множину її реалізацій шляхом врахування фрактальної структури матеріалу залежно від породи, початкових значень температури та вологовмісту.

3. Апроксимовано експериментальні дані повзучості деревини за допомогою дробово-експоненціальних операторів залежно від її породи та температурно-вологісних характеристик із забезпеченням необхідної точності, що дає можливість отримати розрахункові співвідношення реологічної поведінки матеріалу та визначити дробовий параметр α математичних моделей.

4. Розроблено об'єктно-орієнтоване прикладне програмне забезпечення для реалізації математичних моделей неізотермічного вологоперенесення та в'язко-пружного деформування у середовищах з фрактальною структурою за

допомогою скінченно-різницевого методу предиктор-коректор, яке дає змогу визначити зміну температури, вологовмісту та компонент напружень у деревині під час сушіння. Збіжність методу показано шляхом аналізу відносної похибки, а адекватність отриманих результатів – шляхом зіставлення з відомими експериментальними даними.

5. Досліджено двовимірне в'язко-пружне деформування деревини, як середовища з фрактальною структурою в умовах неізотермічного вологоперенесення та встановлено закономірності впливу технологічних параметрів режиму сушіння, фізичних властивостей, притаманних матеріалам з фрактальною структурою, анізотропії змінних тепломеханічних та теплофізичних характеристик на динаміку температури, вологовмісту і компонент напружено-деформівного стану та оцінити залишкові напруження у висушуваній деревині. Зокрема виявлено, що залишкові напруження: для порід із меншою густиною можуть сягати 22,7 %; з інтенсифікацією режиму сушіння зі сталими параметрами збільшуватись на 23,4 %; для багатоступеневого режиму складати 21,1 %..

6. Розроблено методику вимірювання напружень на поверхні висушеної деревини та прикладне програмне забезпечення для апроксимації експериментальних даних повзучості матеріалу за допомогою лінійної комбінації дробово-експоненціальних операторів, які прийняті для практичного використання на ВКФ "Ледас-Україна" (м. Хуст, Закарпатська обл.) з метою вибору раціональних параметрів та регулювання процесу переходу до наступного режиму сушіння, для підвищення якості продукції та ефективності цього технологічного процесу. Результати наукових досліджень впроваджені у навчальний процес Національного лісотехнічного університету України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alfrey T. The Methods of Specifying the Properties of Viscoelastic Materials / T. Alfrey, P. Doty // *Journal of Applied Physics*, Vol. 16, No. 11, 1945. – P. 700-713.
2. Ayaz F. Solutions of the system of differential equations by differential transform method / F. Ayaz // *Appl. Math. Comput.* 147: 2004. – P. 547-567.
3. Bagley R. L. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *J. Rheol.* 27: 1983. – P. 201-210.
4. Bagley R. L. On the fractional order initial value problem and its engineering applications / R. L. Bagley // *Fractional Calculus and Its Applications* (Ed. K. Nishimoto), Tokyo, College of Engineering, Nihon University. – 1990. – P. 12-20.
5. Beyer H. Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives / H. Beyer, S. Kempfle // *ZAMM* 75. – 1995. – P. 623-635.
6. Brunner H. Nonpolynomial spline collocation for Volterra equations with weakly singular kernels / H. Brunner // *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(6): 1983. – P. 1106-1119.
7. Brunner H. Polynomial spline collocation methods for Volterra integrodifferential equations with weakly singular kernels / H. Brunner // *IMA J. Numer. Anal.*, 6(2): 1986. – P. 221-239.
8. Brunner H. The approximate solution of Volterra equations with nonsmooth solutions / H. Brunner // *UtilitasMath.*, 27: 1985. – P. 57-95.
9. Brunner H. The numerical solution of initial value problems for integrodifferential equations. In *Numerical analysis 1987* (Dundee, 1987) / H. Brunner // volume 170 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, Longman Sci. Tech., Harlow, 1988. – P. 18-38.

10. Brunner H. The numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes / H. Brunner // *Math. Comp.*, 45(172): 1985. – P. 417-437.
11. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // *II. Geophys. J. Astronom. Soc.* 1967. Vol. 13. – P. 529-539.
12. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II / M. Caputo // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 13: 1967. – P. 529-539.
13. Chang T. S. Mechanical model parameters for viscoelastic dampers / T. S. Chang, M. P. Singh // *J. Eng. Mech.*, 2009. – P. 581-584.
14. Chang T. S. Seismic analysis of structures with a fractional derivative model of viscoelastic dampers / T. S. Chang, M. P. Singh // *Earthq. Eng. Eng. Vib.*, 2002. – P. 251-260.
15. Chen C. K. Application of differential transformation to eigenvalue problems / C. K. Chen, S. H. Ho // *Appl. Math. Comput.* 79: 1996. – P. 173-188.
16. Chen Y. Fractional Order Control - A Tutorial / Y. Chen, I. Petras, D. Xue // *American Control Conference, Hyatt Regency Riverfront. St. Louis, MO, USA: June 10-12, 2009.* – P. 1397-1411.
17. Chotard-Ghodsniya R. Rheology of Living Materials / R. Chotard-Ghodsniya, C. Verdier, F. Mollica, L. Preziosi, K. R. Rajagopal // *Modeling of Biological Materials, Springer, New York, 2007.* – P. 1-31.
18. Cividini R. Microwave Heating in Vacuum-Press Drying of Timber: Practical Investigation / R. Cividini, I. Travan // *Proceedings of 8th International IUFRO Wood Dry. Conf., Brasov, Romania, 2003.* – P. 150-155.
19. Cloutier A. A Model of Moisture Movement in Wood Based on Water Potential and the Determination of the Effective Water Conductivity / A. Cloutier, Y. Fortin // *J. Wood Science Technology*, 27(1993), 2. – P. 95-114.

20. Coutand C. Comparison of mechanical properties of tension and opposite wood in Populus / C. Coutand, G. Jeronimidis // Wood Science and Technology 38(1): 2004. – P. 11-24.
21. Cupial P. Some approaches to the analysis of nonproportionally damped viscoelastic structures / P. Cupial // Proc.Int.Symp.on Dynamics of Continua: D. Besdo and R. Bogacz (eds), Sept.9-13 1996, Physikzentrum Bad Honnef. – Physikzentrum Bad Honnef. – 1996. – P. 93-102.
22. Diethelm K. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations / K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed // Nonlinear Dynamics, 29: 2002. – P. 3-22.
23. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order / K. Diethelm // Electron. Trans. Numer. Anal, 5: 1997. – P. 1-6.
24. Diethelm K. Detailed error analysis for a fractional Adams method / K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed // Numer. Algorithms, 36(1): 2004. – P. 31-52.
25. Diethelm K. Numerical solution of fractional order differential equations by extrtapolation / K. Diethelm, G. Walz // Numer. Algorithms, 16: 1997. – P. 231-253.
26. Diethelm K. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order / K. Diethelm, A. D. Freed, S. Heinzl, T. Plesser // Forschung und wissenschaftliches Rechnen: Beiträge zum Heinz-Billing-Preis 1998. Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Gottingen, 1999. – P. 57-71.
27. Ervin V. J. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation / V. J. Ervin, J. P. Roop // Numer.Methods Partial Differential Equations, 22. – 2005. – P. 558-576.
28. Fang C. H. Growth stresses are highly controlled by the amount of G-layer in poplar tension wood / C. H. Fang, B. Clair // Iawa Journal 29(3) : 2008. – P. 237-246.

29. Ford N. J. Numerical and analytical treatment of differential equations of fractional order / N. J. Ford, A. C. Simpson // In Proc. Internat. Conf. on Sci. Comp. & Math. Modeling, Inst. of Applied Science and Computations, Charleston, 2000. – P. 60-65.
30. Ford N. J. The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy / N. J. Ford, A. C. Simpson // Numer. Algorithms, 26(4) . – 2001. – P. 333-346.
31. Fu-Yao Ren. Fractional integral associated to the self-similar set of the generalised self-similar set and its physical interpretation / Fu-Yao Ren, Zu-Guo Yu, Feng Su // Phys. Lett. A, vol. 219, 1996. – P. 59-68.
32. Gaul L. Damping description involving fractional operators / L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle // Mech. Syst. Signal Process. 5: 1991. – P. 81-88.
33. Gejji V. D. Solving a multi-order fractional differential equation / V. D. Gejji, H. Jafari // Appl. Math. Comput, 189. – 2007. – P. 541-548.
34. Glockle W. G. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics / W. G. Glockle, T. F. Nonnenmacher // Biophys. J. 68: 1995. – P. 46-53.
35. Golub V. P. To the problem of determination of parameters of the fractional-exponential heredity kernels of linealy viscoelastic materials / V. P. Golub, P. V. Fernati, Ya. G. Lyashenko // Int. App. Mech. – 2008. – № 9. – P. 963-974.
36. Gorenflo R. Afterthoughts on interpretation of fractional derivatives and integrals / R. Gorenflo, P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova // Transform Methods and Special Functions, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998, ISBN 954-8986-05-1. – P. 589-591.
37. Gorenflo R. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order / R. Gorenflo, F. Mainardi // Fractals and Fractional Calculus in Continuum! Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York. – 1997. – P. 223-276.

38. Gorenflo R. On ultraslow and intermediate processes / R. Gorenflo, R. Rutman // Transform Methods and Special Functions, Science Culture Technology Publishing (SCTP), Singapore. – 1995. – P. 61-81.
39. Hadid S. B. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order / S. B. Hadid, Yu. F. Luchko // Panamer. Math. J. 6. – 1996. – P. 57-73.
40. Hanhijarvi A. Advances in the knowledge of the influence of moisture changes on the long-term mechanical performance of timber structures / A. Hanhijarvi // Materials and Structures, 33(1), 2000. – P. 43-49.
41. Holzer S. M. A review of creep in wood: concepts relevant to develop long-term behavior predictions for wood structures / S. M. Holzer, J. R. Loferski, D. A. Dillard // Wood and Fiber Science, 21(4):, 1989. – P. 376-392.
42. Houska M. Mechanosorptive behaviour of different categories of spruce wood / M. Houska, B. Bucar // In Proceedings of the 1st International Conference on Mechanics of Time Dependent Materials, Bethel, 1995. – P. 173-178.
43. Jourez B. Anatomical characteristics of tension wood and opposite wood in young inclined stems of poplar (*Populus euramericana* cv 'Ghoy') / B. Jourez, A. Riboux // Iawa Journal 22(2): 2001. – P. 133-157.
44. Kempfle S. Global and causal solutions of fractional differential equations / S. Kempfle, H. Beyer // Transform Methods and Special Functions, Varna'96, Proc. 2nd Intern. Workshop, Science Culture Technology Publishing (SCTP), Singapore. – 1997. – P. 210-216.
45. Kilbas A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // II. Appl. Anal. 2002. Vol. 81. – P. 435-494.
46. Kilbas A. A. On Mittag-Leffler type functions, fractional calculus, operators and solution of integral equations / A. A. Kilbas, M. Saigo // Integral Transforms and Special Functions 4. – 1996. – P. 355-370.

47. Kilbas A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
48. Kiryakova V. A long standing conjecture failed? / V. Kiryakova, P. Rusev, I. Di-movski // Transform Methods and Special Functions, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998, ISBN 954-8986-05-1. – P. 579-588.
49. Koumoutsakos A. Radio Frequency Vacuum Drying of wood / A. Koumoutsakos, S. Avramidis, S. G. Hatzikiriakos // I. Mathematical model. Drying Technology 19 (2001). – P. 65-84.
50. Kumar P. An approximate method for numerical solution of fractional differential equations / P. Kumar, O. P. Agrawal // Signal Processing, 86. – 2006. – P. 2602-2610.
51. Kumar P. Microwave Drying: Effects on Paper Properties / P. Kumar, A. S. Mujumdar // Drying Technology, 8 (1990), 2. – P.1061-1087.
52. Lewandowski R. Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to the modeling of viscoelastic dampers / R. Lewandowski, B. Chora Zyczewski // Compos. Struct., 2010. – P. 1-17.
53. Li Z. X. A creep model for concrete with damage in the axial and lateral directions / Z. X. Li, Q. C. Qian // Theoretical and Appl. Fracture Mech., 1992. – P. 115-120.
54. Li X. J. Microwave-Vacuum drying of wood: Model Formulation and Verification / X. J. Li, B. J. Zhang, W. J. Li //Drying Technology 26 (2008). – P. 1382-1387.
55. Liu Tong. Creep of wood under a large span of loads in constant and varying environments - Part 1/ Tong Liu // Experimental observations and analysis. Holz als Roh- und Werkstoff, 51(6), 1993. – P. 400-405.
56. Liua F. Numerical solution of the space fractional Fokker- Planck equation / F. Liua, V. Anh, I. Turner // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – P. 209-219.

57. Lubich C. Discretized fractional calculus / C. Lubich // *SIAMJ. Math. Anal.*, 17(3): 1986. – P. 704-719.
58. Lubich C. Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind / C. Lubich // *Math. Comp.*, 45(172): 1985. – P. 463-469.
59. Lubich C. Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the first kind / C. Lubich // *IMA J. Numer. Anal.*, 7(1): 1987. – P. 97-106.
60. Lubich C. On the stability of linear multistep methods for Volterra convolution equations / C. Lubich // *IMA J. Numer. Anal.*, 3(4) : 1983. – P. 439-465.
61. Lubich C. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel integral equations of the second kind / C. Lubich // *Math. Comp.*, 41(163) : 1983. – P. 87-102.
62. Lubich C. Runge-Kutta theory for Volterra integro-differential equations / C. Lubich // *Numer. Math.*, 40(1) : 1982. – P. 119-135.
63. Luchko Yu. F. The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus / Yu. F. Luchko, H. M. Srivastava // *Comput. Math. Appl.* 29. – 1995. – P. 73-85.
64. Luikov A. V. Systems of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies (Review) / A. V. Luikov // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18 (1975) . – P. 1-14.
65. Machado J. A. T. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation / J. A. T. Machado // *Fractional Calculus and applied Analysis*, 2003, vol. 6, no. 1. – P. 73-80.
66. Mainardi F. Considerations on fractional calculus: interpretations and applications / F. Mainardi, P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova // *Transform Methods and Special Functions, Varna'96, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1998, ISBN 954-8986-05-1. – P. 594-597.*

67. Mainardi F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics / F. Mainardi // *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Wien and New York. – 1997. – P. 291-348.
68. Mainardi F. Fractional relaxation and fractional diffusion equations, mathematical aspects / F. Mainardi // *Proceedings of the 12-th IMACS World Congress, Georgia Tech Atlanta, Vol. 1.* – 1994. – P. 329-332.
69. Manabe S. The Non-integer Integral and its Application to Control Systems / S. Manabe // *ETJ of Japan*. 1961. Vol. 3/4(6). – P. 83-87.
70. Manabe S. The System Design by the Use of a Model Consisting of a Saturation and Nonlinear Integrals / S. Manabe // *ETJ of Japan*, 1963, Vol. 3/4(8). – P. 147-150.
71. Marks II R. J. Differintegral interpolation from a bandlimited signal's samples / R. J. Marks II, M. W. Hall // *IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process*, 29 : 1981. – P. 872-877.
72. Metzler R. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // *Phys. Rep.* 2000, V. 339. – P. 1-77.
73. Michalski M. W. On a certain differential equation of non-integer order / M. W. Michalski // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 10. – 1991. – P. 205-210.
74. Miller K. S. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / K. S. Miller, B. Ross. – New York: Jon Wiley & Sons.Inc., 1993. – 366 p.
75. Momani S. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics / S. Momani, Z. Odibat // *Phys. Lett. A*, 355. – 2006. – P. 271-279.
76. Momani S. Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations / S. Momani, N. T. Shawagfeh // *Appl. Math. Comput*, 182. – 2006. – P. 1083-1092.

77. Momani S. Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order / S. Momani, Z. Odibat // *Phys. Lett. A*, 365. – 2007. – P. 345-350.
78. Momani S. Numerical methods for fourth-order fractional integrodifferential equations / S. Momani, M. A. Noor // *Appl. Math. Comput*, 182. – 2006. – P. 754-760.
79. Monsrefi-Torbati M. Physical and geometrical interpretation of fractional operators / M. Monsrefi-Torbati, J. K. Hammond // *J. Franklin Inst.*, vol. 335B, no. 6, 1998. – P. 1077-1086.
80. Mujumdar A. S. Drying of Solids: Principles, Classification, and Selection of Dryers / A. S. Mujumdar, A. S. Menon // *In Handbook of Industrial Drying, Second Edition ed.*; Marcel Dekker: New York, 1995. – P. 1-39.
81. Navi P. Micromechanics of creep and relaxation of wood. A review COST Action E35 2004-2008 : Wood machining – micromechanics and fracture / P. Navi, S. Stanzl-Tschegg // *Holzforschung* 63(2): 2009. – P. 186-195.
82. Nigmatullin R. R. A fractional integral and its physical interpretation / R. R. Nigmatullin // *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 90, 1992. – P. 242-251.
83. Odibat Z. Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order / Z. Odibat, S. Momani // *Int. J. Nonlinear Sci. Numer, Simul* 7. – 2006. – P. 271-279.
84. Odibat Z. Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order / Z. Odibat, S. Momani // *Chaos, Solitons and Fractals*, 36. – 2008. – P. 167-174.
85. Oldham K. B. The fractional calculus: Teory and applications of differentiation and integration to arbitrary order / K. B. Oldham, J. Spanier. – San Diego: Academic Press, 1974. – 234 p.
86. Olmstead W. E. Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation / W. E. Olmstead, R. A. Handelsman // *SIAM Rev.* 18 : 1976. – P. 275-291.

87. Palamara Orsi A. Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels / A. Palamara Orsi // *Math. Comp.*, 65(215) : 1996. – P. 1201-1212.
88. Paradisi P. The fractional Fick's law for non-local transport processes / P. Paradisi, R. Cesari, F. Mainardi, F. Tampieri // *Physica A*. 2001, T. 293. – P. 130-142.
89. Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, some methods of their solution and some of their applications / I. Podlubny. – San Diego : Academic Press, 1999. – 340 p.
90. Podlubny I. Fractional-Order Systems and PID-Controllers / I. Podlubny // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. Vol. 1(44). – P. 208-214.
91. Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation / I. Podlubny // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2002. – Vol. 5, № 4. – P. 367-396.
92. Podlubny I. Matrix approach to discrete fractional calculus / I. Podlubny // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 3(4) : 2000. – P. 359-386.
93. Podlubny I. On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and PID-controllers / I. Podlubny, L. Dorsak, I. Kostial // *Proc of the 36th CDC*. San Diego. – P. 4985-4990.
94. Podlubny I. Solution of linear fractional differential equations with constant coefficients / I. Podlubny, P. Rusev, I. Dimovski, V. Kiryakova // *Transform Methods and Special Functions*, Science Culture Technology Publishing (SCTP), Singapore. – 1995. – P. 227-237.
95. Rami E.-N. A. Cosmology with Fractional Action Principle / E.-N. A. Rami // *Romanian Reports in Physics*, 2007, Vol. 3(59). – P. 763-771.
96. Ravi Kanth A. S. V. Differential transform method for solving the linear and non-linear systems of partial differential equations / A. S. V. Ravi Kanth, K. Aruna // *Phys. Lett. A*, 372: 2008. – P. 6896-6898.

97. Rawashdeh E. Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method / E. Rawashdeh // *Appl. Math. Comput.*, 176. – 2006. – P. 1-6.
98. Ray S. S. Analytical approximate solution of nonlinear dynamic system containing fractional derivative by modified decomposition method / S. S. Ray, K. S. Chaudhuri, R. K. Bera // *Appl. Math. Comput.*, 182. – 2006. – P. 544-552.
99. Ruelle J. Comparison of physical and mechanical properties of tension and opposite wood from ten tropical rainforest trees from different species / J. Ruelle, J. Beauchene // *Annals of Forest Science* 64(5) : 2007. – P. 503-510.
100. Ruelle J. Tension wood and opposite wood in 21 tropical rain forest species 2. Comparison of some anatomical and ultrastructural criteria / J. Ruelle, B. Clair // *Iawa Journal* 27(4) : 2006. – P. 341-376.
101. Rutman R. S. On physical interpretations of fractional integration and differentiation / R. S. Rutman // *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 105, no. 3, 1995. – P. 1509-1519.
102. Rutman R. S. On the paper by R. R. Nigmatullin "A fractional integral and its physical interpretation" / R. S. Rutman // *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 100, no. 3, 1994. – P. 1154-1156.
103. Saadatmandi A. A new operational matrix for solving fractional order differential equations / A. Saadatmandi, M. Dehghan // *Comput. Math. Appl.*, 59. – 2010. – P. 1326-1336.
104. Saifouni O. Determination of stresses in drying wood by means of a viscoelastic relaxation model / O. Saifouni, R. Moutou Pitti, J. F. Destrebecq // Springer. DOI 10.1007/978-1-4614-4241-7_5. – 2012. – P. 29-36.
105. Salmen L. Cell wall features with regard to mechanical performance. A review COST Action E35 2004-2008: Wood machining - micromechanics and fracture / L. Salmen, I. Burgert // *Holzforschung* 63(2) : 2009. – P. 121-129.

106. Salmen L. Viscoelastic properties of insitu lignin under water-saturated conditions / L. Salmen // *Journal of Materials Science* 19(9) : 1984. – P. 3090-3096.
107. Seyfarth R. Continuous Drying of Lumber in a Microwave Vacuum Kiln / R. Seyfarth, M. Leiker, N. Mollekopf // *Proceedings of 8th International IUFRO Wood Dry. Conf., Brasov, Romania, 2003.* – P. 159-163.
108. Sokolovskiy Ya. The numerical modeling of the deformational-relaxation and heat-mass exchange fields in capillary-porous materials with fractal structure / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi, I. Boretska, O. Sykala / *Proceeding of the VI th International Conference on Computer Science and Informational Technologies ‘CSIT-2011’.* – Lviv, 2011. – P. 210-213.
109. Sokolowskyi Ya. Mathematical modeling of rheological behavior and distribution of temperature and moisture fields in the drying of lumber / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi, A. Nechepurenko, S. Xabors’kyj, M. Dmytrus’ / *13-th International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics”.* – Svalyava, 2015. – P. 214-217.
110. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of non-isothermal moisture transfer and rheological behavior in cappillary-porous materials with fractal structure during drying / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi // *Computer and Information Science.* –Canadian Center of Science and Education – Vol. 7, No. 4 – 2014. – P. 111-122.
111. Sokolowskyi Ya. Mathematical modelling of unisothermal moisture transfer and deformation-relaxation fields in capillary-porous materials with fractal structure / Ya. Sokolowskyi, V. Shymanskyi / *Computer Science & Engineering: Proceedings of the 6th International Conference of Young Scientists ‘CSE-2013’.* – Lviv : Lviv Polytechnic Publishing House, 2013. – P. 100-103.

112. Sweilam N. H. Numerical studies for a multi-order fractional differential equation / N. H. Sweilam, M. M. Khader, R. F. Al-Bar // *Phys. Lett. A* 371. – 2007. – P. 26-33.
113. Tuttle F. A mathematical theory of the drying of wood / F. Tuttle // *Journal of the Franklin Institute*, 1925. – P. 609-614.
114. Wang Q. Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method / Q. Wang // *Appl. Math. Comput.*, 182. – 2006. – P. 1048-1055.
115. Ward I. M. Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene / I. M. Ward, E. T. Onat // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1963. – 11. – № 4. – P. 217-229.
116. Welch S. W. J. Application of time-based fractional calculus method to viscoelastic creep and stress relaxation of materials / S. W. J. Welch, R. A. L. Rorrer, R. G. Duren // *Mech. Time-Dependent Materials*, 1999, Vol. 3, no. 3. – P. 279-303.
117. Whitaker S. Simultaneous Heat, Mass, and Momentum Transfer in Porous Media / S. Whitaker // *A Theory of Drying*, in: *Advances in Heat Transfer* (Eds. Hartnett J. P., Irvin T.F.), Academic Press, San Diego., 1977. – P. 119-203.
118. Yuste S. B. Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations / S. B. Yuste // *J. Comput. Phys.*, 216. – 2006. – P. 264-274.
119. Zhuravchak L. Mathematical modeling of non-stationary thermal field in spatial bodies for recognition of homogeneous inclusions / L. Zhuravchak, N. Shumilina // *Proceedings of Sixth International Congress on Thermal Stresses*, Vienna, 2005. – Vol. 2. – P. 521-524.
120. Zu-Guo Yu. Fractional integral associated to generalized cookie-cutter set and its physical interpretation / Yu. Zu-Guo, Fu-Yao Ren, Ji Zhou // *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 30, 1997. – P. 5569-5577.

121. Андрашек Й. В. Стандартизація та якість сушіння деревини / Й. В. Андрашек, Ж. Я. Гуменюк // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2003, вип. 13.2. – С. 122-124.
122. Бабенко Ю. И. Тепломасообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю. И. Бабенко. – Л.: Химия, 1986. – 144 с.
123. Бакалець А. В. Математичне моделювання неізотермічного вологоперенесення і в'язкопружного стану у деревині в процесі сушіння : дис.... канд. тех. наук: 01.05.02 / А. В. Бакалець ; Нац. лісотехн. ун-т України. – Львів, 2010. – 240 с.
124. Бехта П. А. Розповсюдження ультразвуку в деревинних композиційних матеріалах / П. А. Бехта, П. Німц // Наукові праці Лісівничої академії наук України. – Львів : НУ "Львівська політехніка", 2004. – Вип.3. – С. 102 -109.
125. Билей П. В. Сушка древесины твердых лиственных пород: [изд. 2-е.] / П. В. Билей. – М. : Экология, 2002. – 224 с.
126. Білей П. В. Аналіз основних способів сушіння капілярно-пористих колоїдних матеріалів / П. В. Білей // Наук. вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 12.5. – С. 102-109.
127. Білей П. В. Ефективність комбінованого атмосферно-камерного сушіння пиломатеріалів / П. В. Білей, А. В. Полоз // Наук. вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 13.4. – С. 91-93.
128. Білей П. В. Закономірності впливу режиму сушіння на кінетику процесу / П. В. Білей, І. А. Соколовський, Ю. Л. Безноско // Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2006, вип. 16.5. – С. 69-74.
129. Білей П. В. Принципи побудови режимів сушіння деревини / П. В. Білей, Я. Ф. Кулешник // Наук. вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ, 2001. – Вип. 11.2. – С. 57-59.
130. Бобало Ю. Я. Основи теорії електронних кіл : підруч. для студ. ВНЗ галузі знань "Електроніка" / Ю. Я. Бобало, Б. А. Мандзій, П. Г. Стахів,

- Л. Д. Писаренко, Ю. І. Якименко; ред.: Ю. І. Якименко; Нац. техн. ун-т України "Київ. політехн. ін-т", Нац. ун-т "Львів. політехніка". – 2-ге вид., доопрац. і доповн. – К. : НТУУ "КПІ", 2013. – 415 с.
131. Бунь Р. А. Математичне моделювання та просторовий аналіз вуглецевого балансу лісів Волинської області / Р. А. Бунь, Н. М. Баран // Моделювання та інформаційні технології. – Вип. 54. – 2009. – С. 19-24.
132. Вірченко Н. О. Основи дробового інтегро-диференціювання / Н. О. Вірченко, В. Я. Рибак. – Навч. посібник. – К.: Тов."Задруга", 2007. – 364 с.
133. Гаврилов Д. А. Метод определения параметров ползучести вязко-упругих материалов / Д. А. Гаврилов, В. Н. Потсаев // Прикл. механика. – 1982. – 18. – № 5. – С. 125-127.
134. Гайвась Б. І. Математичне моделювання процесу сушіння пористих тіл з врахуванням кінетики фазових переходів та деформацій : автореф. дис ... д-ра техн. наук / Б. І. Гайвась. – Львів, 2012 . – 40 с.
135. Гольдман А. Я. Способ определения параметров для описания кривой ползучести упругонаследственных материалов на основе таблицы Эа - функции Работнова / А. Я. Гольдман, В. В. Щербак, Е. Н. Кислов, Е. И. Дворский // Машиноведение. – 1977. – № 6. – С. 77-82.
136. Гребенник И. В. Математическая модель задачи определения оптимального формата издания / Гребенник И. В., Грицай Д. В. // Бионика интеллекта. – 2011. – № 1. – С. 41-47.
137. Дацко Б. Й. Математичне моделювання нелінійної динаміки в бістабільних системах реакції-дифузії з дробовими похідними / Б. Й. Дацко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, № 2. – С. 163-172.
138. Дацко Б. Й. Математичне моделювання явищ самоорганізації на основі еволюційних нелінійних систем рівнянь з цілими і дробовими похідними:

- автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Б. Й. Дацко; НАН України, Ін-т прикл. пробл. мех. і матем. ім. Я.С. Підстригача. – Л., 2012. – 40 с.
139. Демидова И. И. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций / И. И. Демидова, В. С. Екельчик // В кн.: Исследования по упругости и пластичности. – Вып. 12. – 1978. – С. 107-113.
140. Дендюк М. В. Визначення реологічних параметрів деревини / М. В. Дендюк // Науковий вісник УкрДЛТУ: зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ, 2005. – Вип. 15.3. – С. 124-129.
141. Дендюк М. В. Вплив геометричних розмірів пиломатеріалів на напружено-деформівний стан у процесі сушіння / М. В. Дендюк, Я. І. Соколовський // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць.– Львів : НЛТУУкраїни, 2006. – Вип.16.2. – С. 125-133.
142. Дендюк М. В. Математична модель двовимірного вязкопружного стану деревини у процесі сушіння : дис.... канд. тех. наук: 01.05.02 / М. В. Дендюк ; Нац. лісотехн. ун-т України. – Львів, 2008. – 239 с.
143. Журавчак Л. М. Нестационарное тепловое поле в неоднородных материалах с нелинейной поведінкою їх компонент / Л. М. Журавчак, Н. В. Забродська // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 1. – С. 33-41.
144. Звонов Е. Н. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ / Е. Н. Звонов, Н. И. Малинин, Л. Х. Паперник, Б. М. Цейтлин // Изв. АН СССР, МТТ. – 1968. – № 5. – С. 76-82.
145. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер.с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
146. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. - М.: Наука. – 1970. – 240 с.
147. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. – М.: Высшая школа, 1976. – 278 с.

148. Корчук Ю. А. Сушка радиальных листовидных пиломатериалов до эксплуатационной влажности в камерах периодического действия: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.21.05 / Ю. А. Корчук. – Красноярск, 2001. – 17 с.
149. Кречетов В. И. Сушка древесины: [3-е изд. перераб.] / В. И. Кречетов. – М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 432 с.
150. Кулешник Я. Ф. Закономірності розвитку внутрішніх напружень при сушінні деревини як анізотропного тіла: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.07 / Я. Ф. Кулешник; Український держ. лісотехнічний ун-т. – Львів, 2002. – 184 с.
151. Кучер Н. К. Кратковременная ползучесть и прочность полипропиленовых волокнистых структур / Н. К. Кучер, М. П. Земцов, Е. Л. Данильчук // Пробл. прочности. – 2007. – № 6. – С. 77-90.
152. Лебедев Д. П. Математическое моделирование процесса сублимационной сушки / Д. П. Лебедев, Б. Н. Быховский // Инженерно-физический журнал. – Минск: Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси. – 2006, т. 79, № 1. – С. 48-55.
153. Лукашук С. Ю. Численное решение диффузионно-волновых уравнений дробного порядка на кластерных системах / С. Ю. Лукашук, И. В. Костригин // Труды VI Всероссийской конференции молодых ученых по мат. моделированию и информ. технологиям. Кемерово, 2005. – С. 19.
154. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
155. Лыков А. В. Тепломассообмен / А. В. Лыков; (справочник) изд. 2-е. – М.: Энергия, 1978. – 463 с.
156. Мазяк З. Ю. Математична модель процесу зв'язаного тепломасообміну при конвективному висушуванні деревини / З. Ю. Мазяк, І. М. Ільків, О. М. Креховецький // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2001, вип. 11.2. – С. 79-82.

157. Матвійчук Я. Апроксимація математичних макромоделей електронних пристроїв / Я. Матвійчук, П. Малачівський // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 78-86.
158. Мержиевский Л. А. Сравнение методов численного решения задач для уравнения теплопроводности дробного порядка / Л. А. Мержиевский, А. Н. Корчагина // X Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 2008. – С. 85-86.
159. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М: Физматлит, 2003. – 272 с.
160. Никитенко Н. И. Математическое моделирование тепломасопереноса, фазовых превращений и усадки с целью оптимизации процесса сушки термолабильных материалов / Н. И. Никитенко, Ю. Ф. Снежкин, Н. Н. Сорокова // Инженерно-физический журнал. – Минск: Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси. – 2005, т. 78, № 1. – С. 74-87.
161. Огородников Е. Н. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана-Лиувилля / Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(20). – С. 24-36.
162. Огородников Е. Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(22). – С. 255-268.
163. Озарків І. М. Методика дослідження критерію Кірпічова як основного критерію тріщиноутворення у процесі конвективного сушіння деревини / І. М. Озарків, З. П. Копинець, Й. Л. Ацбергер // Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2006, вип. 16.2. – С. 81-86.

164. Озарків І. М. Термодинамічні характеристики деревини у процесі сушіння / І. М. Озарків, М. С. Кобринович // Наук. вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 13.1. – С. 106-112.
165. Орлов А. А. Сушка лиственничных пиломатериалов с заданными потребительскими свойствами в камерах периодического действия: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.21.05 / А. А. Орлов. – Красноярск, 2001. – 18 с.
166. П'янило Я. Д. Аналітико-числове моделювання масопереносу в газопроводах та природних пористих середовищах [Текст] : автореф. дис... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Я. Д. П'янило; Національний ун-т "Львівська політехніка". - Л., 2007. - 40 с.
167. П'янило Я. Д. Використання дробових похідних для аналізу нестационарного руху газу в трубопроводах за наявності компресорних станцій та відводів / Я. Д. П'янило // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 122-132.
168. Патент України на корисну модель №61580. Спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу / Б. П. Поберейко, В. М. Шиманський, Я. І. Соколовський; заявл. 20.12.2010 ; опубл. 25.07.2011., Бюл. № 14.
169. Поберейко Б. П. Вплив анізотропії деревини на залежність диференціальної усадки з напружено-деформівним станом у висушуваних пиломатеріалах / Б. П. Поберейко, Я. І. Соколовський // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2002, вип. 12.5. – С. 162-167.
170. Поберейко Б. П. Визначення кривих довгочасного опору деревини / Б. П. Поберейко // Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУУ. – 2006, вип. 16.2. – С. 73-77.
171. Поберейко Б. П. Дослідження процесів вологоперенесення всередині та на межі неруйнівної області деформування деревини / Б. П. Поберейко //

Наук. вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : НЛТУ України, 2006. – Вип. 16.6. – С. 82-90.

172. Попов В. М. Термодинамика процесса сушки древесины / В. М. Попов, В. П. Белокуров // Лесной журнал: Изв. ВУЗов России. – Архангельск. – 1990, № 4. – С. 122-123.
173. Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка: Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. В. Псху // Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Нальчик, 2007. – 190 с.
174. Работнов Ю. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от неё / Ю. Н. Работнов, А. Х. Паперник, Е. Н. Звонов. – М.:Наука, 1969. – 132 с.
175. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
176. Рудавський Ю. К. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, М. А. Сухорольський, І. М. Зашкільняк, В. М. Колісник, О. А. Микитюк, Р. С. Мусій. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2002. – 236 с. ISBN 966-553-004-6.
177. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
178. Серговский П. С. Гидротермическая обработка древесины / П. С. Серговский. – М.: Гослесбумиздат, 1975. – 400 с.
179. Соколовський І. А. Ідентифікація закономірностей технологічних операцій процесу сушіння букових пиломатеріалів: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.05.07/ І. А. Соколовський ; Нац. лісотехн. ун-т України. – Львів, 2007. – 19 с.

180. Соколовський Я. І. Автоматизація аналізу та моделювання деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів / Я. І. Соколовський, І. Б. Борецька, О. В. Мокрицька, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький / VI науково-практична конференція з міжнародною участю «Математическое и имитационное моделирование систем» (МОДС 2011). – Чернігів, 2011. – С. 74-75.
181. Соколовський Я. І. Автоматизована система моделювання взаємозв'язаних деформаційно-релаксаційних і тепломасообмінних процесів у капілярно-пористих матеріалах / Я. І. Соколовський, О. В. Мокрицька, М. Ф. Сало, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький / Матеріали науково-практичної конференції “Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті” (INFOTECH 2011). – Севастополь, 2011. – С. 105.
182. Соколовський Я. І. Двовимірна математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів : НЛТУ України, 2011. – Вип. 21.2. – С. 341-348.
183. Соколовський Я. І. Деформативність деревини й деревиностружкових плит зі змінними потенціалами тепломасоперенесення: дис. ... доктора техн. наук: 05.05.07 / Я. І. Соколовський ; Український держ. лісотехнічний університет. – Львів, 2001. – 381 с.
184. Соколовський Я. І. Математична модель волого перенесення у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / 4 International Conference of Young Scientists – Computer Science and Engineering ‘CSE-2010’. – Львів, 2010. – С. 228-229.
185. Соколовський Я. І. Математична модель тепловологоперенесення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів : Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем

- механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – Вип. 16. – С. 133-142.
186. Соколовський Я. І. Математичне моделювання напружено-деформівного стану у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, А. П. Здолбіцький, О. П. Сикала / Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту: Матеріали міжнародної наукової конференції. – Херсон : ХНТУ, 2013. – С. 292-294.
187. Соколовський Я. І. Математичне моделювання неізотермічного вологопере-несення та напружено-деформівного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2013. – С. 119-120.
188. Соколовський Я. І. Математичне моделювання реологічної поведінки та температурно-вологісних полів у процесі сушіння матеріалів з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Обчислювальні методи та системи перетворення інформації: збірник праць III-ї науково-технічної конференції. – Львів : ФМІ НАН України, 2014. – С. 51-55.
189. Соколовський Я. І. Математичне моделювання температурно-вологісних полів та реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський / Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Матеріали XX Всеукраїнської наукової конференції. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – С. 138-139.
190. Соколовський Я. І. Математичне моделювання тепловологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, І. М. Крошній, М. Ф. Сало / Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта:

Матеріали міжнародної наукової конференції. – Т. 1. – Херсон : ХНТУ, 2011. – С. 117-119.

191. Соколовський Я. І. Моделювання реологічної поведінки капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою у процесі сушіння / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський, І. Б. Борецька, В. Я. Семенюк / Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту: Матеріали міжнародної наукової конференції. – Херсон : ХНТУ, 2014. – С. 177-178.
192. Соколовський Я. І. Розрахунок анізотропних нестационарних температурно-вологісних полів у висушуваній деревині методом скінчених елементів / Я. І. Соколовський, А. В. Бакалець // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвідомч. наук. – техн. зб. – Львів : УкрДЛТУ, 2004. – Вип. 29. – С. 109-117.
193. Соколовський Я. І. Фрактальна модель тепло- і масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Вісник Національного університету «Львівська політехніка», Комп'ютерні науки та інформаційні технології. № 694. – Львів : НУ «ЛП», 2011. – С. 424-428.
194. Соколовський Я. І. Чисельне моделювання неізотермічного вологоперенесення у середовищах з фрактальною структурою / Я. І. Соколовський, В. М. Шиманський // Вісник Національного університету «Львівська політехніка» : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – № 710. – 2011. – С. 159-164.
195. Соколовський Я. І. Чисельне моделювання тепломасообмінних процесів з використанням штучних нейронних мереж / Я. І. Соколовський, І. Б. Борецька, І. М. Крошній, В. М. Шиманський, І. Д. Капран / Матеріали науково-практичної конференції “Інформаційні технології та інформаційна безпека в науці, техніці та освіті” (INFOTECH 2011). – Севастополь, 2011. – С. 104.

196. Соколовський Я. І. Визначення напружено-деформівного стану висушеної деревини з врахуванням механіко-сорбційної повзучості / Я. І. Соколовський, І. Я. Сало // Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2005, вип. 15.4. – С. 15-163.
197. Соколовський Я. І. Дослідження плоского напружено-деформівного стану деревини у процесі сушіння / Я. І. Соколовський // Наук. вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів, 1998. – Вип. 8. – С. 161-168.
198. Соколовський Я. І. Напруження і деформації у деревині в процесі сушіння / Я. І. Соколовський // Наук. вісник УкрДЛТУ: зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ, 2002. – Вип. 12.5. – С. 92-102.
199. Сорокова Н. М. Моделювання тепло- і масопереносу при зневодненні пористих тіл з метою оптимізації процесу сушіння: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.14.06 / Н. М. Сорокова. – К., 2004. – 20 с.
200. Станиславский А. А. Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка / А. А. Станиславский // ТМФ, 138:3 (2004). – С. 491-507.
201. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка: Дис докт. физ.-мат. наук: 01.04.02 / В. Е. Тарасов / М. МГУ, 2011. – 298 с.
202. Таукенова Ф. И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф. И. Таукенова, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. №. 10. – С. 1871-1881.
203. Уголев Б. Н. Деформативность древесины и напряжения при сушке / Б. Н. Уголев. – М. : Лесн. пром-сть, 1971. – 172 с.
204. Уголев Б. Н. Моделирование процесса сушки древесины / Б. Н. Уголев, Н. В. Скуратов // Сб. научн. тр. МЛТИ. – М. : МЛТИ, 1992. – Вып. 247. – С. 133-141.

205. Уголев Б. Н. Общие закономерности развития напряжений в древесине в процессах тепломассопереноса / Б. Н. Уголев // Актуальные направления развития сушки древесины. – Архангельск : ЦНИИМОД, 1980. – С. 63-72.
206. Уголев Б. Н. Контроль напряжений при сушке древесины / Б. Н. Уголев, Ю. Г. Лапшин, Е. В. Кротов. – М.: Лесн. пром-сть, 1980. – 208 с.
207. Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы / В. В. Учайкин // УФН 2003. Т. 173, № 8. – С. 847-876.
208. Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти / В. В. Учайкин // Сборник научно-популярных статей-победителей конкурса РФФИ 2006 года. М: Октопус, 2007. Т. 10. – С. 25-41.
209. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость / К. Ф. Черных. – М. : Наука, 1988. – 192 с.
210. Чудинов Б. С. Вода в древесине / Б. С. Чудинов – Новосибирск: Наука, 1984. – 270 с.
211. Шиманський В. М. Апроксимація експериментальних даних повзучості деревини з використанням дробово-експоненціального оператора / В. М. Шиманський // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів : НЛТУ України, 2015. – Вип. 25.1. – С. 397-402.
212. Шиманський В. М. Чисельне моделювання напружено-деформіного стану у капілярно-пористих матеріалах з фрактальною структурою / В. М. Шиманський / Молодіжний форум «Радиоелектроника и молодежь в XXI веке». – Харків, 2012. – С. 193-194.
213. Шостак В. В. Вплив режиму сушіння на тріщиноутворення деревини / В. В. Шостак, Й. Л. Ацбергер, З. П. Копинець // Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2005, вип. 15.4. – С. 109-114.
214. Шубин Г. С. Некоторые результаты экспериментального исследования теплообмена при сушке / Г. С. Шубин // В сб. научн. тр. МЛТИ. – М. : МЛТИ, 1986. – Вып. 178. – С. 47-48.
215. Шубин Г. С. Сушка и тепловая обработка древесины / Г. С. Шубин. – М. : Лесн. пром-сть, 1990. – 336 с.

**ДОДАТОК А ВИЗНАЧЕННЯ ДРОБОВОГО ПАРАМЕТРА
АПРОКСИМАНТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПОВЗУЧОСТІ
ДЕРЕВИНИ**

Таблиця А.1

Дробовий параметр α для сосни в залежності від температури та вологовмісту

| Температура (°C) | Вологовміст (%) | | | |
|---------------------|-----------------|--------|--------|--------|
| | 12 | 14 | 22 | 35 |
| 20 | 0,8212 | 0,8227 | 0,8239 | 0,8356 |
| 40 | 0,8311 | 0,8354 | 0,8385 | 0,8402 |
| 60 | 0,8463 | 0,8488 | 0,8510 | 0,8552 |
| 80 | 0,8596 | 0,8622 | 0,8657 | 0,8693 |
| 100 | 0,8624 | 0,8653 | 0,8689 | 0,8707 |
| 120 | 0,8734 | 0,8778 | 0,8794 | 0,8821 |

Таблиця А.2

Дробовий параметр α для берези в залежності від температури та вологовмісту

| Температура (°C) | Вологовміст (%) | | | |
|---------------------|-----------------|--------|--------|--------|
| | 12 | 14 | 22 | 35 |
| 20 | 0,8498 | 0,8514 | 0,8530 | 0,8557 |
| 40 | 0,8624 | 0,8654 | 0,8685 | 0,8702 |
| 60 | 0,8763 | 0,8788 | 0,8810 | 0,8852 |
| 80 | 0,8835 | 0,8862 | 0,8883 | 0,8913 |
| 100 | 0,8905 | 0,8925 | 0,8956 | 0,8978 |
| 120 | 0,8956 | 0,8974 | 0,8992 | 0,9012 |

Таблиця А.3

Дробовий параметр α для бука в залежності від температури та вологовмісту

| Температура (°C) | Вологовміст (%) | | | |
|---------------------|-----------------|--------|--------|--------|
| | 12 | 14 | 22 | 35 |
| 20 | 0,8956 | 0,8968 | 0,8977 | 0,8983 |
| 40 | 0,9071 | 0,9078 | 0,9086 | 0,9091 |
| 60 | 0,9196 | 0,9202 | 0,9218 | 0,9235 |
| 80 | 0,9304 | 0,9312 | 0,9322 | 0,9329 |
| 100 | 0,9378 | 0,9381 | 0,9392 | 0,9410 |
| 120 | 0,9412 | 0,9423 | 0,9436 | 0,9451 |

Таблиця А.4

Дробовий параметр α для дуба в залежності від температури та вологовмісту

| Температура (°C) | Вологовміст (%) | | | |
|---------------------|-----------------|--------|--------|--------|
| | 12 | 14 | 22 | 35 |
| 20 | 0,9105 | 0,9124 | 0,9146 | 0,9169 |
| 40 | 0,9244 | 0,9263 | 0,9291 | 0,9325 |
| 60 | 0,9367 | 0,9382 | 0,9405 | 0,9431 |
| 80 | 0,9446 | 0,9461 | 0,9473 | 0,9490 |
| 100 | 0,9501 | 0,9515 | 0,9534 | 0,9551 |
| 120 | 0,9568 | 0,9574 | 0,9583 | 0,9598 |

**ДОДАТОК Б РОЗПОДІЛ МОДЕЛЬОВАНИХ КОМПОНЕНТІВ
НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЗГУЩЕННІ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОЇ СІТКИ**

Таблиця Б.1

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 160000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Точка $B(l_1 / 2; l_2 / 2)$ | | | | | |
|-------------|-----------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фракт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фракт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фракт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | -1,33186 | -1,19825 | -0,177 | -0,17428 | -0,38532 | -0,36682 |
| $\tau = 12$ | -2,00847 | -1,99622 | -0,37897 | -0,36107 | -0,77685 | -0,75373 |
| $\tau = 18$ | -2,11149 | -2,10983 | -0,31201 | -0,3474 | -0,78192 | -0,77225 |
| $\tau = 24$ | -1,70776 | -1,75961 | -0,21203 | -0,26682 | -0,61493 | -0,62176 |
| $\tau = 30$ | -1,30184 | -1,42413 | -0,13118 | -0,1967 | -0,493 | -0,50001 |
| $\tau = 36$ | -1,11186 | -1,23273 | -0,1002 | -0,13422 | -0,39862 | -0,43404 |
| $\tau = 42$ | -0,80708 | -0,88098 | -0,09721 | -0,14098 | -0,32114 | -0,34436 |
| $\tau = 48$ | -0,51111 | -0,56493 | -0,07297 | -0,07158 | -0,19391 | -0,22665 |

Таблиця Б.2

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 160000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Точка $A(0;0)$ | | | | | |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 0,010678 | 0,022541 | 0,00649 | 0,014062 | 0,108833 | 0,11647 |
| $\tau = 12$ | 0,039108 | 0,039984 | 0,013813 | 0,019141 | 0,177267 | 0,182054 |
| $\tau = 18$ | 0,032669 | 0,027188 | 0,014824 | 0,014113 | 0,1646 | 0,164094 |
| $\tau = 24$ | 0,021258 | 0,019418 | 0,012136 | 0,005824 | 0,133908 | 0,130516 |
| $\tau = 30$ | 0,005466 | 0,002306 | 0,004559 | 0,001234 | 0,115322 | 0,107999 |
| $\tau = 36$ | 0,008795 | -0,00383 | 0,003131 | -0,00086 | 0,099756 | 0,093274 |
| $\tau = 42$ | 0,005226 | -0,00209 | 0,003472 | -0,00177 | 0,081501 | 0,077587 |
| $\tau = 48$ | -0,0006 | -3,93E-03 | -0,00038 | 0,001543 | 0,065448 | 0,06287 |

Таблиця Б.3

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 280000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Точка $B(l_1 / 2; l_2 / 2)$ | | | | | |
|-------------|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | -1,24984 | -1,1864 | -0,17976 | -0,14425 | -0,38273 | -0,34799 |
| $\tau = 12$ | -2,00629 | -1,96725 | -0,33803 | -0,32273 | -0,76947 | -0,75105 |
| $\tau = 18$ | -2,04079 | -2,04833 | -0,31407 | -0,31148 | -0,7668 | -0,76907 |
| $\tau = 24$ | -1,6609 | -1,68554 | -0,20457 | -0,21153 | -0,59816 | -0,60585 |
| $\tau = 30$ | -1,29305 | -1,34458 | -0,12879 | -0,15035 | -0,46398 | -0,48357 |
| $\tau = 36$ | -1,06704 | -1,14846 | -0,0945 | -0,12755 | -0,38484 | -0,42078 |
| $\tau = 42$ | -0,77379 | -0,85179 | -0,06626 | -0,10444 | -0,30034 | -0,33918 |
| $\tau = 48$ | -0,43494 | -0,48663 | -0,02886 | -0,0563 | -0,17965 | -0,20695 |

Таблиця Б.4

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 280000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Точка $A(0;0)$ | | | | | |
|-------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фракт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фракт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фракт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 0,019982 | 0,027513 | 0,010014 | 0,01735 | 0,110376 | 0,117409 |
| $\tau = 12$ | 0,040227 | 0,042788 | 0,017972 | 0,020697 | 0,179403 | 0,182041 |
| $\tau = 18$ | 0,038102 | 0,037013 | 0,01674 | 0,015919 | 0,166649 | 0,165502 |
| $\tau = 24$ | 0,024769 | 0,021418 | 0,01257 | 0,008673 | 0,136377 | 0,132606 |
| $\tau = 30$ | 0,015245 | 0,008286 | 0,009093 | 0,00119 | 0,117991 | 0,110537 |
| $\tau = 36$ | 0,011914 | 0,004322 | 0,007021 | -0,00021 | 0,101216 | 0,093755 |
| $\tau = 42$ | 0,006966 | 0,002845 | 0,004879 | 0,001101 | 0,082887 | 0,078957 |
| $\tau = 48$ | 0,001051 | -4,29E-04 | 0,002677 | 0,001857 | 0,065591 | 0,064547 |

Таблиця Б.5

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 320000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (год.) | Точка $B(l_1 / 2; l_2 / 2)$ | | | | | |
|-------------|-----------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фракт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фракт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фракт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | -1,2460 | -1,1805 | -0,1764 | -0,1421 | -0,3812 | -0,3469 |
| $\tau = 12$ | -2,0051 | -1,9636 | -0,3373 | -0,3203 | -0,7675 | -0,7504 |
| $\tau = 18$ | -2,0355 | -2,0442 | -0,3082 | -0,3094 | -0,7664 | -0,7676 |
| $\tau = 24$ | -1,6544 | -1,6803 | -0,2039 | -0,2100 | -0,5970 | -0,6032 |
| $\tau = 30$ | -1,2880 | -1,3412 | -0,1280 | -0,1468 | -0,4621 | -0,4808 |
| $\tau = 36$ | -1,0661 | -1,1423 | -0,0924 | -0,1273 | -0,3845 | -0,4194 |
| $\tau = 42$ | -0,7711 | -0,8474 | -0,0624 | -0,1015 | -0,2986 | -0,3378 |
| $\tau = 48$ | -0,4324 | -0,4857 | -0,0280 | -0,0546 | -0,1794 | -0,2060 |

Таблиця Б.6

Значення компонент напружень у різних геометричних точках взірця, обчислених при наступній кількості точок розбиття $n = 320000$; $m = 40$; $k = 40$

| Час (ГОД.) | Точка A(0;0) | | | | | |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $\sigma_{11}^{трад}$ | $\sigma_{11}^{фркт}$ | $\sigma_{22}^{трад}$ | $\sigma_{22}^{фркт}$ | $\sigma_{12}^{трад}$ | $\sigma_{12}^{фркт}$ |
| $\tau = 0$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $\tau = 6$ | 0,0205 | 0,0277 | 0,0105 | 0,0176 | 0,1104 | 0,1176 |
| $\tau = 12$ | 0,0406 | 0,0433 | 0,0181 | 0,0208 | 0,1796 | 0,1823 |
| $\tau = 18$ | 0,0381 | 0,0371 | 0,0173 | 0,0162 | 0,1667 | 0,1656 |
| $\tau = 24$ | 0,0254 | 0,0215 | 0,0128 | 0,0089 | 0,1366 | 0,1327 |
| $\tau = 30$ | 0,0160 | 0,0086 | 0,0092 | 0,0018 | 0,1181 | 0,1107 |
| $\tau = 36$ | 0,0120 | 0,0046 | 0,0072 | -0,0002 | 0,1013 | 0,0939 |
| $\tau = 42$ | 0,0070 | 0,0031 | 0,0052 | 0,0013 | 0,0830 | 0,0791 |
| $\tau = 48$ | 0,0012 | 0,0001 | 0,0030 | 0,0019 | 0,0656 | 0,0646 |

**ДОДАТОК В ЗМІНА ВОЛОГОВМІСТУ ТА КОМПОНЕНТ НАПРУЖЕНЬ
ПРИ ДВОСТУПЕНЕВОМУ РЕЖИМІ СУШІННЯ ДЕРЕВИНИ З
УРАХУВАННЯМ ЇЇ ФРАКТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ**

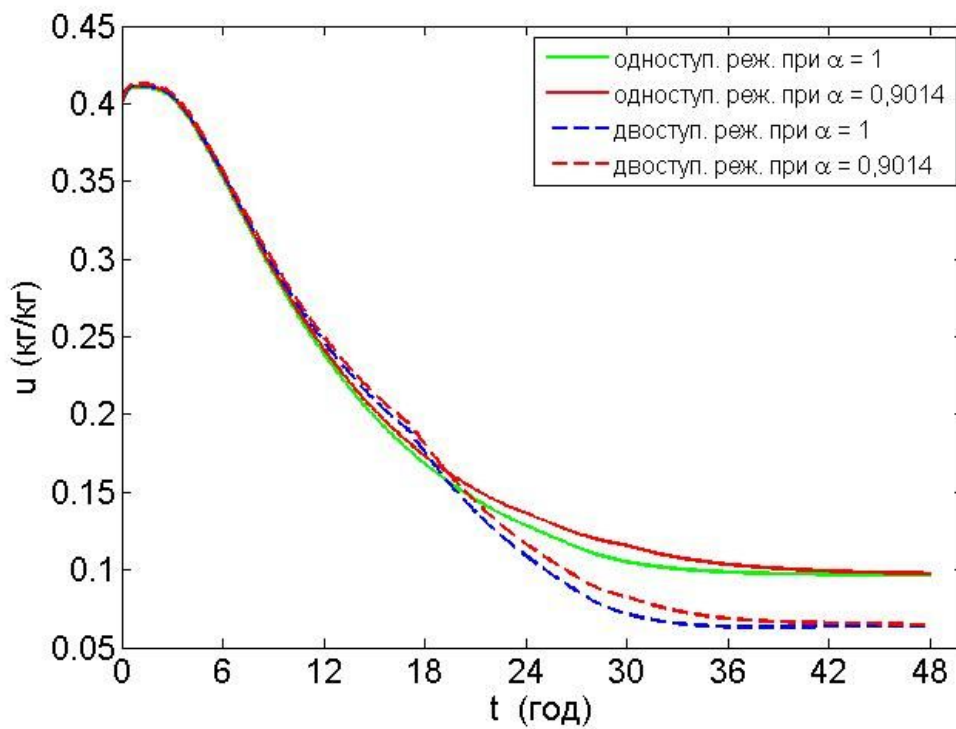


Рис. В.1. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння букового бруска.

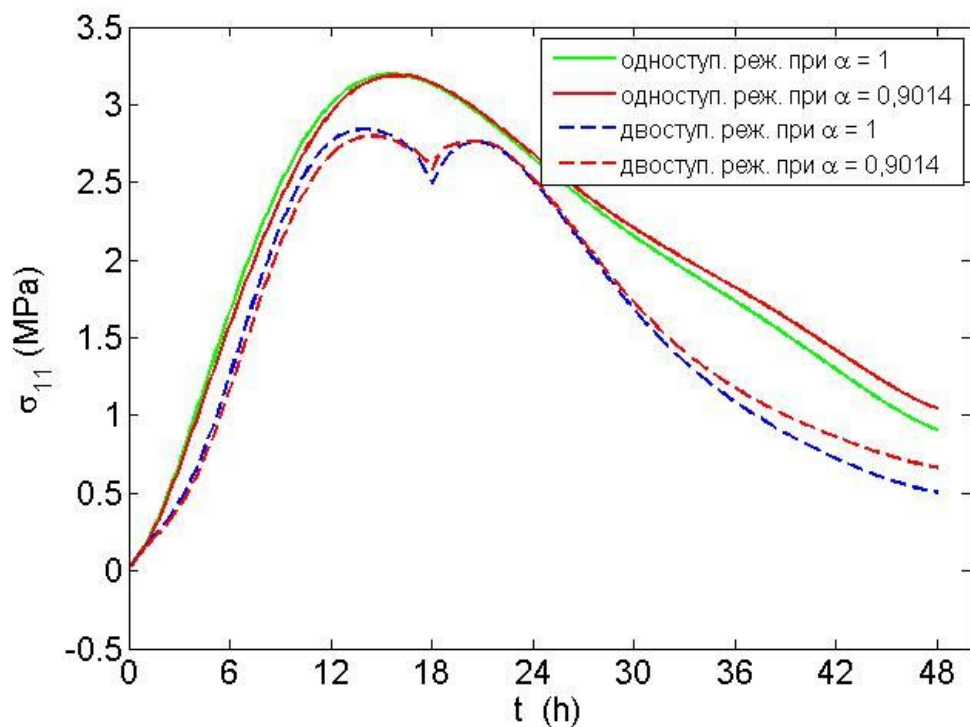


Рис. В.2. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння букового бруска.

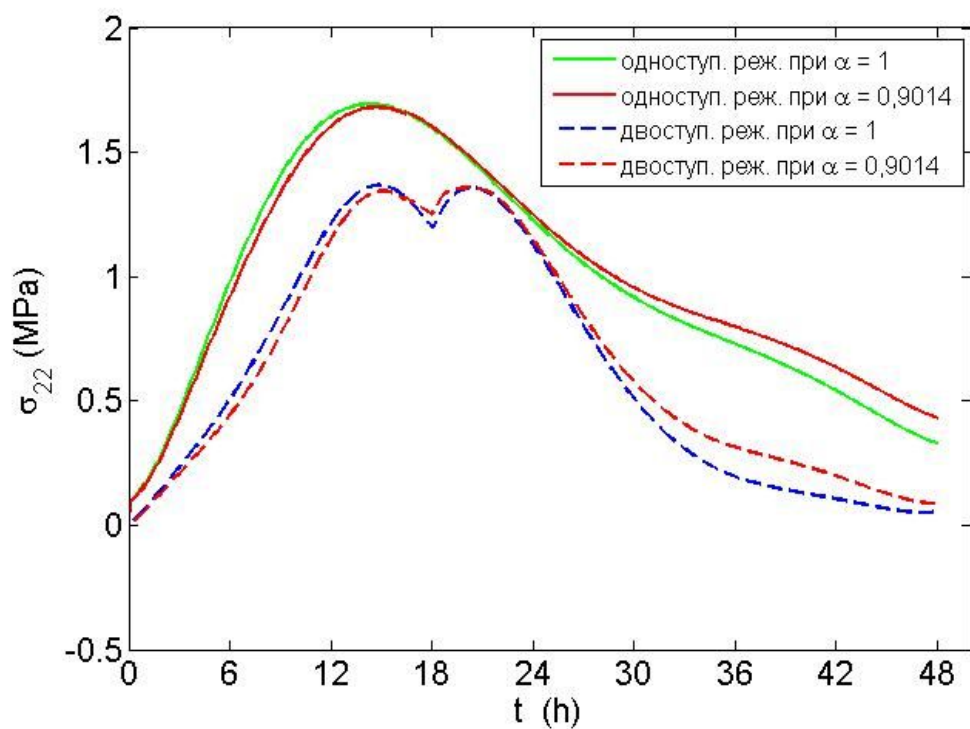


Рис. В.3. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння букового бруска.

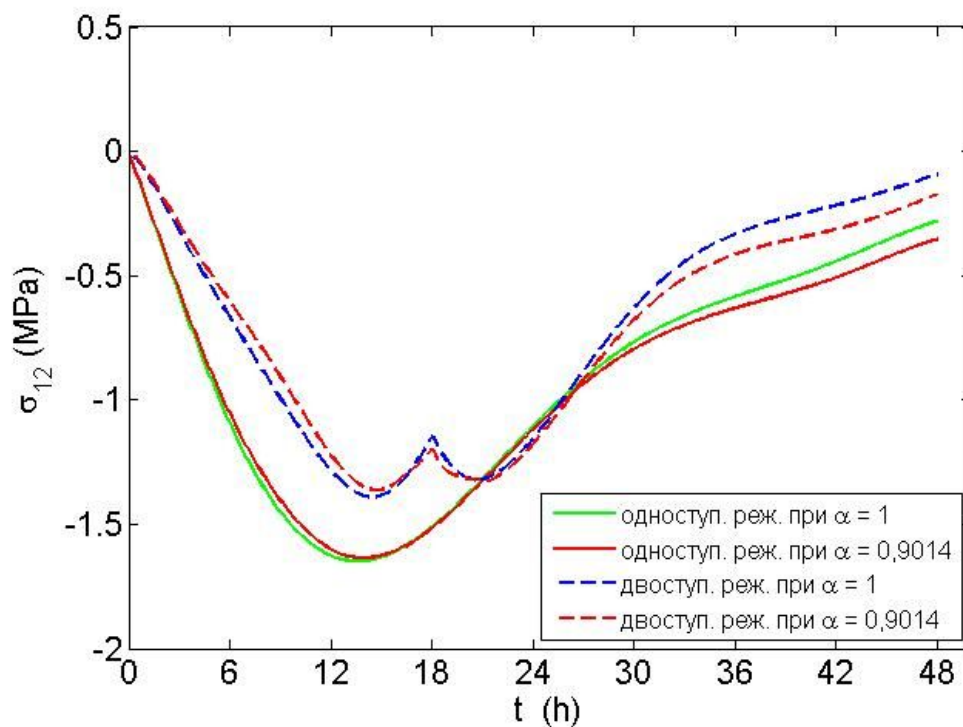


Рис. В.4. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння букового бруска.

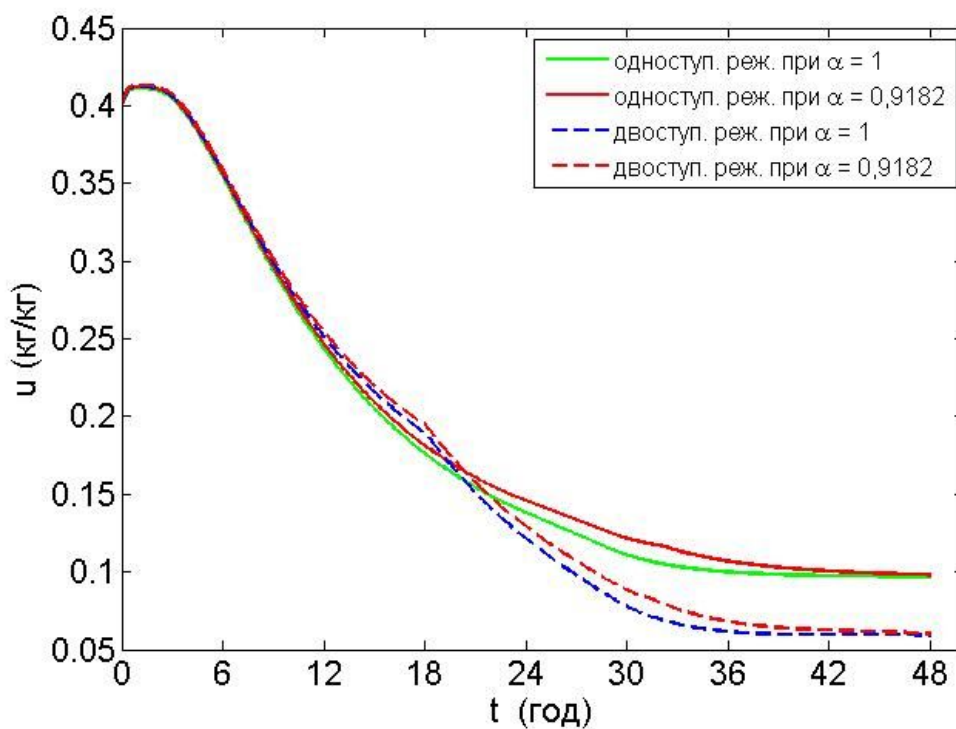


Рис. В.5. Зміна вологовмісту у точці $A(0;0)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння дубового бруска.

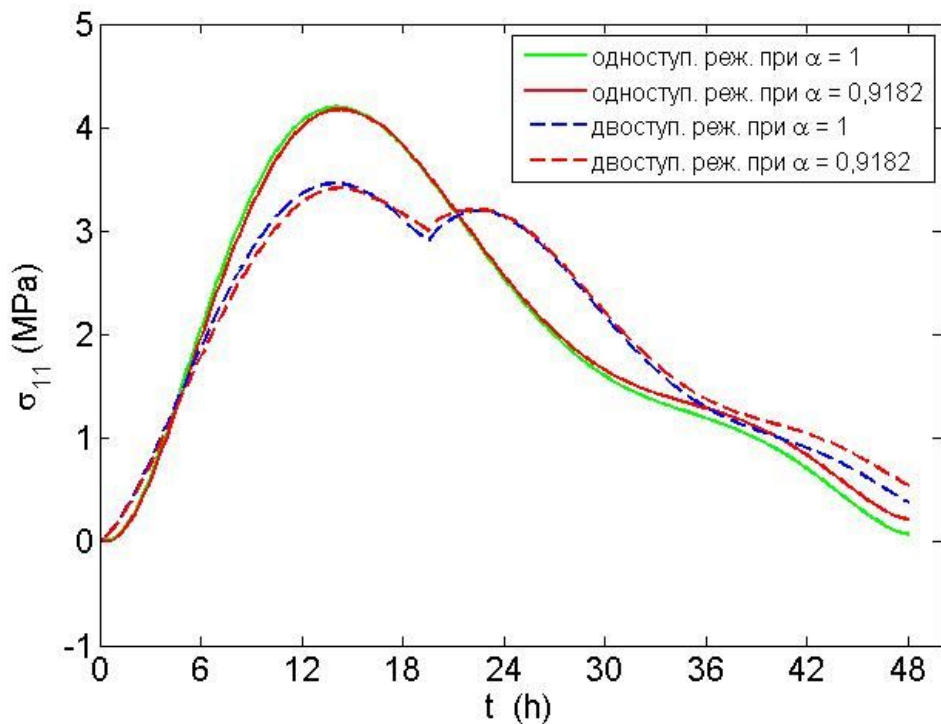


Рис. В.6. Зміна компоненти напружень σ_{11} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння дубового бруска.

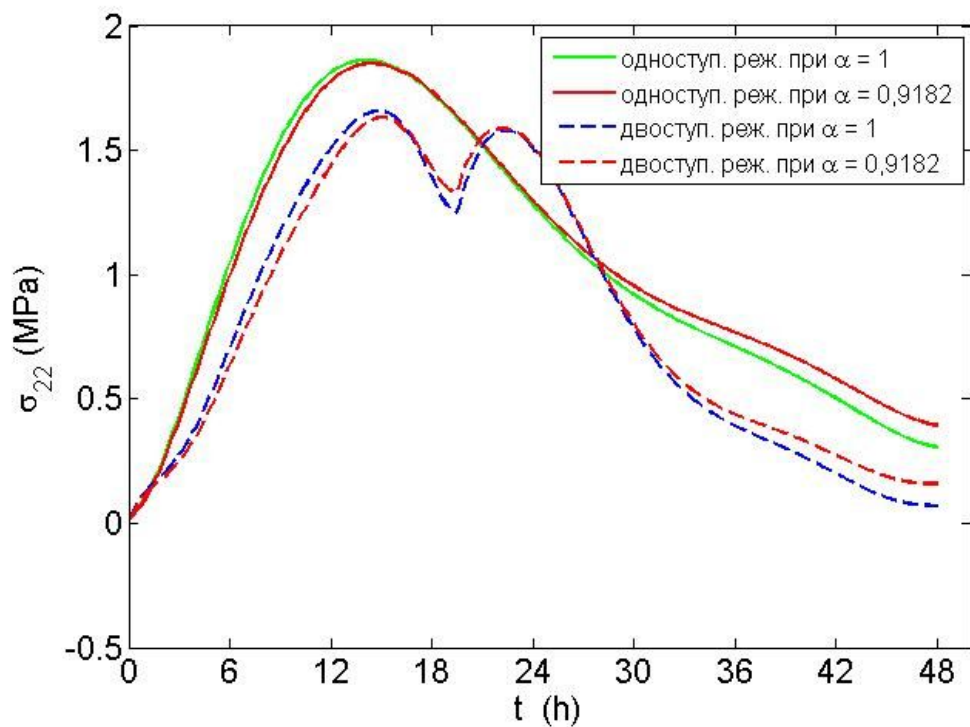


Рис. В.7. Зміна компоненти напружень σ_{22} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння дубового бруска.

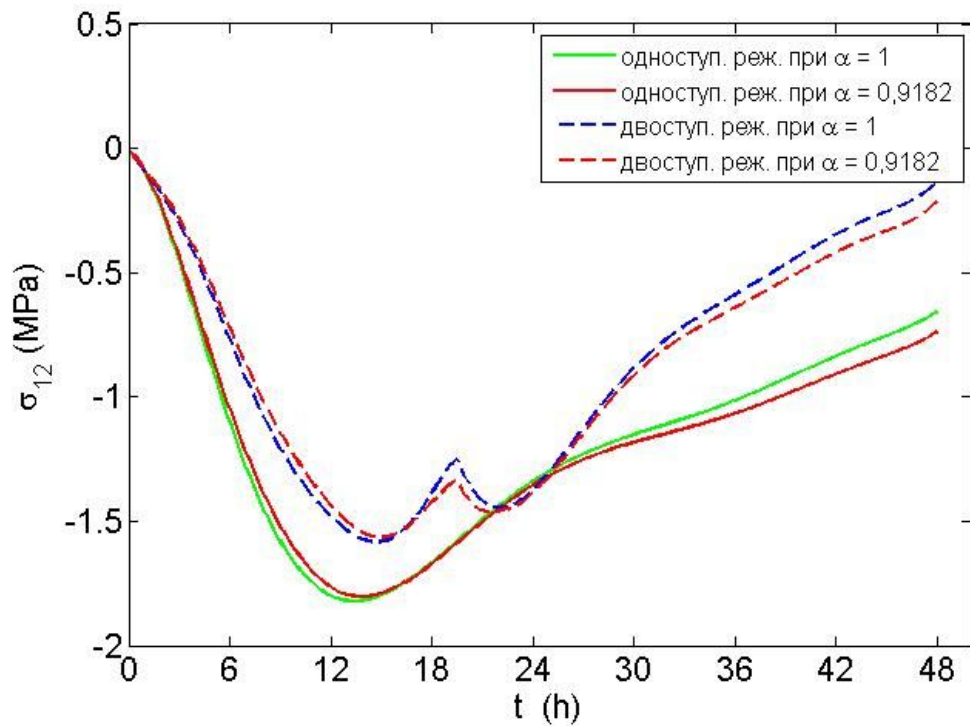


Рис. В.8. Зміна компоненти напружень σ_{12} у точці $C(l_1; l_2)$ для одно- та двоступеневого режимів сушіння дубового бруска.

ДОДАТОК Г ПАТЕНТ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ



(11) **61580**(19) **UA**(51) МПК
F26B 3/02 (2006.01)

(21) Номер заявки: **u 2010 15321**
(22) Дата подання заявки: **20.12.2010**
(24) Дата, з якої є чинними права на корисну модель: **25.07.2011**
(46) Дата публікації відомостей про видачу патенту та номер бюлетеня: **25.07.2011, Бюл. № 14**

(72) Винахідники:
Поберейко Богдан Петрович, UA,
Шиманський Володимир Михайлович, UA,
Соколовський Ярослав Іванович, UA

(73) Власник:
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЛІСОТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ,
вул. Ген. Чупринки, 103, м. Львів, 79057, Україна, UA

(54) Назва корисної моделі:

СПОСІБ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ ПОВНИХ НАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНІ ВИСУШЕНОГО ПИЛОМАТЕРІАЛУ

(57) Формула корисної моделі:

Спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу, який характеризується тим, що визначення напруженого стану здійснюється прямим методом, шляхом вимірювань напружень на поверхні еталона, який виготовляється з цього ж матеріалу, при підведенні зовнішніх механічних напружень до нього.



УКРАЇНА

 (19) UA (11) 61580 (13) U
 (51) МПК
 F26B 3/02 (2006.01)

 МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
 І НАУКИ УКРАЇНИ

 ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ
 ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ
 ВЛАСНОСТІ

**ОПИС
 ДО ПАТЕНТУ
 НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ**

 видається під
 відповідальність
 власника
 патенту

(54) СПОСІБ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ ПОВНИХ НАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНІ ВИСУШЕНОГО ПИЛОМАТЕРІАЛУ

1

(21) u201015321
 (22) 20.12.2010
 (24) 25.07.2011
 (46) 25.07.2011, Бюл.№ 14, 2011 р.
 (72) ПОБЕРЕЙКО БОГДАН ПЕТРОВИЧ, ШИМАНСЬКИЙ ВОЛОДИМИР МИХАЙЛОВИЧ, СОКОЛОВСЬКИЙ ЯРОСЛАВ ІВАНОВИЧ
 (73) НАЦІОНАЛЬНИЙ ЛІСОТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

2

(57) Спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу, який характеризується тим, що визначення напруженого стану здійснюється прямим методом, шляхом вимірювань напружень на поверхні еталона, який виготовляється з цього ж матеріалу, при підведенні зовнішніх механічних напружень до нього.

Корисна модель належить до деревообробної галузі і може бути використана для прямого вимірювання напружень на поверхні висушених пиломатеріалів та визначення показників якості даних пиломатеріалів.

Відомий спосіб неруйнівного вимірювання напружено-деформітного стану капілярно-пористих колоїдних матеріалів, який заснований на випромінюванні ультразвукових хвиль в дослідний матеріал та прийманні трьома парами п'єзоперетворювачів, що попарно розташовані на трьох координатних площинах поверхні матеріалу відповідним чином, а визначення напружено-деформітного стану матеріалу проводять за різницею часу проходження ультразвукових коливань між парами п'єзоперетворювачів, де віддаль між випромінюючим та приймальним перетворювачем кожної пари вибрана однаковою [1].

Недоліком цього способу є непряме вимірювання компонентів напружень.

Суть запропонованого винаходу - спосіб прямих вимірювань компонентів напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу.

Поставлена мета досягається тим, що величина напружень визначається величиною підведеного зовнішнього навантаження до еталона, яке компенсує різницю деформацій у висушеному пиломатеріалі та еталоні. За еталон приймається заготовка, виготовлена з досліджуваного пиломатеріалу, товщина якого не перевищує 3-5 мм.

Спосіб полягає у наступному (фиг. 1, 2, 3):

1) закріпленні тензодавача 4 поблизу торця пластів висушеного тангентального пиломатеріалу

1 для вимірювання тангентальної складової тензора деформацій;

2) вирізанні бруска 2 перпендикулярно до волокон пиломатеріалу із закріпленням тензодавачем 4;

3) сколюванні вирізаного бруска (площина сколювання паралельна поверхні кріплення тензодавача і віддалена від неї на відстань 3-5 мм.);

4) випробуванні на розтяг у тангентальному напрямку анізотропії деревини виготовленого із бруска 2 зразка 3 для компенсації різниці деформацій пиломатеріалу та зазначеного зразка;

5) визначення тангентальної компоненти тензора напружень на поверхні висушеної дошки як відношення значень підведеного до зразка механічного зусилля 5 та площі перерізу його прикладення. Розподіл вологи у еталоні 3 є рівномірним, а значення U_1 , його величини дорівнює відносній вологості U_2 поверхні вимірювального матеріалу 1. Рівноважність розподілу вологи у еталоні 3 досягається та обґрунтовується його незначною товщиною [2], вона не перевищує 3-5 мм.

У матеріалі 1 загальні деформації на його поверхні дорівнюють сумі двох складових ϵ_1 та ϵ_2 . Складові ϵ_1 зумовлена перепадом вологи за товщиною матеріалу, а складові ϵ_2 визначається вологовмістом поверхні матеріалу. У еталоні 3 загальні деформації дорівнюють значенню величини ϵ_2 , що обґрунтовується рівністю вологовмістів U_1 та U_2 . Звідси, різниця деформацій на по-

(19) UA (11) 61580 (13) U

3

61580

4

верхні матеріалу 1 та еталон 3 дорівнює значенню величини ε_1 . Для її компенсації та подальшого визначення напружень на поверхні вимірювального матеріалу достатньо до еталона 3 підвести механічне зусилля F , абсолютне значення якого дорівнює величині напружень на поверхні вимірювального матеріалу 1. Значення величини F задається та підтримується системою навантаження 5.

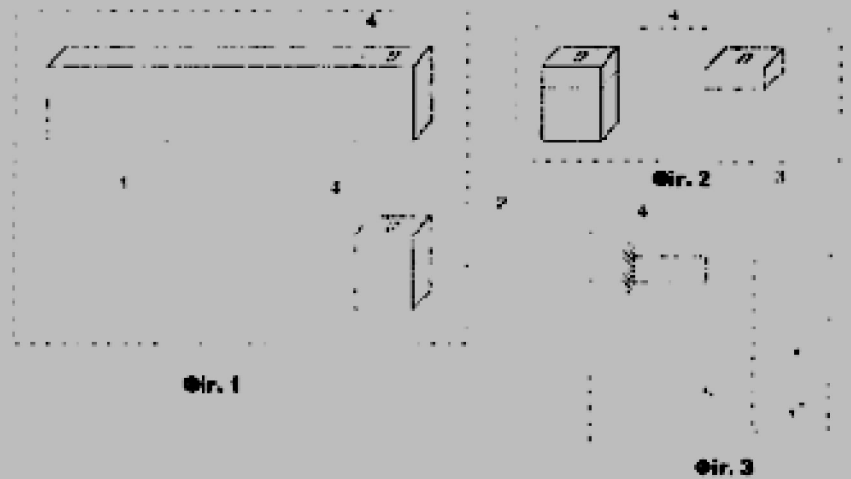
Запропонований спосіб забезпечує пряме вимірювання поверх напружень на поверхні висушеного пиломатеріалу за величиною підведеного

механічного зусилля до еталона, виготовленого з вимірюваного пиломатеріалу. Він дозволяє вимірювати напружено-деформований стан висушеного пиломатеріалу та відповідно визначати показники якості даного пиломатеріалу.

Джерела інформації:

1. Патент на винахід №22071 А, МПК, G01H5/00, опубл. 30.04.98, бюл. №2.

2. Угольєв Б.Н. Деформативність деревини и напружений при сушкє. - М.: Лєсн. пром-сть, 1971. - 172с.



Комп'ютерна версія М. Ломалова

Підпис:

Тираж 20 прим.

Міністерство освіти і науки України

Державний департамент інтелектуальної власності, вул. Урицького, 45, м. Київ, МСП, 03680, Україна

ДП "Український інститут промислової власності", вул. Глазунова, 1, м. Київ – 42, 01601

ДОДАТОК Д АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор НЛТУ України

академік НАН України


 І.О. Зуніця
 "24" 03 2015 р.


Акт

впровадження у навчальний процес результатів
дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук Шиманського В.М.

Ми, хто підписалися нижче, представники Національного лісотехнічного університету України, директор інституту деревооброблювальних технологій та дизайну, доктор техн. наук, проф. В.М. Максимів; завідувач кафедри інформаційних технологій, доктор техн. наук, проф. Я.І. Соколовський; доц. кафедри інформаційних технологій, канд. фіз.-мат. наук О.І. Думанський; доц. кафедри інформаційних технологій, канд. тех. наук М.В. Дендюк склали цей акт про те, що у навчальному процесі кафедри інформаційних технологій для викладання дисциплін: "Математичне моделювання в інформаційних технологіях проектування", "Обчислювальні методи механіки суцільного середовища", "Моделювання систем", "Штучні нейронні мережі" використовуються результати дисертаційної роботи старшого викладача кафедри інформаційних технологій В.М. Шиманського.

Результати дисертаційної роботи використано під час дипломного проектування при написанні бакалаврських робіт напряму підготовки "Комп'ютерні науки", і магістерських робіт за спеціальністю "Інформаційні технології проектування".

Використання результатів дисертаційної роботи сприяє вдосконаленню та підвищенню рівня фахової підготовки студентів університету.

Акт складено у трьох примірниках:

1-й примірник – кафедрі ІТ; 2-й примірник – навчально-методичному відділу НЛТУ України; 3-й примірник – В.М. Шиманському.

Голова комісії


 В.М. Максимів

Члени комісії:


 Я.І. Соколовський


 О.І. Думанський


 М.В. Дендюк

Проректор з наукової роботи
Національного лісотехнічного
університету України
Професор, д.бюл.н.



Г.Т.Криницький

04 2015 р.

9057, м. Львів, вул. Ген. Чупринки 103

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор виробничо-комерційної
фірми "Ледас-Україна"



В.В. Карпенко

(прізвище)

17 квітня 2015 р.

адреса: м. Хуст, Закарпатська обл.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Шиманського Володимира Михайловича

Ми, що підписалися нижче, директор ВКФ "Ледас-Україна" В.В. Карпенко, головний технолог І.М. Сливканич., начальник сушильного господарства В.І. Куриця, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України, д.т.н., професор Я.І. Соколовський склали цей акт про прийняття від старшого викладача кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України Шиманського В.М., таких практичних результатів дисертаційної роботи:

- програмно-алгоритмічний комплекс скінчено-різницевого розрахунку деформаційно-релаксаційних і тепло-масообмінних процесів під час сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу;
- спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушених пиломатеріалів.

Комісія ознайомилася із роботою програмного забезпечення, що розроблене Шиманським В.М., яке дає можливість обчислити розподіл температурних та вологісних полів і напружено-деформівного стану у процесі сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу.

Розроблене програмне забезпечення дозволяє вирішувати наступні задачі для ведення технологічного процесу сушіння деревини:

- за заданими початковими значеннями температури і вологості пиломатеріалів, агента процесу сушіння та обчислених коефіцієнтів ядер повзучості та релаксації, обчислити величини температурних та вологісних полів і напружено-деформівного стану деревини у процесі конвективного сушіння;

- визначити параметри агента сушіння для режимів процесу конвективного сушіння деревини із врахуванням обмежень на виникнення критичних напружень, з метою запобігання руйнування пиломатеріалу або зниження його якості у процесі сушіння.

Комісія ознайомилась із запропонованим способом прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушених пиломатеріалів.

Суть запропонованого способу полягає у визначенні напруженого стану капілярно-пористих матеріалів у процесі сушіння. Напруження, що виникають у матеріалі характеризуються величиною підведеного зовнішнього навантаження до еталону, яке компенсує різницю деформацій у висушеному пиломатеріалі та еталоні. Величини напружено-деформівного стану визначаються на основі розробленого програмного забезпечення для скінчено-різницевого розрахунку в'язко-пружного деформування деревини у процесі сушіння з урахуванням її фрактальної структури. Таким чином, значення напружень виміряних запропонованим способом, можуть бути використані для валідації та верифікації математичних моделей.

Використання програмного забезпечення для обчислення напружено-деформівного стану у процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів з фрактальною структурою, дозволяє оцінити критичні значення напружень, що виникають під час даного технологічного процесу, та визначити такі параметри сушильної камери, при яких якість висушеного пиломатеріалу не знижувалась.

Розглянувши результати роботи програмного забезпечення, практичні рекомендації щодо застосування способу прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушених пиломатеріалів, комісія встановила:

1. Розроблене програмне забезпечення у вигляді пакету прикладних програм із графічним інтерфейсом для введення вхідних параметрів технологічного процесу дозволяє обчислити з прийнятною точністю значення температурних та вологісних полів і величини компонентів напружень у деревині під час сушіння та отримати візуалізацію результатів досліджень.
2. Запропонований спосіб вимірювань повних напружень на поверхні висушених пиломатеріалів спосіб забезпечує вимірювання напружень у процесі сушіння гігроскопічних матеріалів. Він дає змогу визначити розвиток напруженого стану у висушуваних пиломатеріалах, підібрати раціональні параметри сушильної камери, що дозволяє підвищити показники якості висушеної деревини на 5–7% за рахунок виявлення критичних значень напружень матеріалу.

Висновок. Вважаємо, що передані для впровадження програмне забезпечення для скінчено-різницевого розрахунку деформаційно-релаксаційних і тепло-масообмінних процесів під час сушіння деревини з урахуванням фрактальної структури матеріалу та спосіб прямих вимірювань повних напружень на поверхні висушених пиломатеріалів дасть змогу підвищити ефективність процесу сушіння деревини за рахунок прогнозування критичних значень напружень у матеріалі.

Акт складений для пред'явлення до спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій і не є підставою для фінансових розрахунків.

Складений у трьох примірниках:

1-й примірник – ВКФ “Ледас-Україна”

2-й примірник – кафедрі інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України

3-й примірник – ст. викл. Шиманському В.М.

Директор ВКФ
“Ледас-Україна”





В.В. Карпенко

Головний технолог
ВКФ “Ледас-Україна”


І.М. Сливканич

Начальник сушильного господарства
ВКФ “Ледас-Україна”


В.І. Куриця

Завідувач кафедри ІТ
НЛТУ України, д.т.н., професор


Я.І. Соколовський

Старший викладач кафедри ІТ
НЛТУ України


В.М. Шиманський