

Міністерство освіти і науки України
Національний університет "Львівська політехніка"

На правах рукопису

Джуман Богдан Богданович

УДК 528.221+528.223

**Апроксимація регіонального гравітаційного поля
неортогональними функціями**

05.24.01 Геодезія, фотограмметрія та картографія

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник—
доктор фізико-математичних наук,
професор **Марченко О.М.**

***Ідентичність усіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:***

*Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради* **/Б. Паляниця/**

Львів - 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	4
ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	
ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ	10
1.1 Потенціал і прискорення вільного падіння	10
1.2 Аномалії висоти	16
1.3 Гравітаційні аномалії в вільному повітрі	18
1.4 Висновки до розділу 1	19
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ	
ГЕОПОТЕНЦІАЛУ	21
2.1 Кульові функції	21
2.2 Методи визначення гармонічних коефіцієнтів	27
2.3 Еліпсоїдальні функції	34
2.4 Максвелова теорія полюсів	38
2.5 Радіальні мультиполя	43
2.6 Середня квадратична колокація	49
2.7 Висновки до розділу 2	57
РОЗДІЛ 3. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ НА СЕГМЕНТІ СФЕРИ	
ГРАВІТАЦІЙНИХ АНОМАЛІЙ У ВІЛЬНОМУ ПОВІТРІ	59
3.1 Проблема Штурма-Ліувілля на сегменті сфери	60
3.2 Вибір зручних виразів для обчислення „нормованих” функцій Лежандра з дробовими індексами	65
3.3 Перехід від регіональних до глобальних коефіцієнтів	69
3.4 Метод ASHA визначення гармонічних коефіцієнтів	71
3.5 Метод TOSCA визначення гармонічних коефіцієнтів	74
3.6 Побудова локальних гармонічних коефіцієнтів	78

3.7 Модифікація методу ASHA для побудови регіонального гравітаційного поля	85
3.8 Висновки до розділу 3	87
РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА ПОВЕРХНІ РЕГІОНАЛЬНОГО (КВАЗІ)ГЕОЇДА НА ТЕРИТОРІЮ АРКТИКИ	
(КВАЗІ)ГЕОЇДА НА ТЕРИТОРІЮ АРКТИКИ	89
4.1 Арктичний гравітаційний проект	89
4.2 Методика побудови регіонального (квазі)геоїда	91
4.3 Формування вхідних даних	93
4.4 Побудова регіонального гравітаційного поля на територію Арктики	96
4.5 Висновки до розділу 4	101
ВИСНОВКИ	103
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	105

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

УКГ2012 – Український квазігеоїд 2012

AGP – Arctic Gravity Project (Арктичний Гравітаційний Проект)

ASHA – Adjusted spherical harmonic analysis (Скоригований сферичний гармонічний аналіз)

EGM 2008 – Earth Global Model 2008 (Глобальна Модель Землі 2008)

ERS – European Remote - Sensing Satellite (Європейський супутник дистанційного зондування)

GOCE – Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer –

Провідник гравітаційного поля і стаціонарної циркуляції океанічних вод

GRACE – Gravity Recovery And Climate Experiment (супутникова місія)

GPS – Global Positioning System (Глобальна позиційна система)

ICGEM – International Centre for Global Earth Models – Міжнародний центр глобальних моделей Землі

JASON – Journées Altimétriques Satellitaires pour l'Océanographie

(Супутниковий альтиметр для океанографії)

EIGEN – European Improved Gravity model of the Earth by New

techniques (Європейська Покращена Гравітаційна модель Землі з використанням Нових методів)

ENVISAT – Environmental Satellite (Екологічний супутник)

LAGEOS – LAsEr GEODynamics Satellite – Супутник лазерної геодинаміки

NGA – The National Imagery and Mapping Agency (Національне агентство геопросторової розвідки)

SCHA – Spherical cap harmonic analysis (Гармонійний аналіз на сферичній „шапці”)

TOSCA – Translated origin spherical cap harmonic analysis (Гармонійний аналіз на сферичній „шапці” зі зміщеним початком координат)

ВСТУП

Актуальність теми досліджень. Починаючи з фундаментальних досліджень Лежандра і Гаусса в області теорії Ньютонівського потенціалу, класичним представленням гравітаційного поля або відповідного гравітаційного потенціала небесних тіл став його запис у вигляді нескінчених рядів кульових функцій Лежандра, яке прийняло міждисциплінарне значення при вивченні статичних і залежних від часу полів Землі і планет. Слід зауважити, що така параметризація гравітаційного потенціалу не тільки вважається стандартною, але й однією з найкращих для розв'язування сучасних наукових і прикладних задач небесної механіки, супутникової геодезії, глобальної геодинаміки тощо.

Основною задачею геодезії є визначення фігури, гравітаційного поля Землі та їх зміни в часі. Знання форми та розмірів Землі необхідні в багатьох галузях, перш за все для визначення положення об'єктів на земній поверхні і правильного їх відображення у вигляді карт, планів і цифрових моделей місцевості. Фігуру Землі в залежності від поставлених задач можна розглядати як сферу, еліпсоїд обертання, геоїд чи квазігеоїд.

На сьогоднішній день побудовано багато глобальних і регіональних моделей гравітаційного поля різного рівня точності. Наприклад, однією з перших моделей надвисокого рівня точності була модель EGM2008, побудована до 2190 степеня і 2159 порядку. Під час її побудови використовувалися гравіметричні та альтиметричні дані, а також дані з супутника GRACE. Також слід відмітити модель EIGEN-6C4, побудовану в 2014 році до 2190 степеня/порядку. Як вихідні дані для побудови цієї моделі використовувалися гравіметричні та альтиметричні дані, а також дані з супутників GOCE, GRACE і LAGEOS. Слід відмітити, що існує ряд моделей, побудованих виключно за супутниковими даними, проте до значно нижчих порядків. Наприклад, модель GGM05G побудована за даними з супутників GOCE і GRACE в 2015 році до 240 степеня/порядку. Що стосується регіональних гравітаційних моделей, наприклад, в 2012 році була побудована

модель УКГ2012 на територію України з використанням методу середньої квадратичної колокації. Як вихідні дані використовувалися дані з шести альтиметричних місій ERS-1, ERS-2, TOPEX-POSEIDON, GFO, ENVISAT і JASON-1, а також дані GPS-нівелювання на 4070 пунктах та відомості про топографію. Проте з появою все нових і точніших даних виникає необхідність уточнення вже існуючих і побудови нових моделей гравітаційного поля.

У зв'язку з відсутністю достатньої кількості даних на полюсах Землі навіть високоточні моделі гравітаційного поля не дозволяли обчислювати трансформанти гравітаційного поля з потрібною точністю в цих регіонах. Для вирішення цієї проблеми на міжнародній конференції по Арктичному Полю в м. Целле (Німеччина) в жовтні 1998 року виникла ініціатива розробити докладну гравіметричну базу даних на територію Арктики. З метою створення регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики організацією NGA було розроблено AGP, який передбачав створення ґрідів гравітаційних аномалій у вільному повітрі роздільною здатністю $5' \times 5'$ на дану територію з використанням даних аерогравіметрії, супутникової альтиметрії, а також даних морської гравіметрії. Задекларована точність цих даних наступна: дані аерогравіметрії мають точність порядку 2 мГал, дані морської гравіметрії – 6 мГал, а точність даних супутникової альтиметрії < 5 см [81]. Таки чином, очікувана точність висот (квазі)геоїда складає 15 см. Використання цих даних дає змогу побудувати регіональну гравітаційну модель на територію Арктики.

Для побудови регіонального гравітаційного поля на територію Арктики (на регіон, який за формою нагадує сегмент сфери) необхідно підібрати відповідний метод. Томпсон і Тет розширили сімейство функцій Лежандра, ввівши функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку, які формують ортогональну систему функцій на сегменті сфери, проте на всій сфері вони є неортогональними. Вперше на практиці їх використав Haines G.V. в 1988 р. для моделювання регіонального магнітного поля. Основними сучасними світовими експертами в даних питаннях вважаються Haines G.V., de Santis A., Torta G.M., Thebault E., Hwang C. та ін. Крім того, поліноми Лежандра з дробовими

індексами було застосовано О. Марченком для побудови сімейства коваріаційних функцій, що базуються на потенціалах радіальних мультиполів.

Вагомою проблемою побудови моделі гравітаційного поля є велика кількість вихідних даних, що потребує значних затрат часу і машинних ресурсів при побудові такого поля. Тому в роботі поставлено задачу оптимізації процесу створення моделі регіонального гравітаційного поля з використанням сферичних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Розробки автора використовувалися в рамках науково-дослідної роботи Національного університету «Львівська політехніка»: «Комплексна геодинамічна модель гравітаційного поля і деформацій земної кори регіону Чорного моря за супутниковими даними», («Геоїд»), (заклучний), номер держреєстрації 0111U001213.

Мета та задачі. Основною метою дисертаційної роботи є вдосконалення існуючих методів побудови регіональних гравітаційних полів та побудова комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля. Для створення високоточної моделі регіонального гравітаційного поля високої роздільної здатності слід використовувати велику кількість вихідних даних. Основний акцент поставлено на розробку такої регулярної сітки, яка б дозволила обчислювати розріджену матрицю нормальних рівнянь і пришвидшити процес її обертання з використанням функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку на сегменті сфери.

Основними завданнями дисертаційної роботи є:

- аналіз різних методів побудови моделей глобального та регіонального гравітаційних полів;
- розробка алгоритму опрацювання даних гравітаційних аномалій у вільному повітрі на сегменті сфери;
- удосконалення методів побудови моделей регіонального гравітаційного поля за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі;

- виведення формул для обчислення і обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь;
- побудова комбінованого розв’язку моделі регіонального гравітаційного поля на територію Арктики за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі;
- перевірка побудованої моделі з даними GPS-нівелювання на регіон Арктики.

Об’єктом досліджень є регіональне гравітаційне поле Землі, а **предметом досліджень** в дисертаційній роботі є метод ASHA побудови моделі регіонального гравітаційного поля високої роздільної здатності за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

Основним методом досліджень є запропонована в роботі модифікація методу ASHA для опрацювання даних гравітаційних аномалій у вільному повітрі з AGP.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що:

1. Розроблено алгоритм побудови регіональних гравітаційних полів методом ASHA;
2. Виведено формули для обчислення та обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь;
3. Розроблено модифікацію методу ASHA, яка дозволяє значно скоротити час обчислення невідомих коефіцієнтів моделі;
4. Створено модель регіонального гравітаційного поля на територію Арктики за даними гравітаційних аномалій у вільному повітрі до 150 степеня/порядку;

Практичне значення результатів. Важливим практичним аспектом створення моделі регіонального гравітаційного поля з використанням вищезгаданого алгоритму є можливість уточнення вже існуючих моделей регіональних (на даний регіон) і глобальних гравітаційних полів. Максимально якісний розв’язок можна отримати у випадку використання великої кількості

вихідних даних. Тому дана дисертаційна робота спрямована на створення методів, які дають змогу обчислення моделі на основі великої кількості різнорідних даних з використанням властивостей ортогональності базових функцій на сегменті сфери.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові положення, які становлять зміст дисертації, були сформульовані та вирішені автором самостійно. Особистий внесок автора полягає у обґрунтуванні методу апроксимації регіонального гравітаційного поля та розроблення модифікації даного методу, яка дала змогу використовувати дискретні ортогональні властивості базових функцій.

У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертантові належать: [13] – виведення основних формул та виконання основних обчислень, [19] – підготовка вихідних даних та виконання обчислень, [20] – підготовка вихідної інформації і деякі ілюстрації, [74, 76] – виконання основних обчислень та ілюстрації.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційних досліджень було представлено на 5 міжнародних конференціях, а саме:

- IV міжнародна наукова конференція «Innowacyjne technologie geodezyjne – zastosowanie w roznych dziedzinach gospodarki»
(*Поланчик, Польща, 22-24 травня 2013 р.*)
- міжнародна наукова конференція «Internationales Vortragsprogramm»
(*Нойбранденбург, Німеччина, 21 червня 2013 р., 22 червня 2014 р.*)
- міжнародна наукова конференція «Геофорум»
(*Брюховичі, Україна, 24 квітня 2015 р.*)
- VI міжнародна наукова конференція «Innowacyjne technologie geodezyjne – zastosowanie w roznych dziedzinach gospodarki»
(*Камьонка, Польща, 10-12 червня 2015 р.*)

Публікації: за результатами дисертаційних досліджень опубліковано 7 наукових праць, з яких 6 статей у наукових фахових виданнях України, 3 з

яких у науковому періодичному виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази, і 1 у збірнику конференцій.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

1.1 Потенціал і прискорення вільного падіння

Згідно закону всесвітнього тяжіння Ньютона, дві матеріальні точки з масами m_1 та m_2 , відстань між якими l , притягують одна одну з силою

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (1.1)$$

де G – гравітаційна стала. Ця сила направлена вздовж лінії, що з'єднує ці точки [27].

Хоча маси m_1 та m_2 притягуються одна до одної абсолютно симетрично, вважатимемо одну з них такою, що притягує, а іншу такою, що притягується. Для спрощення приймемо масу, що притягується, рівною одиниці, а масу, що притягує, позначимо як m . Тоді формула (1.1) перепишеться

$$F = G \frac{m}{l^2}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) виражає силу, з якою маса m діє на одиничну масу, що знаходиться в точці P на відстані l від маси m .

Введемо прямокутну систему координат і позначимо в ній координати матеріальної точки з масою m як ξ, η, ζ , а координати точки P як x, y, z . Силу притягання позначимо вектором \mathbf{F} (рис. 1.1).

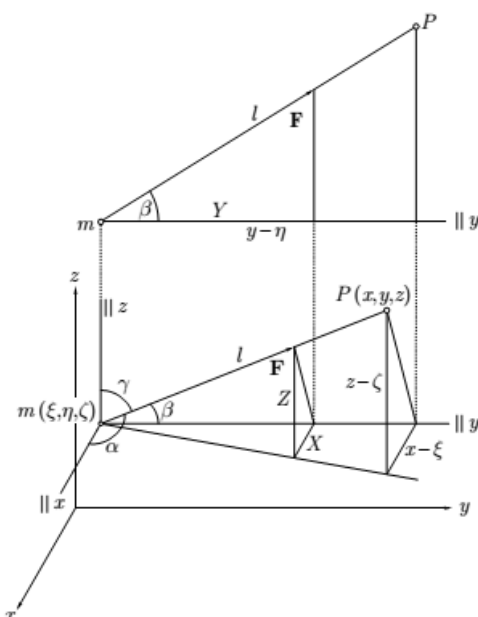


Рис. 1.1 Компоненти сили притягання

Замість векторної функції \mathbf{F} зручніше користуватися скалярною функцією

$$V = G \frac{m}{l}. \quad (1.3)$$

Функція V називається потенціалом сили притягання. Компоненти F_x, F_y, F_z сили притягання \mathbf{F} можуть бути представлені у вигляді

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.4)$$

В свою чергу, потенціал твердого тіла (рис. 1.2) можна виразити за

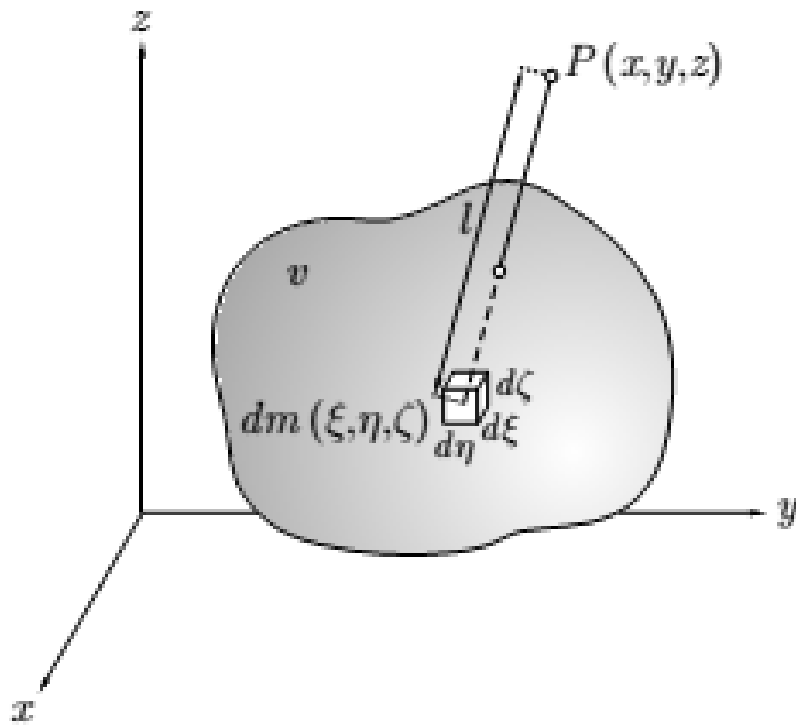


Рис. 1.2 Потенціал твердого тіла

допомогою інтегралу Ньютона [67]

$$V(x, y, z) = G \iiint_v \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta, \quad (1.5)$$

де ρ – функція густини, v – об’єм, диференціал якого

$$dv = d\xi d\eta d\zeta. \quad (1.6)$$

Якщо $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \rightarrow \infty$, то потенціал V поводить себе як потенціал точкової маси, що розташована в центрі мас твердого тіла [25]. Можна показати, що потенціал притягання всередині тіла задовольняє рівнянню Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho, \quad (1.7)$$

де ∇ – оператор Набла. Зовні притягуючих мас потенціал притягання задовольняє рівнянню Лапласа

$$\nabla^2 V = 0, \quad (1.8)$$

тобто потенціал притягання є гармонійною функцією в порожньому просторі.

Якщо розглядати обертання Землі, потенціал відцентрової сили визначається формулою

$$Q(x, y, z) = \frac{1}{2} \omega^2 d_z^2, \quad (1.9)$$

де ω – це кутова швидкість обертання Землі, а $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – це відстань до осі обертання z .

Потенціал сили тяжіння W є сумою потенціалу притягання і потенціалу відцентрової сили

$$W = V + Q. \quad (1.10)$$

Вектор прискорення сили тяжіння \vec{g} є градієнтом потенціалу сили тяжіння

$$\vec{g} = \nabla W. \quad (1.11)$$

З теорії гармонічних функцій відомо, що знання однієї еквіпотенціальної поверхні дозволяють знайти повністю гармонічну функцію зовні такої поверхні [2].

Для вивчення форми Землі однією з найважливіших еквіпотенціальних поверхонь є геоїд (рис. 1.3).

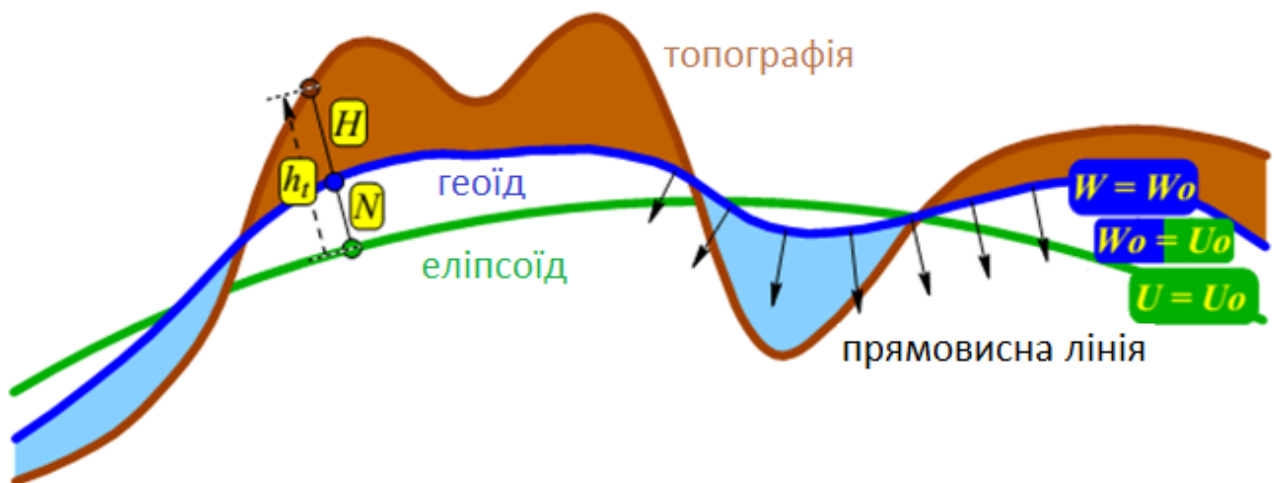


Рис. 1.3 До визначення еліпсоїда, геоїда і топографії

Оскільки геоїд є екіпотенціальною поверхнею, сила тяжіння є перпендикулярною до нього в кожній точці. Для знаходження поверхні геоїда необхідно знайти потенціал сили тяжіння W_0 [24]

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{const}. \quad (1.12)$$

Зазвичай потенціал W розділяють на нормальний потенціал U і збурюючий потенціал T

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z). \quad (1.13)$$

Нормальний потенціал U визначається як потенціал рівневого еліпсоїда обертання. Центр такого еліпсоїда збігається з центром мас Землі, а його головна вісь інерції з віссю обертання Землі. Рівневий еліпсоїд обертається з такою самою кутовою швидкістю, як і реальна Земля. Маса даного еліпсоїда співпадає з масою Землі. Нормальний потенціал U_0 сили тяжіння на поверхні рівневого еліпсоїда дорівнює реальному потенціалу W_0 сили тяжіння [3].

В такому випадку зручно ввести еліпсоїдальні координати (h, λ, ϕ) , віднесені до еліпсоїда $U(h=0) = U_0 = W_0$, де h – це висота над еліпсоїдом, а λ і ϕ – геодезичні довгота і широта відповідно. Тоді (1.13) переписеться

$$W(h, \lambda, \phi) = U(h, \phi) + T(h, \lambda, \phi), \quad (1.14)$$

а геоїд в еліпсоїдальних координатах є екіпотенціальною поверхнею, для якої

$$W(h = N(\lambda, \phi), \lambda, \phi) = U((h=0), \phi) = U_0, \quad (1.15)$$

де $N(\lambda, \phi)$ – звичайне представлення геоїда як висот N по відношенню до еліпсоїда.

Отже, еліпсоїд і геоїд утворюють дві поверхні віднесення, відносно яких може бути задана висота точки. Позначимо висоту земної поверхні, або висоту топографії, над еліпсоїдом h_t , а над геоїдом H (рис. 1.3) :

$$h_t(\lambda, \phi) = N(\lambda, \phi) + H(\lambda, \phi). \quad (1.16)$$

Нормальний потенціал подібно до потенціалу сили тяжіння також складається з двох компонент: нормального потенціалу притягання U_a і нормального потенціалу відцентрової сили Φ

$$U = U_a + \Phi, \quad (1.17)$$

і, очевидно, збурюючий потенціал

$$T(h, \lambda, \phi) = W_a(h, \lambda, \phi) - U_a(h, \phi) \quad (1.18)$$

не містить в собі потенціалу відцентрової сили і є гармонічним зовні притягуючих мас.

Градiєнт нормального потенціалу

$$\vec{\gamma} = \nabla U \quad (1.19)$$

є вектором нормальної сили тяжіння.

1.2 Аномалії висоти

Для визначення фізичної поверхні Землі відносно поверхні рівневого еліпсоїда використовують геодезичну систему координат (h_i, λ, ϕ) . Геодезичну висоту можна подати у вигляді суми двох доданків за допомогою введення допоміжної поверхні – квазігеоїда [3]. Перша частина – відстань від квазігеоїда до точки фізичної поверхні Землі по нормалі до відлікової поверхні, яка називається нормальною висотою. Її визначають із геометричного нівелювання. Друга частина, а саме аномалія висоти $\zeta(\lambda, \phi)$, може бути визначена як відстань від земної поверхні до точки, в якій нормальний потенціал U має таке ж значення, як і геопотенціал W на земній поверхні

$$W(h_i, \lambda, \phi) = U(h_i - \zeta, \lambda, \phi), \quad (1.20)$$

де h_i – геодезична висота. Схематично аномалію висоти зображено на рисунку 1.4.

Аномалії висот можна визначити за допомогою астрономо-гравіметричного нівелювання, використовуючи астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній, або через гравітаційні аномалії у вільному повітрі. Поверхня з висотою $\zeta = \zeta(\lambda, \phi)$ над еліпсоїдом називається квазігеоїдом. Висоти квазігеоїда над еліпсоїдом завжди рівні аномаліям висот, що визначаються в точках фізичної поверхні Землі.

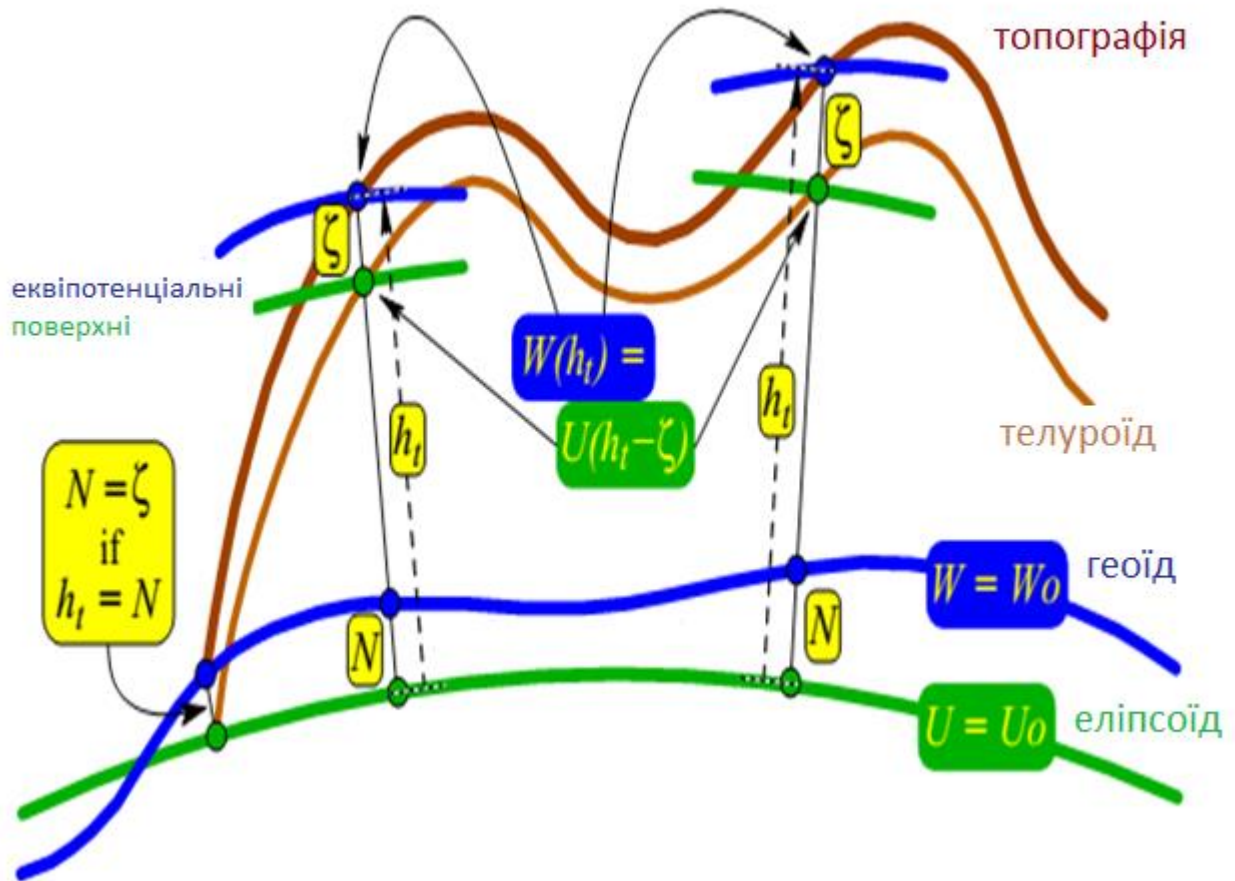


Рис. 1.4 До визначення аномалії висоти ζ

В свою чергу, поверхня $h_t - \zeta$ називається телуроїдом [41]. Іншими словами, поверхня телуроїда – це фізична поверхня Землі в першому наближенні. Слід зауважити, що поверхня квазігеоїда не має фізичного сенсу, але дуже добре апроксимує поверхню геоїда [56]. В областях, де $h_t = N$ (або $H = 0$), тобто на поверхнях морів та океанів, квазігеоїд збігається з геоїдом, що легко бачити з рівняння (1.20), використавши рівняння (1.16)

$$W(N + h, \lambda, \phi) = U(N + H - \zeta, \lambda, \phi). \quad (1.21)$$

Поклавши $H = 0$, отримаємо

$$W(N, \lambda, \phi) = U(N - \zeta, \phi). \quad (1.22)$$

Звідси видно, що значення висоти геоїда

$$N = \zeta, \text{ якщо } H = 0. \quad (1.23)$$

Слід відмітити, що формула (1.20) справедлива не тільки для висот $h = h_t$ на земній поверхні. Загальна аномалія висоти $\zeta_g = \zeta_g(h, \lambda, \phi)$ для довільної висоти h може бути знайдена як

$$W(h, \lambda, \phi) = U(h - \zeta_g, \phi). \quad (1.24)$$

1.3 Гравітаційні аномалії у вільному повітрі

Найбільш важливою характеристикою аномального гравітаційного поля Землі є гравітаційні аномалії у вільному повітрі, які отримують із вимірювань. Гравітаційною аномалією у вільному повітрі називається різниця між вимірним g і нормальним γ значенням прискорення вільного падіння в пункті спостережень

$$\Delta g = g - \gamma. \quad (1.25)$$

Гравітаційна аномалія у вільному повітрі називається „чистою”, якщо вимірне значення g і нормальне значення γ віднесені до однієї і тієї ж точки земної поверхні, а якщо ці значення відносяться до різних точок простору, то тоді така аномалія називається „змішаною” [3].

Гradient збурюючого потенціалу T позначається $\delta\vec{g}$ і має наступний вигляд:

$$\delta\vec{g}(h, \lambda, \phi) = \nabla T(h, \lambda, \phi) = \nabla W(h, \lambda, \phi) - \nabla U(h, \phi). \quad (1.26)$$

Отже, „чиста” аномалія δg – це різниця наступних величин

$$\delta g(h, \lambda, \phi) = |\nabla W(h, \lambda, \phi)| - |\nabla U(h, \phi)|. \quad (1.27)$$

В принципі, δg можна визначити для будь-якої висоти h , якщо відомі потенціали W і U .

„Змішана” аномалія Δg – це різниця між значенням сили тяжіння в даній точці (h, λ, ϕ) та нормальною силою тяжіння в точці з координатами (λ, ϕ) та висотою $h - \zeta_g$ [21]:

$$\Delta g(h, \lambda, \phi) = |\nabla W(h, \lambda, \phi)| - |\nabla U(h - \zeta_g, \phi)|, \text{ для } h \geq h_t, \quad (1.28)$$

або в загальному вигляді [88]

$$\Delta g(h, \lambda, \phi) = g(h, \lambda, \phi) - \gamma(h - \zeta_g, \phi). \quad (1.29)$$

В (1.29) передбачається, що $h \geq h_t$, тобто точка лежить на земній поверхні або зовні. В такому випадку гравітаційна аномалія у вільному повітрі є функцією в просторі поза масами [106]. Перевагою такого визначення є те, що виміри сили тяжіння $|\nabla W|$ на земній поверхні можуть бути використані без всяких редуцій [7].

Слід відмітити, що, наприклад, при використанні формули Стокса для визначення поверхні геоїда необхідно, щоб гравітаційні аномалії у вільному повітрі Δg були відомі на поверхні геоїда. Ця вимога накладає дві умови: по-перше, сила тяжіння g має бути віднесена до поверхні геоїда; по-друге, зовні геоїда не повинно бути ніяких мас. Для віднесення сили тяжіння до поверхні геоїда необхідно виконати редуції [42]. Відповідно, редуції сили тяжіння складаються із таких кроків: топографічні маси поза геоїдом повністю видаляються або переносяться нижче рівня моря [94]; далі пункт виміру сили тяжіння переміщують з земної поверхні (точка P) на геоїд (точка P_0), що зображено на рисунку 1.5.

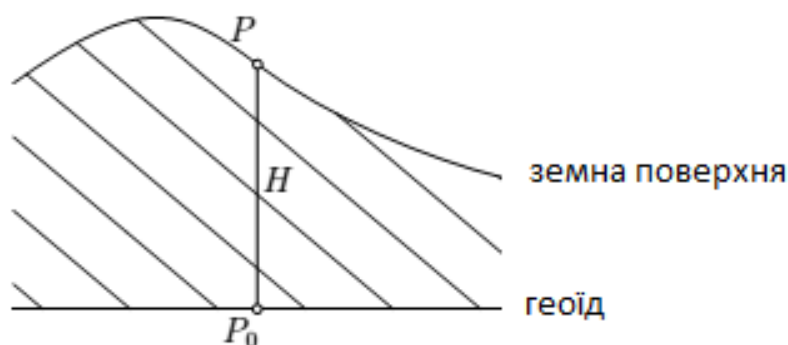


Рис.1.5 До редуції сили тяжіння

1.4 Висновки до розділу 1

В даному розділі описано теорію потенціалу. Особливу увагу приділено функції потенціалу сили тяжіння, сили притягання і відцентрової сили. Також дано визначення геоїда як екіпотенціальної поверхні потенціалу сили тяжіння і розглянуто поверхні квазігеоїда і телуроїда.

Крім цього, подано основні відомості про аномалії висоти, а також розглянуто „чисті” і „змішані” гравітаційні аномалії у вільному повітрі. Описано процес редукції гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

Слід відмітити, що на сьогоднішній день використовують „чисті” гравітаційні аномалії у вільному повітрі, які отримують із GPS-вимірів і вимірів у пункті спостережень.

Загалом в даному розділі подано формули, необхідні для наступних дисертаційних досліджень. Наприклад, в другому розділі розглядаються методи моделювання потенціалу сили притягання (1.5).

Також на основі вищенаведених співвідношень в 4 розділі розглядатиметься побудова поверхні (квазі)геоїда з використанням гравітаційних аномалій у вільному повітрі (1.25).

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ГЕОПОТЕНЦІАЛУ

Існує велике різноманіття методів подання гравітаційного поля, кожен з яких відповідає модельному або операційному підходам фізичної геодезії. Операційний підхід вимагає апріорного вивчення додаткової інформації про гравітаційне поле Землі. Врахування цієї інформації дозволяє одержати стійкий розв'язок та призводить до оптимальних лінійних оцінок. Недоліком цього методу є те, що порядок матриці, яка підлягає обертанню, співпадає з кількістю вихідних даних. Модельний підхід передбачає знаходження невідомих коефіцієнтів моделі на основі вихідних даних, за допомогою яких можна знаходити геопотенціал та його трансформанти.

Також слід відмітити, що розрізняють окремо методи подання гравітаційного поля глобального та регіонального масштабів.

На сьогоднішній час основними методами побудови гравітаційного поля є розклад потенціалу в ряд за сферичними чи еліпсоїдальними функціями, використання радіальних та нецентральных мультиполів, вейвлет-аналіз, середня квадратична колокація, методи інтегральних перетворень, методи параметричної апроксимації та комбіновані методи, метод швидкого перетворення Фур'є тощо.

В даному розділі проводиться огляд і аналіз деяких методів, які прямо чи опосередковано пов'язані з методом моделювання гравітаційного поля, запропонованим і апробованим в даній дисертаційній роботі.

2.1 Кульові функції

Аналітичні вираження потенціалу притягання однорідних тіл достатньо складні навіть для тіл простої форми. Тому часто використовують способи наближеного представлення потенціалів у вигляді нескінченних рядів того чи іншого виду. Найзручнішим і широко використовуваним способом розкладу потенціалів в нескінченний ряд є розклад за кульовими або сферичними функціями.

Як відомо, потенціал – функція гармонічна поза притягуючими масами. В сферичній системі координат оператор Лапласа має наступний вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \quad (2.1)$$

де Δ – оператор Лапласа, r, θ, λ – сферичні координати.

Якщо ми спробуємо розв'язати рівняння Лапласа $\Delta V = 0$ в сферичних координатах методом розділення змінних за допомогою добутку трьох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї сферичної координати

$$V = f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(\lambda), \quad (2.2)$$

то ми, очевидно, отримаємо три диференціальні рівняння другого порядку

$$\left. \begin{aligned} r^2 f''(r) + 2r \cdot f'(r) - n(n-1)f(r) &= 0 \\ \sin \theta \cdot g''(\theta) + \cos \theta \cdot g'(\theta) + \left[n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right] \cdot g(\theta) &= 0 \\ h''(\lambda) + m^2 \cdot h(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

Згідно задачі Штурма-Ліувілля [24, 49], в рівняннях (2.3) n і m – цілі невід'ємні числа, які визначають відповідно степінь і порядок даних функцій. Крім того,

$$Y_n(\theta, \lambda) = g(\theta) \cdot h(\lambda). \quad (2.4)$$

Функції (2.4) називають поверхневими сферичними функціями Лежандра.

Таким чином, розв'язок рівняння (2.3) набуде вигляду [52]

$$f(r) = r^n \text{ або } f(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (2.5a)$$

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos \theta) \text{ або } g(\theta) = Q_{nm}(\cos \theta), \quad (2.5б)$$

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \text{ або } h(\lambda) = \sin m\lambda, \quad (2.5в)$$

де $P_{nm}(\cos \theta)$ та $Q_{nm}(\cos \theta)$ – приєднані сферичні функції Лежандра першого та другого роду відповідно.

Звичайно, не всі функції (2.5) використовують для представлення геопотенціалу через невідповідність їх властивостей. Так, використовують другу функцію з (2.5а), першу – з (2.5б) і обидві з (2.5в).

Функції $P_{nm}(\cos\theta)$ визначаються наступним чином:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad (2.6)$$

де $t = \cos\theta$.

Точний вираз для сферичних функцій Лежандра першого роду можна представити в наступній формі

$$P_{nm}(t) = 2^{-n} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}, \quad (2.7)$$

де n_0 – максимальне ціле, яке не більше $(n-m)/2$.

У випадку, коли $m=0$, маємо справу з поліномами Лежандра [28] (поліномами від t степені n):

$$P_n(t) = P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n. \quad (2.8)$$

Графіки перших семи поліномів Лежандра зображено на рисунку 2.1.

Розглянемо дані функції в прямокутній декартовій системі координат. Кульовою функцією степені n називається цілий однорідний многочлен степені n від змінних x, y, z , який задовольняє рівнянню Лапласа. Позначимо його через $V_n(x, y, z)$.

В силу основної властивості однорідних функцій

$$V_n(x, y, z) = \rho^n \cdot V_n\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right), \quad (2.9)$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Якщо перейдемо до сферичних координат, отримаємо

$$V_n\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) = Y_n(\theta, \lambda). \quad (2.10)$$

Функція $Y_n(\theta, \lambda)$ є однорідною функцією степені n від $\sin\theta \cdot \cos\lambda$, $\sin\theta \cdot \sin\lambda$, $\cos\theta$. Зв'язок між кульовими і сферичними функціями виражається співвідношенням

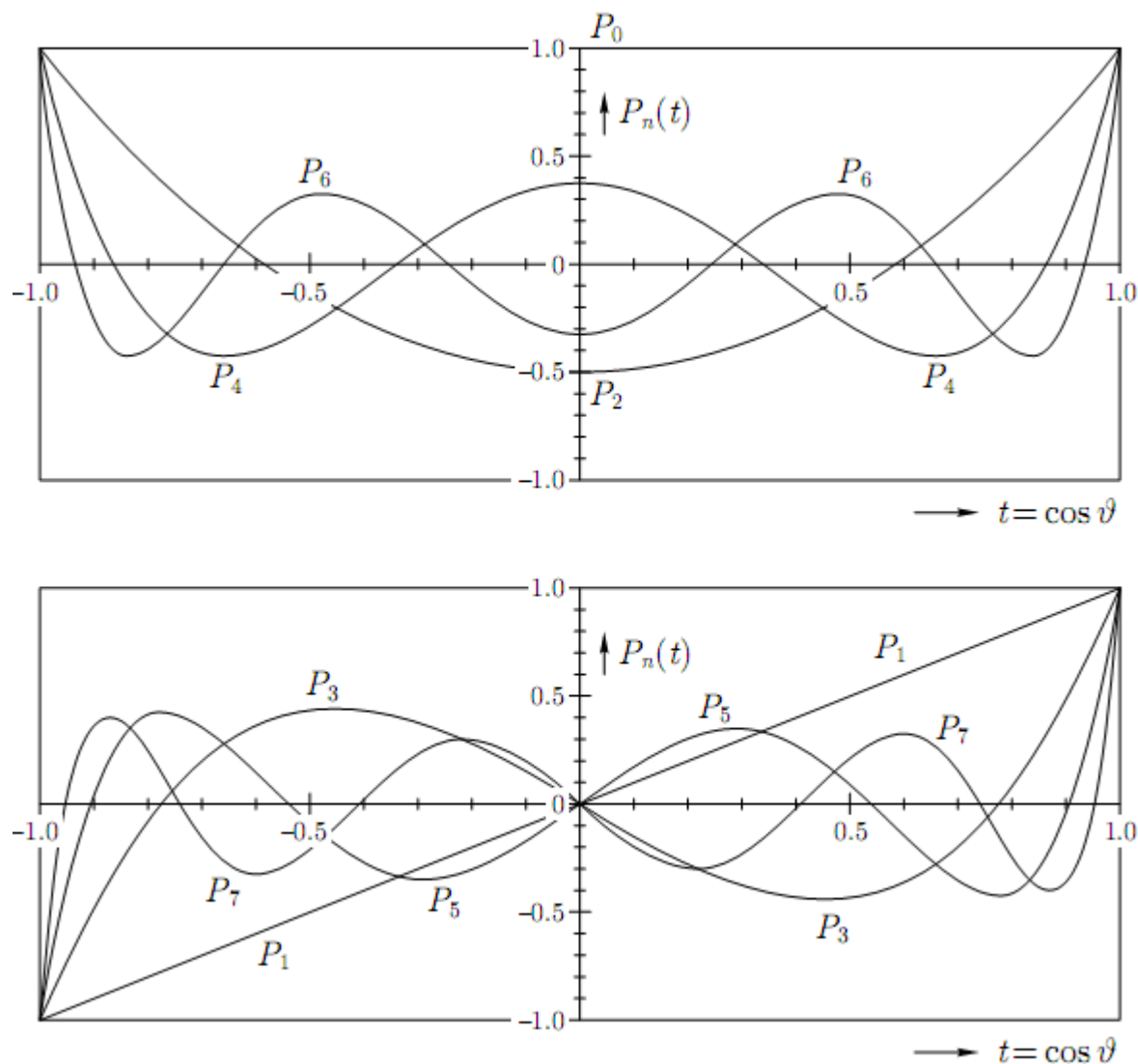


Рис. 2.1. Поліноми Лежандра як функції $t = \cos\theta$:

n парне (зверху) і n непарне (знизу)

$$V_n(x, y, z) = \rho^n \cdot Y_n(\theta, \lambda). \quad (2.11)$$

Геометрично сферичні функції можна представити наступним чином. Гармоніки з $m=0$ (поліноми Лежандра) є поліномами від t степені n , отже, вони мають n нулів. Всі ці нулі є дійсними і знаходяться в інтервалі $-1 \leq t \leq +1$, або, відповідно, $0 \leq \theta \leq \pi$ (рис. 2.1). Таким чином, гармоніки при $m=0$ змінюють свій знак n разів на цьому інтервалі; крім того, вони не залежать від λ . Їх геометричне представлення показано на рисунку 2.2(а). Оскільки вони ділять сферу на зони, їх також називають зональними [2].

Приєднані функції Лежандра змінюють знак $n-m$ разів на інтервалі $0 \leq \theta \leq \pi$. Функції $\cos m\lambda$ і $\sin m\lambda$ мають $2m$ нулів на інтервалі $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, тож геометричне представлення гармонік при $m \neq 0$ показано на рисунку 2.2(b). Вони ділять сферу на частини, в яких вони по черзі додатні і від'ємні, подібно до шахової дошки, і називаються тесеральними гармоніками. Зокрема, при $n=m$, вони вироджуються в функції, які ділять сферу на додатні і від'ємні сектори, і в такому випадку їх називають секторіальними гармоніками (рисунок 2.2(c)).

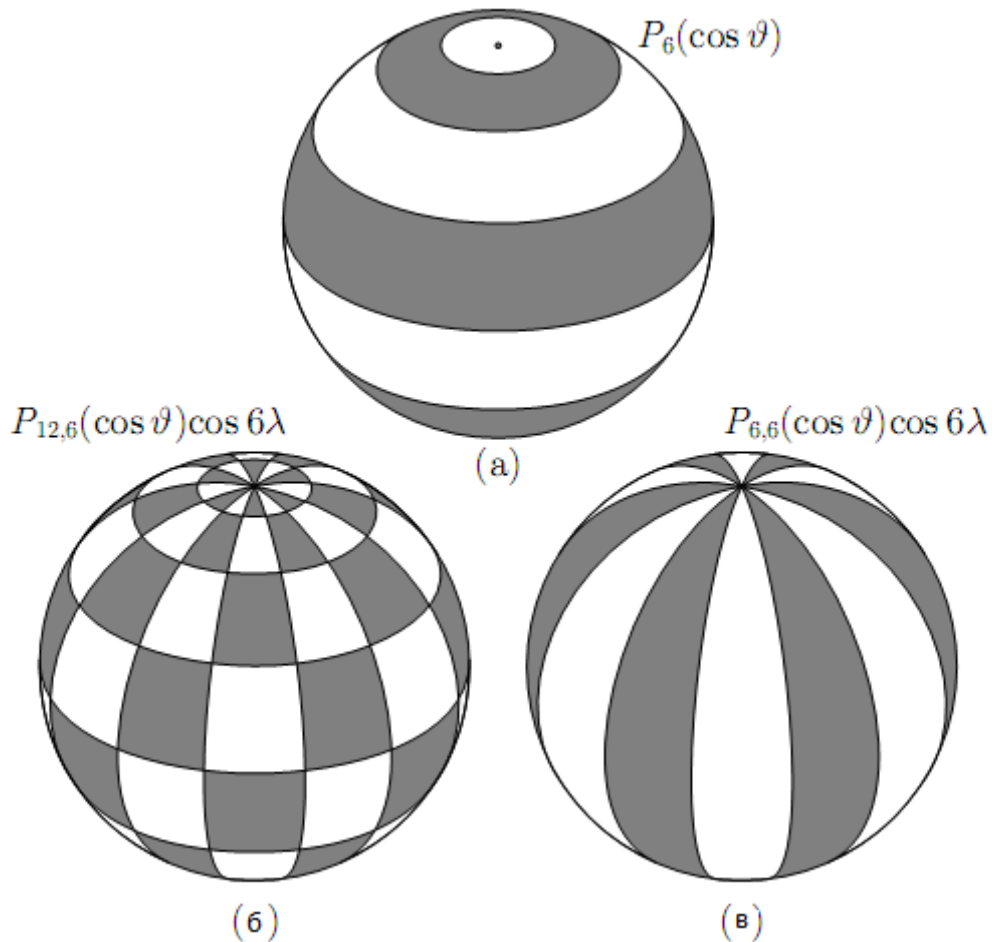


Рис. 2.2. Види сферичних гармонік : (а) зональні,
(б) тесеральні, (в) секторіальні

Практично будь-яку функцію на сфері можна розкласти в ряд за сферичними функціями

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (2.12)$$

де a_{nm} і b_{nm} – коефіцієнти Фур’є, а R_{nm} і S_{nm} – допоміжні функції, які можна знайти із наступного рівняння

$$\begin{aligned} R_{nm}(\theta, \lambda) &= P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda), \\ S_{nm}(\theta, \lambda) &= P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\lambda). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функції (2.13) володіють властивістю ортогональності. Дві комплексно-значні функції $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$, що належать простору Лебега $L_2(E)$, де E – вимірна множина, називають ортогональними, якщо $\int_E \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0$ [32]. На основі

властивості ортогональності функцій (2.13) можна записати

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{якщо } s \neq n \text{ або } r \neq m; \quad (2.14)$$

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad \text{в будь-якому випадку,}$$

де $d\sigma$ – елемент сфери, а інтегрування проводиться по всій поверхні сфери.

Для більш зручного використання функцій (2.13) їх замінюють на повністю нормовані функції $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$, $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$. „Повністю нормовані” сферичні функції – це „нормовані” функції в сенсі теорії дійсних функцій. Вони визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} \bar{R}_{n0}(\theta, \lambda) &= \sqrt{2n+1} R_{n0}(\theta, \lambda) \equiv \sqrt{2n+1} P_n(\cos\theta); \\ \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) &= \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} R_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) &= \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} S_{nm}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{R}_{n0}(\theta, \lambda) \\ \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \end{aligned}} \right\} (m \neq 0). \quad (2.15)$$

Для функцій (2.15) властивість ортогональності (2.14) залишається справедливою. Крім цього, впливають наступні співвідношення

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}^2 d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}^2 d\sigma = 1. \quad (2.16)$$

Для визначення коефіцієнтів розкладу функції в ряд за сферичними функціями необхідно мати достатньо велику кількість значень функцій сферичних координат на всю земну поверхню, використовуючи для цього результати вимірювань в окремих пунктах.

На практиці обмежуються розкладом до певного порядку K_m , нехтуючи всіма наступними членами розкладу [95]. Якщо розклад у ряд за сферичними функціями виконують до порядку K_m , то число коефіцієнтів розкладу становить $(K_m + 1)^2$.

Задача визначення цих коефіцієнтів при високих степенях розкладу ускладнюється в технічному розумінні.

Існуючі методи визначення цих коефіцієнтів можна розділити на дві групи. До першої групи належать методи, які базуються на визначенні коефіцієнтів розкладу за даними значень функції в окремих точках. До другої групи – за усередненими значеннями функції для деяких площ на поверхні сфери. До першої групи можна віднести спосіб Гаусса і два способи Неймана, до другої – спосіб найменших квадратів та спосіб числового інтегрування.

Слід зауважити, що значення функції в окремих точках знаходять із спостережень, які дуже нерівномірно розподілені на земній поверхні, і можуть привести до суттєво спотворених результатів обчислень. Для послаблення впливу нерівномірності розподілу точок, для яких визначена функція, вигідніше використовувати методи визначення коефіцієнтів розкладу за усередненими даними результатів вимірювань.

2.2 Методи визначення гармонічних коефіцієнтів

Будь-яка функція $f(\theta, \lambda)$, інтегрована на сфері, може бути представлена рядом гармонічних коефіцієнтів $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ [97]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} d\sigma, \quad (2.17)$$

де $d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$. Очевидно, таку функцію можна знайти

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \quad (2.18)$$

Суму в (2.18) можна замінити

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty}. \quad (2.19)$$

Після заміни (2.19) приходимо до двокрокового аналізу і синтезу, що найкраще підходить для програмування [31].

Двокроковий синтез – безперервний:

$$\begin{aligned} A_m(\theta) &= \sum_{n=m}^{\infty} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \bar{C}_{nm}, \\ B_m(\theta) &= \sum_{n=m}^{\infty} \bar{S}_{nm} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{A}_m(\theta) \cos m\lambda + \bar{B}_m(\theta) \sin m\lambda] \quad (2.21)$$

Двокроковий аналіз – безперервний:

$$\begin{aligned} A_m(\theta) &= \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda} d\lambda, \\ B_m(\theta) &= \frac{1}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \frac{\sin m\lambda}{\sin m\lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{lm} &= \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_0^{\pi} \frac{A_m(\theta)}{B_m(\theta)} \bar{P}_{lm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \\ \bar{S}_{lm} &= \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_0^{\pi} \frac{B_m(\theta)}{B_m(\theta)} \bar{P}_{lm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Перевагою двокрокового представлення є, звичайно ж, можливість розділити змінні θ і λ , що призводить в подальшому до блочного вигляду матриці нормальних рівнянь [70, 71].

Щодо вихідних даних, вони звичайно представляються на рівномірній сітці. Існує велика різноманітність рівномірних сіток, наприклад, географічний ґрид, ґрид Гаусса, Driscoll-Healy ґрид, Reuter ґрид, Random ґрид та інші (рисунок 2.3).

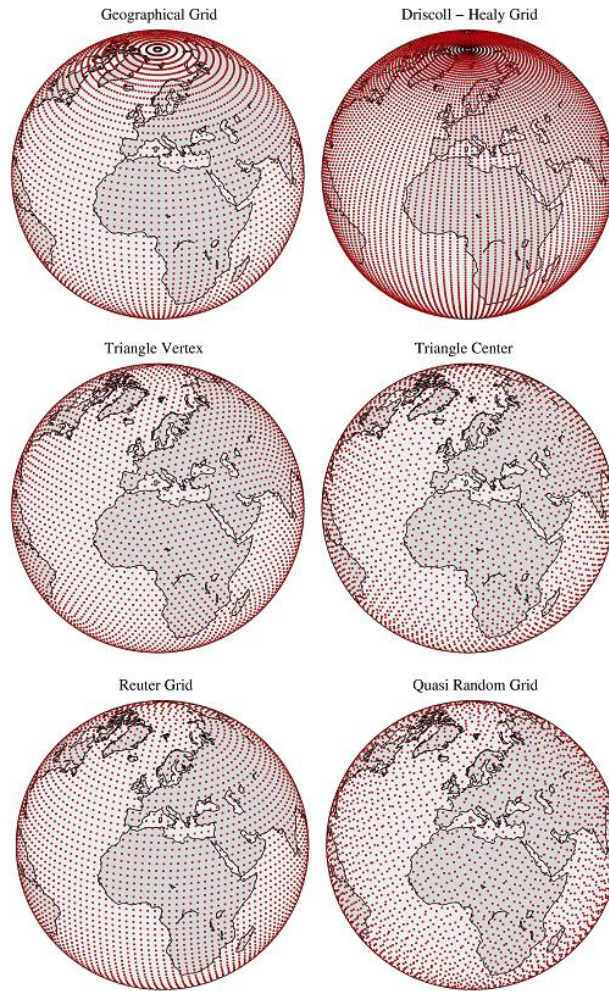


Рис. 2.3 Рівномірні сітки [92]

Розглянемо дуже простий, але, водночас, дуже наочний приклад рівномірної сітки. Вважатимемо, що максимальний порядок моделі рівний K_m . Нехай функція, яку необхідно апроксимувати, розміщується на рівномірній сітці $\lambda_i = i\Delta\lambda, i = 0, 1, \dots, 2K_m - 1$, де, в свою чергу, $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{2K_m} = \frac{\pi}{K_m}$. Відстані між паралелями в даному випадку вважатимемо довільними. Тоді стають очевидними наступні співвідношення [39]

$$\int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda d\lambda = (1 + \delta_{m0})\pi\delta_{mk} \leftrightarrow \sum_{i=0}^{2K_m-1} \cos m\lambda_i \cos k\lambda_i = (1 + \delta_{m0} + \delta_{mK_m})K_m\delta_{mk}, \quad (2.24)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\lambda \sin k\lambda d\lambda = (1 - \delta_{m0})\pi\delta_{mk} \leftrightarrow \sum_{i=0}^{2K_m-1} \sin m\lambda_i \sin k\lambda_i = (1 - \delta_{m0} - \delta_{mK_m})K_m\delta_{mk}, \quad (2.25)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\lambda \sin k\lambda d\lambda = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{2K_m-1} \cos m\lambda_i \sin k\lambda_i = 0. \quad (2.26)$$

Проте дискретна ортогональність по широті не буде виконуватись

$$\int_{-1}^{+1} \bar{P}_{l_1 m}(x) \bar{P}_{l_2 m}(x) dx = 2(2 - \delta_{m0}) \delta_{l_1 l_2} \leftrightarrow \sum_{i=1}^N \bar{P}_{l_1 m}(x_i) \bar{P}_{l_2 m}(x_i) \neq 2(2 - \delta_{m0}) \delta_{l_1 l_2}. \quad (2.27)$$

В такому випадку двокроковий дискретний аналіз набуде вигляду

$$\frac{A_m(\theta_i)}{B_m(\theta_i)} = \frac{1}{K_m(1 + \delta_{m0} + \delta_{mK_m})} \sum_{j=0}^{2K_m-1} f(\theta_i, \lambda_j) \frac{\cos m\lambda_j}{\sin m\lambda_j}, \quad (2.28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \text{необхідно визначити}. \quad (2.29)$$

Очевидно, індекс m у рівнянні (2.28) для $A_m(\theta_i)$ змінюється наступним чином $m = 0, 1, \dots, K_m$, в свою чергу для $B_m(\theta_i)$ $m = 1, 2, \dots, K_m - 1$. Слід відмітити, що для побудови моделі достатньо рівномірної сітки, що містить $2K_m$ паралелей. Враховуючи (2.27), коефіцієнти (2.29) можна визначити різними способами [89].

Для наглядності введемо матричні позначення, ввівши заміну $t_i = \cos \theta_i$:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} A_m(\theta_1) \\ A_m(\theta_2) \\ \vdots \\ A_m(\theta_N) \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} B_m(\theta_1) \\ B_m(\theta_2) \\ \vdots \\ B_m(\theta_N) \end{pmatrix} \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} f(\theta_i, \lambda_0) \\ f(\theta_i, \lambda_1) \\ \vdots \\ f(\theta_i, \lambda_{2K_m-1}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \bar{P}_{mm}(t_1) & \bar{P}_{m+1,m}(t_1) & \dots & \bar{P}_{K_m m}(t_1) \\ \bar{P}_{mm}(t_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{P}_{mm}(t_N) & \dots & & \bar{P}_{K_m m}(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{mm} \\ \bar{C}_{m+1,m} \\ \vdots \\ \bar{C}_{K_m m} \end{pmatrix} \quad \hat{s} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{mm} \\ \bar{S}_{m+1,m} \\ \vdots \\ \bar{S}_{K_m m} \end{pmatrix}$$

Очевидно, невідомі коефіцієнти $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ можна знайти, використавши спосіб найменших квадратів [9], а саме

$$\begin{aligned}\hat{c} &= (\hat{P}^T \hat{P})^{-1} P^T \hat{a}, \\ \hat{s} &= (\hat{P}^T \hat{P})^{-1} P^T \hat{b}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Проте в такому випадку доведеться обертати матрицю нормальних рівнянь розмірності $(K_m + 1 \times K_m + 1)$. Очевидно, матриця нормальних рівнянь $\hat{P}^T \hat{P}$ не буде діагональною, оскільки не зберігаються дискретні ортогональні відношення по широті (2.27).

Наприклад, постановивши $N = 21$, $L = 10$, $m = 0$, отримаємо матрицю нормальних рівнянь, зображену на рисунку 2.4.

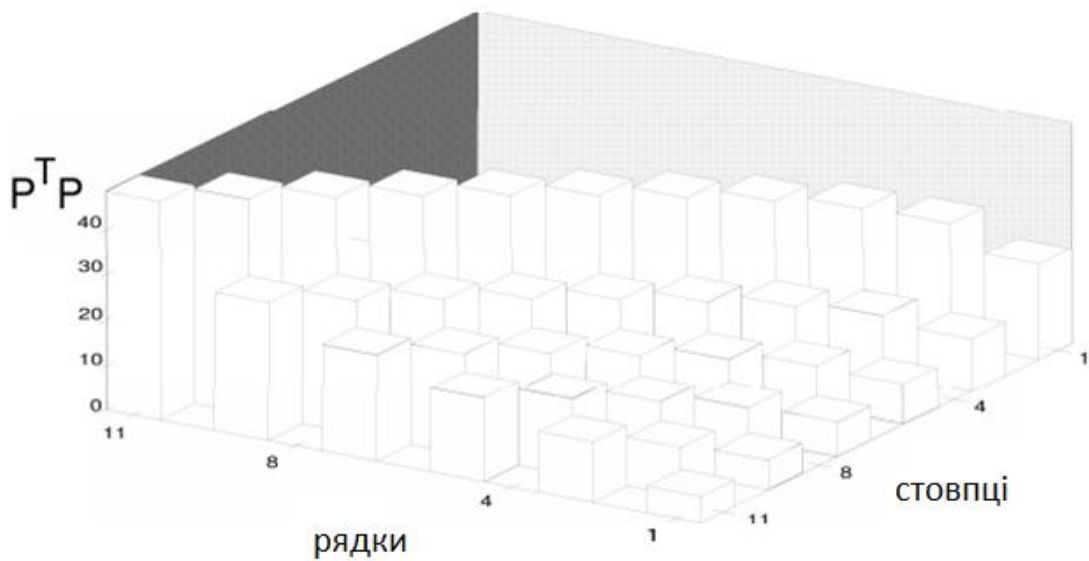


Рис. 2.4 Матриця нормальних рівнянь

Легко бачити, що матриця, зображена на рисунку 2.4, далека від діагональної, а виконувати процес обертання матриці не завжди зручно, особливо для високих порядків K_m [4].

Найпростіше, можна ввести заміну

$$\hat{P}^T \hat{P} = \lambda I,\tag{2.32}$$

де I – одинична матриця, а λ – масштабний множник. Тоді формула (2.31) переписеться у вигляді

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \lambda^{-1} \hat{P}^T \hat{a}, \\ \hat{s} &= \lambda^{-1} \hat{P}^T \hat{b}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Проте розв'язок (2.33) наближений. Для точнішого розв'язку можна використовувати пропорціональність до $\sin \theta_i$, яку видно із (2.23) [104]. В такому випадку розв'язок набуде вигляду

$$\frac{\bar{C}_{lm}}{\bar{S}_{lm}} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{m0}) \sum_{i=1}^N s_i \bar{P}_{lm}(\cos \theta_i) \frac{A_m(\theta_i)}{B_m(\theta_i)},\tag{2.34}$$

де $s_i = \frac{\pi}{N} \sin \theta_i$ або $s_i = \frac{2}{\sum_{k=1}^N \sin \theta_k} \sin \theta_i$ [86].

Очевидно, якби виконувалось рівняння (2.27), формула (2.34) була б точною. Але для точного визначення коефіцієнтів необхідно правильно підібрати рівномірну сітку по широті. Для точного визначення коефіцієнтів можна використати перший або другий спосіб Неймана.

У обох способах Неймана виконується рівність

$$\hat{P}^T W \hat{P} = 2(2 - \delta_{m0}) I,\tag{2.35}$$

де W – вагова матриця. Тоді, по аналогії за формулою (2.34) запишемо

$$\frac{\bar{C}_{lm}}{\bar{S}_{lm}} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{m0}) \sum_{i=1}^N w_i \bar{P}_{lm}(\cos \theta_i) \frac{A_m(\theta_i)}{B_m(\theta_i)}.\tag{2.36}$$

У першому способі Неймана рівномірна сітка підбирається так, що відстань між паралелями довільна, але їх кількість має бути рівна $2K_m + 1$. Тоді ваги знаходять, розв'язавши наступну систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & & t_N \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & & t_N^2 \\ & & & \ddots & \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & & & t_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/1 \\ 0 \\ 2/3 \\ \vdots \\ 2/N \end{pmatrix},\tag{2.37}$$

де матриця T – це так звана матриця Вандермонда.

В свою чергу, у другому способі Неймана рівномірна сітка повинна містити $K_m + 1$ паралелей, при чому вони мають співпадати з нулями поліному Лежандра $K_m + 1$ порядку, тобто

$$P_{K_m+1}(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K_m + 1. \quad (2.38)$$

В такому випадку ваги можна знайти за формулою

$$w_i = \frac{2}{(1-t_i^2)(P'_{K_m+1}(t_i))^2}, \quad (2.39)$$

або [65]

$$w_i = \frac{2(1-t_i^2)}{[(K_m+1)P_{K_m}(t_i)]^2}. \quad (2.40)$$

Ще одним способом знаходження невідомих коефіцієнтів є спосіб Гаусса. Даний спосіб ґрунтується на виконанні розкладу функції $f(\theta, \lambda)$ в ряд за сферичними функціями до степені m . Тоді на $(m+1)$ довільно вибраних паралелях у точках, рівновіддалених одна від одної по довготі, задаються значення $f(\theta, \lambda)$ таким чином, що на одній паралелі дається одне значення, на другій – три, на третій – п'ять і т.д., а на $(m+1)$ паралелі – $(2m+1)$ значення. Всього задається $(m+1)^2$ значень функції $f(\theta, \lambda)$, що дорівнює кількості коефіцієнтів розкладу, які необхідно визначити. Сукупність значень $f(\theta, \lambda)$ на будь-якій паралелі представляється рядом Фур'є за синусами і косинусами довгот λ [3].

Не менш важливим способом знаходження коефіцієнтів є спосіб числового інтегрування. Для практичної реалізації способу числового інтегрування поверхню сфери, на якій виконують інтегрування, розбивають на достатньо велику кількість елементарних площ $\Delta\omega$, для яких є відоме усереднене значення функції $f(\theta, \lambda)$. Замінюючи інтеграли сумами, отримуємо точні значення для обчислення коефіцієнтів [3]

$$\frac{C_{nm}}{S_{nm}} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2m\pi(n+m)!} \sum_1^Q \tilde{f}(\theta', \lambda') \Phi_{nm}(\theta) \frac{(\sin m\lambda_2 - \sin m\lambda_1)}{(\cos m\lambda_1 - \cos m\lambda_2)}, \quad (2.40)$$

де $\tilde{f}(\theta', \lambda')$ – середнє значення функції за трапецією $\Delta\omega$, обмеженою паралелями θ_1, θ_2 , і меридіанами λ_1, λ_2 , Q – кількість трапецій, а також

$$\Phi_{nm}(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_{nm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \quad (2.41)$$

2.3 Еліпсоїдальні функції

Сферичні функції використовують набагато частіше для представлення геопотенціалу, аніж еліпсоїдальні функції, тому що вони відносно простіші. Проте Земля по своїй формі ближча до еліпсоїда обертання, ніж до сфери, тому використання еліпсоїдальних функцій, визначених за тими ж принципами, що і сферичні функції, має привести до кращих результатів. Вся справа полягає в математичній зручності, оскільки як сферичні функції, так і еліпсоїдальні функції можна використовувати для будь-якого притягуючого тіла незалежно від його форми. Оскільки еліпсоїдальні гармоніки є більш складними, вони використовуються тільки в деяких спеціальних випадках, які включають в себе строге обчислення геопотенціалу, що, тим не менше, є дуже важливою задачею.

Введемо еліпсоїдальні координати u, ϑ, λ (рис. 2.5).

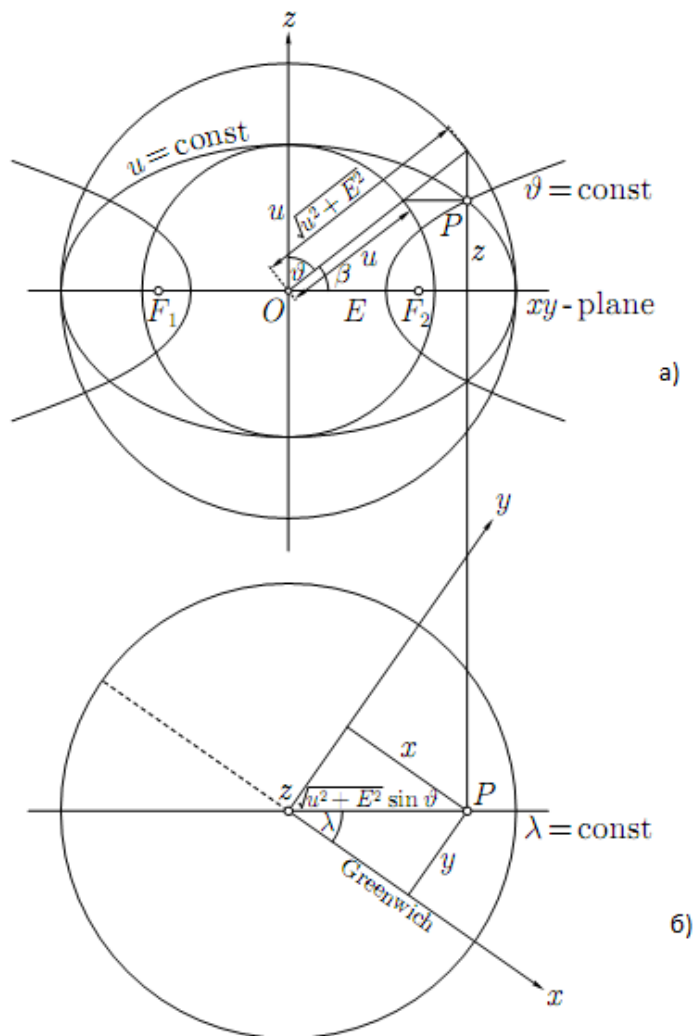


Рис. 2.5. Еліпсоїдальні координати: в площині меридіану (а)
і в площині екватора (б)

В прямокутній системі координат точка P матиме координати x, y, z . Припустимо, що через точку P проходить поверхня еліпсоїда обертання, центр якого збігається з початком координат O , вісь обертання якого співпадає з віссю z , і лінійний ексцентриситет якого має постійне значення E . В такому випадку координата u буде малою піввіссю цього еліпсоїда, ϑ буде доповненням до приведеної широти β точки P по відношенню до цього еліпсоїда, тобто, $\vartheta = 90^\circ - \beta$, а λ – геоцентрична довгота в звичайному сенсі [22].

Зв'язок між еліпсоїдальними координатами u, ϑ, λ і прямокутними x, y, z можна виразити наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \cos \lambda, \\ y &= \sqrt{u^2 + E^2} \sin \vartheta \sin \lambda, \\ z &= u \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.42)$$

де $\sqrt{u^2 + E^2}$ – велика піввісь еліпсоїда обертання, що видно із рис. 2.5.

Тепер визначимо поверхні, які утворюють дану еліпсоїдальну систему координат. Поклавши $u = \text{constant}$, отримаємо вираз

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + E^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1, \quad (2.43)$$

який представляє еліпсоїд обертання. Для $\vartheta = \text{const}$ отримаємо

$$\frac{x^2 + y^2}{E^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{z^2}{E^2 \cos^2 \vartheta} = 1, \quad (2.44)$$

що представляє однопорожнинний гіперболоїд. В свою чергу, для $\lambda = \text{constant}$ отримаємо площину меридіану

$$y = x \tan \lambda. \quad (2.45)$$

Однією з найважливіших характеристик еліпсоїдальних координат є ексцентриситет E , тобто відстань від початку координат до одного з фокусів F_1 або F_2 , який є однаковий для всіх еліпсоїдів $u = \text{constant}$. У граничному випадку $E=0$ еліпсоїдальні координати u, ϑ, λ вироджуються у сферичні координати r, θ, λ . Тобто, можна сказати, що сферичні координати є частковим випадком еліпсоїдальних координат [2].

Рівняння Лапласа в еліпсоїдальних координатах має вигляд [10]

$$\Delta V \equiv \frac{1}{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta} \left[(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right] = 0. \quad (2.46)$$

В граничному випадку, при $E \rightarrow 0$, рівняння (2.46) переходить в рівняння (2.1).

По аналогії зі сферичними координатами [46], будемо розв'язувати рівняння (2.46), розділивши змінні, тобто

$$V(u, \vartheta, \lambda) = f(u) \cdot g(\vartheta) \cdot h(\lambda). \quad (2.47)$$

Підставивши (2.47) у (2.46), отримаємо відповідно три диференціальні рівняння другого порядку

$$(u^2 + E^2) f''(u) + 2u f'(u) - \left[n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right] f(u) = 0; \quad (2.48)$$

$$\sin \vartheta \cdot g''(\vartheta) + \cos \vartheta \cdot g'(\vartheta) + \left[n(n+1) \sin \vartheta - \frac{m^2}{\sin \vartheta} \right] \cdot g(\vartheta) = 0; \quad (2.49)$$

$$h''(\lambda) + m^2 \cdot h(\lambda) = 0. \quad (2.50)$$

Очевидно, рівняння (2.49) і (2.50) збігаються із відповідними рівняннями у сферичних координатах (2.5б) і (2.5в). Рівняння (2.48) має іншу природу.

Для знаходження розв'язку диференціального рівняння (2.48) введемо заміни $\tau = i \frac{u}{E}$ і $t = \cos \vartheta$ у рівняння (2.48) і (2.49). Отримаємо

$$(1 - \tau^2) \cdot \bar{f}''(\tau) - 2\tau \cdot \bar{f}'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \tau^2} \right] \cdot \bar{f}(\tau) = 0; \quad (2.51)$$

$$(1 - t^2) \cdot \bar{g}''(t) - 2t \cdot \bar{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - t^2} \right] \cdot \bar{g}(t) = 0; \quad (2.52)$$

де риски означають заміну аргументу у відповідних функціях. Очевидно, з математичної точки зору функції (2.51) і (2.52) ідентичні. Формально їх розв'язком будуть приєднані функції Лежандра першого і другого роду.

Таким чином, приєднані функції Лежандра першого і другого роду як розв'язок рівняння (2.51) відповідають рівнянням (2.5а) у сферичних координатах відповідно. Оскільки мова йде про зовнішній геопотенціал, нам в даному випадку достатньо користуватися приєднаними функціями Лежандра другого роду.

Підсумовуючи все вище сказане, функції f, g та h набудуть наступного вигляду:

$$\begin{aligned} f(u) &= Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right); \\ g(\vartheta) &= P_{nm} (\cos \vartheta); \\ h(\lambda) &= \cos m\lambda \text{ або } \sin m\lambda. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Отже, геопотенціал можна представити рядом еліпсоїдальних гармонік

$$V(u, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} \cdot [a_{nm} P_{nm} (\cos \vartheta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm} (\cos \vartheta) \sin m\lambda] \quad (2.54)$$

У (2.54) b – мала піввісь довільного, але зафіксованого еліпсоїда обертання, який можна назвати референц-еліпсоїдом (рис. 2.6). Ділення на $Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)$

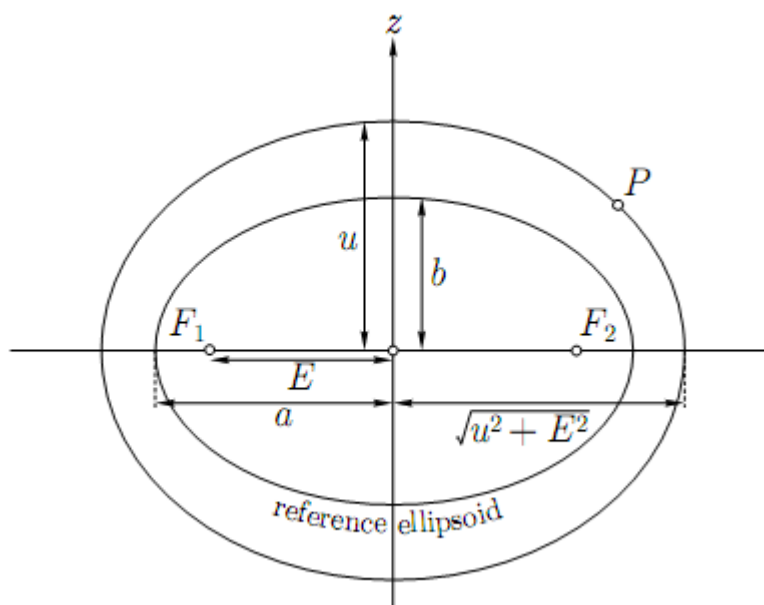


Рис. 2.6. Референц-еліпсоїд і еліпсоїдальні координати

допустиме, бо він виражає сталу величину. Це робиться з метою спростити вираз (2.54) і зробити коефіцієнти a_{nm} і b_{nm} дійсними.

Якщо ексцентриситет прямуватиме до нуля, то велика і мала півосі еліпсоїда стануть рівні радіусу сфери і гранично отримаємо [2]:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} = \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1}. \quad (2.55)$$

Таким чином, в ряд за сферичними функціями можна розкласти не тільки функції, задані на сфері. Такий розклад можливий для довільної функції, що задана на гладкій поверхні.

2.4 Максвелова теорія полюсів

Розглянемо сферу довільного радіуса з центром в початку координат. Будь-яка пряма з напрямними косинусами a , b , c , що проходить через початок координат, називається віссю, а точка перетину осі з поверхнею сфери – полюсом даної осі. Різні осі відрізняються за допомогою індексів, віднесених до відповідних напрямних косинусів. Позначивши через λ_i косинус кута, утвореного радіус-вектором r , що йде в точку (x, y, z) , з віссю (a_i, b_i, c_i) , отримаємо

$$\lambda_i = \frac{a_i x + b_i y + c_i z}{r}. \quad (2.56)$$

Очевидно, косинус кута μ_{ij} між двома осями з індексами i та j матиме вигляд

$$\mu_{ij} = a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j. \quad (2.57)$$

Введемо оператор диференціювання по осі h_i :

$$\frac{\partial}{\partial h_i} = a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.58)$$

Ту чи іншу функцію можна диференціювати спершу по одній осі, потім по іншій і т.д. Якщо ці осі позначити відповідно h_1, h_2, \dots, h_n , то оператор диференціювання набуде вигляду [52]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} f(x, y, z) \equiv & \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \dots \\ & \dots \left(a_n \frac{\partial}{\partial x} + b_n \frac{\partial}{\partial y} + c_n \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Таким чином, вираз для сферичної функції (2.4) можна подати за допомогою оператора диференціювання (2.59) :

$$Y_n = r^{n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \frac{1}{r} = S \left\{ (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^{n-m} n!(n-m)!} \sum (\lambda^{n-2m} \mu^m) \right\}, \quad (2.60)$$

де оператор S означає взяття суми по m від $m=0$ до $m=\frac{1}{2}n$ або $m=\frac{1}{2}(n-1)$ в залежності від парності чи непарності n . Вираз (2.60) називається загальною формулою Максвелла для сферичної функції з заданими полюсами [52].

Вираз для кульової функції (2.9) можна подати у наступному вигляді

$$V_n = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.61)$$

де M_n – момент функції V_n .

Таким чином, функція V_n , записана в формі (2.61), має $(2n+1)$ незалежних параметрів, а саме момент M_n і $2n$ величин, що визначають її n осей або координати n полюсів. Часткові випадки функцій (2.61) обумовлені численними значеннями їх моментів і напрямку осей. Отже, при розкладі зовнішнього гравітаційного потенціалу за кульовими функціями характеристиками поля можуть бути не тільки гармонічні коефіцієнти $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$, але і параметри Максвелла M_n, \bar{h}_i .

Максвелл отримав вираз (2.61) для кульової функції, зв'язуючи його з потенціалом спеціального точкового об'єкта – мультиполя, що привело до фізичного трактування V_n (наприклад, V_0 – потенціал точкового „заряду”, V_1 – потенціал диполя і т.д. ...). Розглянемо детальніше процес побудови такого об'єкта.

Потенціальна функція $V_0 = \frac{e_0}{r}$ називається потенціалом, створеним особливою точкою порядку нуль в початку координат (випадок центрального мультиполя); e_0 – сила цієї особливої точки.

Нехай особлива точка порядку нуль і сили e_0 лежить на осі h_1 , на відстані α_0 від початку координат. Також уявімо, що початок координат являє собою особливу точку з силою $-e_0$. Тепер нехай e_0 необмежено зростає і α_0 необмежено

спадає, при чому добуток $e_0\alpha_0$ весь час залишається рівним деякій сталій величині e_1 . Тоді початок координат називається особливою точкою першого порядку сили e_1 з напрямком h_1 . Таким чином, особлива точка першого порядку складається із двох особливих точок нульового порядку нескінченної сили, таких, що добуток їх сили на відстань між ними є величина стала. Особливу точку першого порядку часто називають диполем [52].

Аналогічно, помістивши особливу точку першого порядку сили $-e_1$ в початку координат, а іншу – сили e_1 – на відстані α_1 по осі h_2 від початку і потім необмежено збільшуючи e_1 і відповідно зменшуючи α_1 так, щоб $e_1 \alpha_1 = e_2$ (e_2 – стала величина), ми отримаємо особливу точку другого порядку і сили e_2 , розміщену в початку координат, і яка має осі h_1 і h_2 .

Виконуючи аналогічні дії, можна прийти до поняття особливої точки порядку n (або мультиполя) сили e_n , що розміщена в початку координат і має задані n осей h_1, h_2, \dots, h_n .

При регіональних і локальних дослідженнях використовують інші види базисних функцій, як правило, в комбінації зі скінченним набором кульових гармонік до певної степені. Використання максвелової теорії кульових функцій, пов'язаної з їх „фізичним трактуванням” як потенціалів мультиполів, а також застосування концепції сфери Б'єрхаммара або сфери регуляризації дають можливість побудови цілого класу гармонійних функцій – потенціалів нецентральных мультиполів – подібних своїми властивостями [1].

Основна властивість мультиполя полягає в тому, що його потенціал зменшується обернено пропорційно r^{n+1} [10, 76]. Це може бути використаним для вибору відповідної системи базових функцій з необхідними властивостями при вирішенні прикладних задач, пов'язаних з апроксимацією геопотенціалу. Варто відзначити, що для моделювання гравітаційного потенціалу досить успішно застосовують фундаментальні рішення рівняння Лапласа $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$, „поміщені” в деяку множину точок $\{X_i\}$ всередині сфери σ_B Б'єрхаммара на деякій поверхні σ_A Ляпунова (рис. 2.7.).

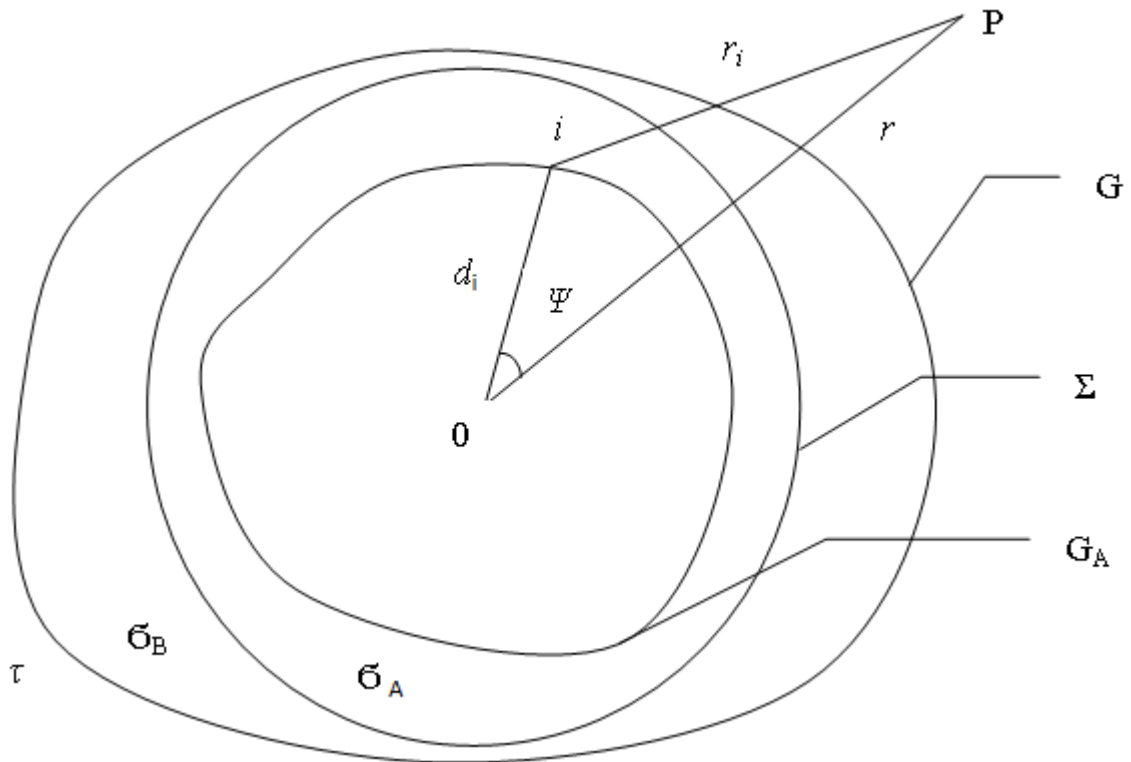


Рис. 2.7. Сфера Б'ерхаммара

Таким чином, опис поля функціями $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ зручно трактувати як апроксимацію функції V набором потенціалів точкових мас або нецентрального гравітаційних мультиполів нульового порядку [23]. При цьому кожен із потенціалів $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ може бути представлений в вигляді нескінченного ряду (рис. 2.7.)

$$\frac{1}{r_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_i^k}{r^{k+1}} P_k(\cos \psi_i), \quad (2.62)$$

який сходиться при $r > d_i$, або нескінченного набору гравітаційних мультиполів різних порядків, розміщених в початку координат [64].

Отже, використаємо метод диференціювання до потенціалів нульового порядку $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$, які знаходяться в точках $\{X_i\}$ поверхні σ_A .

Тоді однократне диференціювання – при використанні (2.61) для $n = 1$ – приводить до системи диполів, розміщених в точках $\{X_i\}$, кожен із яких має потенціал

$$V_1^{(i)} = -M_1 \frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{1}{r_i} \right). \quad (2.63)$$

Узагальнюючи результат (2.63), можна отримати в точках $\{X_i\}$ систему нецентральных гравітаційних мультиполів n -го порядку з потенціалами

$$V_n^{(i)} = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r_i} \right). \quad (2.64)$$

У (2.64) індекс (i) вказує як на залежність внутрішньої точки i від координат, так і на той факт, що в (2.64) необов'язкове диференціювання по одних і тих же напрямках $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n$ для всієї множини функцій $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$.

В принципі, в кожній точці множини $\{X_i\}$ можливе розміщення нецентральных мультиполів n -го порядку, які відрізнятимуться один від одного як величинами моментів, так і напрямками осей.

Замінюючи в (2.64) функцію $\frac{1}{r_i}$ збіжним рядом (2.62) при $r > R_B$ для всієї сукупності нецентральных мультиполів поза сферою Б'єрхаммара радіусу R_B , отримаємо замість (2.64)

$$V_n^{(i)} = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d_i}{r} \right)^k P_k(\cos \psi_i) \right). \quad (2.65)$$

Легко бачити, що застосування даного методу диференціювання для побудови розв'язків рівнянь Лапласа до кульової функції V_l порядку l приведе до

$$\frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} V_l = V_{l+n} \quad (2.66)$$

такої ж кульової функції, тільки порядку $l + n$. Якщо відомі гармонічні коефіцієнти V_l , то гармонічні коефіцієнти V_{l+n} можна легко обчислити за допомогою рекурсивних співвідношень Р.Джеймса [57]

$$\left. \begin{aligned} 2A_i^m &= a_i \left[(1 + \delta_{m1}) \alpha_i^m A_{i-1}^{m-1} - \beta_i^m A_{i-1}^{m+1} \right] - b_i \left[\alpha_i^m B_{i-1}^{m-1} + \beta_i^m B_{i-1}^{m+1} \right] + 2c_i \gamma_i^m A_{i-1}^m, \\ 2B_i^m &= a_i \left[\alpha_i^m B_{i-1}^{m-1} - \beta_i^m B_{i-1}^{m+1} \right] + b_i \left[(1 + \delta_{m1}) \alpha_i^m A_{i-1}^{m-1} + \beta_i^m A_{i-1}^{m+1} \right] + 2c_i \gamma_i^m B_{i-1}^m, \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1}^m &= \left[\frac{1}{2} (2 - \delta_{m1}) (i + m) (i + m + 1) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \beta_{i+1}^m &= \left[(1 + \delta_{m0}) (i - m) (i - m + 1) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_{i+1}^m &= \left[(i - m + 1) (i + m + 1) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

В (2.67) і (2.68) δ_{mp} – символ Кронекера; при $m < 0$ і $m > i$ $A_i^m = 0$, при $m \leq 0$ або $m > i$ $B_i^m = 0$; (a_i, b_i, c_i) – напрямні косинуси i -ої осі сферичної функції Y_n .

Таким чином, ми отримуємо для кожного n за допомогою операції диференціювання в точках множини $\{X_i\}$ набори спеціальних точкових об'єктів – мультиполів n -го порядку, потенціали яких утворюють гармонічні функції поза сферою Б'єрхаммара [99].

2.5 Радіальні мультиполя

Теорія Максвела-Гаусса сферичних функцій була узагальнена Марченком [15-18].

У виразі (2.64) для потенціалів \mathcal{G}_n^i в загальному випадку наявні $2n$ параметрів, що характеризують напрямки осей $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n$. Тому практичне використання виразів типу (2.64) може виявитися занадто складним. Очевидно, необхідно спробувати зменшити ці $2n$ параметрів для кожної точки i на поверхні σ_A , зберігши при цьому необхідні якості функцій \mathcal{G}_n^i .

Таким чином, уявімо, що всі осі $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n$ збігаються з деяким напрямком \bar{O}_i . Тоді (2.64) для такого часткового випадку можна подати у вигляді

$$\tilde{V}_n^i = M_n \tilde{g}_n^i = \frac{M}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial d_i^n} \left(\frac{1}{r_i} \right), \quad (2.69)$$

де n – кратне диференціювання вигідно проводити по параметру d_i , який входить в наступний вираз:

$$r_i = \sqrt{r^2 + d_i^2 - 2rd_i \cos\psi_i}. \quad (2.70)$$

Оскільки напрямок \bar{O}_i збігається з напрямком радіус-вектора d_i , потенціал (2.69) називається потенціалом нецентрального радіального мультиполя n -го порядку.

Розглянемо потенціали

$$\tilde{g}_n^i = \frac{\tilde{V}_n^i}{M_n} \quad (2.71)$$

скінченних наборів радіальних мультиполів n -го порядку, розміщених всередині сфери Б'єрхаммара. Для отримання аналітичних виразів потенціалів \tilde{g}_n^i для довільного n можна, наприклад, виконати пряме диференціювання (2.69) з врахуванням (2.70).

Таким чином, після деяких математичних перетворень знаходимо наступні співвідношення для радіальних мультиполів перших порядків:

$$\tilde{g}_0^i = \frac{1}{r_i}, \quad (2.72a)$$

$$\tilde{g}_1^i = \frac{r \cos\psi_i - d_i}{r_i^3} = \frac{r^2 - r_i^2 - d_i^2}{2d_i r_i^3}, \quad (2.72b)$$

$$\tilde{g}_2^i = r_i \left[\frac{3}{2} (\tilde{g}_1^i)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_i} \right)^4 \right], \quad (2.72b)$$

$$\tilde{g}_3^i = r_i^2 \left[\frac{5}{2} (\tilde{g}_1^i)^3 - \frac{3}{2} \tilde{g}_1^i \left(\frac{1}{r_i} \right)^4 \right], \quad (2.72\text{г})$$

$$\tilde{g}_4^i = r_i^3 \left[\frac{35}{8} (\tilde{g}_1^i)^4 - \frac{30}{8} (\tilde{g}_1^i) \left(\frac{1}{r_i} \right)^4 + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{r_i} \right)^8 \right] \quad (2.72\text{г})$$

Легко бачити, що, використавши узагальнену формулу Максвела для потенціалу нецентрального мультиполя одиничного моменту

$$g_n^i = r_i^{n-1} \left\{ S \left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n!(n-s)!} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right] \right\}, \quad (2.73)$$

а також вирази (2.72), можна побудувати співвідношення для обчислення потенціалів радіальних нецентрального мультиполів одиничного моменту

$$\tilde{g}_n^i = r_i^{n-1} \sum_m (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} (\tilde{g}_1^i)^{n-2m} \left(\frac{1}{r_i} \right)^{4m}, \quad (2.74)$$

де сумування по m проводиться від $m = 0$ до $m=n/2$ при n – парному і $m=(n-1)/2$ при n – непарному.

Використовуючи формулу (2.74), можна без проблем знаходити потенціал радіального мультиполя. Вираз (2.74) можна представити в дещо іншій формі. Якщо перейти в місцеву систему координат, яка співпадає з точкою i , і замість (2.72б) ввести наступний вираз для потенціального радіального диполя

$$\tilde{g}_1^i = \frac{\cos \varphi_i}{r_i^2}, \quad (2.75)$$

де φ_i – кут (з вершиною в точці i) між віссю диполя і напрямком r_i , то після підстановки (2.75) в (2.74) остаточно отримаємо:

$$\tilde{g}_n^i = r_i^{-(n+1)} \left\{ \sum_m (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} (\cos \varphi_i)^{n-2m} \right\}. \quad (2.76)$$

Вираз , що знаходиться в фігурних дужках (2.76) – це не що інше як поліном Лежандра n -го порядку відносно $x = \cos\varphi_i$. Таким чином, для „зонального” випадку

$$\bar{g}_n^i = \frac{P_n(\cos\varphi_i)}{r_i^{n+1}}. \quad (2.77)$$

Використавши відомі рекурсивні формули для поліномів Лежандра

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (2.78)$$

де n – порядок поліному Лежандра $P_n(x)$, неважко знайти рекурсивні співвідношення для безпосереднього обчислення потенціалів радіальних мультиполів (2.77) :

$$n\tilde{g}_n^i = (2n-1)r_i\tilde{g}_1^i\tilde{g}_{n-1}^i - (n-1)\tilde{g}_{n-2}^i\left(\frac{1}{r_i}\right)^2. \quad (2.79)$$

Слід відмітити ще один спосіб представлення радіальних нецентральных мультиполів \tilde{g}_n^i у вигляді ряду за кульовими функціями. Отже, після підстановки виразу (2.62) у формулу (2.79) і почленного диференціювання отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n^i &= \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) \frac{d_i^{k-n}}{r^{k+1}} P_k(\cos\psi_i) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{d_i^{k-n}}{r^{k+1}} P_k(\cos\psi_i) = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \frac{d_i^{k-n}}{r^{k+1}} P_k(\cos\psi_i), \quad \left(C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!} \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Отже, із (2.80) видно, що в розкладі потенціалів радіальних мультиполів \tilde{g}_n^i по кульових функціях відсутні члени від нульового до $(n-1)$ -го порядку, натомість присутні біноміальні коефіцієнти C_k^n .

Вкрай важливою задачею є знаходження екстремуму для потенціалу радіального мультиполя \tilde{g}_n^i n -го порядку. Оскільки поза сферою Б'єрхаммара σ_B потенціал \tilde{g}_n^i являє собою гармонійну функцію, що зменшується на нескінченності обернено пропорційно r^{n+1} , то така функція може приймати стаціонарні значення на границі області її визначення, тобто на сфері σ_B . Очевидно, необхідно знайти умови, для яких функція \tilde{g}_n^i приймає стаціонарні значення на сфері.

Використаємо метод Лагранжа, попередньо створивши допоміжну функцію

$$\tau_n^i(x, y, z) = \tilde{\mathcal{G}}_n^i(x, y, z) - \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - R_B^2), \quad (2.81)$$

де λ – невизначений множник Лежандра.

Таким чином, легко бачити, що координати стаціонарних точок задовольняють наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}_n^i}{\partial x} - \lambda x &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}_n^i}{\partial y} - \lambda y &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}_n^i}{\partial z} - \lambda z &= 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Очевидно, рівняння (2.82) разом із рівнянням сфери

$$R_B^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.83)$$

дають можливість знаходження значень λ і координат стаціонарних точок, тобто рішення задачі в загальному вигляді.

Використавши рівняння (2.77), і взявши до уваги головні властивості поліномів Лежандра і головну властивість мультиполя, можна прийти до висновку, що в точці А ($\cos\varphi_i = 1$) потенціал радіального мультиполя n -го порядку набуватиме найбільше значення порівняно з його іншими значеннями на σ_B . Оскільки дана точка стаціонарна, легко бачити, що в А функція $\tilde{\mathcal{G}}_n^i$ має максимум.

Можна сказати, що поліном $P_n(\cos\varphi_i)$ ділить сферу σ_i на $n+1$ зону. Як добре відомо, даний поліном має n нерівних дійсних коренів $\varphi^{(m)}$ ($1 \leq m \leq n$), які є симетричними відносно $\cos\varphi_i = 0$, тобто симетрично відносно екватора сфери σ_i . Таким чином, поліном $P_n(\cos\varphi_i)$ рівний нулю на паралелях, що розділяють зони, і всередині кожної з них набуває додатне або від'ємне значення.

Наближені значення $\varphi^{(m)}$ можна знайти, використовуючи наступну формулу:

$$\varphi^{(m)} = \frac{4m-1}{4n-2}\pi + \frac{1}{8n^2} \operatorname{ctg} \frac{4m-1}{4n-2}\pi + (n^{-3}). \quad (2.84)$$

Проте на відміну від поліномів $P_n(\cos\varphi_i)$ в даному випадку розподіл зон не є симетричним відносно екватора $\cos\varphi_i = 0$ сфери σ_B .

Варто відзначити, що знаючи нулі φ_i , легко визначити $\psi_i^{(m)}$ (рис. 2.8) для \tilde{g}_n^i на σ_B за допомогою співвідношення

$$\cos\psi_i^{(m)} = h_i \sin^2 \varphi_i^{(m)} + \cos\varphi_i^{(m)} \sqrt{1 - h_i^2 \sin^2 \varphi_i^{(m)}}, \quad h_i = \frac{d_i}{R_B}. \quad (2.85)$$

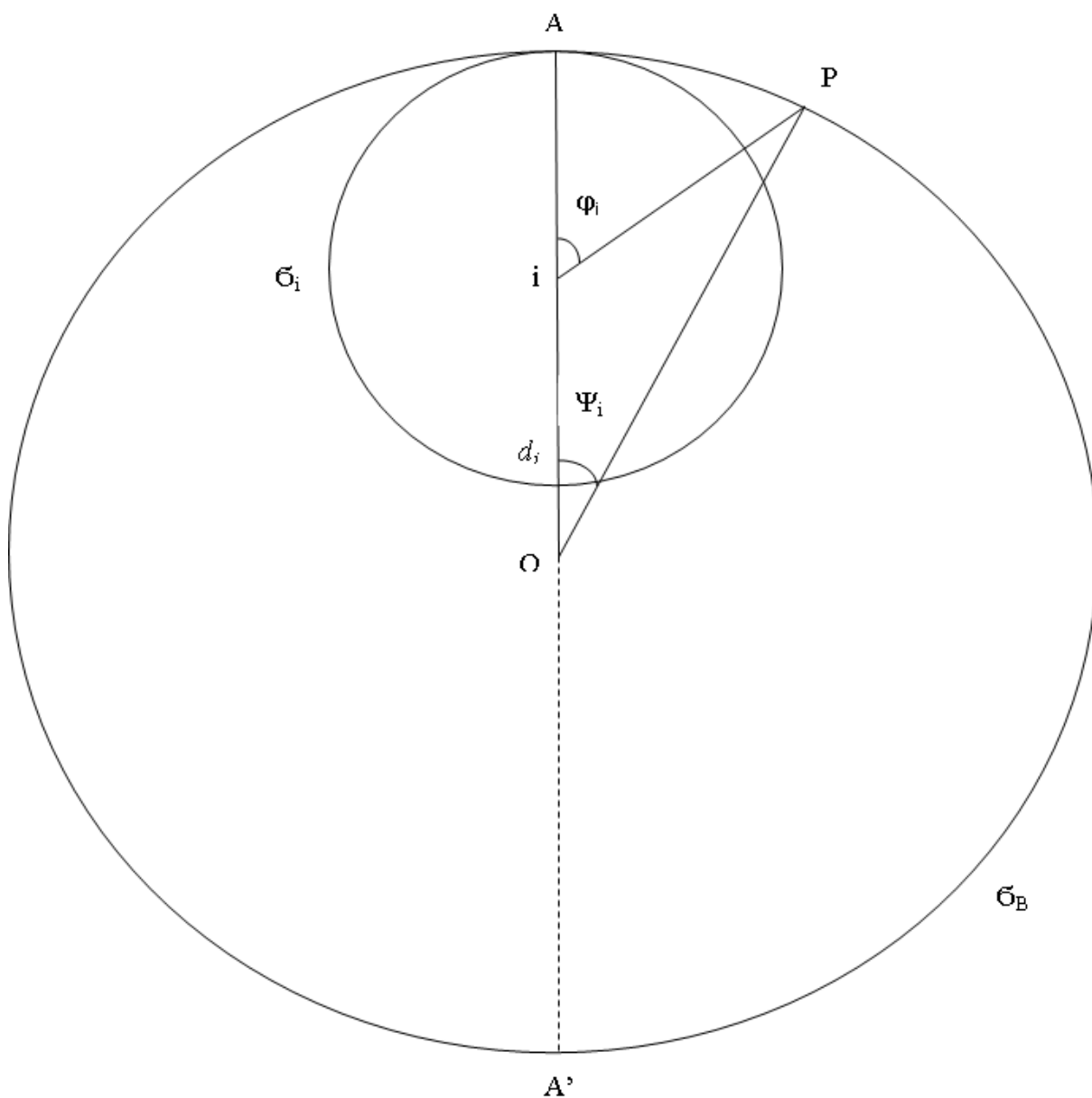


Рис. 2.8 Сферичний кут $\psi_i^{(m)}$

Також слід відмітити, що за допомогою формул (2.84) та (2.85) можна легко знайти величини $\psi_i^{(1)}$, при яких потенціали \tilde{g}_n^i перший раз перетворюються в нуль на σ_B .

2.6 Середня квадратична колокація

Оскільки аномалії Δg мають випадковий стохастичний характер, їхнє середнє значення по всій поверхні Землі рівне нулю [79]

$$M\{\Delta g\} \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g d\sigma = 0, \quad (2.86)$$

де символ M – це середньоінтегральне значення по всій Землі (по одиничній сфері σ). Інтеграл (2.86) рівний нулю, коли в розкладі аномалій прискорення вільного падіння в ряд по кульових функціях відсутній нульовий степінь, тобто коли референц-еліпсоїд має ту ж масу, що і маса Землі, і такий же потенціал, як і на геоїді. Якщо ж ці умови не виконуються, тобто

$$M\{\Delta g\} = m \neq 0, \quad (2.87)$$

завжди можна сформулювати нові аномалії сили тяжіння $\Delta g^* = \Delta g - m$, які будуть центрованими.

Оскільки нульова величини $M\{\Delta g\}$ не може характеризувати середнє значення аномалій сили тяжіння, вводиться середній квадрат Δg

$$\text{var}\{\Delta g\} \equiv M\{\Delta g^2\} \equiv \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^2 d\sigma. \quad (2.88)$$

Така характеристики називається дисперсією аномалій прискорення вільного падіння. Квадратний корінь із дисперсії – це середньоквадратичне значення аномалії прискорення вільного падіння

$$\text{rms}\{\Delta g\} \equiv \sqrt{\text{var}\{\Delta g\}} = \sqrt{M\{\Delta g^2\}}. \quad (2.89)$$

Величина середньоквадратичної аномалії в (2.89) може бути як додатною, так і від'ємною.

Замість середнього квадрату Δg розглянемо середній добуток аномалій прискорення вільного падіння $\Delta g \Delta g'$ для кожної пари точок P і P' , розміщених

на фіксованій відстані одна від одної s . Такий середній добуток називається коваріацією аномалій сили тяжіння для відстані s і визначається як

$$\text{cov}_s\{\Delta g\} \equiv M\{\Delta g \Delta g'\}. \quad (2.90)$$

У (2.90) усереднення виконується по всіх парах точок P і P' , для яких $PP' = s = \text{const}$.

Коваріації характеризують статистичну кореляцію аномалій прискорення вільного падіння Δg і $\Delta g'$, тобто їх тенденцію мати однакову величину і однаковий знак. Якщо коваріація рівна нулю, то аномалії Δg і $\Delta g'$ не корелюють між собою, тобто величина Δg не має ніякого впливу на величину $\Delta g'$. Аномалії прискорення вільного падіння, розміщені далеко одна від одної, можна вважати некорельованими, тому що локальні збурення, які викликає Δg , не мають практично ніякого впливу на $\Delta g'$, і навпаки [47, 109].

Якщо розглядати коваріацію як функцію відстані $s = PP'$, то ми отримаємо коваріаційну функцію $C(s)$ [66]

$$C(s) = \text{cov}_s\{\Delta g\} \equiv M\{\Delta g \Delta g'\} \quad (PP' = s). \quad (2.91)$$

Очевидно, якщо в (2.91) прийняти $s = 0$, то згідно (2.88) отримаємо

$$C(0) = M\{\Delta g^2\} = \text{var}\{\Delta g\}. \quad (2.92)$$

Таким чином, при $s = 0$ коваріаційна функція перетворюється в дисперсію.

Типовий графік коваріаційної функції показано на рисунку 2.9.

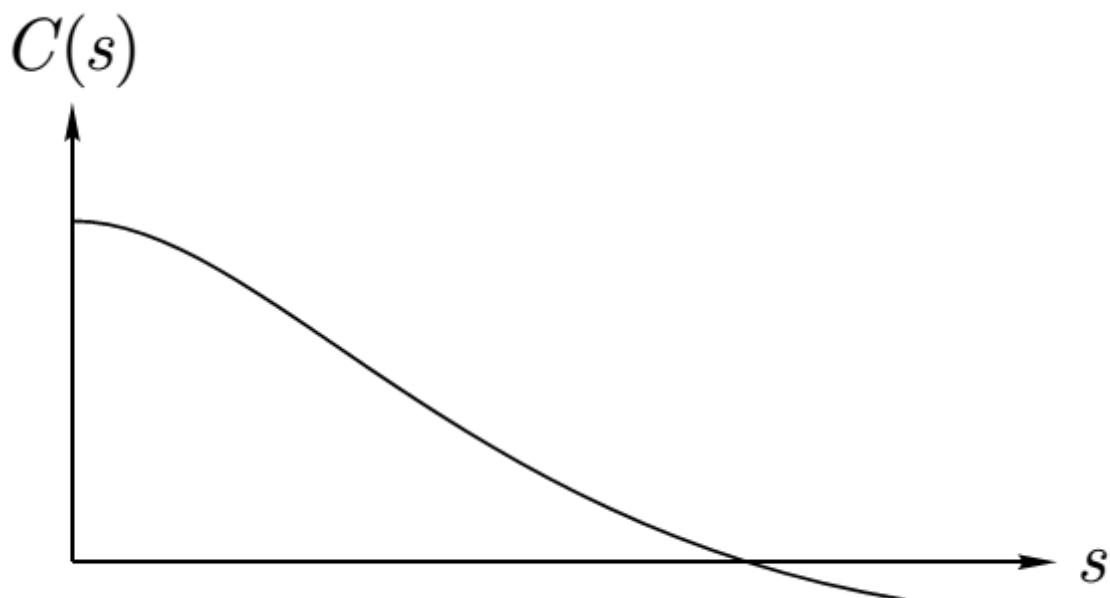


Рис. 2.9 Графік коваріаційної функції

Додатні коваріації означають, що Δg і $\Delta g'$ мають тенденцію співпадати по величині і знаку. В свою чергу, від'ємні коваріації вказують на протилежний знак. Чим сильніша така тенденція, тим більше значення функції $C(s)$. Проте абсолютне значення функції $C(s)$ не може бути більшим за дисперсію.

Практичне визначення коваріаційної функції $C(s)$ дещо проблематичне. Для точного визначення коваріаційної функції необхідно знати силу тяжіння в кожній точці земної поверхні. Практично ми можемо оцінити коваріаційну функцію за вибірками, розподіленими по всій Землі чи її локальних областях.

Для аналітичного представлення коваріаційної функції можна використовувати вираз

$$C(s) = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{s}{d}\right)^2}, \quad (2.93)$$

де C_0 – дисперсія.

Більш складний, проте точніший вираз для глобальної коваріаційної функції можна подати в наступному вигляді

$$C(P, Q) = A \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} s^{n+2} P_n(\cos\psi), \quad (2.94)$$

де $P_n(\cos\psi)$ – поліноми Лежандра степеня n , ψ – сферична відстань між точками P і Q , а A , B і s – параметри моделі.

Для локальної коваріаційної функції вираз (2.94) переписеться в наступному вигляді

$$C(P, Q) = A \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} s^{n+2} P_n(\cos\psi). \quad (2.95)$$

Як відомо, інтегральні формули фізичної геодезії часто набувають простішу форму, якщо їх переписати в вигляді ряду по кульових функціях. Розкладемо коваріаційну функцію $C(s)$ в ряд по кульових функціях. Для цього візьмемо довільну, але фіксовану точку P в якості полюсу даного розкладу і введемо сферичні полярні координати ψ (кутова відстань від P) і α (азимут), показані на рисунку 2.10.

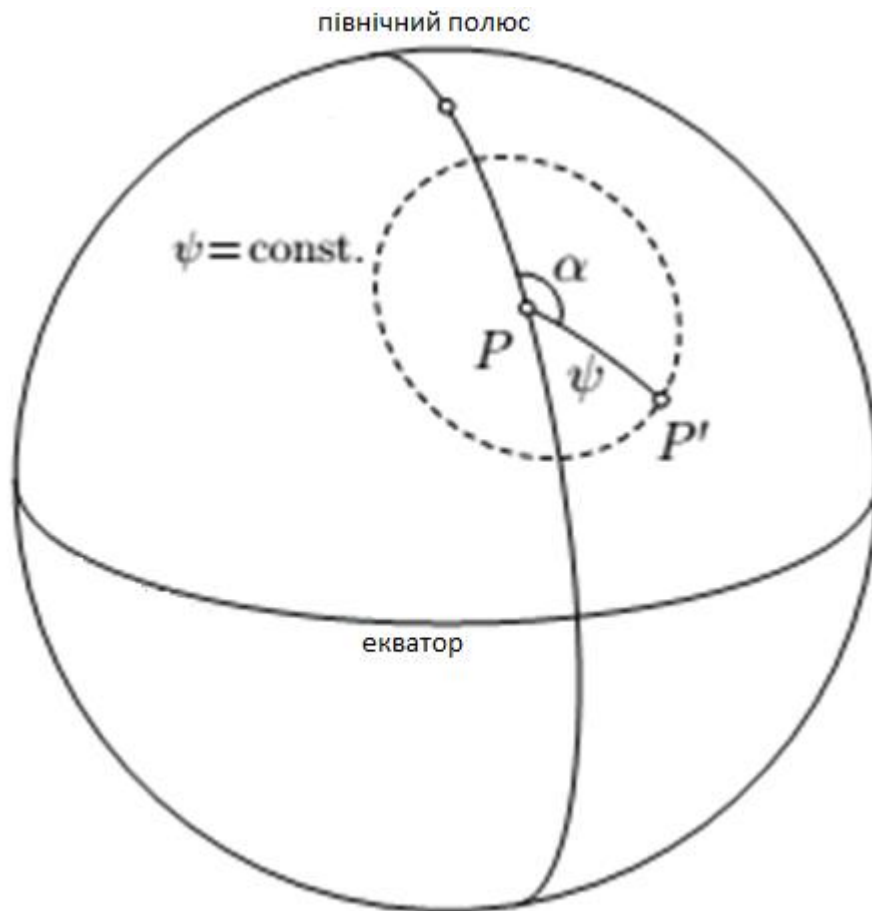


Рис. 2.10 Полярні координати на сфері

Розклад коваріаційної функції аргумента ψ в ряд по сферичних функціях відносно полюсу P і координат ψ і α має вигляд

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [c_{nm} R_{nm}(\psi, \alpha) + d_{nm} S_{nm}(\psi, \alpha)]. \quad (2.96)$$

C залежить тільки від відстані ψ і не залежить від азимуту α , тому у виразі (2.96) залишаються тільки зональні гармоніки

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos\psi). \quad (2.97)$$

Допустимо, існують дві множини випадкових величин – множина вимірів l_1, l_2, \dots, l_q , які утворюють q -вимірний вектор

$$l = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_q]^T, \quad (2.98)$$

і множина сигналів s_1, s_2, \dots, s_m , які утворюють m -вимірний вектор

$$s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^T, \quad (2.99)$$

де верхній індекс T означає транспонування.

Нехай математичне сподівання цих величин рівне нулю

$$\begin{aligned} M\{l\} &= 0; \\ M\{s\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Розглянемо також коваріаційні матриці

$$\begin{aligned} C_{ll} &= \text{cov}(l, l); \\ C_{sl} &= \text{cov}(s, l); \\ C_{ss} &= \text{cov}(s, s), \end{aligned} \quad (2.101)$$

де C_{ll} і C_{ss} – автоковаріаційні матриці векторів l та s відповідно, C_{sl} – матриця коваріацій між l та s .

Згідно [22], елементи матриці C_{ll} є рівні

$$M\{l_i l_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \quad (2.102)$$

елементи матриці C_{sl} є

$$M\{s_k l_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (2.103)$$

а елементи матриці C_{ss} рівні

$$M\{s_k s_h\}, \quad h = 1, 2, \dots, m. \quad (2.104)$$

У векторному позначенні

$$\begin{aligned} C_{ll} &= M\{ll^T\}, \\ C_{sl} &= M\{sl^T\}, \\ C_{ss} &= M\{ss^T\}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Звичайно вважається, що всі перелічені матриці мають повний ранг.

Лінійна оцінка вектора s має вигляд

$$\hat{s} = Hl, \quad (2.106)$$

де H – деяка матриця розмірності $m \times q$.

Вектор помилок ε визначається відношенням

$$\varepsilon = \hat{s} - s, \quad (2.107)$$

а його коваріаційна матриця

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = \text{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = M\{(\hat{s} - s)(\hat{s} - s)^T\} \quad (2.108)$$

називається коваріаційною матрицею помилок.

Згідно загальної теорії статистичного оцінювання, найкраща лінійна оцінка s по l – це найбільш надійна незміщена лінійна оцінка з мінімальною дисперсією. З цієї точки зору формулу (2.106) можна переписати у вигляді

$$\hat{s} = C_{sl} C_{ll}^{-1} l, \quad (2.109)$$

що і забезпечує найкращу лінійну оцінку вектора s сигналу в функції вектора вихідних даних l .

Вираз (2.109) називається формулою середнього квадратичного прогнозу, оскільки він – точний аналог формули Колмогорова-Віннера, добре відомої з теорії стохастичних процесів [45, 43].

Даний метод прогнозу можна використовувати для інтерполяції чи екстраполяції аномалій сили тяжіння. Наприклад, маємо вектор вимірних значень сили тяжіння

$$l = [\Delta g_1 \Delta g_2 \dots \Delta g_q]^T \quad (2.110)$$

в точках P_i . Нехай

$$s = \Delta g_P \quad (2.111)$$

є шуканою аномалією сили тяжіння в точці P . Тоді згідно формули (2.109) можна записати

$$\Delta g_P = [C_{P1} C_{P2} \dots C_{Pq}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ & & \vdots & \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \vdots \\ \Delta g_q \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Всі коваріаційні функції в (2.112) визначаються однією і тією ж коваріаційною функцією $C(d)$, яку можна визначити, наприклад, використовуючи формули (2.101).

Одним з методів визначення аномального гравітаційного поля шляхом комбінування геодезичних вимірів різних видів є середня квадратична колокація [78, 61].

Розглянемо середній квадратичний прогноз у випадку, коли сигналом s є значення збурюючого потенціалу $T(P)$ в деякій точці P , а виміри, що утворюють вектор l , є довільними характеристиками аномального гравітаційного поля, наприклад, значення аномалій сили тяжіння Δg або відхилення прямовисних ліній ξ, η . Будь-яку із таких характеристик можна представити у вигляді лінійного функціоналу на потенціалі T . Наприклад, в сферичній апроксимації [93, 110]

$$\begin{aligned} \Delta g &= -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T, \\ \xi &= \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \\ \eta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (2.113)$$

де r, θ, λ – сферичні координати.

В загальному вигляді маємо

$$l_i = L_i T, \quad (2.114)$$

або

$$l = BT, \quad (2.115)$$

де вектор B включає функціонали L_i :

$$B = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_q \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

Таким чином, необхідно знайти T , використовуючи q значень $L_i T$ лінійних функціоналів, отриманих із вимірів. Визначення функції шляхом підбору аналітичної апроксимації до визначеного числа заданих лінійних функціоналів називається колокацією і часто використовується в математиці. Тому такий метод визначення гравітаційного поля називається середньою квадратичною колокацією [22].

Використання в даній задачі формули (2.110) дає вираз

$$\hat{T}(P) = [C_{p1} C_{p2} \dots C_{pq}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

але коваріації тут інші.

В формулі (2.117) маємо

$$\begin{aligned}C_{P_i} &= \text{cov}(T(P), l_i) = M\{T(P)l_i\}, \\C_{ij} &= \text{cov}(l_i, l_j) = M\{l_i l_j\}.\end{aligned}\tag{2.118}$$

Формулу (2.114) можна переписати у вигляді

$$l_i = L_i^Q T(Q).\tag{2.119}$$

Таким чином, отримаємо

$$C_{P_i} = L_i^Q K(P, Q),\tag{2.120}$$

де $K(P, Q)$ – просторова коваріаційна функція збурюю чого потенціалу.

Подібним чином можна отримати

$$C_{ij} = L_i^P L_j^Q K(P, Q).\tag{2.121}$$

Необхідно відмітити, що ці формули є аналогом звичайних матричних формул для перетворення коваріацій у різних обчисленнях.

2.7 Висновки до розділу 2

В даному розділі описано та проаналізовано основні методи побудови гравітаційного поля, такі як розклад функції потенціалу в ряд за сферичними чи еліпсоїдальними функціями, використання радіальних та нецентральных мультиполів, середня квадратична колокація.

Кожен з вищеперечислених методів має свої переваги та недоліки:

1) розклад потенціалу в ряд за сферичними чи еліпсоїдальними функціями використовують виключно для моделювання глобального

гравітаційного поля, тому що в локальному регіоні вони стають неортогональними і призводять до поганої обумовленості матриці нормальних рівнянь;

2) радіальні та нецентральні мультиполя використовують для побудови глобального та регіонального гравітаційного поля відповідно;

3) метод середньої квадратичної колокації можна використовувати як для побудови глобального, так і регіонального гравітаційного поля, проте перед тим необхідно центрувати вихідні дані.

3. ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ НА СЕГМЕНТІ СФЕРИ ГРАВІТАЦІЙНИХ АНОМАЛІЙ У ВІЛЬНОМУ ПОВІТРІ

Для моделювання регіонального гравітаційного поля здебільшого використовують операційний підхід фізичної геодезії, зокрема, такі методи як середня квадратична колокація чи швидке перетворення Фур'є. В даному розділі проаналізовано модельний підхід для створення регіонального гравітаційного поля, а саме метод SCHA, а також інші алгоритми, такі як ASHA та TOSCA, які є дочірніми від SCHA. Цей метод передбачає використання сферичних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку.

Дві сферичні функції Лежандра $R_{nm}(\theta, \lambda)$ та $R_{sl}(\theta, \lambda)$ є ортогональними на сфері, тобто $\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sl}(\theta, \lambda) d\sigma = 0$, де σ – поверхня сфери. Проте якщо мова йде не про всю сферу, а про якусь довільну її частину, наприклад, сегмент сфери чи сферичну трапецію, то на такій частині сфери сферичні функції Лежандра не будуть ортогональними $\iint_{\sigma_0} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sl}(\theta, \lambda) d\sigma_0 \neq 0$, де σ_0 – сегмент сфери. Іншими словами, на сегменті сфери сферичні функції Лежандра втрачають свою ортогональність, що призводить до нестабільності матриці нормальних рівнянь при визначенні невідомих коефіцієнтів.

Проте, як показано, наприклад, в [49,96], існують дві системи функцій, які є ортогональними на сегменті сфери. Це сферичні функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку $R_{n_k m}(\theta, \lambda)$ та $R_{s_r l}(\theta, \lambda)$, де n_k та s_r – дійсні числа, які залежать від величини сегменту сфери, а k і r – індекси, які упорядковують ці числа. Вираз $\iint_{\sigma_0} R_{n_k m}(\theta, \lambda) R_{s_r l}(\theta, \lambda) d\sigma_0$ буде рівний нулю у двох випадках: якщо числа $k-m$ і $r-l$ обоє парні (перша система функцій) або обоє непарні (друга система функцій). Очевидно, в загальному, навіть ці функції не є ортогональними на сегменті сфери. Незважаючи на це, вони мають властивості (детально описані в даному розділі), які надають їм велику перевагу при побудові регіонального гравітаційного поля на сегменті сфери в порівнянні зі звичайними сферичними функціями Лежандра.

Тим не менше, досить складно знаходити як самі функції Лежандра цілого степеня і дійсного порядку, так і їхні норми, а також числа n_k . Проте ці проблеми перестають бути актуальними, якщо спроектувати вихідні дані з сегменту сфери на половину сфери. Такий алгоритм називається ASHA.

Здебільшого метод SCHА застосовувався для моделювання регіональних магнітних полів до низьких порядків [40,51,98,101,108]. У зв'язку з цим в даному розділі описується алгоритм побудови матриці нормальних рівнянь і знаходження невідомих коефіцієнтів SCHА- та ASHA-моделі, розроблений в межах даної дисертаційної роботи, який дає змогу суттєво зменшити час обчислень без втрати точності, а, отже, будувати регіональні гравітаційні моделі високих порядків.

3.1 Проблема Штурма-Ліувілля на сегменті сфери

„Глобальне” представлення гравітаційних полів за допомогою сферичних функцій є широко вивченим. Проте таке представлення не є надійним, коли виміри розміщені тільки на певній частині земної поверхні. Глобальні сферичні гармоніки втрачають свою ортогональність (2.14) на обмеженому регіоні і розв'язок стає нестабільним. В такому випадку доцільно використовувати функції, ортогональні в межах даного регіону (проте неортогональні на всій сфері) [40].

За локальний регіон можна прийняти „шапку” сфери (рис. 3.1.) або сегмент сфери (у двовимірному випадку) [72].

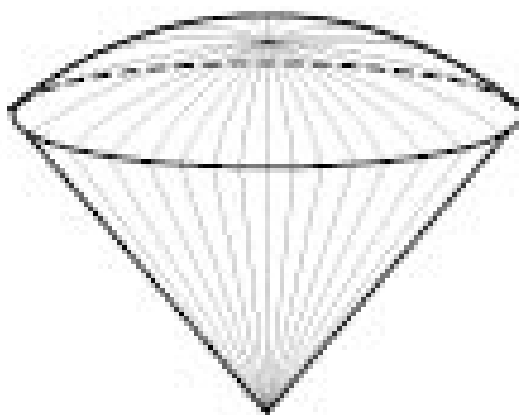


Рис. 3.1. „Шапка” сфери

Для моделювання потенціалу локального гравітаційного поля V необхідно знайти базову систему функцій, ортогональних на „шапці” сфери. Для цього використаємо розв’язок (2.3), який однаковий як для всієї сфери, так і для будь-якої її частини [59]. Із (2.3) видно, що n та m можуть бути цілими чи дійсними, реальними чи комплексними, навіть кватерніонами чи октавами. Проте для забезпечення ортогональності базової системи функцій потрібно знайти власні числа m^2 та $n(n+1)$ відповідно до частини сфери (або всієї сфери), на якій проводяться дослідження (наприклад, для всієї сфери n та m – цілі невід’ємні числа).

Для знаходження n та m для сегменту сфери ($\theta \leq \theta_0, r=1$) розв’яжемо задачу Штурма-Ліувіля. Для цього слід рівняння (2.3) перетворити до відповідного вигляду і накласти на них граничні умови [34].

Згідно теорії Штурма-Ліувіля будь-яке диференціальне рівняння другого порядку можна привести до вигляду

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = v w(x)y, \quad (3.1)$$

де y є функцією змінної x . У (2.1) функції $p(x) > 0$, $q(x)$ і $w(x) > 0$ вважаються відомими. У найпростіших випадках всі коефіцієнти є неперервними на скінченному закритому інтервалі $[a, b]$, і p має неперервні похідні. Функція y називається розв’язком рівняння (3.1), якщо вона диференційована на відрізку $[a, b]$ і задовільняє рівняння (3.1) в кожній точці $[a, b]$. Невідома функція y зазвичай задовільняє деяким граничним умовам в точках a та b . Функцію $w(x)$ називають ваговою функцією або функцією густини.

Таким чином, знаходження власних чисел v , для яких існує нетривіальний розв’язок рівняння (2.1), що задовільняє граничним умовам, є частиною проблеми Штурма-Ліувіля. Такі розв’язки (для відповідних v) називаються власними функціями [91].

Проблема Штурма-Ліувіля називається регулярною, якщо $p(x)$, $w(x) > 0$, а також $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ і $w(x)$ є неперервними функціями на скінченному інтервалі $[a, b]$ і мають розділені граничні умови

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0), \quad (3.2)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0). \quad (3.3)$$

Якщо проблема Штурма-Ліувіля є регулярною, згідно теорії Штурма-Ліувілля виконуються твердження :

- власні числа $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ регулярної проблеми Штурма-Ліувіля (3.1-3.3) є дійсними і можуть бути впорядковані наступним чином:

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_n < \dots \rightarrow \infty;$$

- для кожного власного числа існує відповідно єдина власна функція $y_n(x)$, яка має рівно $n - 1$ коренів на відрізку $[a, b]$;
- нормовані власні функції утворюють ортонормований базис

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = \delta_{nm}$$

в гільбертовому просторі $L^2([a, b], w(x)dx)$.

Легко бачити, що диференціальне рівняння сферичних функцій Лежандра відповідно до форми (3.1) набуде вигляду

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP_{nm}(\mu)}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P_{nm}(\mu) = 0, \quad (3.4)$$

де $\mu = \cos \theta$.

Граничні умови рівнянь (2.3) по довготі для всієї сфери мають вигляд

$$V_{nm}(r, \theta, \lambda) = V_{nm}(r, \theta, \lambda + 2\pi); \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial V_{nm}(r, \theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial V_{nm}(r, \theta, \lambda + 2\pi)}{\partial \lambda}. \quad (3.6)$$

Умови (3.5) і (3.6) обмежують значення m до реального і цілого. Тому вони виключають експоненціальні або гіперболічні тригонометричні функції, які пов'язані з комплексними значеннями m . Ці умови слугують причиною, чому (2.5в) – звичайні тригонометричні гармоніки.

Граничні умови по широті для всієї сфери мають вигляд [34]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{mm}(r, 0, \lambda)}{\partial \theta} &= 0 & m = 0 \\ \frac{\partial V_{mm}(r, 0, \lambda)}{\partial \theta} &= 0 & m \neq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_{mm}(r, \pi, \lambda)}{\partial \theta} &= 0 & m = 0 \\ \frac{\partial V_{mm}(r, \pi, \lambda)}{\partial \theta} &= 0 & m \neq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.8)$$

Умова (3.7) задовільняє функціям Лежандра першого роду і виключає функції Лежандра другого роду. В свою чергу, умова (3.8) обмежує n до реального і цілого.

Для знаходження власних чисел диференціальних рівнянь (2.3) на сегменті сфери потрібно накласти відповідні граничні умови [32]. Граничні умови по довготі для сегменту сфери збігаються з умовами для всієї сфери (3.5, 3.6). Також для сегменту сфери чинною буде умова (3.7) для широти. Проте при $\theta_0 \neq \pi$ функція V в θ_0 , а також її похідна по θ мусять бути довільними:

$$V(r, \theta_0, \lambda) = f_1(r, \lambda); \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = f_2(r, \lambda). \quad (3.10)$$

Умова (3.9) виконується тільки в тому випадку, якщо власне число $n_k(m)$ (k – індекс) приймає таке значення, що похідна від V по зеніту рівна нулю на границі сегменту

$$\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d\theta} = 0. \quad (3.11)$$

Умова (3.10) виконується тоді, коли власне число n_k приймає таке значення, що функція V рівна нулю на границі сегменту

$$P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0) = 0. \quad (3.12)$$

Дуже простим і наглядним є доведення (3.11) і (3.12). Покладемо, що в нас є дві функції [96]

$$y = P_{nm}(\mu); \quad y' = P_{n'm}(\mu). \quad (3.13)$$

Запишемо їх через відповідне диференціальне рівняння

$$(1-\mu^2)\frac{d^2y}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dy}{d\mu} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] y = 0, \quad (3.14)$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2y'}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dy'}{d\mu} + \left[n'(n'+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] y' = 0. \quad (3.15)$$

Домноживши рівняння (3.14) на y' , рівняння (3.15) – на y і віднявши їх, отримемо

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \left(y' \frac{dy}{d\mu} - y \frac{dy'}{d\mu} \right) \right] + (n-n')(n+n'+1)yy' = 0. \quad (3.16)$$

Проінтегрувавши (3.16), остаточно отримаємо [96]

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_k(m)m}(\mu) P_{n_j(m)m}(\mu) d\mu = - \frac{(1-\mu^2) \left(P_{n_k(m)m} \frac{dP_{n_j(m)m}}{d\mu} - P_{n_j(m)m} \frac{dP_{n_k(m)m}}{d\mu} \right)}{(n_k - n_j)(n_k + n_j + 1)} \Big|_{\mu_0}^1. \quad (3.17)$$

Очевидно, якщо замість μ у (3.17) підставити безпосередньо $\cos\theta$, то межі інтегрування стануть $\{\theta_0, 0\}$. Із (3.17) наочно видно справедливість формул (3.11) і (3.12).

Оскільки для θ існує дві граничні умови, а саме (3.7), (3.9) і (3.7), (3.10), то функції $P_{n_k(m)m}(\cos\theta)$ утворюють дві незалежні повні системи функцій. Перша з них утворюється при $(k-m) = \text{парне число}$, а друга – при $(k-m) = \text{непарне число}$ [49]. Як видно із (3.17), функції ортогональні на сегменті сфери за вагою $p = \sqrt{\sin\theta}$, тобто

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_j(m)m}(\cos\theta) P_{n_k(m)m}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0, \quad (3.18)$$

при чому $j \neq k$, а також $j-m$ і $k-m$ обоє або парні або непарні.

Якщо ж $j-m = \text{парне число}$ і $k-m = \text{непарне число}$, отримаємо наступний вираз:

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_j(m)m}(\cos\theta) P_{n_k(m)m}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{\sin\theta_0 \cdot P_{n_j(m)m}(\cos\theta_0)}{(n_k(m) - n_j(m)) \cdot (n_k(m) + n_j(m) + 1)} \left\{ \frac{dP_{n_k(m)m}(\cos\theta_0)}{d\theta} \right\}. \quad (3.19)$$

По аналогії з випадком для всієї сфери (2.12), довільну функцію на сегменті сфери можна розкласти в наступний ряд [98]:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{n_k(m)m}(\cos\theta) \cdot (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda). \quad (3.20)$$

Очевидно, невідомі коефіцієнти в (3.20) слід шукати способом найменших квадратів. В принципі, якщо функція $f(\theta, \lambda)$ не суперечить умовам (3.11) або (3.12), то можна використати ортогональність даних поліномів, обмежившись відповідно тільки однією системою функцій [30].

Дана техніка моделювання регіонального поля на сферичному сегменті дістала назву SCHA [8, 49, 50, 51].

3.2 Вибір зручних виразів для обчислення „нормованих” функцій Лежандра з дробовими індексами

Для знаходження функцій $P_{n_k(m)m}(\cos\theta)$ їх звичайно розкладають в гіпергеометричний ряд. Гіпергеометричний ряд – це ряд виду [55]

$$F(a, b, c, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{l=0}^{k-1} \frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)} \right] z^k = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (3.21)$$

Добре відомо, що похідна від такого ряду має вигляд

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b, c, z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n, c+n, z), \quad (3.22)$$

де $(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (a+i)$, $(a)_0 = 1$, та аналогічно для $(b)_n$ і $(c)_n$.

В свою чергу, поліноми Лежандра можна представити за допомогою гіпергеометричного ряду у вигляді

$$P_{n_k}(\cos\theta) = F(-n_k, n_k + 1, 1, \frac{1 - \cos\theta}{2}). \quad (3.23)$$

Отже, знаючи зв'язок між поліномами Лежандра і сферичними функціями

Лежандра першого роду

$$P_{n_k m}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} (P_{n_k}), \quad (3.24)$$

легко знаходимо вираз розкладу в гіпергеометричний ряд сферичних функцій Лежандра з цілим m і дійсним n :

$$P_{n_k m}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \mu}{2}\right). \quad (3.25)$$

Для знаходження власних чисел $n_k(m)$ можна використати формули (3.11) та (3.12). Тоді отримаємо [53, 55]:

$$\tilde{F}(n_k, m, \mu_0) = 0; \quad (3.26)$$

$$n_k \mu_0 \tilde{F}(n_k, m, \mu_0) - (n_k - m) \tilde{F}(n_k - 1, m, \mu_0) = 0; \quad (3.27)$$

де \tilde{F} – це умовне позначення (в жодному разі не путати з виродженим гіпергеометричним рядом Куммера), а саме

$$\tilde{F}(n, m, \mu) = F\left(m - n, m + n + 1, m + 1, \frac{1 - \mu}{2}\right). \quad (3.28)$$

Вираз, зручний для програмування (3.26), можна подати в наступному вигляді [48]:

$$P_{n_k m}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(m, n_k) \sin^{2j}(\theta/2), \quad (3.29)$$

де позначення $A_j(m, n)$ означає

$$A_0(m, n_k) = \sin^m \theta, \\ A_j(m, n_k) = \left(\frac{(j + m - 1)(j + m) - n_k(n_k + 1)}{j(j + m)} \right) A_{j-1}(m, n_k). \quad (3.30)$$

Подібно можна знайти вираз для (3.27)

$$\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} P_{n_k(m)m}(\cos \theta) + \frac{\sin \theta}{2} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot A_j(m, n) \cdot \sin^{2(j-1)}(\theta/2). \quad (3.31)$$

Для знаходження власних чисел $n_k(m)$ за допомогою формул (3.26, 3.29) та (3.27, 3.31) переважно використовують ітерацію Мюллера [63].

Для використання функцій (3.25) слід ввести норму. Розглянемо загальноприйняту в геодезії „повну норму”, а також норму Шмідта. Позначимо повністю нормовані функції $\bar{P}_{n_k m}^I(\mu)$, а функції з нормою Шмідта $\bar{P}_{n_k m}^{II}(\mu)$.

Для знаходження „повної норми” візьмемо у формулі (3.17) границю з використанням правила Лопітала розкриття невизначених границь. Таким чином, для функцій (3.12) отримаємо [54, 55]:

$$I_{n_i}^m = \int_{\mu_0}^1 (P_{n_i(m)m}(\mu))^2 d\mu = \lim_{n_j \rightarrow n_i} \frac{(1-\mu_0^2) \left[P_{n_i(m)m}(\mu_0) \frac{dP_{n_j(m)m}(\mu_0)}{d\mu} - P_{n_j(m)m}(\mu_0) \frac{dP_{n_i(m)m}(\mu_0)}{d\mu} \right]}{(n_j - n_i)(n_i + n_j + 1)} = \quad (3.32)$$

$$= \frac{(\mu_0^2 - 1)}{2n_i + 1} \frac{\partial}{\partial n} \left[P_{n_i(m)m}(\mu_0) \right] \frac{dP_{n_i(m)m}(\mu_0)}{d\mu}.$$

Подібно до (3.32) введемо такий вираз і для системи функцій (3.11):

$$K_{n_i}^m = \int_{\mu_0}^1 (P_{n_i(m)m}(\mu))^2 d\mu = \frac{(1-\mu_0^2)}{2n_i + 1} P_{n_i(m)m}(\mu_0) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{dP_{n_i(m)m}(\mu_0)}{d\mu} \right]. \quad (3.33)$$

Після знаходження $\frac{\partial}{\partial n} [P_{n_i(m)m}(\mu_0)]$, $\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{dP_{n_i(m)m}(\mu_0)}{d\mu} \right]$ та деяких математичних

перетворень отримаємо остаточні вирази для повністю нормованих функцій.

Для системи функцій (3.12) отримаємо

$$\bar{P}_{n_k m}^I(\mu) = \sqrt{\frac{[2-\delta(m)](1-\mu_0)}{I_{n_k m}}} P_{n_k m} = \sqrt{\frac{[2-\delta(m)](1-\mu_0)(2n_k+1)}{G(n_k, m, \mu_0)H(n_k, m, \mu_0)}} \left(\frac{1-\mu^2}{1-\mu_0^2} \right)^{m/2} \tilde{F}(n_k, m, \mu), \quad (3.34)$$

для системи функцій (3.11)

$$\bar{P}_{n_k m}^I(\mu) = \sqrt{\frac{[2-\delta(m)](1-\mu_0)}{K_{n_k m}}} P_{n_k m} = \sqrt{\frac{[2-\delta(m)](1-\mu_0)(2n_k+1)}{J(n_k, m, \mu_0)F(n_k, m, \mu_0)}} \left(\frac{1-\mu^2}{1-\mu_0^2} \right)^{m/2} \tilde{F}(n_k, m, \mu). \quad (3.35)$$

В рівняннях (3.34) та (3.35) введено наступні умовні позначення :

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}, \quad (3.36)$$

$$H(n_k, m, \mu_0) = (n_k - m) \tilde{F}(n_k - 1, m, \mu_0) - l \tilde{F}(n_k, m, \mu_0), \quad (3.37)$$

$$J(n_k, m, \mu_0) = (n_k - m)G(n_k - 1, m, \mu_0) - l\mu_0 G(n_k, m, \mu_0) + \frac{n_k - m}{n_k + m} \tilde{F}(n_k - 1, m, \mu_0) - \mu_0 \tilde{F}(n_k, m, \mu_0), \quad (3.38)$$

$$G(n_k, m, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (b_n^m + \beta_k) \left(\frac{1 - \mu}{2} \right)^k. \quad (3.39)$$

Також, в рівнянні (3.39) використано наступні позначення:

$$b_n^0 = 0, b_n^m = \sum_{l=0}^{2m-1} \frac{1}{n - m + 1 + l}, \quad m > 0, \quad (3.40)$$

$$\beta_0 = 0, \beta_k = -(2n + 1) \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(m + n + 1 + l)(m - n + l)}, \quad k > 0, \quad (3.41)$$

$$a_0 = 1, a_k = \frac{(m - n_k + k - 1)(m + n_k + k)}{k(m + k)} a_{k-1}. \quad (3.42)$$

По аналогії з (2.13) знайдемо

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_{km}(\theta, \lambda) \\ \bar{S}_{km}(\theta, \lambda) \end{Bmatrix} = \bar{P}_{n_k m}^{-l}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{Bmatrix}. \quad (3.43)$$

Подібно до випадку повністю нормованих функцій на всій сфері, середнє інтегральне значення квадрату функцій (3.43) на сегменті сфери завжди рівне одиниці, тобто

$$\frac{1}{2\pi(1 - \cos\theta_0)} \iint_{\sigma} \bar{R}_{km}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{1}{2\pi(1 - \cos\theta_0)} \iint_{\sigma} \bar{S}_{km}^2(\theta, \lambda) d\sigma = 1, \quad (3.44)$$

де σ – сегмент сфери.

Розглянемо норму Шмідта. Нормовану таким чином функцію можна записати у вигляді

$$\bar{P}_{n_k m}^{\prime\prime}(\cos\theta) = K_{km} \sin^m \theta \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos\theta}{2}\right), \quad (3.45)$$

де K_{km} – норма Шмідта. Для $m = 0$ норма Шмідта визначається як

$$K_{km} = 1. \quad (3.46)$$

У випадку, коли $m \neq 0$, отримаємо вираз

$$K_{km} = \frac{2^{0.5}}{2^m m!} \left[\frac{(n_k + m)!}{(n_k - m)!} \right]^{0.5}. \quad (3.47)$$

Очевидно, що n_k є цілим числом тільки у випадку всієї сфери або півсфери.

Якщо $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, доцільно використати формулу Стірлінга для наближеного обчислення функції факторіалу. Таким чином, за умови $n_k > m > 0$ наближено отримаємо [49]

$$K_{km} = \frac{2^{-m}}{(m\pi)^{0.5}} \left(\frac{n_k + m}{n_k - m} \right)^{\frac{n_k}{2} + 0.25} \cdot p^{\frac{m}{2}} \exp(e1 + e2 + \dots), \quad (3.48)$$

де

$$p = \left(\frac{n_k}{m} \right)^2 - 1, \quad (3.49)$$

а експоненціальні величини мають вигляд

$$\begin{aligned} e1 &= -\frac{1}{12m} \left(1 + \frac{1}{p} \right), \\ e2 &= \frac{1}{360m^3} \left(1 + \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p^3} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Зрештою, у даному випадку в (3.48) можна обмежитись визначенням тільки двох експоненціальних величин, оскільки точність визначення норми Шмідта суттєво не впливатиме на точність самої моделі.

3.3 Перехід від регіональних до глобальних коефіцієнтів

Як було показано в підрозділі 2.1, будь-яку функцію на сфері можна розкласти в ряд по сферичних функціях. Отже, запишемо (2.12) у наступному вигляді

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\lambda + h_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta), \quad (3.51)$$

де g_{nm}, h_{nm} – глобальні коефіцієнти, а $P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda$ і $P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda$ – сферичні гармоніки.

Так само, в підрозділі 3.1 показано, що будь-яку функцію, задану на сферичному сегменті, можна розкласти в ряд по сферичних функціях з дійсним порядком. Таким чином, запишемо (3.20) у вигляді

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k (G_{km} \cos m\lambda + H_{km} \sin m\lambda) P_{n_{km}}(\cos\theta), \quad (3.52)$$

де G_{km}, H_{km} – регіональні коефіцієнти, а $P_{n_{km}}(\cos\theta)\cos m\lambda$ і $P_{n_{km}}(\cos\theta)\sin m\lambda$ – дробові сферичні гармоніки.

Розглянемо перехід від глобальних до регіональних коефіцієнтів [103]:

$$g_{nm}, h_{nm} \Leftrightarrow G_{km}, H_{km}. \quad (3.53)$$

Для цього розкладемо довільну дробову сферичну гармоніку в ряд по сферичних гармоніках

$$P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k (A_{k\mu}^n \cos \mu\lambda + B_{k\mu}^n \sin \mu\lambda) P_{n_{k\mu}}(\cos\theta). \quad (3.54)$$

Домноживши обидві сторони (3.54) на $\cos m\lambda$, проінтегрувавши по λ в межах $[0; 2\pi]$, бачимо, що залишаються тільки ті члени, для яких $\mu = m$, а саме

$$P_{nm}(\cos\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} A_{kn}^n P_{n_{km}}(\cos\theta). \quad (3.55)$$

Аналогічний вираз отримаємо, розклавши сферичну гармоніку, яка містить $\sin m\lambda$. В такому випадку рівняння (3.54) перепишеться [103]

$$P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k (A_{k\mu}^n \cos \mu\lambda + B_{k\mu}^n \sin \mu\lambda) P_{n_{k\mu}}(\cos\theta). \quad (3.56)$$

Домноживши обидві сторони (3.56) на $\sin m\lambda$ і проінтегрувавши по λ в межах $[0; 2\pi]$, отримаємо

$$P_{nm}(\cos\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} B_{kn}^n P_{n_{km}}(\cos\theta). \quad (3.57)$$

Також із (3.55) легко знайти вираз розкладу в ряд похідної $\frac{dP_{nm}(\cos\theta)}{d\theta}$:

$$\frac{dP_{nm}(\cos\theta)}{d\theta} = \sum_{k=m}^{\infty} A_{kn}^n \frac{dP_{n_{km}}(\cos\theta)}{d\theta}. \quad (3.58)$$

На практиці у формулах (3.55) і (3.58) звичайно не використовують нескінченну кількість коефіцієнтів, а вибирають оптимальний максимальний порядок розкладу K_m [38].

Для знаходження коефіцієнтів A_{km}^n із (3.55) здебільшого використовують спосіб найменших квадратів [108].

Врешті знайдемо перехід (3.53). Замінімо в (3.51) $P_{nm}(\cos\theta)$ його виразом із (3.55), а потім порівняємо цей вираз із (3.52). Очевидно, перехід (3.53) набуде вигляду [103]

$$\begin{Bmatrix} G_{km} \\ H_{km} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} A_{km}^n \begin{Bmatrix} g_{nm} \\ h_{nm} \end{Bmatrix}. \quad (3.59)$$

Слід зауважити, що ряд (3.55) збігається з різною швидкістю. Ця швидкість залежить від ефектів поля, яке моделюється, а також від величини сферичного сегменту. Так, ряд збігається повільніше при моделюванні довгохвильових ефектів поля. При збільшенні сферичного сегменту ряд збігається швидше [102].

3.4 Метод ASHA визначення гармонічних коефіцієнтів

Як було показано вище, практично будь-яку функцію на сегменті сфери можна представити рядом (3.20). Проте у випадку, коли необхідно досягнути досить великого максимального порядку моделі, складно знаходити власні числа n_k [73, 83], а також норму функції (3.32), (3.33) або (3.47) [29]. В такому випадку доцільно замінити функції (3.25) простішими, які б мали зручні рекурсивні співвідношення [35].

Для цього розглянемо добре відомі функції Лежандра цілого степеня і порядку. Вони формують ортогональну систему функцій на відрізку $[0, \pi]$, а також дві ортогональні системи функцій на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ подібно до функцій (3.25). Перехід від системи координат „шапки” сфери (r, θ, λ) до нової системи координат на половині сфери (r', θ', λ') матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \lambda' &= \lambda, \\ \theta' &= s \cdot \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

де $s = \frac{\pi}{2\theta_0}$, θ_0 – половинний кут шапки сфери.

Перехід (3.60) у геоцентричній системі координат матиме вигляд

$$\begin{aligned} X' &= \frac{X}{s}, \\ Y' &= Y \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}, \\ Z' &= Z. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Розглянемо, як зміниться рівняння Лапласа (2.1) після трансформації (3.60). Очевидно, зміни будуть тільки для функції від θ . Таким чином, запишемо друге рівняння із (2.3) у більш зручному вигляді:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \quad (3.62)$$

де P – це розв’язок рівняння (3.62):

$$P \equiv P_{nm}(\cos \theta). \quad (3.63)$$

Згідно теореми Муавра у рівнянні (3.62) неможливо перейти від $\sin \theta$ до $\sin \theta'$. Проте у випадку, коли сферична шапка є невелика [101], можна використати заміну $\sin \theta \cong \theta$. Таке представлення дає наближення порядку більше 99% при $\theta_0 \leq 14^\circ$ і 98% при $\theta_0 \leq 20^\circ$. Тоді рівняння (3.62) набуде вигляду [35]

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\theta^2} \right] P = 0, \quad (3.64)$$

або

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{dP}{d\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\theta^2} \right] P = 0. \quad (3.65)$$

Рівняння (3.65) являє собою наближений вираз диференціального рівняння Лежандра. Для переходу $\theta \rightarrow \theta'$ використаємо наступні очевидні співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\theta)}{d\theta} &= s \frac{dP(\theta')}{d\theta'}, \\ \frac{d^2 P(\theta)}{d\theta^2} &= s^2 \frac{d^2 P(\theta')}{d\theta'^2}, \\ \frac{d\theta'}{d\theta} &= s. \end{aligned} \quad (3.66)$$

В такому випадку (3.65) набуде вигляду

$$\frac{d^2 P}{d\theta'^2} + \frac{1}{\theta'} \cdot \frac{dP}{d\theta'} + \left[n(n+1)/s^2 - \frac{m^2}{\theta'^2} \right] P = 0. \quad (3.67)$$

Оскільки для половини сфери $n_k = k$, формулу (3.67) можна використати для наближеного знаходження власних чисел n_k для $m = 0$

$$k(k+1) = n(n+1)/s^2. \quad (3.68)$$

Із (3.68) легко знаходимо наближений вираз для власних чисел

$$n_k = \sqrt{s^2 k(k+1) + 0.25} - 0.5. \quad (3.69)$$

Такий метод дістав назву ASHA [8, 35]. Його практична реалізація передбачає наступні дії:

- 1) обертання сферичних координат (щоб вихідні дані потрапили на сферичну „шапку”);
- 2) проектування вихідних даних із сферичної шапки на половину сфери;
- 3) знаходження невідомих коефіцієнтів з використанням способу найменших квадратів;
- 4) повернення до початкової системи координат (з половини сфери до сферичної „шапки” і, остаточно, до локальної системи координат).

Для очності на рисунку 3.2 зображено порівняння функцій з цілими і дійсними порядками.

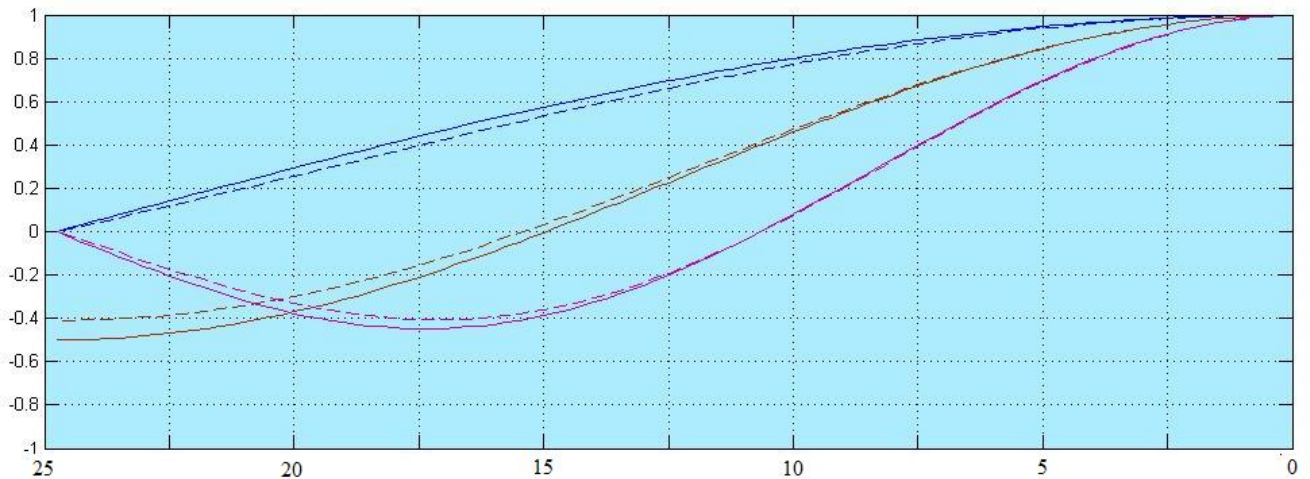


Рис. 3.2 Функції $P_{10}(\cos s\theta), P_{20}(\cos s\theta), P_{30}(\cos s\theta)$ на сегменті сфери $\theta_0 = 90^\circ$ (суцільна лінія) та $P_{n_1 0}(\cos\theta), P_{n_2 0}(\cos\theta), P_{n_3 0}(\cos\theta)$ на сегменті сфери $\theta_0 = 25^\circ$ (штрих-пунктирна лінія), де $\theta \in [0; 25^\circ]$

Необхідно відзначити, що після трансформації вихідних даних з сегменту на половину сфери функції, що використовуються для моделювання регіонального гравітаційного поля, можна розкласти в скінченні гіпергеометричні ряди, а отже між ними виникають прості рекурсивні співвідношення. Також набагато легше знаходити норми та власні числа таких функцій.

3.5 Метод TOSCA визначення гармонічних коефіцієнтів

Техніка SCHА зручна для моделювання регіональних полів, оскільки вона передбачає використання функцій з коротшою довжиною хвилі, аніж у звичайних сферичних функцій. Проте використання даної техніки ускладнюється у випадку, коли вихідні дані розміщені неоднорідно. В більшості випадків це стосується регіонів, форма яких відрізняється від сегменту сфери. Тоді вихідні дані міститимуться всередині регіону з більшою густиною, і, очевидно, така густина буде спадати при віддаленні від центру. За таких обставин необхідно використовувати дещо іншу техніку. Розглянемо можливість переміщення початку системи координат з центру Землі до її поверхні. Такий метод дістав назву TOSCA [8, 36] на честь дивовижної і прекрасної опери Пуччіні 1900 року.

Таким чином, TOSCA діє свого роду як фільтр і представляє дані в дуже дрібних деталях (малі довжини хвиль) в центрі регіону, і згладжує їх (великі довжини хвиль) на шляху до границі регіону [100].

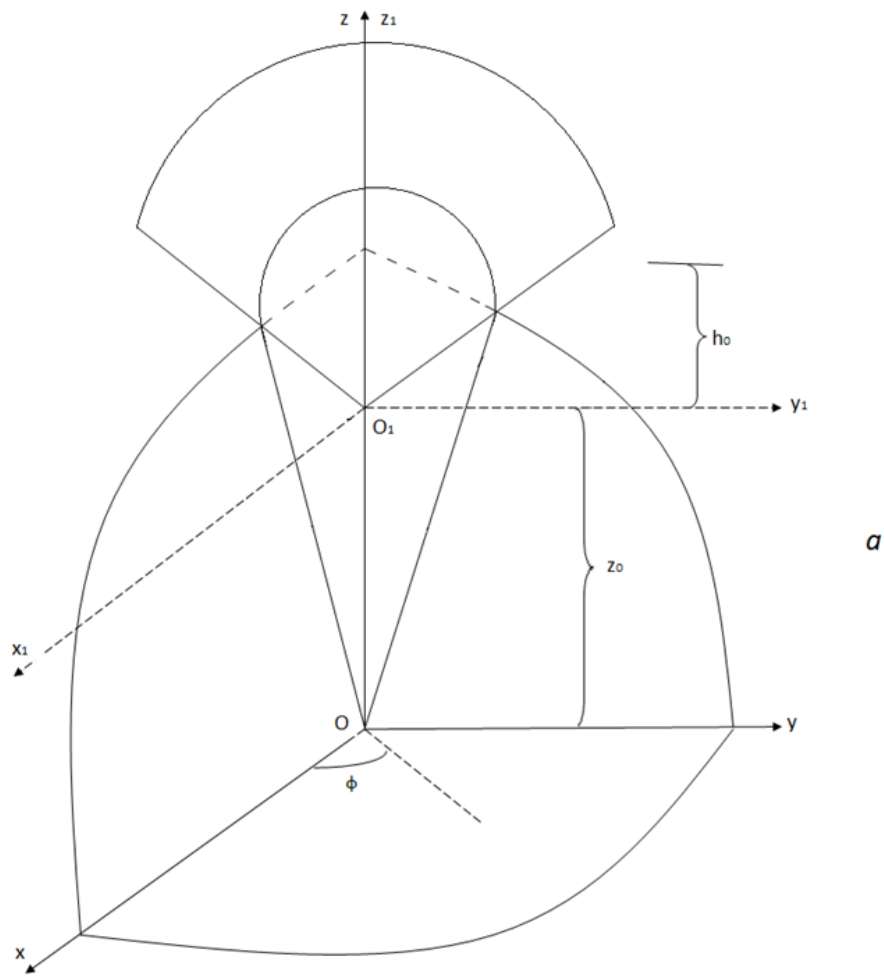
Оригінальний підхід TOSCA полягає у використанні SCHА в новій референційній системі зі зміщеним центром вертикально вздовж радіусу з центру Землі. Формули переходу між цими системами координат мають вигляд [36]

$$\begin{aligned} X_1 &= X; \\ Y_1 &= Y; \\ Z_1 &= Z - Z_0; \end{aligned} \tag{3.70}$$

де X, Y, Z – координати в сферичній системі (після обертання вихідних даних на „шапку” сфери); X_1, Y_1, Z_1 – координати в новій зміщеній референційній системі. Очевидно, перехід (3.70) у сферичних координатах матиме вигляд (рис. 3.3)

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta}; \\
 \lambda_1 &= \lambda; \\
 \theta_1 &= \arcsin\left(r \sin \frac{\theta}{r_1}\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.71}$$

Позначивши центральний кут сферичної „шапки” α у системі координат $\{r, \theta, \lambda\}$, і відповідно α_1 – у системі координат $\{r_1, \theta_1, \lambda_1\}$, можна легко встановити між ними зв’язок



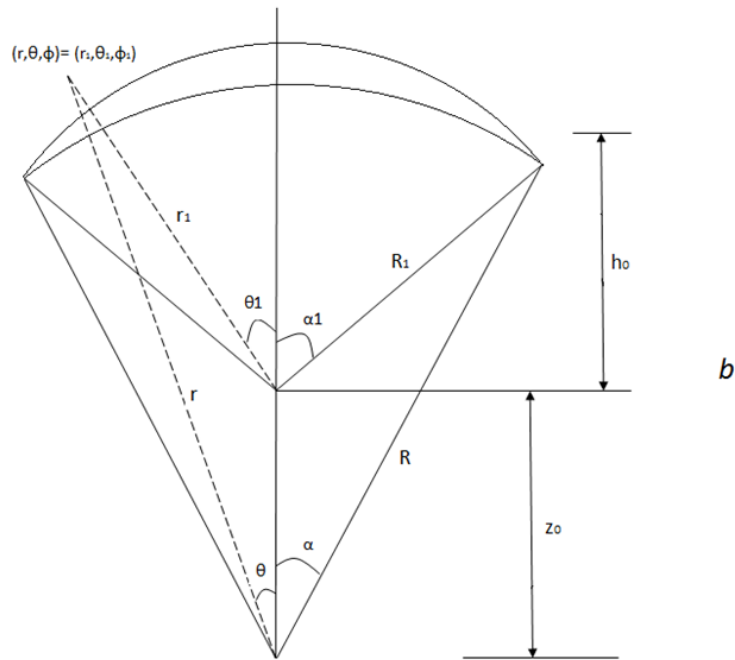


Рис. 3.3 Зміщення системи координат для використання TOSCA у 3D вигляді (a) і 2D вигляді (b)

$$R_1 = R \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1}. \quad (3.72)$$

Величина вертикального зміщення задається формулою

$$z_0 = R \cos \alpha - R_1 \cos \alpha_1. \quad (3.73)$$

Очевидно, величина α_1 завжди більша за α . Також слід зазначити, що нові функції Лежандра, обчислені аналогічно як у SCHА, але у новій системі координат, залишаються розв'язком рівняння Лапласа.

На рисунку 3.4 зображено відмінність між функціями, які представляють техніки SCHА та TOSCA.

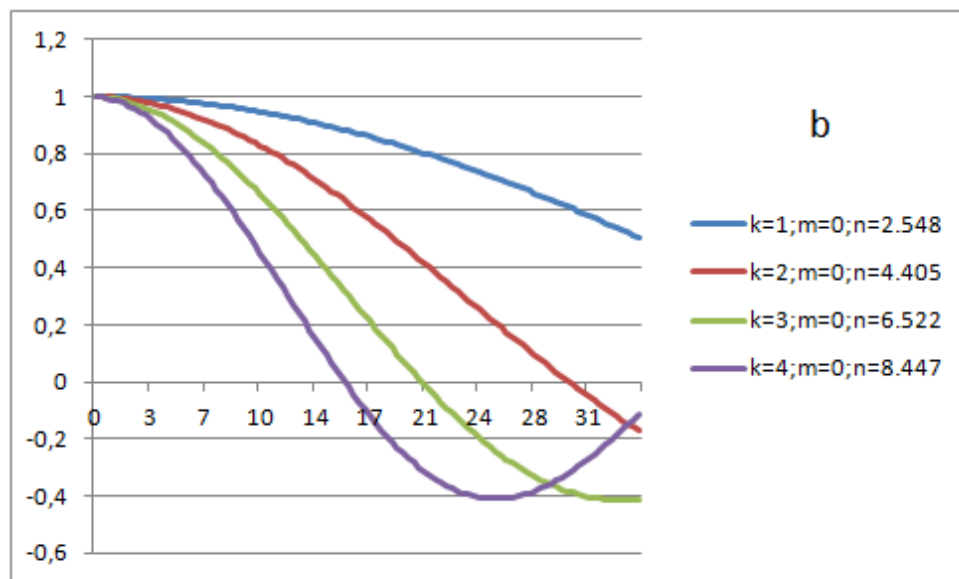
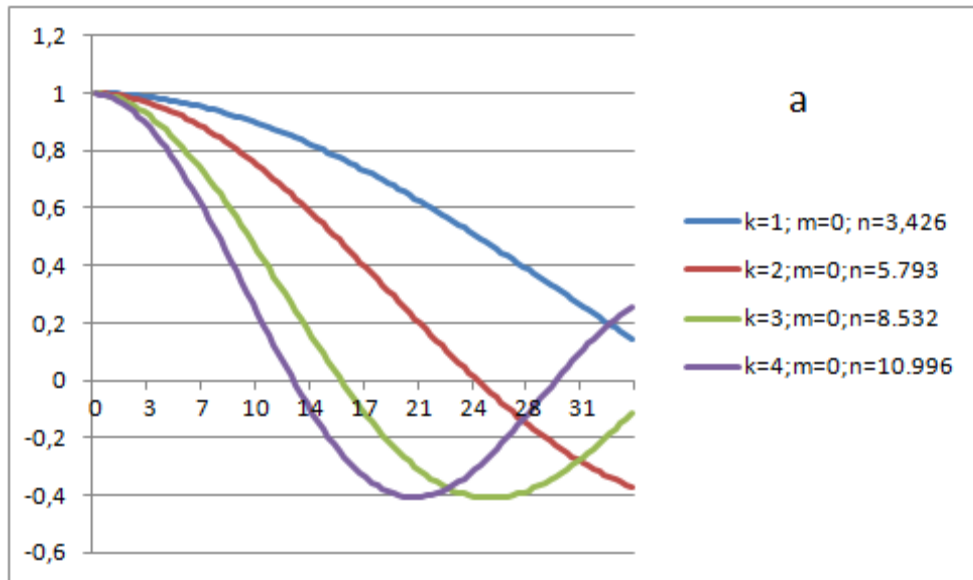


Рис. 3.4 Базові функції для техніки SCHa (a) та TOSCA (b) для сферичного сегменту $\theta_0 = 35^\circ$

Слід зауважити, що недоліком техніки TOSCA є той факт, що її практично неможливо використати для сегменту сфери, а необхідно використовувати для „шапки” сфери [82]. У випадку, коли необхідно використовувати велику кількість вихідних даних, а також досягти великого порядку моделі, це призводить до значного ускладнення обчислень.

Розглянемо розрізнявальну здатність моделей, побудованих за вищепереліченими техніками, і, зокрема, за технікою TOSCA. Розрізнявальна здатність моделі, побудованої з використанням сферичних функцій цілого степеня і порядку на всій сфері має вигляд

$$\lambda = \frac{2\pi r}{K_m} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{180}{K_m}, \quad (3.74)$$

де r – радіус сфери, K_m – максимальний порядок моделі.

У випадку SCHА формула розрізнявальної здатності моделі набуде вигляду

$$\lambda = \frac{2\pi r}{n_{K_m}} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{180}{n_{K_m}}, \quad (3.75)$$

де n_{K_m} – власне число, що відповідає максимальному порядку моделі K_m .

У випадку ж АSHA формула розрізнявальної здатності моделі буде наступна:

$$\lambda = \frac{4\theta_0 r}{K_m} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{2\theta_0^0}{K_m}, \quad (3.76)$$

де θ_0 – сферична координата границі сегменту сфери.

І, врешті, розрізнявальну здатність моделі для техніки TOSCA можна обчислити за формулою

$$\lambda = \frac{2\pi r_s}{n_{\tilde{k}}} \text{ або } \frac{\lambda^\circ}{2} = \frac{180}{n_{\tilde{k}}}, \quad (3.77)$$

де r_s – це радіус сфери з новим початком координат O_1 (рис. 3.4), а

$$n_{\tilde{k}} \approx \frac{90}{\alpha_1} (K_m + 0.5) - 0.5. \quad (3.78)$$

Очевидно, із формули (3.77) можна знаходити оптимальну величину вертикального зміщення z_0 .

3.6 Побудова локальних гармонічних коефіцієнтів

Як показано в підрозділі 3.4, будь-яку функцію на півсфері можна розкласти в ряд

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{K_m} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (3.79)$$

де $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ – повністю нормовані функції Лежандра. Також по аналогії з (3.43)

введемо умовне позначення

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda; \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Запишемо (3.79) в матричному вигляді

$$AX - L = v, \quad (3.81)$$

де A – матриця параметричних рівнянь, L – вектор вільних членів, X – вектор невідомих коефіцієнтів, v – вектор поправок.

Оскільки на півсфері функції Лежандра втрачають свою ортогональність, коефіцієнти \bar{a}_{nm} та \bar{b}_{nm} можна знайти способом найменших квадратів. При цьому виникає необхідність працювати з величезними масивами вихідних даних, що потребує великої кількості часу навіть при використанні сучасних комп'ютерів. Наприклад, при побудові моделі 100-го порядку потрібно обернути матрицю нормальних рівнянь порядку $> 10\,000$. Також, якщо вихідні дані розміщені нерівномірно, матриця нормальних рівнянь стає погано обумовленою, що спричиняє нестійкий розв'язок.

Таким чином, спершу необхідно вихідні дані спроектувати на деяку рівномірну сітку. На рисунку 2.3 подано типові рівномірні сітки. Для задач моделювання в геодезії необхідно використовувати сітку, яка допоможе скоротити процес обчислення та обертання матриці нормальних рівнянь та невідомих коефіцієнтів. В зв'язку з цим пропонується рівномірна сітка і відповідний алгоритм наступного змісту [6].

Нехай для певної паралелі $\theta = const$ в першому октанті розміщено r точок з довготами $\lambda_i, i=1, r$, при чому $\Delta\lambda = \lambda_i - \lambda_{i-1} = const$. Крім цього, в інших октантах довготи можна знайти за формулою

$$\lambda_i^j = \lambda_i^1 + 90^\circ \cdot (j-1), \quad (3.82)$$

де j – це номер відповідного октанту, тобто $j=1,2,3,4$. Очевидно, для такої рівномірної сітки відстань між паралелями може бути довільною (рис. 3.5).

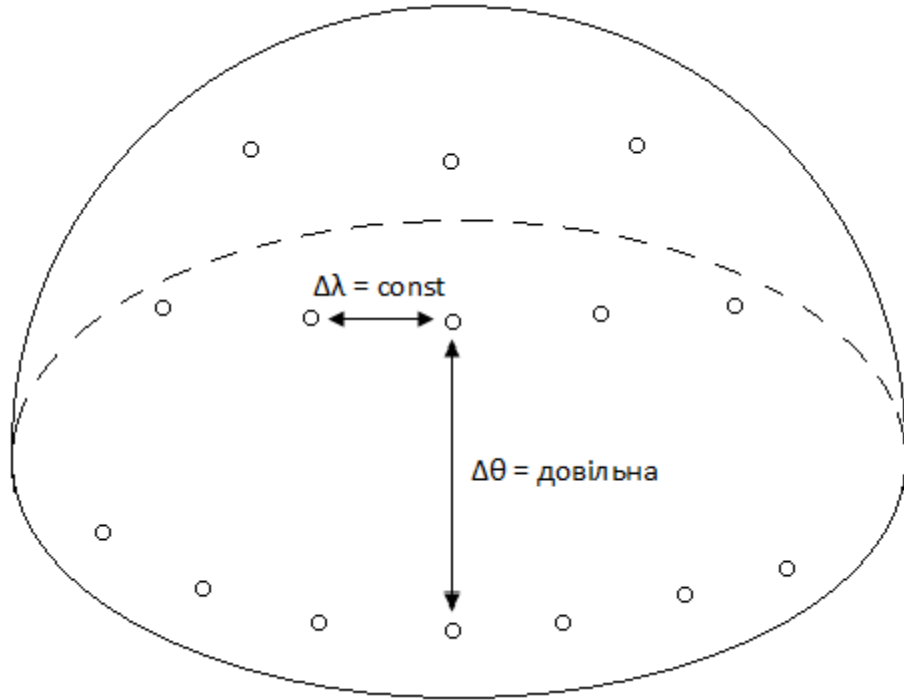


Рис. 3.5 Рівномірна сітка для технік SCHA та ASHA

Із рівнянь (3.80), (3.81) та (3.82) можна знайти елементи матриці нормальних рівнянь (оскільки матриця нормальних рівнянь симетрична, відображено тільки нижню трикутну матрицю) :

$$N = \begin{pmatrix} \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{00} & & & & \\ \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{10} & \sum \bar{R}_{10} \bar{R}_{10} & & & \\ \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{11} & \sum \bar{R}_{10} \bar{R}_{11} & \sum \bar{R}_{11} \bar{R}_{11} & & \\ \sum \bar{R}_{00} \bar{S}_{11} & \sum \bar{R}_{10} \bar{S}_{11} & \sum \bar{R}_{11} \bar{S}_{11} & \sum \bar{S}_{11} \bar{S}_{11} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

де $\sum = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4$, s – кількість паралелей, $\bar{R}_{nm} = \bar{R}_{nm}(\vartheta_k, \lambda_i^j)$, $\bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm}(\vartheta_k, \lambda_i^j)$.

Розглянемо матрицю нормальних рівнянь (3.83), побудовану для деякої паралелі $\theta = const$. В такому випадку добутки $\bar{P}_{n_1 m_1}(\cos \vartheta) \cdot \bar{P}_{n_2 m_2}(\cos \vartheta)$ будуть сталими величинами і їх можна винести за знак суми. Для сітки (3.82) мають місце наступні тригонометричні співвідношення [26]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m \lambda_i^j &= 0; \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \cos m \lambda_i^j &= 0, \quad m \neq 0; \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m_1 \lambda_i^j \cdot \sin m_2 \lambda_i^j &= 0, \quad m_1 \neq m_2; \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \cos m_1 \lambda_i^j \cdot \cos m_2 \lambda_i^j &= 0, \quad m_1 \neq m_2; \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m_1 \lambda_i^j \cdot \cos m_2 \lambda_i^j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

Фактично, ці формули є аналогом формул (2.24-2.26).

Із формул (3.83) і (3.84) видно, що всі елементи матриці нормальних рівнянь N для паралелі $\theta = const$ типу $\bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{R}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ та $\bar{S}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ не рівні нулю тільки у випадку, коли $m_1 = m_2$. В свою чергу елементи типу $\bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ рівні нулю в будь-якому випадку.

Сумування по паралелях дає аналогічний результат, оскільки, наприклад,

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta_k, \lambda_i^j) \cdot \bar{R}_{n_2 m_2}(\vartheta_k, \lambda_i^j) = 0 \quad (3.85)$$

при $m_1 \neq m_2$.

Таким чином, матрицю нормальних рівнянь (3.83) можна подати у вигляді

$$N = \begin{pmatrix} \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{00} & & & & \\ \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{10} & \sum \bar{R}_{10} \bar{R}_{10} & & & \\ 0 & 0 & \sum \bar{R}_{11} \bar{R}_{11} & & \\ 0 & 0 & 0 & \sum \bar{S}_{11} \bar{S}_{11} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Порівняння (3.83) і (3.86) показує, що елементи матриці (3.86) можна порахувати в d разів швидше :

$$d = \frac{(K_m + 1)^4 + (K_m + 1)^2}{2 \sum_{i=1}^{K_m} (i^2 + i) + (K_m + 1)^2 + K_m + 1}. \quad (3.87)$$

Очевидно, що зі збільшенням порядку K_m коефіцієнт d значно збільшується (рис. 3.6).

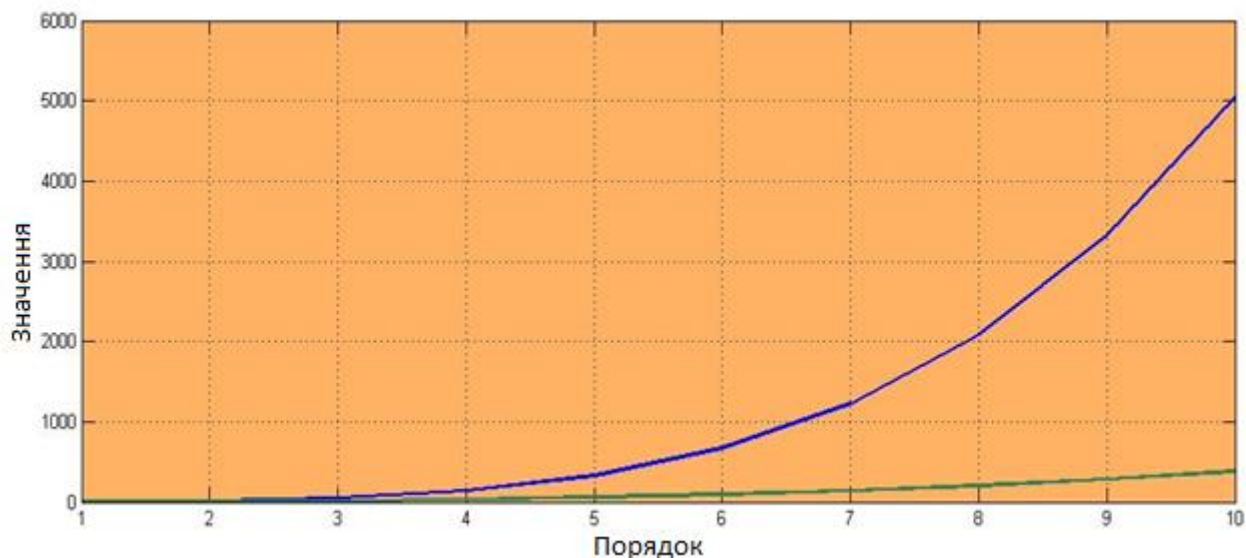


Рис. 3.6 Порівняння швидкості обчислення
коєфіцієнтів матриці нормальних рівнянь

для 10-го порядку за формулами (3.83) (зелена крива) та (3.86) (синя крива) [13]

Проте процес обертання матриці (3.83) або (3.86) займає однакову кількість часу. Крім того, зі збільшенням порядку K_m може втрачатися точність знаходження невідомих коєфіцієнтів. Тому виникає необхідність пошуку аналітичних виразів для знаходження невідомих гармонічних коєфіцієнтів [12,13].

Візьмемо до уваги, що зв'язок між матрицею нормальних рівнянь і матрицею параметричних рівнянь має вигляд

$$N = A^T A, \tag{3.88a}$$

а також введемо умовне позначення

$$Q = -A^T L. \tag{3.88б}$$

Тоді, розв'язавши (3.81) під умовою $[v v] \rightarrow \min$, отримаємо

$$NX = Q. \tag{3.88в}$$

Із (3.88) видно, що між собою корелюють тільки коєфіцієнти типу $\bar{R}_{n_1 m}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{R}_{n_2 m}(\vartheta, \lambda)$ або типу $\bar{S}_{n_1 m}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m}(\vartheta, \lambda)$, причому тільки з однаковими m .

На основі цього отримано наступні системи рівнянь [6]:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=m}^{K_m} \sum_{j=m}^{K_m} \bar{R}_{im} \bar{R}_{jm} \cdot x_{\sigma} &= q_{\sigma}, \quad j = m, K_m; \quad m = 0, K_m \\ \sum_{i=m}^{K_m} \sum_{j=m}^{K_m} \bar{S}_{im} \bar{S}_{jm} \cdot x_{\delta} &= q_{\delta}, \quad j = m, K_m; \quad m = 1, K_m \end{aligned} \right\}, \quad (3.89)$$

де $\sigma = \sigma(i, m)$, $\delta = \delta(i, m)$.

Формули (3.89) показують, що замість обертання матриці порядку $(K_m + 1)^2$ достатньо обернути $(2K_m + 1)$ матриць порядків від 1 до $(K_m + 1)$.

Із рівнянь (3.84) видно, що формули (3.89) для сегменту сфери будуть аналогічними. Отже, такий підхід можна використовувати як для техніки ASHA, так і для SCHА [5].

Проте, із формули (3.29) видно, що для використання техніки SCHА доцільно розробити алгоритм обчислення функції $P_{n_k m}(\cos\theta)$ мінімальну кількість разів (оскільки такі функції можна обчислити виключно за допомогою розкладу їх в гіпергеометричний ряд). Такий алгоритм пропонується створювати для рівномірної сітки (3.82).

Перепишемо формулу (3.79) у вигляді:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{K_m} \sum_{m=0}^n \bar{a}_{km} \cos(m\lambda) \bar{P}_{n_k m}(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{K_m} \sum_{m=0}^n \bar{b}_{km} \sin(m\lambda) \bar{P}_{n_k m}(\cos\theta). \quad (3.90)$$

Тоді матрицю нормальних рівнянь можна подати у вигляді, як це показано на рисунку 3.7.

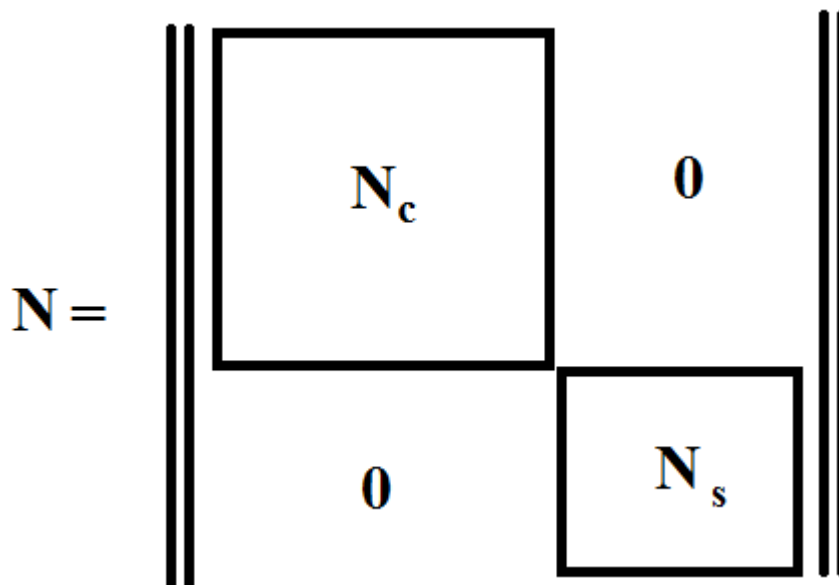


Рис.3.7 Структура матриці нормальних рівнянь

Введемо умовне позначення

$$D_{kn}(\theta) = \bar{P}_{nkm}(\cos\theta) \quad (3.91)$$

і матриці [13]

$$D_C = \begin{pmatrix} D_{10}(\theta_{\Pi 1}) & D_{11}(\theta_{\Pi 1}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 1}) \\ D_{10}(\theta_{\Pi 2}) & D_{11}(\theta_{\Pi 2}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 2}) \\ & & \vdots & \\ D_{10}(\theta_{\Pi q}) & D_{11}(\theta_{\Pi q}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi q}) \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

$$D_S = \begin{pmatrix} D_{11}(\theta_{\Pi 1}) & D_{21}(\theta_{\Pi 1}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 1}) \\ D_{11}(\theta_{\Pi 2}) & D_{21}(\theta_{\Pi 2}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 2}) \\ & & \vdots & \\ D_{11}(\theta_{\Pi q}) & D_{21}(\theta_{\Pi q}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi q}) \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

де Πi – номер паралелі, а q – кількість паралелей (наприклад, $\theta_{\Pi 2}$ – значення широти на другій паралелі), а також

$$\tilde{D}_C = \begin{pmatrix} \sum \cos 0\lambda \cos 0\lambda & \sum \cos 0\lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos 0\lambda \cos K_m \lambda \\ \sum \cos 0\lambda \cos 1\lambda & \sum \cos 1\lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos 1\lambda \cos K_m \lambda \\ & & \vdots & \\ \sum \cos 0\lambda \cos K_m \lambda & \sum \cos K_m \lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos K_m \lambda \cos K_m \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

$$\tilde{D}_S = \begin{pmatrix} \sum \sin 1\lambda \sin 1\lambda & \sum \sin 1\lambda \sin 1\lambda & \cdots & \sum \sin 1\lambda \sin K_m \lambda \\ \sum \sin 1\lambda \sin 1\lambda & \sum \sin 1\lambda \sin 1\lambda & \cdots & \sum \sin 1\lambda \sin K_m \lambda \\ & & \vdots & \\ \sum \sin 1\lambda \sin K_m \lambda & \sum \sin K_m \lambda \sin 1\lambda & \cdots & \sum \sin K_m \lambda \sin K_m \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

де Σ означає сумування по всіх точках будь-якої паралелі.

Розглянемо питання розмірності введених матриць. Отже, матриця N має розмірність $[(K_m + 1)^2 - 1 \times (K_m + 1)^2 - 1]$, $N_C - \left[\frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right]$,

$$N_S - \left[(K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} \right], \quad D_C -$$

$$\left[q \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right], \quad D_S - \left[q \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} \right], \quad \tilde{D}_C -$$

$$\left[\frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right], \quad \tilde{D}_S -$$

$$\left[(K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} \right].$$

Елементи матриць (3.94) та (3.95) можна порахувати аналітично за формулами (3.84).

Введемо умовне позначення „*”. Воно означатиме поелементне множення двох матриць. Тобто, якщо маємо дві матриці A і B однакової розмірності, то $C=A*B$ означає $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$. На такій основі отримуємо

$$\left. \begin{aligned} N_c &= (D_c^T D_c) * \tilde{D}_c \\ N_s &= (D_s^T D_s) * \tilde{D}_s \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

Отже, реалізуючи даний алгоритм, мінімізується кількість використання формули (3.29), що значно пришвидшує процес обчислень.

3.7 Модифікація методу ASHA для побудови регіонального гравітаційного поля

В підрозділі 3.6 детально розкрито методику побудови матриці нормальних рівнянь та знаходження невідомих коефіцієнтів при апроксимації довільної функції на сегменті сфери. Проте під час апроксимації залишків гравітаційних аномалій у вільному повітрі методом ASHA не використовуються сферичні функції нульового та першого порядків, в зв'язку з чим було розроблено алгоритм [13].

Накладемо на формули (3.79) наступні умови

$$\bar{a}_{nm} = \frac{GM}{R^2} (n-1) \cdot \bar{C}_{nm}^* \quad (3.97)$$

$$\bar{b}_{nm} = \frac{GM}{R^2} (n-1) \cdot \bar{S}_{nm}^* \quad (3.98)$$

$$\bar{a}_{00} = \bar{a}_{10} = \bar{a}_{11} = \bar{b}_{00} = \bar{b}_{10} = \bar{b}_{11} = 0. \quad (3.99)$$

Через умову (3.99) зміниться структура та розмірність матриці нормальних рівнянь (3.86). В даному випадку матриця нормальних рівнянь N набуде вигляду [13]

$$N = \begin{pmatrix} \sum \bar{R}_{20} \bar{R}_{20} & & & & \\ 0 & \sum \bar{R}_{21} \bar{R}_{21} & & & \\ 0 & 0 & \sum \bar{R}_{22} \bar{R}_{22} & & \\ 0 & 0 & 0 & \sum \bar{S}_{21} \bar{S}_{21} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів на формулу (3.89) необхідно накласти додаткову умову

$$i, j \geq 2, \quad (3.101)$$

яку вважатимемо домінуючою над всіма попередніми умовами (3.89).

В такому випадку після приведення матриці нормальних рівнянь до вигляду (3.90), щоб забезпечити необхідну структуру даної матриці (рис. 3.7), видозміняться і всі допоміжні матриці D_c , D_s , \tilde{D}_c і \tilde{D}_s . Вони приймуть вигляд [13]

$$D_c = \begin{pmatrix} D_{20}(\theta_{\Pi 1}) & D_{21}(\theta_{\Pi 1}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 1}) \\ D_{20}(\theta_{\Pi 2}) & D_{21}(\theta_{\Pi 2}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{20}(\theta_{\Pi q}) & D_{21}(\theta_{\Pi q}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi q}) \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

$$D_s = \begin{pmatrix} D_{21}(\theta_{\Pi 1}) & D_{22}(\theta_{\Pi 1}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 1}) \\ D_{21}(\theta_{\Pi 2}) & D_{22}(\theta_{\Pi 2}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi 2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{21}(\theta_{\Pi q}) & D_{22}(\theta_{\Pi q}) & \cdots & D_{K_m K_m}(\theta_{\Pi q}) \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

$$\tilde{D}_c = \begin{pmatrix} \sum \cos 0\lambda \cos 0\lambda & \sum \cos 0\lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos 0\lambda \cos K_m \lambda \\ \sum \cos 0\lambda \cos 1\lambda & \sum \cos 1\lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos 1\lambda \cos K_m \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \cos 0\lambda \cos K_m \lambda & \sum \cos K_m \lambda \cos 1\lambda & \cdots & \sum \cos K_m \lambda \cos K_m \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} \sum \sin 1\lambda \sin 1\lambda & \sum \sin 1\lambda \sin 2\lambda & \cdots & \sum \sin 1\lambda \sin K_m \lambda \\ \sum \sin 2\lambda \sin 1\lambda & \sum \sin 2\lambda \sin 2\lambda & \cdots & \sum \sin 2\lambda \sin K_m \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \sin 1\lambda \sin K_m \lambda & \sum \sin K_m \lambda \sin 2\lambda & \cdots & \sum \sin K_m \lambda \sin K_m \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

Розмірності вищенаведених матриць будуть наступними: N –

$$[(K_m + 1)^2 - 4 \times (K_m + 1)^2 - 4], \quad N_c = \left[\frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 3 \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 3 \right], \quad N_s =$$

$$\left[(K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right], \quad D_c =$$

$$\left[q \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 3 \right], \quad D_s = \left[q \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right], \quad \tilde{D}_c =$$

$$\left[\frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 3 \times \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 3 \right], \quad \tilde{D}s \quad -$$

$$\left[(K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \times (K_m + 1)^2 - \frac{(K_m + 1)(K_m + 2)}{2} - 1 \right].$$

Алгоритм моделювання регіонального гравітаційного поля, виражений формулами (3.97-3.105), представляє собою оптимізацію використання способу найменших квадратів з врахуванням властивості дискретної ортогональності базової системи функцій. В даному випадку більшість елементів матриці нормальних рівнянь стають рівні нулю, і їх обчислення немає сенсу. Також максимальний порядок матриці, яку необхідно обернути, зменшується із величини $(K_m + 1)^2$ до величини $(K_m + 1)$. Навіть при сучасних обчислювальних можливостях цей факт відіграє значну роль при моделюванні регіональних гравітаційних полів високих порядків.

3.8 Висновки до розділу 3

В даному розділі проаналізовано різні методи побудови регіонального гравітаційного поля. Особливий акцент поставлено на такі методи як SCHА та ASHA. Метод SCHА ґрунтується на розкладі потенціалу в ряд за сферичними функціями Лежандра цілого степеня і дійсного порядку. Порядок виражається функцією величини регіону, що досліджується. Цей метод має свої переваги та недоліки. До переваг слід віднести той факт, що такі функції складають дві ортогональні системи для заданого регіону. Недоліком такого підходу є необхідність знаходити дійсні порядки і норми таких функцій, що потребує великих затрат машинних ресурсів при збільшенні порядку моделі. Крім того, невідомі рекурсивні зв'язки між такими функціями Лежандра, через що потрібно користуватися не дуже зручними виразами гіпергеометричного ряду.

Метод ASHA можна розглядати як дочірній метод від SCHА. Для використання цього методу необхідно спроектувати вихідні дані з певного регіону на півсферу. В такому випадку виникають прості рекурсивні відношення між функціями Лежандра, що значно спрощує процес їх обчислення.

Після використання методів SCHА чи АSHA для моделювання регіонального гравітаційного поля за допомогою способу найменших квадратів виникає матриця нормальних рівнянь великого розміру, з якою незручно працювати. В цьому розділі запропоновано алгоритм побудови матриці нормальних рівнянь і знаходження невідомих коефіцієнтів моделі з використанням ортогональних властивостей функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку.

РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА ПОВЕРХНІ РЕГІОНАЛЬНОГО (КВАЗИ)ГЕОЇДА НА ТЕРИТОРІЮ АРКТИКИ

4.1 Арктичний гравітаційний проект

З метою створення регіонального (квази)геоїда на територію Арктики (рис. 4.1) організацією NGA було розроблено проект AGP, який передбачав створення ґрідy гравітаційних аномалій у вільному повітрі роздільною здатністю 5'×5' на дану територію з використанням даних аерогравіметрії, супутникової альтиметрії, а також даних морської гравіметрії [60, 80].



Рис. 4.1 Арктичний регіон

З початку 90-х років минулого століття Арктика була в центрі уваги різних батиметричних і гравіметричних місій. Розвиток сучасних батиметричних даних в Арктиці було розпочато в 1997 році під егідою Міжнародного гідрографічного бюро (МГБ) з метою їх компілювання північніше широти в 64° .

В свою чергу, МГБ розробило Міжнародну батиметричну карту океану для використання картографами та дослідниками, чії роботи вимагають детального і точного знання про глибину і форму дна Північного Льодовитого океану [68].

На додаток до діяльності МГБ, на міжнародній конференції по Арктичному Полю в м. Целле (Німеччина), в жовтні 1998 року виникла ініціатива розробити докладну гравіметричну базу даних на територію Арктики. Метою проекту AGP була розробка бази даних гравітаційних аномалій у вільному повітрі на рівномірній сітці $5' \times 5'$ північніше широти в 64° , включаючи Північний Льодовитий океан, Гренландію і території Північної Америки та Росії [33]. Національне агентство з картографії (NIMA) Сполучених Штатів Америки зберігає дані для проекту та виконує їх компіляцію за підтримки всіх членів робочих груп AGP. Додатковими завданнями для робочої групи AGP є порівняння і калібрування різних джерел гравітаційних даних, наприклад, порівняння даних аерогравіметрії, а також супутникових, наземних і даних морської гравіметрії. Задекларована точність цих даних наступна: дані аерогравіметрії мають точність порядку 2 мГал, дані морської гравіметрії – 6 мГал, а точність даних супутникової альтиметрії < 5 см. Таки чином, очікувана точність висот квазі(геоїда) складає 15 см [81]. Загальний перелік країн, що беруть участь в AGP, включає Сполучені Штати Америки, Данію, Канаду, Росію, Норвегію, Швецію, Фінляндію, Ісландію, Англію, Францію і Німеччину. Міжнародна асоціація геодезії схвалила AGP як "спеціальну дослідницьку групу", що належить до Комісії III - визначення гравітаційного поля [90].

Гравітаційні аномалії у вільному повітрі за даними проекту AGP Δg_{AP} з роздільною здатністю $5' \times 5'$ на території Арктики (рис. 4.2) використано для наступних емпіричних досліджень.

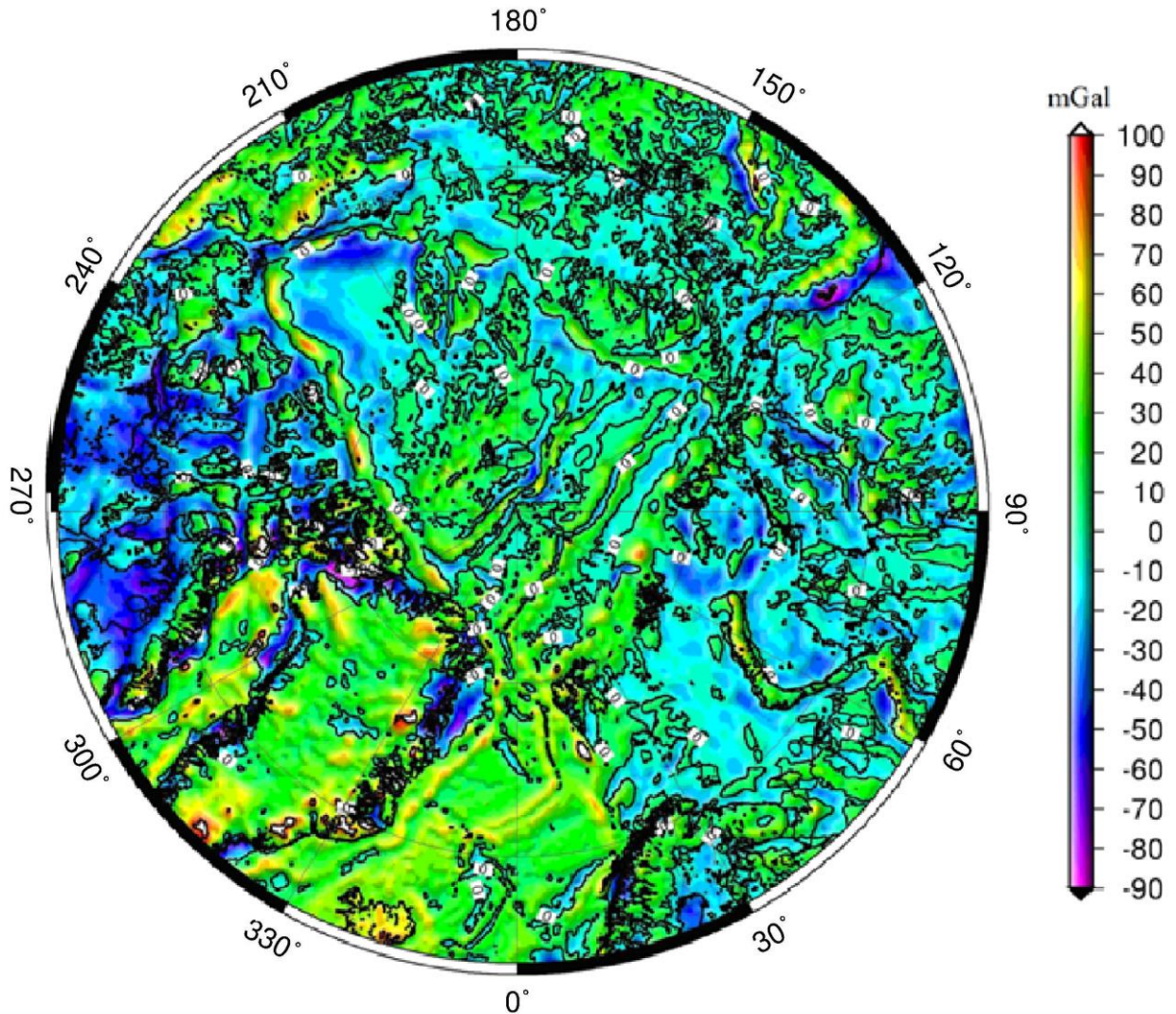


Рис. 4.2 Гравітаційні аномалії у вільному повітрі Δg_{AP} з AGP

4.2 Методика побудови регіонального (квазі)геоїда

Для побудови регіонального (квазі)геоїда традиційно використовується процедура „Вилучення-Відновлення” [62, 75]. Вона передбачає „Вилучення” з вихідних даних систематичної складової і моделювання отриманих залишків з подальшим „Відновленням” систематичної складової. Такий підхід дозволяє отримати найкращу лінійну оцінку – найбільш надійну незміщену лінійну оцінку з мінімальною дисперсією.

Розіб'ємо висоту (квазі)геоїда ζ на дві частини [69, 87]:

$$\zeta = \delta\zeta + \zeta_M, \quad (4.1)$$

де $\delta\zeta$ – внесок висот (квазі)геоїда, що відповідає короткохвильовим особливостям гравітаційного поля, а ζ_M – внесок висот (квазі)геоїда, що відповідає довгохвильовим особливостям гравітаційного поля і який можна обчислити, використовуючи глобальну модель гравітаційного поля [14].

Внесок висот (квазі)геоїда ζ_M можна знайти за добре відомою формулою

$$\zeta_M = \frac{GM}{\gamma R} \sum_{n=2}^{K_m} \sum_{m=0}^n \{ \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{nm}(\cos\theta), \quad (4.2)$$

де γ – це нормальна сила тяжіння, K_m – максимальний порядок моделі, $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – повністю нормовані коефіцієнти деякої глобальної моделі.

Також необхідно знайти модельні значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі Δg_M

$$\Delta g_M = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{K_m} \sum_{m=0}^n (n-1) \{ \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (4.3)$$

Провівши операцію „Вилучення”, отримаємо залишкові значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі $\delta\Delta g$:

$$\delta\Delta g = \Delta g_{ВИМ} - \Delta g_M, \quad (4.4)$$

де $\Delta g_{ВИМ}$ – виміряні значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

Розглянемо використання методів SCHА та ASHA для моделювання залишкових значень гравітаційних аномалій у вільному повітрі $\delta\Delta g$ [37, 58]. В методі SCHА збурюючий потенціал має вигляд

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{k=1}^{K_m^*} \sum_{m=0}^k \{ \bar{C}_{km}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{km}^* \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{n_k, m}(\cos\theta), \quad (4.5)$$

де K_m^* – максимальний порядок SCHА-моделі, $\bar{C}_{km}^*, \bar{S}_{km}^*$ – повністю нормовані коефіцієнти SCHА-моделі. Очевидно, розклад в ряд (4.5) починається з першого порядку, оскільки $n_k > k$, якщо $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

В свою чергу, в методі ASHA $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, і збурюючий потенціал можна записати в наступному вигляді

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{k=2}^{K_m^*} \sum_{m=0}^k \left\{ \bar{C}_{km}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{km}^* \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{n_k m}(\cos\theta). \quad (4.6)$$

Зв'язок між гравітаційними аномаліями у вільному повітрі та збурюючим потенціалом можна подати як розв'язок граничної задачі Молоденського:

$$\Delta g = - \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]_{Q_0} - \frac{2T_{Q_0}}{r_{Q_0}}, \quad (4.7)$$

де r – сферична координата, Q_0 – точка на телуроїді.

Зв'язок між збурюючим потенціалом і (квазі)геоїдом дається формулою Брунса

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \quad (4.8)$$

Таким чином, SCHA-модель залишкових значень гравітаційних аномалій у вільному повітрі матиме вигляд

$$\delta\Delta g_{\text{mod}} = \frac{GM}{R^2} \sum_{k=1}^{K_m^*} \sum_{m=0}^k (n_k - 1) \left\{ \bar{C}_{n_k m}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{n_k m}^* \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{n_k m}(\cos\theta). \quad (4.9a)$$

В свою чергу, ASHA-модель набуде вигляду

$$\delta\Delta g_{\text{mod}} = \frac{GM}{R^2} \sum_{k=2}^{K_m^*} \sum_{m=0}^k (k - 1) \left\{ \bar{C}_{km}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{km}^* \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{km}(\cos\theta). \quad (4.9b)$$

4.3 Формування вхідних даних

Для побудови регіонального (квазі)геоїда на регіон Арктики використано метод ASHA в межах процедури „Вилучення-Відновлення” [77].

Внесок ζ_M було обчислено з використанням формули (4.2), використовуючи глобальну гравітаційну модель EGM 2008 до 360-го порядку [11, 84] (рис. 4.3).

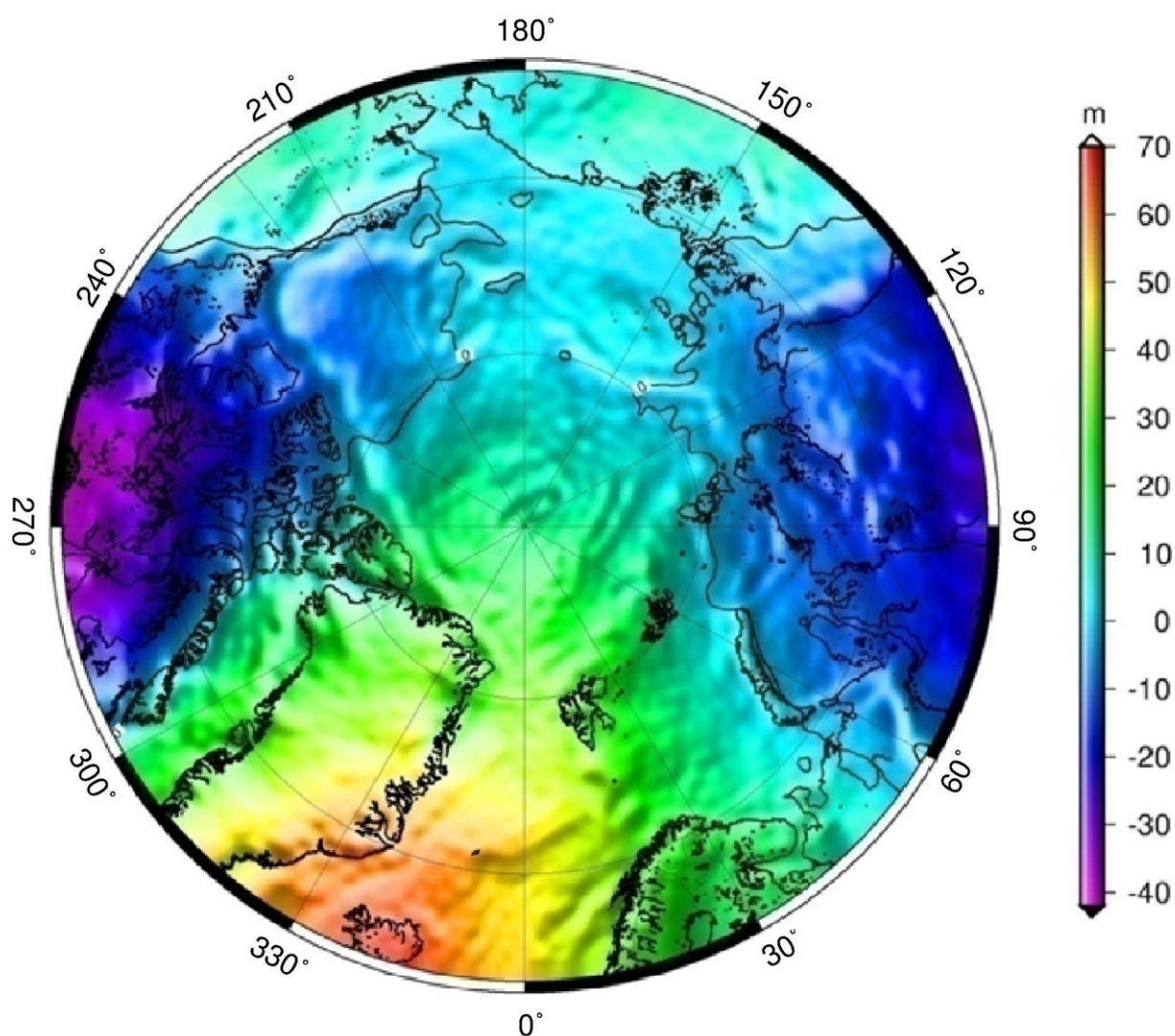


Рис. 4.3. Внесок висоти (квазі)геоїда ζ_M , що відповідає довгохвильовим особливостям гравітаційного поля

Також було обчислено гравітаційні аномалії у вільному повітрі Δg_M за моделлю EGM 2008 до 360-го порядку за формулою (4.3) (рис. 4.4).

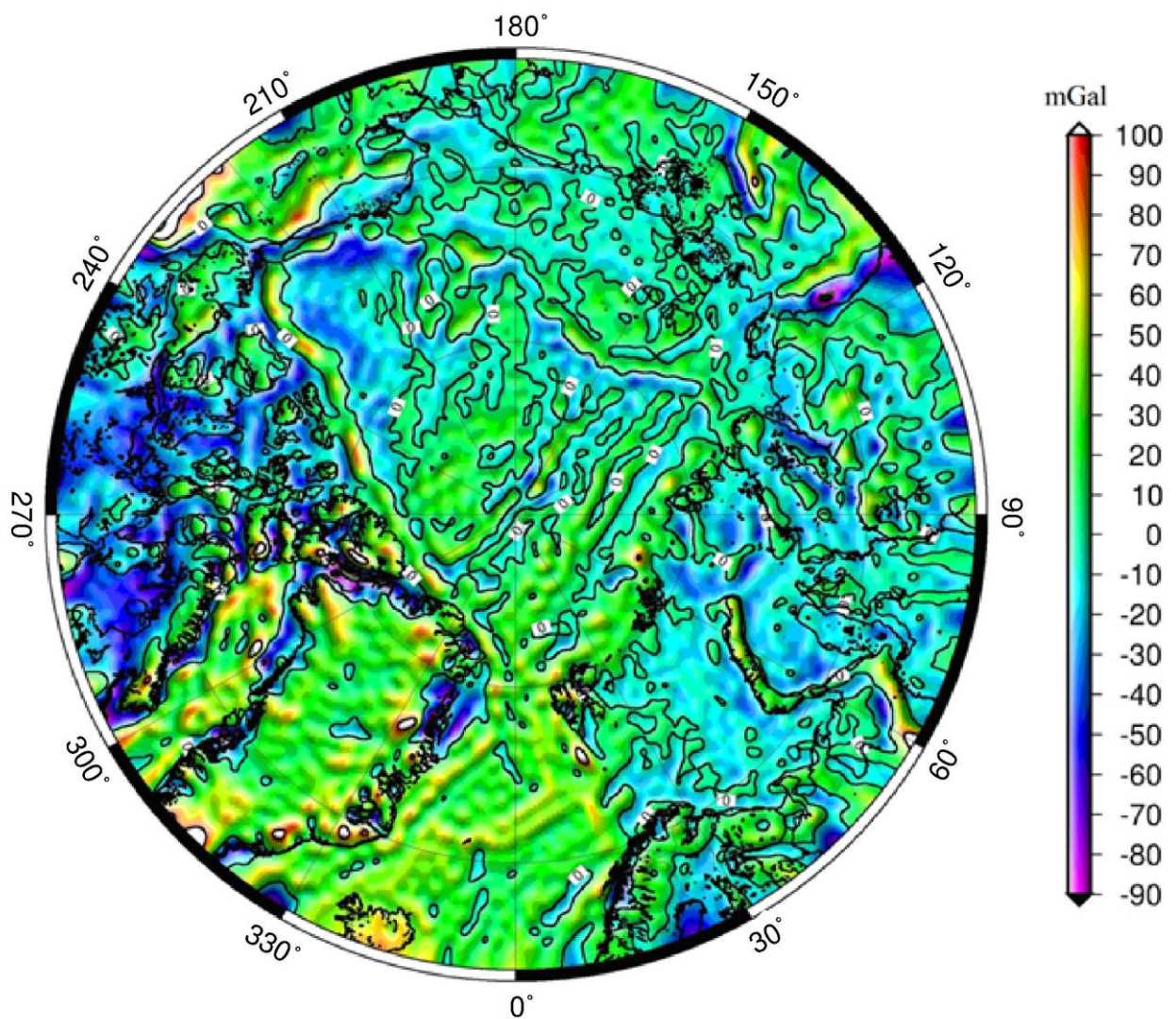


Рис. 4.4. Гравітаційні аномалії у вільному повітрі Δg_M , обчислені за моделлю EGM 2008 до 360-го порядку [84, 85]

Провівши операцію „Вилучення”,

$$\delta\Delta g = \Delta g_{AP} - \Delta g_M, \quad (4.10)$$

отримаємо залишкові значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі $\delta\Delta g$ (рис 4.5).

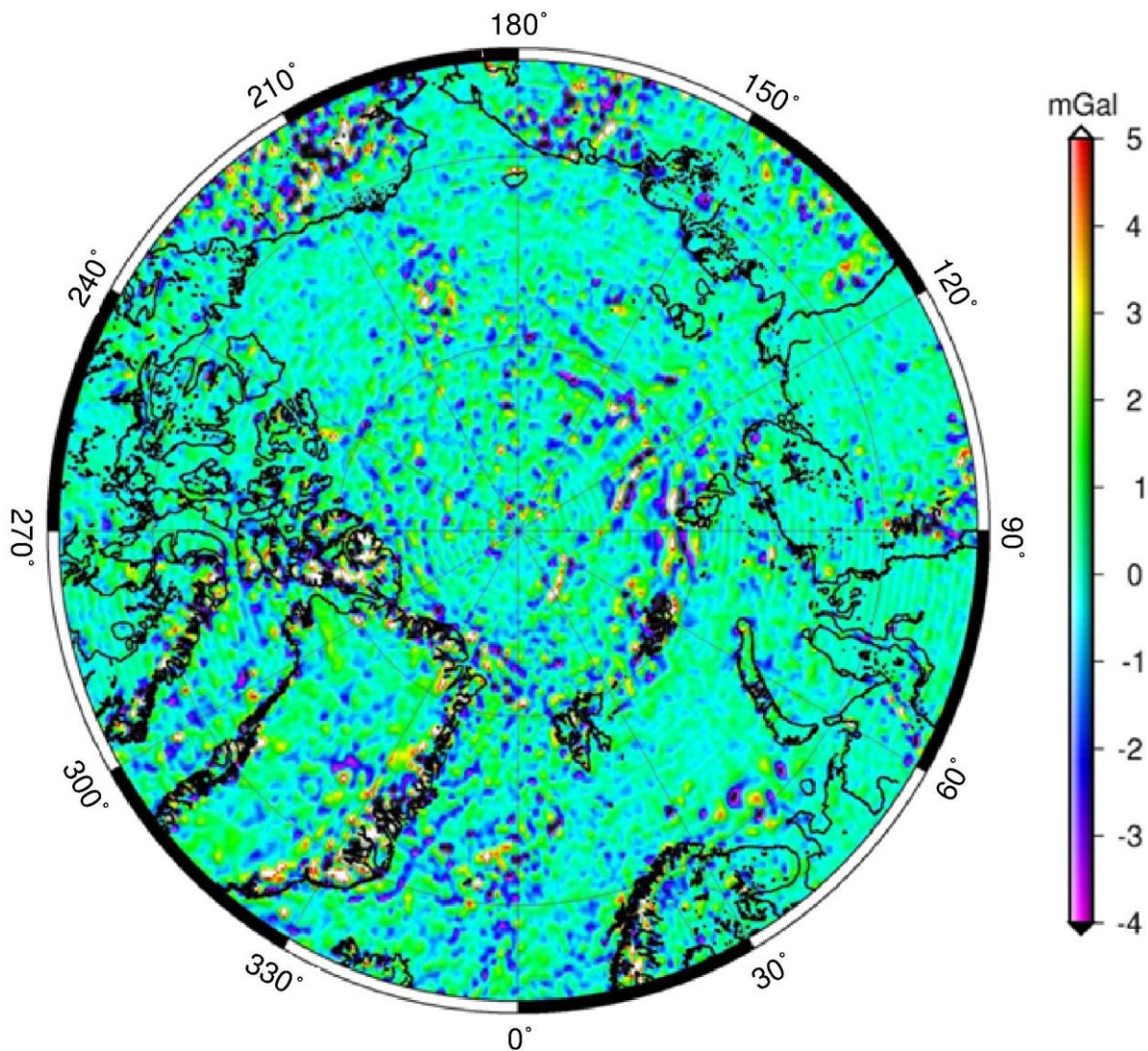


Рис. 4.5 Залишкові значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі $\delta\Delta g$

Якщо в формулу (3.74) підставити максимальний порядок моделі 360, а в формулу (3.76) підставити 100 (при сегменті сфери у 25 градусів), то в обох випадках розрізнявальна здатність складе половину градуса. З цього випливає, що глобальна модель 360-го порядку є еквівалентна по точності ASHA-моделі до 100-го порядку. Тому в даній роботі була побудована ASHA-модель до 150-го порядку.

4.4 Побудова регіонального гравітаційного поля на територію Арктики

Використовуючи алгоритм, розглянутий детально в підрозділі 3.7, було побудовано ASHA-модель залишків гравітаційних аномалій у вільному повітрі $\delta\Delta g_{\text{mod}}$ на територію Арктики до 150-го порядку (рис. 4.6). Підставивши у

формулу (3.87) максимальний порядок моделі, що використовувався, бачимо, що модель була обчислена швидше у приблизно 224 рази у порівнянні з використанням класичного методу найменших квадратів.

Як видно із рисунків 4.5 та 4.6, як самі залишкові значення гравітаційних аномалій, так і їх модельні значення знаходяться в межах від -4 мГал до +5 мГал.

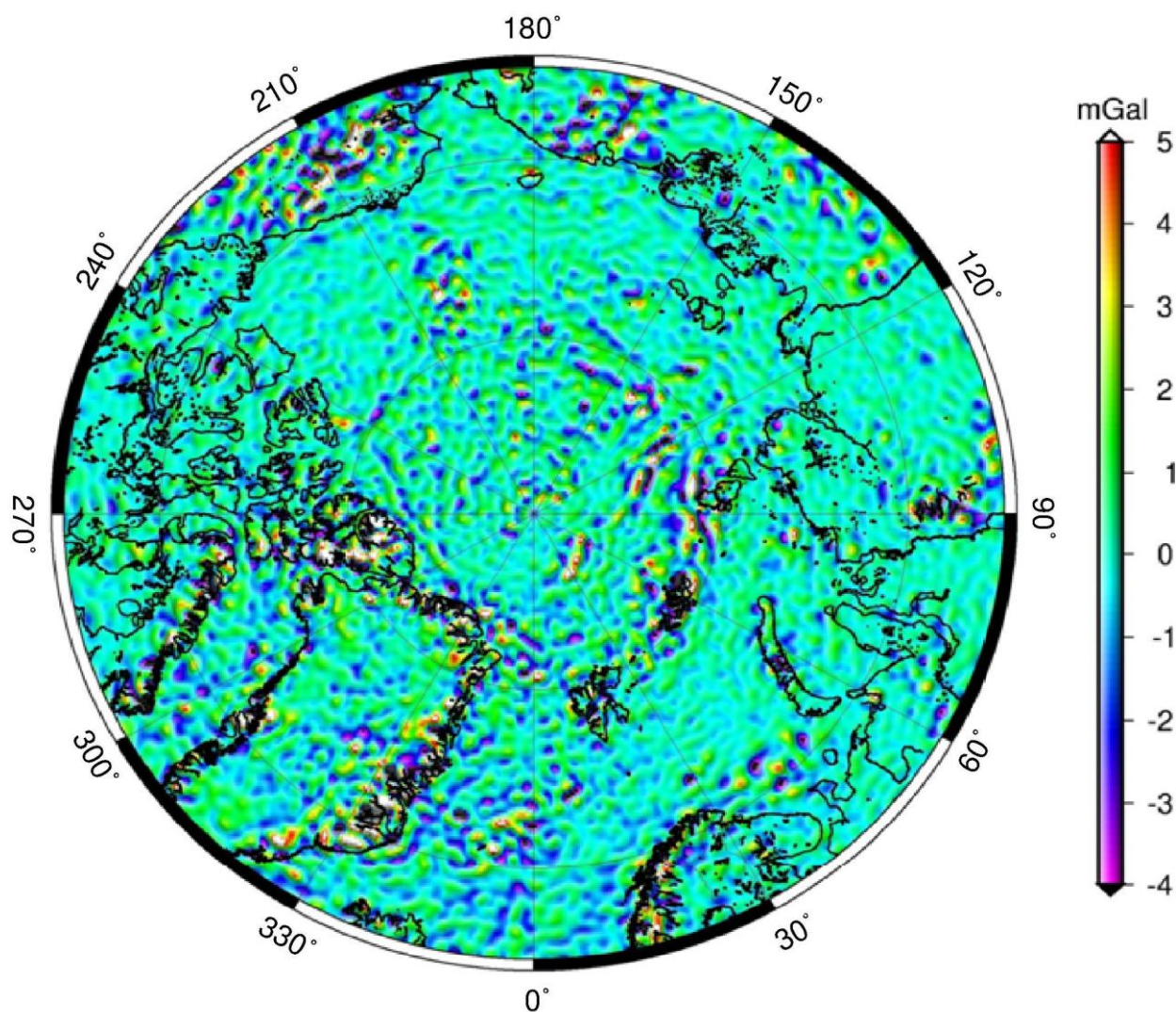


Рис. 4.6. ASHA-модель залишків гравітаційних аномалій у вільному повітрі на територію Арктики до 150-го порядку

Далі з використанням формул (4.6-4.8) визначено залишкові значення (квазі)геоїда $\delta\zeta$ (рис. 4.7). Практично всі залишкові значення даного (квазі)геоїда лежать в межах від -0.4 м до 0.5 м, що добре узгоджується із відповідними залишковими значеннями гравітаційних аномалій у вільному повітрі.

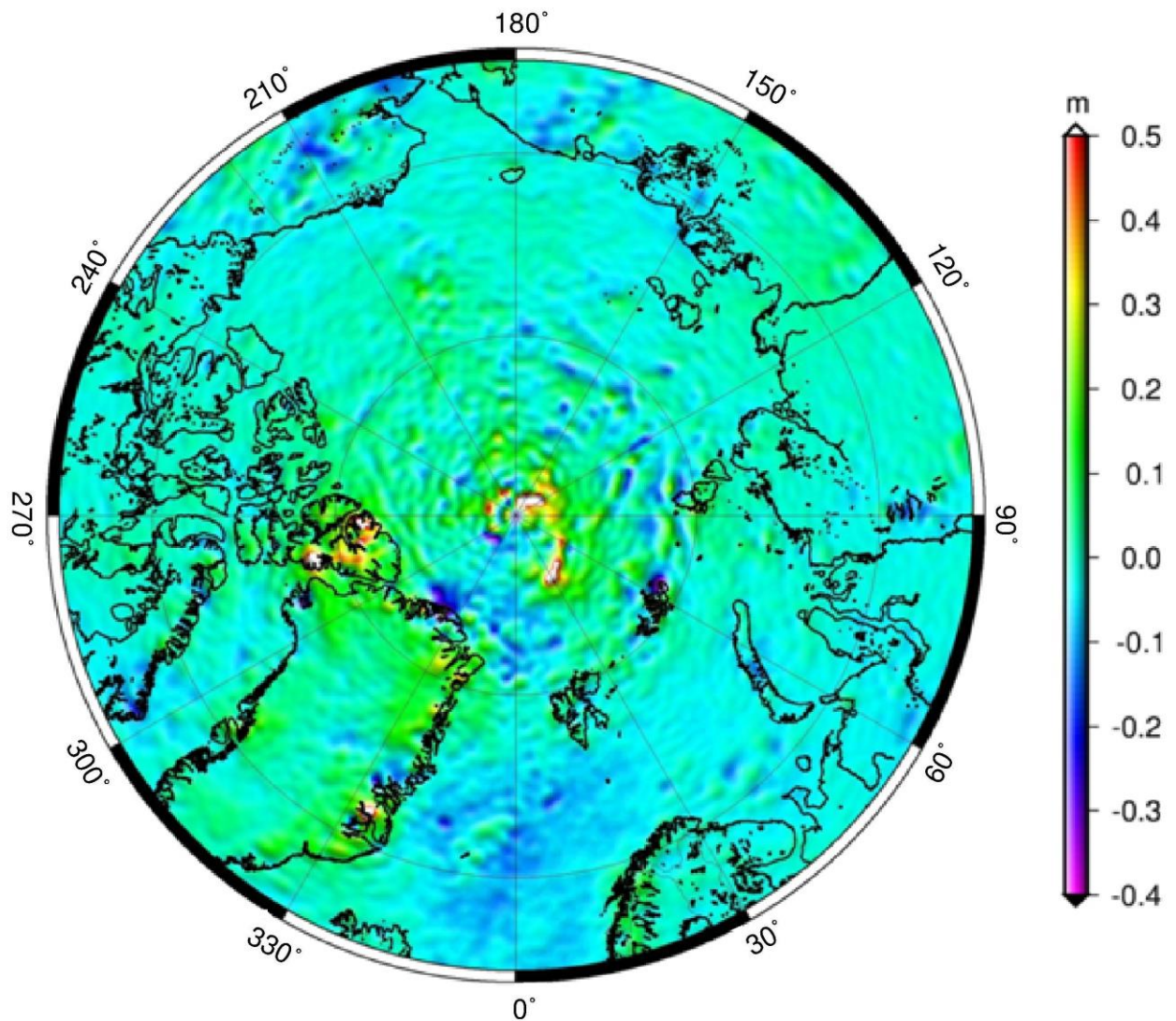


Рис. 4.7 Залишкові значення (квазі)геоїда $\delta\zeta$ на територію Арктики

Таким чином, була отримана комбінована модель регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики (рис. 4.8). Така комбінована модель являє собою суму глобальної моделі EGM2008 і ASHA-моделі

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma R} \sum_{n=2}^{360} \sum_{m=0}^n \{ \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) + \frac{GM}{\gamma R} \sum_{k=2}^{150} \sum_{m=0}^k \{ \bar{C}_{km}^* \cos(m\lambda) + \bar{S}_{km}^* \sin(m\lambda) \} \bar{P}_{km}(\cos\theta) \quad (4.11)$$

Основні характеристики полів гравітаційних аномалій у вільному повітрі, такі як мінімальне, максимальне та середнє значення, а також середня квадратична похибка, подано в таблиці 4.1. Основні характеристики полів висот (квазі)геоїда подано в таблиці 4.2.

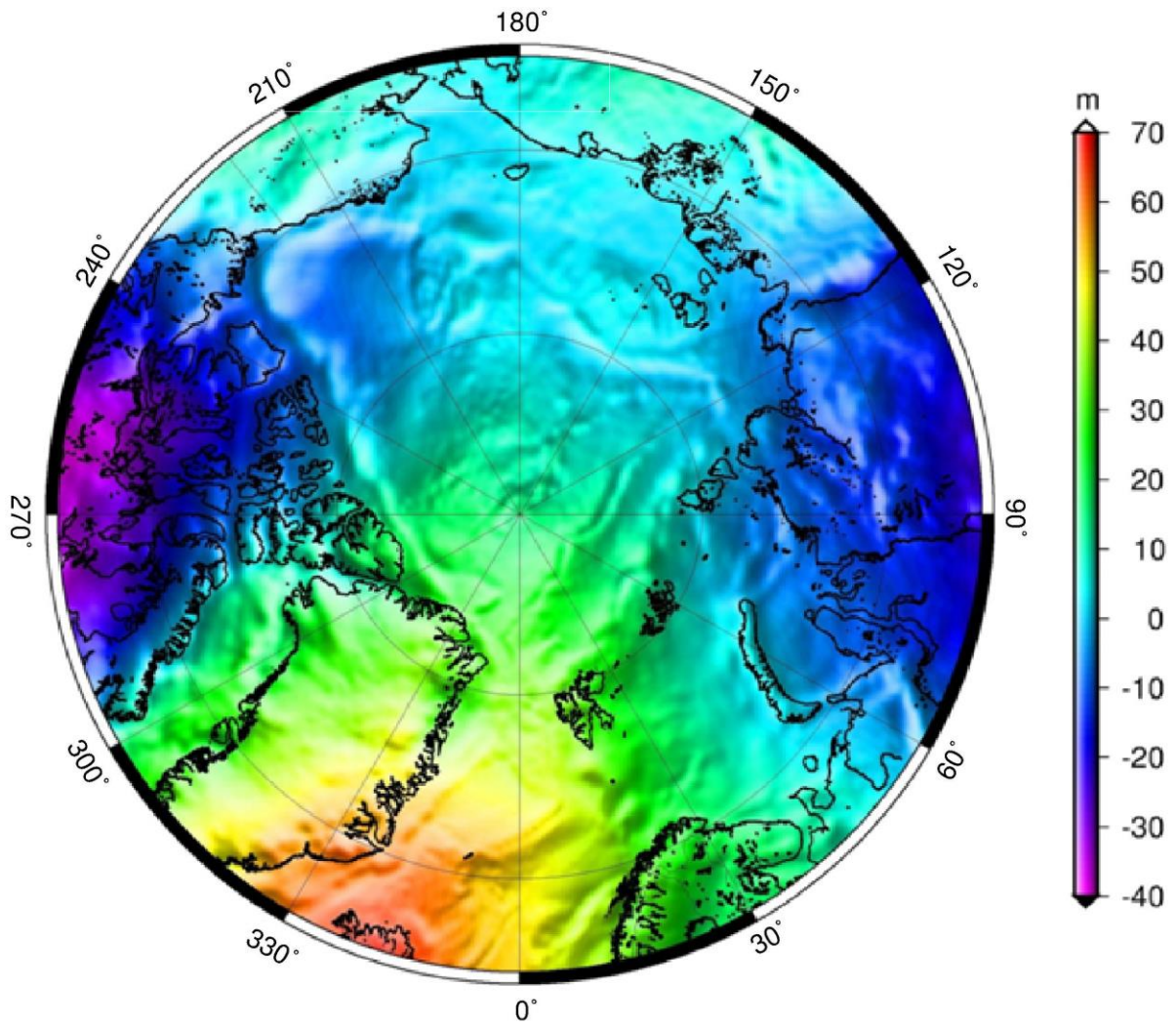


Рис. 4.8 Регіональний (квазі)геоїд на територію Арктики

Таблиця 4.1

Основні характеристики полів гравітаційних аномалій у вільному повітрі

	Мін., мГал	Макс., мГал	Сер., мГал	СКП, мГал
Δg_{AGP}	-167.5	222.7	3.50	27.32
$(\Delta g_M + \delta \Delta g_{mod})$	-154.3	198.4	3.10	26.62

Таблиця 4.2

Основні характеристики полів висот (квазі)геоїда

	Мін., м	Макс., м	Сер., м	СКП, м
ζ_M	-40.5	68.1	10.8	17.85
ζ	-41.0	68.2	10.9	17.89

Як видно із таблиці 4.1, середня квадратична похибка модельних значень гравітаційних аномалій у вільному повітрі складає 26.62 мГал, своєю чергою гравітаційні аномалії у вільному повітрі з AGP мають середню квадратичну похибку 27.32 мГал. Відповідно, судячи з даного показника, реальні і модельні значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі узгоджуються між собою в межах трьох процентів. Таблиця 4.2 ілюструє, що отримана модель висот (квазі)геоїда за всіма характеристиками узгоджується з моделлю висот (квазі)геоїда із EGM2008 на даний регіон.

Для порівняння отриманої моделі висот (квазі)геоїда (4.11) було використано 49 точок, на яких проводилося GPS-нівелювання на території Арктики. Ці точки було взято з Міжнародно центру моделей глобальних гравітаційних полів (ICGEM). Схема розміщення даних точок зображена на рисунку 4.9.

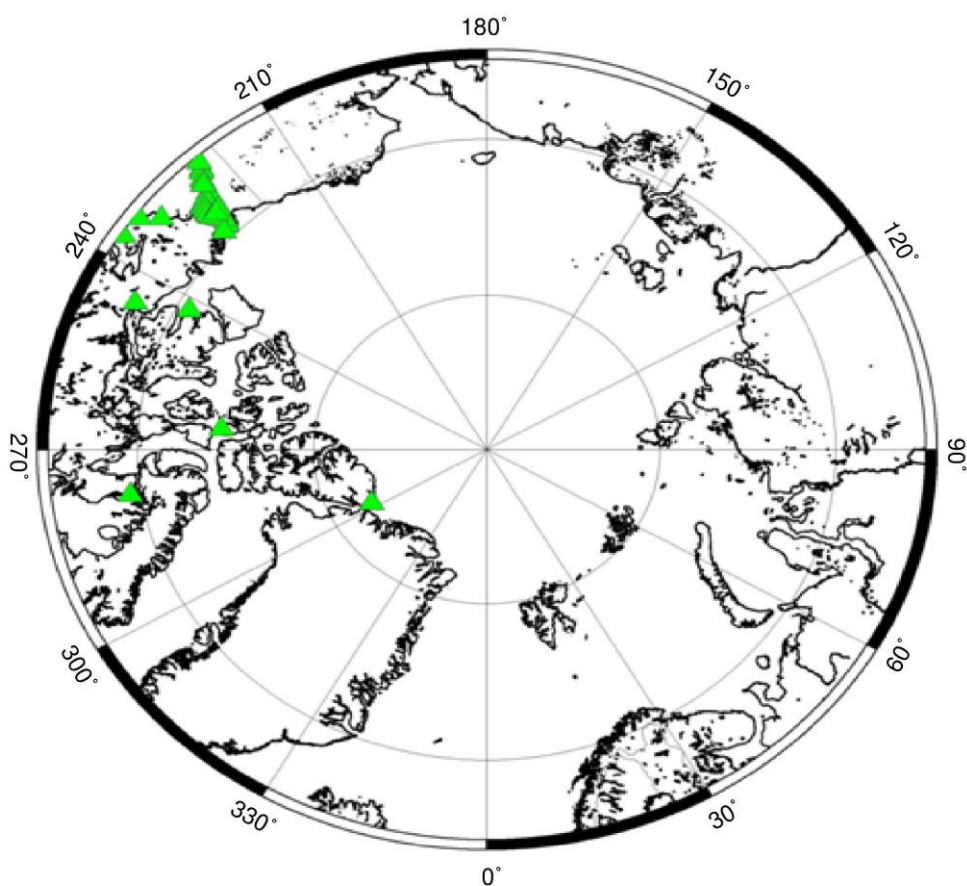


Рис. 4.9 Схема розміщення точок GPS-нівелювання

В таблиці 4.3 подано різниці d між модельними значеннями висот (квазі)геоїда та значеннями, отриманими з GPS-нівелювання.

Таблиця 4.3

Різниці між модельними значеннями висот (квазі)геоїда та значеннями, отриманими з GPS-нівелювання

B, °	L, °	d, m	B, °	L, °	d, m	B, °	L, °	d, m
68,302	226,489	0,153	67,663	226,151	-0,015	65,193	236,566	0,104
67,437	226,228	0,109	67,908	226,425	0,124	68,250	225,204	0,071
67,457	226,246	0,188	68,192	226,563	0,123	65,361	221,700	0,113
67,098	223,874	-0,108	68,562	226,024	0,037	67,792	226,222	0,116
67,245	224,793	-0,156	68,690	225,864	0,076	68,037	226,512	0,137
67,429	225,134	0,059	68,754	225,651	0,084	68,898	225,470	0,116
67,416	225,126	0,070	69,061	225,408	0,095	68,373	225,902	0,094
65,068	221,751	-0,103	69,226	225,757	0,138	68,306	226,473	0,149
65,772	222,154	-0,063	69,437	226,986	0,257	69,438	227,006	0,261
65,899	222,470	-0,002	69,437	227,011	0,291	68,203	224,885	0,025
66,261	223,191	-0,063	68,217	224,998	-0,041	68,292	225,570	0,194
66,449	223,367	-0,021	68,148	224,564	0,059	82,491	297,676	-0,551
66,565	223,692	-0,264	65,275	233,214	0,260	74,691	265,106	-0,463
69,288	226,096	0,119	65,281	233,157	0,248	67,818	244,868	-0,439
65,193	236,575	0,097	66,253	231,356	0,265	69,377	278,190	-0,439
67,543	226,212	0,111	66,257	231,370	0,312	70,736	242,239	-0,393
82,494	297,660	-0,561						

Використовуючи дані з таблиці 4.3, було обчислено середню квадратичну похибку отриманих різниць. Вона склала ± 0.22 м. Також була обчислена середня квадратична похибка різниць між висотами (квазі)геоїда з моделі EGM2008 та висотами з GPS-нівелювання на цих точках, і вона склала ± 0.26 м.

Отже можна констатувати, що запропонована модель висот (квазі)геоїда краща за модель висот (квазі)геоїда із EGM2008 на даний регіон.

4.5 Висновки до розділу 4

В даному розділі апробовано модифікований метод ASHA для побудови регіонального гравітаційного поля з використанням процедури „Вилучення – Відновлення”. За вхідні дані було обрано гравітаційні аномалії у вільному повітрі на території Арктики з AGP на рівномірній сітці розміром $5' \times 5'$. З цих

аномалій було видалено гравітаційні аномалії у вільному повітрі, побудовані за моделлю EGM 2008 до 360-го порядку.

Залишки гравітаційних аномалій у вільному повітрі були апроксимовані модифікованим методом ASHA до 150-го порядку. Також за коефіцієнтами цієї моделі визначено залишки висот (квазі)геоїда. Після виконання процедури „Відновлення” отримано висоти регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики.

Таким чином, була отримана комбінована модель регіонального гравітаційного поля, яка складається з коефіцієнтів глобальної моделі EGM 2008 до 360-го порядку та ASHA-коефіцієнтів до 150-го порядку.

Середня квадратична похибка гравітаційних аномалій у вільному повітрі з AGP становить 27,32 мГал, а середня квадратична похибка гравітаційних аномалій у вільному повітрі з отриманої комбінованої моделі – 26,62 мГал. В свою чергу, середня квадратична похибка висот (квазі)геоїда з моделі EGM 2008 до 360-го порядку та комбінованої моделі становить відповідно 17,85 м та 17,89 м.

Отриману комбіновану модель регіонального (квазі)геоїда на територію Арктики було порівняно із висотами (квазі)геоїда ряду у точках, отриманих із GPS-нівелювання. Середня квадратична похибка різниць висот (квазі)геоїда в даному випадку склала $\pm 0,22$ м. Середня квадратична похибка різниць між висотами (квазі)геоїда з моделі EGM 2008 до 2190 ступеня/порядку та висотами з GPS-нівелювання на цих точках складає $\pm 0,26$ м. Тобто, отримана модель суттєво зменшує час обчислень без втрати точності.

Висновки

В результаті аналізу різних підходів та алгоритмів апроксимації регіонального гравітаційного поля вибрано алгоритм ASHA. Він передбачає використання базової неортогональної системи функцій. В дисертаційній роботі розроблено оптимізований алгоритм визначення невідомих коефіцієнтів моделі при побудові регіонального гравітаційного поля. Такий алгоритм дозволяє швидше будувати матрицю нормальних рівнянь та уникати більшості помилок, що виникають під час підсумування великої кількості даних. Також обґрунтовано побудову комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля, яка включає в себе як коефіцієнти глобальної моделі, так і знайдені за допомогою вищезгаданого алгоритму коефіцієнти регіональної ASHA-моделі. Отримання такої моделі дає змогу побудувати регіональний (квазі)геоїд на даний регіон.

Як вихідні дані в роботі використано гравітаційні аномалії у вільному повітрі на територію Арктики з проекту AGP, розміщені на рівномірній сітці 5'×5'.

Оскільки зберігається тенденція до побудови моделей все більшої роздільної здатності, а отже виникає необхідність оперувати великою кількістю вихідних даних, запропонований метод має очевидну перспективу і є дієвим апробованим засобом обчислення моделей регіональних гравітаційних полів.

У роботі розв'язано такі основні задачі:

1. Розроблено та реалізовано алгоритм створення комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля;
2. Отримано формули для побудови та обертання розрідженої матриці нормальних рівнянь при моделюванні регіонального гравітаційного поля (3.89);
3. Оптимізовано алгоритм побудови регіонального гравітаційного поля, який дає змогу суттєво зменшити час обчислень без втрати точності;
4. Побудовано комбіновану модель регіонального гравітаційного поля на територію Арктики, достовірність якої підтверджено на двох незалежних

масивах даних. Порівняння даної моделі по висотах (квазі)геоїда проводилося з моделлю EGM 2008 та на ряді точок з висотами (квазі)геоїда, отриманими за допомогою GPS-нівелювання.

Запропонований алгоритм створення комбінованої моделі регіонального гравітаційного поля за допомогою неортогональної системи функцій може використовуватися для побудови регіонального квазігеоїда з використанням різних видів вихідних даних на регіон, який за формою близький до сегменту сфери.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексидзе М.А. Об одном представлении аномального гравитационного поля / М.А. Алексидзе – Докл. АН СССР. Москва: т.170, №4, 1966. – 828-830 сс.
2. Гофман-Велленгоф Бернхард. Физическая геодезия / Бернхард Гофман-Велленгоф, Гельмут Мориц [Перевод с английского Ю.М. Неймана, Л.С. Сугаиповой под редакцией доктора технических наук Ю.М. Неймана] – Москва: МИИГАиК 2007. – 426 с.
3. Двуліт П.Д. Фізична геодезія / П.Д. Двуліт; [підручник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом <<Геодезія, картографія та землеустрій>>] – Київ: <<Експрес>>, 2008. – 256 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон – М.: Наука, 1970. – 664 с.
5. Джуман Б.Б. Апроксимація аномалій сили ваги методом ASHA на територію Арктики / Б.Б. Джуман – Геодезія, картографія та аерофотознімання, 80, 2014. – 62-68 сс.
6. Джуман Б.Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля / Б.Б. Джуман – Геодинаміка - №1(14), 2013. – 29-33 сс.
7. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики [О.М. Марченко, К.Р. Третьяк, А.Я. Кульчицький, Ю.І. Голубінка, Д.О. Марченко, Н.П. Третьяк] за заг. ред. О.М. Марченка та К.Р. Третьяка – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 308 с.
8. Заблоцький Федір. АНГЛІЙСЬКО – УКРАЇНСЬКИЙ ГЕОДЕЗИЧНИЙ СЛОВНИК / Федір Заблоцький, Олександра Заблоцька [англійсько – український геодезичний словник] – Львів: Видавництво Національного університету <<Львівська політехніка>>, 2010. – 360 с.
9. Зазуляк П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань / Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. – Львів: Видавництво "Растр-7", 2007. – 408 с.

10. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, С.Б. Глинер, М.М. Смирнов – Москва: Высшая школа, 1970. – 710 с.

11. Кучер О. Про використання глобальних моделей EGM08 та EGG08 для визначення висот квазігеоїда на територію України / О. Кучер, О. Марченко, Д. Марченко, І. Заєць – Вісник геодезії та картографії – 79, 2012. – 13-17 сс.

12. Лук'янченко Ю.О. Побудова нормальних рівнянь для опрацювання даних місії GOCE / Ю.О. Лук'янченко – Геодинаміка, 2013. – 1(14): 34-37 сс.

13. Марченко О.М. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля / О.М. Марченко, Б.Б. Джуман – Геодезія, картографія та аерознімання, 2014. – 79: 29-34 сс.

14. Марченко Олександр Миколайович. Референсні Системи в Геодезії / О.М. Марченко, К.Р. Третьак, Н.П. Ярема – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 216 с.

15. Марченко А.Н. О представлении гравитационного потенциала системой потенциалов нецентральных мультиполей / А.Н. Марченко – Киев: Деп. В УкрНИИНТИ №28-Ук86, 1986. – 55 с.

16. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. Теоретические основы метода / А.Н. Марченко – Кинематика и физика небесных тел, т.3 №2, 1987. – 54-62 сс.

17. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. Предварительный мультипольный анализ / А.Н. Марченко – Кинематика и физика небесных тел, т.3 №3, 1987. – 38-44 сс.

18. Марченко А.Н. Аппроксимация глобального, регионального и локального гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей / А.Н. Марченко – Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии. Тр. 2 Орловской конференции. Киев: Наукова думка, 1988. – 56-59 сс.

19. Марченко О. Оцінювання тензора швидкостей деформацій за даними GPS вимірювань у регіоні Греції, Туреччини та Ірану / О. Марченко, К. Третяк, Н. Ярема, Б. Джуман – Геодинаміка, 1 (12), 2012. – 5-10 сс.
20. Марченко О. Поле лінійних швидкостей та рухи земної кори в регіоні південно-східної Європи / О. Марченко, К. Третяк, Н. Ярема, Б. Джуман, І. Сідоров – Геодинаміка, 2 (13), 2012. – 18-27 сс.
21. Молоденский М.С. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли / М.С. Молоденский, В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина – Труды ЦНИИГАиК, Москва: Вип. 131, 1960. – 251 с.
22. Мориц Гельмут. Современная физическая геодезия / Г. Мориц; [Перевод с английского П.П. Медведева под редакцией Ю.М. Неймана] – МОСКВА: Недра, 1983.
23. Нейман Ю.М. Вариационный метод физической геодезии / Ю.М. Нейман – Москва: Недра, 1979. – 200 с.
24. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия / Л.П. Пеллинен – М.: Недра, 1978. – 264 с.
25. Пеллинен Л.П. Физическая геодезия / Л.П. Пеллинен, Ю.М. Нейман – М.: ВИНТИ, 1980. – 132 с.
26. Смирнов В. Курс высшей математики. Том II. / В. Смирнов – М.: Наука, 1954. – 627с.
27. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала / Л.Н. Сретенский – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. – 318 с.
28. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин – М.: Наука, 1976. – 327 с.
29. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач: 2-е издание / Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1979.

30. Blanco-Montenegro I. Analysis and modelling of the aeromagnetic anomalies of Gran Canaria (Canary Islands) / I. Blanco-Montenegro, J.M. Torta, A. García, V. Araña – *Earth Planet. Sci. Lett.* 206, N 3-4, 2003. – 601-616 pp.
31. Colombo, O. L. Numerical methods for harmonic analysis on the sphere / O. L. Colombo – Rep. 310, Dept. of Geod. Sci. and Surv., Ohio State Univ., Columbus, 1981.
32. Courant R. *Methods of Mathematical Physics* / R. Courant, D. Hilbert – New York, Interscience, Vol. I, 1953.
33. Chambodut A. The selection of data in field modeling. / A. Chambodut, J. Schwarte, B. Langlais, H. Lühr, M. Manda – Copenhagen, Proceedings of the 4th OIST meeting, ed. Stauning et al., 2003. – 31-34 pp.
34. Churchill R.V. *Fourier Series and Boundary Value Problems* / R.V. Churchill – New York : McGraw-Hill, 1963. – 364 p.
35. De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field / A. De Santis – *Geophys. Res. Lett.* – 19, 1992. – 1065-1067 pp.
36. De Santis A. Translated origin spherical cap harmonic analysis / A. De Santis – *Geophys. J. Int.* – 106, 1991. – 253-263pp.
37. De Santis A. Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation / A. De Santis, J.M. Torta – *J. of Geodesy* – 71, 1997. – 526-532 pp.
38. De Santis, A. Spherical cap models of Laplacian potentials and general fields. / A. De Santis, C. Falcone – Springer, Berlin: In *Geodetic Theory Today*, 1995. – 141-150 pp.
39. Driscoll J.R. Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere / J.R. Driscoll, D. Healy – *Adv. Appl. Math.*, Vol. 15, 1994. – 202-250 pp.
40. Düzgüt Z. Assessment of regional geomagnetic field modelling methods using a standard data set: spherical cap harmonic analysis / Z. Düzgüt, S.R.C. Malin – *Geophys. J. Int.* 141, 2000. – 829-831 pp.

41. Featherstone W. E. Satellite and airborne gravimetry: their role in geoid determination and some suggestions / W. E. Featherstone – Geoscience Australia, Airborne Gravity, 2010. – 58-70 pp.
42. Forsberg R. A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modeling / R. Forsberg – Ohio State Univ., Columbus, Dept. of Geod. Sci. and Surv., Rep. 355, 1984.
43. Freeden W. Combined spherical harmonic and wavelet expansion – A future concept in Earth's gravitational determination / W. Freeden, U. Windheuser – Appl. Comput. Harmon. Anal., 1997. – 1-37 pp.
44. Garrett S.W. Interpretation of reconnaissance gravity and aeromagnetic surveys of the Antarctic Peninsula / S.W. Garrett – J. Geophys. Res. 95, 1990. – 6759-6777 pp.
45. Grafarend E. Geodetic prediction concept / E. Grafarend – Brosowski and Martensen, vol. 13, 1975. – 161-200 pp.
46. Gleason D.M. Comparing ellipsoidal corrections to the transformation between the geopotential's spherical and ellipsoidal spectrums / D.M. Gleason, Manuscr. Geod., 13, 1988. – 114-129 pp.
47. Haagmans R. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using ID FFT, and comparison with existing 103 methods for Stokes' integral / R. Haagmans, E. de Min, M. van Gelderen – Manuscripta geodaetica, 18, 1993. – 227-241 pp.
48. Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields / G.V. Haines – Comput. Geosci. – 14, 1988. – 413-447 pp.
49. Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis / G.V. Haines – J. Geophys. Res. – 90, 1985. – 2583-2591 pp.
50. Haines G.V. Magsat Vertical Field Anomalies above 40°N from Spherical Cap Harmonic Analysis / G.V. Haines – J. Geophys. Res. 90 (B3), 1985. – 2593-2598 pp.

51. Haines G.V. Spherical Cap Harmonic Analysis of Geomagnetic Secular Variation over Canada 1960-1983 / G.V. Haines – *J. Geophys. Res.* 90 (B14), 1985. – 12563-12574 pp.
52. Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics / E.W. Hobson – New York : Cambridge Univ. Press, 1931. – 476 p.
53. Hwang C. Orthogonal functions over the oceans and applications to the determination of orbit, geoid and sea surface topography from satellite altimetry / C. Hwang – The Ohio State University, *Rep. No. 404, Dept. of Geod. Sci. and Surv.*, 1991.
54. Hwang C. Spectral analysis using orthonormal functions with a case study on the sea surface topography / C. Hwang – *Geophys. J. Int.*, 115 (1), 1993. – 148-1160 pp.
55. Hwang C. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 / C. Hwang, S. Chen – *Geophys. J. Int.* – 129, 1997. – 450-460 pp.
56. Huang J. GPS-leveling and CHAMP&GRACE geoid models / J. Huang, S. Veronneau – *Adv. Geosci.*, 2004. – 0001–0006 pp.
57. James R.W. On recurrence relation for multipole coefficients / R.W. James – *Pure and Appl. Geophys.* Vol. 68, 1967. – 83-89 pp.
58. Jiancheng L. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / L. Jiancheng , C. Dingbo, N. Jinsheng – *Manuscr. Geod.* – 20, 1995. – 265-277 pp.
59. Kelvin L. Treatise on natural philosophy / L. Kelvin, P. Tait – New York : Cambridge Univ. Press., 1896. – 852 pp.
60. Kenyon S.C. New gravity field for the Arctic / S.C. Kenyon, R. Forsberg – *Eos Trans. AGU*, 89(32), doi:10.1029/2008EO320002, 2008. – 289-290 pp.
61. Kern M. A study on the combination of satellite, airborne and terrestrial gravity data / M. Kern, K.P. Schwarz, N. J. Sneeuw – *Geod. V.* 77, 2003. – 217-225 pp.

62. Kiamehr R. A hybrid precise gravimetric geoid model for Iran based on the recent GRACE and SRTM data and the least square modification of Stokes formula / R. Kiamehr – J. Phys. Earth Space 32 (1), 2006. – 7-23 pp.
63. Korte M. Regularization of spherical cap harmonics / M. Korte, R. Holme – Geophys. J. Int. 153, 2003. – 253-262 pp.
64. Krarup T. A contribution to the mathematical foundation of the Physical Geodesy / T. Krarup – Copenhagen, Dan. Geod. Inst. Reports №4, 1969. – 80 p.
65. Krylov V.I. Approximate Calculation of Integrals / V.I. Krylov – New York : MacMillan, 1962.
66. Lachapelle G. Determination of the geoid using heterogeneous data. / G. Lachapelle – Geod. Inst. Tech. Univ. Graz., 1975.
67. Lanzerotti L.J. Geoelectromagnetism. In Encyclopedia of Applied Physics / L.J. Lanzerotti, R.A. Langel, A.D. Chave – New York, VCH Publishers, 1993.
68. Lawver L.A. Evolution of the Antarctic continental margins. In Geological Evolution of Antarctica / L.A. Lawver, J.-Y. Royer, D.T. Sandwell, C.R. Scotese – Cambridge, Cambridge University Press, Proceedings of the Fifth International Symposium on Antarctic Earth Sciences, ed. M.R.A. Thomson et al., 1987. – 533-539 pp.
69. Li J. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / J. Li, D. Chao, J. Ning – *Manuscripta geodaetica*, 20, 1995. – 265-277 pp.
70. Lowes F.J. Mean square values on the sphere of spherical harmonic vector fields / F.J. Lowes – J. Geophys. Res. 71, 1966. – 2179 p.
71. Lowes F.J. Orthogonality and mean squares of the vector fields given by spherical cap harmonic potentials / F.J. Lowes – Geophys. J. Int. 136, 1999. – 781-783 pp.
72. Lowes F.J. A problem in using spherical cap harmonic analysis to separate internal and external fields / F.J. Lowes – Birmingham, Abstracts of the XXII General Assembly of IUGG, GA1.07/W/03-B2, 1999.

73. Macdonald H.M. Zeroes of the spherical harmonic $P_n^m(\mu)$ considered as a function of n / H.M. Macdonald – Proc. London Math. Soc. – 31, 1900. – 264-278 pp.
74. Marchenko, A. Aproksymacja anomalii grawitacyjnych przez metode ASHA w regionie Arktyki / A. Marchenko, B. Dzhuman – IV Miedzynarodowa konferencja naukowa, Kamionka, 2015. – 110-111 p.
75. Marchenko, A. Regional geoid determination: an application to airborne gravity data in the Skagerrak / A. Marchenko, F. Barthelmes, U. Meyer, P. Schwintzer – Scientific technical report STR01/07, 2001. – 48 p.
76. Marchenko, A. Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project / A. Marchenko, B. Dzhuman – Geodynamics, Vol. 1(18), 2015. – 7-17 pp.
77. Moritz, H. Advanced physical geodesy / H. Moritz – Karlsruhe: Wichmann, 1980. – 75p.
78. Moritz H. Least-squares collocation / H. Moritz – Rev. Geophys., 16(3), 1978. – 421-430 pp.
79. Moritz H. Integral formulas and Collocation / H. Moritz, Man. Geod. 1, 1976. –1-40 pp.
80. Nerem R.S. Gravity model development for TOPEX/ POSEIDON: Joint Gravity Models 1 and 2 / R.S. Nerem – *J. geophys. Res.*, 99, 1994. – 24421-24448 pp.
81. NGA, Arctic Gravity Project, The National Imagery and Mapping Agency, 2008, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/>
82. Olver F.W.J. Associated Legendre Functions on the cut / F.W.J. Olver, J.M. Smith – *J. Computat. Phys.* 51, 1983. – 502-518 pp.
83. Pal B. On the numerical calculation of the roots of the equation $P_n^m(\mu) = 0$ and $(d/d\mu)P_n^m(\mu) = 0$ regarded as equations in n / B. Pal – *Bull. Calcutta Math. Soc.* – 9, 1919. – 85-95pp.

84. Pavlis N. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008 / N. Pavlis, S. Holmes, S. Kenyon, J. Factor – *Geophysical Research Abstracts*, 10, EGU2008–A–01891, EGU General Assembly, 2008.

85. Pavlis N.K. Modeling and estimation of a low degree geopotential model from terrestrial gravity data / N.K. Pavlis – Department of Geodetic Science and Surveying, Rep. No. 386, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1988.

86. Payne M.H. Truncation Effects in Geopotential Modelling / M.H. Payne – Analytical Mechanics Associates, Seabrook, MD, 1971.

87. Rapp R.H. Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference / R.H. Rapp – *J. Geod.*, 71, 1997. – 282-289 pp.

88. Rapp R.H. Past and future developments in geopotential modeling, in *Geodesy on the Move: Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica* / R.H. Rapp – Springer, Berlin, IAG Symposia, vol. 119, edited by R. Forsberg, M. Feissel, and R. Dietrich, 1998. – 58-78 pp.

89. Rizos, C. An efficient computer technique for the evaluation of geopotential from spherical harmonic models / C. Rizos – *Aust. J. Geod. Photo. Surv.* 31, 1979. – 161-169 pp.

90. Scheinert M. Regional geoid determination in Antarctica utilizing airborne gravity and topography data / M. Scheinert, J. Muller, R. Dietrich, D. Damaske, V. Damm – *Journal of Geodesy* 82, 2008. – 403-414 pp.

91. Schmidt M. Regional gravity modeling in terms of spherical base functions / M. Schmidt, M. Fengler, T. Mayer-Gurr, A. Eicker, J. Kusche, L. Sanchez, S.C. Han – *J. Geod.* V. 81, 2007. – 17-38 pp.

92. Seeber, G. *Satellite Geodesy* / G. Seeber – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2003.

93. Sideris, M. Geoid determination by FFT techniques. *International School for the Determination and Use of the Geoid* / M. Sideris – Budapest University of Technology and Economics, 2005. – 64 p.

94. Sjöberg L.E. The terrain correction in gravimetric geoid computation-is it needed? / L.E. Sjöberg – *Geophys. J. Int.*, 176, 1984. – 14-18 pp.
95. Sjöberg L.E., Least squares modification of Stokes' and Vening-Meinesz' formulas by accounting for truncation and potential coefficient errors / L.E. Sjöberg – *Man. Geod.* 9, 1984. – 209-229 pp.
96. Smythe W.R. *Static and Dynamic Electricity* / W.R. Smythe – New York : McGraw-Hill, 1950. – 635 p.
97. Sneeuw, N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective / N. Sneeuw – *Physical Geodesy.*, Wien, New York: Springer, 1994. –713 p.
98. Stening R.J. Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia / R.J. Stening, T. Reztsova, D. Ivers, J. Turner, D.E. Winch – *Earth Planets Space* – 60, 2008. – 1177-1186 pp.
99. Tenzer R., Klees R. The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling / R. Tenzer, R. Klees – *Stud. Geoph. Geod.*, 52(3), 2008. – 287-304 pp.
100. Thebault, E. Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) / E. Thebault, M. Manda, J. Schott – *J. Of Geophys. Research*, 2006. – 111-113 pp.
101. Thébault E. Geomagnetic field modelling on small spherical caps / E. Thébault, J.J. Schott, M. Manda – France, Nice, EGS XXVII General Assembly, EGS02-A-04673, SE6.07-1WE2A-003, 2002.
102. Torta J.M. Modelización regional del campo geomagnético sobre España: campo anómalo, variación secular y campo de referencia / J.M.Torta – *Memorias del Observatorio del Ebro* 15, ISBN: 84-88253-00-1, 1992.
103. Torta J.M. Spherical cap harmonics revisited and their relationship to ordinary spherical harmonics / J.M. Torta, A. De Santis, F.J. Lowes – *Phys. Chem. Earth.*, vol. 24, 1999. – 935-941 pp.

104. Tscherning, C.C. A comparison of methods for computing gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansion / C.C. Tscherning, R.H. Rapp, C. Goad – *Man. Geod.*, 8, 1983. – 249-272 pp.

105. Tscherning C.C. Local approximation of the gravity potential by least squares collocation / C.C. Tscherning – Calgary, Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, 1985. – 277-362 pp.

106. Tsuboi C. Gravity anomalies and the corresponding subterranean mass distributions / C. Tsuboi – *Proc Imper Acad Japan* 14, 1938. – 170-175 pp.

107. Vennerstrøm S. Comparison between the Polar Cap index, PC, and the Auroral Electrojet Indices AE, AL, and AU. / S. Vennerstrøm, E. Friis-Christensen, O.A. Troshichev, V.G. Andresen – *J. Geophys. Res.* 96, N. A1, 1991. – 101-113 pp.

108. Walker J.K. Spherical cap harmonic modelling of high latitude magnetic activity and equivalent sources with sparse observations / J.K. Walker – *J. Atmos. Terrest. Phys.* 51, N.2, 1989. – 67-80 pp.

109. Winch D.E. Computations with spherical harmonics and Fourier series in geomagnetism / D.E. Winch, R.W. James – *Meth. Comput. Phys.* Vol. 13, 1973. – 93-132 pp.

110. Yun H.C. Precision geoid determination by spherical FFT in and around the Korean peninsula / H.C. Yun – *Earth Planets Space*, 51, 1999. – 13-18 pp.