

ПРОГРАМА
вступного іспиту зі спеціальності
111 Математика
для здобувачів вищої освіти
третього (освітньо-наукового) рівня

1. Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.

2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції, похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.

3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.

4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.

5. Числові ряди: означення збіжності, критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.

6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів, почленне диференціювання та інтегрування; степеневі ряди та їх основні властивості, розвинення елементарних функцій у степеневі ряди.

7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційованість; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.

8. Невластиві інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; властивості функцій, що визначаються невластивими інтегралами. Інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру.

9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невластиві кратні інтеграли,

10. Криволінійні та поверхневі інтеграли; означення, властивості, обчислення; формула Грі на, Гауса-Остроградського і Стокса.

11. Ряди і інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є; перетворення Фур'є.

2. Алгебра

1. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор – групи.
2. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.
3. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь; необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера-Капеллі); теорема про структуру розв'язків. Формула для обчислення оберненої матриці.
5. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; теорема Гамільтона-Келі.

3. Функціональний аналіз

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі \mathbb{R}^n .
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.
3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.
4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори: означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і компактні оператори в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з компактними операторами.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.

4. Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

5. Звичайні диференціальні рівняння

1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь; означення типу та класифікація розв'язків; розв'язність елементарних квазілінійних рівнянь першого порядку.

2. Теорема існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівнянь та системи рівнянь. Особливі точки і особливі розв'язки диференціальних рівнянь.

3. Лінійні диференціальні рівняння: структура загального розв'язку; знаходження розв'язків лінійних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами; методи знаходження частинних розв'язків неоднорідних рівнянь та систем.

4. Стійкість розв'язків систем нелінійних рівнянь: означення; метод функцій Ляпунова; дослідження на стійкість за першим наближенням.

5. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: побудова загального розв'язку; розв'язність задачі Коші.

6. Рівняння з частинними похідними

1. Класифікація рівнянь з частинними похідними: рівняння 2-го порядку, їх типи та зведення до канонічної форми; гіперболічні, еліптичні та параболічні рівняння довільного порядку.

2. Задача Коші для рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; доведення єдиності методом Хольмгрена.

3. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.

4. Задача Коші та початково-крайові задачі для рівнянь гіперболічного типу: розв'язування задачі Коші для гіперболічних рівнянь методом характеристик; формула Кірхгофа; методи розв'язування початково-крайових задач; загальна схема методу Фур'є розв'язання змішаної задачі для гіперболічних рівнянь.

5. Гармонічні функції: означення, принцип максимуму та його застосування до доведення єдиності розв'язку задачі Діріхле; розв'язування задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа методом потенціалу.

6. Параболічні рівняння 2-го порядку: принцип максимуму та його застосування до доведення єдиності розв'язків задач Коші і Діріхле; розв'язування задачі Коші; інтеграл Пуассона; методи розв'язування початково-крайових задач.

7. Класифікація за І.Г. Петровським систем диференціальних рівнянь із частинними похідними довільного порядку (гіперболічні, еліптичні, параболічні).

Форми контролю та критерії оцінювання

Організування та проведення вступних випробувань до аспірантури здійснюється відповідно до Правил прийому до аспірантури Національного університету «Львівська політехніка» у відповідному році.

Вступний іспит зі спеціальності 111 «Математика» проводиться у письмово-усній формі згідно з окремим графіком, який затверджується Ректором Університету та оприлюднюється на інформаційному стенді відділу докторантури та аспірантури й офіційному веб-сайті Університету не пізніше, ніж за 3 дні до початку прийому документів.

Екзаменаційні білети вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» формуються в обсязі програми рівня вищої освіти магістра зі спеціальності 111 «Математика» та затверджуються на засіданні Вченої ради Навчально-наукового інституту прикладної математики та фундаментальних наук.

Результати вступного іспиту зі спеціальності оцінюються за 100-бальною шкалою.

Екзаменаційний білет вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності 111 «Математика» містить:

- письмову компоненту з чотирьох питань: одне питання з розділу «1», одне питання з розділів «2» або «4», одне питання з розділу «3» і одне питання з розділів «5» або «6» (кожне із чотирьох питань екзаменаційного білета оцінюється максимально в 20 балів, максимальна сумарна кількість балів письмової компоненти – 80 балів);
- усну компоненту вступного іспиту з чотирьох питань (кожне із чотирьох питань усної компоненти оцінюється максимально в 5 балів, максимальна сумарна кількість балів усної компоненти – 20 балів).

Критерії оцінювання кожного питання письмової та усної компоненти вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» є такими:

Оцінка «відмінно» (18-20 балів для питань письмової компоненти та 5 балів для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру бездоганно засвоїв теоретичний матеріал щодо місту питання; самостійно, грамотно і послідовно з вичерпною повнотою відповів на питання; демонструє глибокі та всебічні знання, логічно будує відповідь; висловлює своє ставлення до тих чи інших проблем; вміє встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, логічно та обґрунтовано будувати висновки.

Оцінка «добре» (14-17 балів для питань письмової компоненти та 4 бали для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру добре засвоїв теоретичний матеріал щодо змісту питання, аргументовано викладає його; розкриває основний зміст питання, дає неповні визначення понять, допускає незначні порушення в послідовності викладення матеріалу та неточності при використанні наукових термінів; нечітко формулює висновки, висловлює свої міркування щодо тих чи інших проблем, але припускається певних похибок у логіці викладу теоретичного змісту.

Оцінка «задовільно» (10-13 балів для питань письмової компоненти та 3 бали для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру в основному засвоїв теоретичний матеріал щодо змісту питання; фрагментарно розкриває зміст питання

і має лише загальне його розуміння; при відтворенні основного змісту питання допускає суттєві помилки, наводить прості приклади, непереконливо відповідає, плутає поняття.

Оцінка «незадовільно» (0-9 балів для питань письмової компоненти та 0-2 бали для питань усної компоненти): вступник не засвоїв зміст питання, не знає основних його понять; дає неправильну відповідь на запитання.

Виконання завдань вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» передбачає необхідність неухильного дотримання норм та правил академічної доброчесності відповідно до Положення про академічну доброчесність у Національному університеті «Львівська політехніка». За порушення зазначених норм та правил вступники в аспірантуру притягаються до відповідальності згідно вимог чинного законодавства.

Л і т е р а т у р а

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1, 2. – Київ, Либідь, 1994.
2. Костробій П.П., Строчик М.М. Математичний аналіз II. – Львів: Растр-7, 2022. – 392 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. – М.: Высш. школа, 1981, т.1 и 2.
4. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528 с.
5. Дороговцев А. Я. Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 558с.
6. Рудин У. Основы математического анализа . – М., Мир, 1976.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 1, 2, 3. – К.: Вища школа, 1990, 1991, 1992.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
9. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986. – 304с.
10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М. Наука, 1968.
11. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.
12. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1966.
13. Ильин В.А., Позняк З.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624с.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. – М: Высш.шк., 1982. – 271 с.
16. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с.
17. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с.

18. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
19. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч. 1. – М.: Наука, 1985. – 336с.
20. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений – К.: Радянська шк., 1953. – 444с.
21. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Дифференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
22. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Дифференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1981. – 504 с.
23. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
24. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
25. Петровский И.Г. Лекций об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
26. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
27. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
28. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001.
29. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2009. – 387 с.