

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

*Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису*

**Качур Олександр Юрійович**

УДК 621.01

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ОБҐРУНТУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ  
МІЖРЕЗОНАНСНИХ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН  
З КЕРОВАНИМ КРИВОШИПНО-ШАТУННИМ ПРИВОДОМ**

Галузь знань 13 – “Механічна інженерія”

131 – “Прикладна механіка”

Подається на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних наукових досліджень. Використані ідеї та результати інших авторів мають посилання на відповідні джерела.

\_\_\_\_\_ Качур Олександр Юрійович

Науковий керівник:

Ланець Олексій Степанович,  
доктор технічних наук, професор

Львів 2021

## АНОТАЦІЯ

*Качур Олександр Юрійович.* Обґрунтування параметрів дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин з керованим кривошипно-шатунним приводом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD) за спеціальністю 131 – “Прикладна механіка”. Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти та науки України, Львів – 2021.

У вступі встановлено, що незважаючи на наявність широкої гами конструкцій вібраційних машин (в основному одно- та двомасових), які повністю задовольняють потреби промисловості, сучасні тенденції енергозбереження вимагають пошуку нових рішень у створенні високоефективного вібраційного технологічного обладнання. Найбільш перспективними для подальших досліджень є дискретні тримасові міжрезонансні вібраційні машини. Проте, під час реалізації високоефективних міжрезонансних режимів роботи існують труднощі з приведенням в рух надлегких реактивних мас. Формується усвідомлення того, що дискретні структури тримасових міжрезонансних механічних коливальних систем вичерпали свій потенціал, оскільки існуючі методики їх розрахунку не в стані забезпечити стійку зону коливань для надлегких реактивних мас.

Тож пошук нових структур і підходів у розрахунку міжрезонансних вібраційних машин, приводи яких здатні безперешкодно входити в міжрезонансну зону та приводити в рух надлегкі реактивні маси, реалізуючи дієві високоефективні конструкції, є однією з перспективних науково-прикладних задач машинобудування, для вирішення якої сформовано мету та завдання подальших дисертаційних досліджень.

З метою пошуку шляхів вирішення поставленої науково-прикладної задачі було проведено літературний огляд сучасного стану та напрямків удосконалення вібраційних машин. Вкотре було доведено, що одно- та двомасові коливальні системи нездатні реалізовувати високоефективні режими роботи, притаманні міжрезонансним. Тому їх подальший аналіз виявився неперспективним.

Підтверджено, що тримасовим механічним коливальним системам властиві високі коефіцієнти динамічності і вони, без сумніву, є енергоощадні. Проте, широке їх поширення дійсно обмежується низкою чинників. Так, в системах з електромагнітним проводом невирішені до кінця задачі стабілізації амплітуди коливань надмалої реактивної маси, яка в міжрезонансних режимах може набувати критичних значень, нівелюючи умови міцності пружних елементів. В системах з дебалансним приводом існують труднощі безпроблемного входження у міжрезонансну зону, коли оберти дебаланса можуть “зависнути” на першому власному резонансному піку (не розглядаючи резонансний пік, сформований дією віброізоляторів).

Виявлено, що тримасові міжрезонансні коливальні системи вичерпали свій потенціал, оскільки існуючі методики їх розрахунку не в стані забезпечити стійку зону коливань для надлегких реактивних мас, амплітудно-частотні характеристики яких стрімкоподібні. Тож одним з шляхів по вдосконаленню міжрезонансних вібраційних машин є пошук підходів у синтезі нових структур, на основі яких можна буде розробити дієве високоефективне вібраційне обладнання.

Відзначено, що у високоефективних міжрезонансних системах реактивна маса та жорсткість відповідного пружного вузла повинні бути відповідно надлегкими та надмалими. Такими властивостями може володіти гнучке тіло (тіло з розподіленими параметрами), тобто континуальна ділянка, яка оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри.

На основі результатів літературного огляду була сформульована ідея, покликана розв’язати поставлену науково-прикладну задачу. Вона полягає у поєднанні дискретних та континуальних коливальних систем, синергія яких в гібридних структурах здатна надати вібраційним машинам нових властивостей по ефективності функціонування. Гіпотеза, яка забезпечує виконання даної ідеї, звелась до введення в дискретну коливальну систему тіла з розподіленими параметрами (континуальної ділянки у вигляді стержня, пластини тощо), яке одночасно наділене надлегкими інерційними та надмалими жорсткісними пара-

метрами. Результати дисертаційних досліджень, як виявилось, повністю підтвердили правильність закладених ідеї та гіпотези. Їх реалізація забезпечила якісний розвиток енергоощадних міжрезонансних вібраційних машин, які ефективно забезпечують високоефективні режими роботи, реалізуючи вузьку міжрезонансну зону з надвисокими коефіцієнтами динамічності.

З огляду на це акцент роботи був поставлений на розробленні структурної схеми механічної коливальної системи вібраційної машини з континуальною ділянкою (тілом з розподіленими параметрами, найбільш ймовірно стержнем), встановленні її параметрів, дослідженні її властивостей та поєднання її з дискретною моделлю. У результаті досліджень виявлено, що найбільш придатним об'єктом для реалізації континуальної ділянки є стержень, який володіє достатньою гнучкістю (малою жорсткістю) та незначними інерційними параметрами. Стержні здатні розвивати значні амплітуди коливань, забезпечуючи умови міцності, що є цінним під час реалізації вузла реактивної маси. Обґрунтовано, що найбільш доцільно приводити в рух дискретно-континуальну систему кривошипно-шатунним механізмом.

Оскільки ключовим елементом гібридної структури механічної коливальної системи стала континуальна ділянка у вигляді стержня, окремим розділом сформована методологія його досліджень, яка є необхідним матеріалом для встановлення базових аналітичних залежностей, надає розуміння фізики процесу його коливань та формує методологічне підґрунтя подальшим дисертаційним дослідженням. Так, розглянуто диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, з якого отримано відомі аналітичні залежності згинального моменту та поперечної сили, необхідні для встановлення його поперечних прогинів. Розглянуто методику формування диференціального рівняння згинальних коливань стержня, яка дозволяє описати його вимушений рух та визначити його власні частоти коливань. Окреслено метод Релея-Рітца, який дозволяє наближено визначити власну частоту стержня, встановити його зведені масу і жорсткість, які задіяні в коливальному процесі. Запропонована методика пошуку зведеної швидкості стержня

– точки, в яку власне і зводяться його інерційно-жорсткісні параметри. Проаналізовано методологію встановлення параметрів дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи, як еталонної для аналізу дискретно-континуальної.

Як початковий етап у синтезі дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини обґрунтовано інерційно-жорсткісні та силові параметри високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи вібраційного транспортера-сепаратора – як еталонної моделі, параметри якої приймаються визначальними для формування дискретно-континуальної системи і повинні бути реалізовані в ній. Встановлено основні технологічні та конструктивні параметри еталонної системи, а саме: обґрунтовано доцільність використання низькочастотних режимів роботи; визначено інерційні параметри активної та проміжної коливальних мас; з метою забезпечення необхідного додаткового динамічного підсилення коливань вибрано розташування власних резонансних піків; встановлено інерційне значення реактивної маси та жорсткостей двох резонансних пружних вузлів. Власне інерційне значення реактивної маси та жорсткість відповідного їй пружного вузла поєднуються у континуальній ділянці вібраційної машини (стержні) і є ключовими під час її реалізації. Розглянута математична модель еталонної дискретної коливальної системи, проаналізовано її амплітудно-частотні характеристики та перехідні режими роботи. Встановлено ефективність функціонування еталонної тримасової дискретної системи порівняно з адекватною двомасовою резонансною. Визначено парціальну частоту коливань реактивної маси, яка є визначальною під час підбору континуальної ділянки (стержня).

Як найбільш раціональною схемою для реалізації континуальної ділянки високоефективної міжрезонансної вібраційної машини вибрано тіло з розподіленими параметрами у вигляді стержня, що встановлений на двох шарнірних опорах, один з кінців якого консольно закріплений, а другий приводиться в рух від ексцентрика. Власне наявність консолі, коливальний рух якої необмежується

нічим, як виявиться далі, забезпечить можливість накопичення необхідних інерційних сил в реактивному вузлі (континуальній ділянці), так необхідних для приведення в рух усієї механічної коливальної системи.

Розглянуто вільні згинальні коливання континуальної ділянки з використанням функцій Крилова і встановлено її першу власну частоту коливань, яка практично повністю збігається з відповідною парціальною частотою еталонної дискретної моделі. Розглянуто вимушені коливання континуальної ділянки та сформовано на основі колових та гіперболічних функцій Крилова математичну модель у вигляді системи рівнянь, що описує її рух. Виділивши частотну матрицю, вкотре підтверджено значення першої власної частоти коливань континуальної ділянки. Сформовано математичну модель дискретно-континуальної коливальної системи вібраційної машини, в якій через реакції в опорах континуальної ділянки поєднано дискретну частину системи з континуальною. Визначено значення постійних параметрів та реакцій в опорах. Побудовано амплітудно-частотну характеристику дискретно-континуальної коливальної системи, яка повністю узгодилась із характеристикою еталонної дискретної тримасової. Це дозволило стверджувати про наявність у синтезованій структурі параметрів та властивостей еталонної дискретної системи. Побудовано схему прогинів континуальної ділянки, розраховано її на міцність. Власну частоту коливань перевірено наближеним методом Релея-Рітца. З використанням цього ж методу встановлено зведену масу та зведену жорсткість континуальної ділянки, які практично повністю узгодилися із розрахунковими значеннями.

Конструкторсько-експериментальна частина дисертації присвячена остаточному формуванню та дослідженню дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини. Значна увага приділена створенню керованого кривошипно-шатунного привода, який відрізняється від існуючих вібробуджувачів можливістю в широкому діапазоні змінювати величину ексцентриситету та плавно керувати частотою збурення. Перераховані переваги забезпечують безперешкодне входження обертів кривошипа у міжрезонансну зону, обходячи

ефект Зоммерфельда; спрощують процес регулювання режимів роботи вібраційного обладнання відповідно до змінних технологічних або виробничих умов. Обґрунтовано конструктивні та експлуатаційні параметри запропонованого керованого кривошипно-шатунного механізму. За допомогою методу замкнених векторних контурів описано кінематику механізму, на основі чого отримано аналітичні вирази, які описують залежність зміни ексцентриситету від переміщення керованого повзуна. Побудовано відповідні графіки. Правильність отриманих виразів та результатів чисельного моделювання було підтверджено імітаційним моделювання руху механізму. Опираючись на проведений аналіз механізму, розроблено керований кривошипно-шатунний привод і реалізовано його у вібраційному транспортері-сепараторі.

Розроблено схему розміщення та кріплення пружних елементів, що з'єднують між собою активну та проміжну маси вібраційного транспортера-сепаратора. Проведено аналітичні розрахунки їх жорсткісних параметрів, які узгодились з дискретною математичною моделлю. Встановлено геометричні параметри пружних елементів та аналітично розраховано напруження, що виникають в них. Проведено комп'ютерне моделювання пружного елемента методом скінченних елементів. Це дозволило перевірити результати аналітичних обчислень жорсткості та максимальних напружень, які виникають у ньому.

Виходячи з умови мінімізації передачі динамічних навантажень на фундамент була вибрана необхідна частота власних коливань системи на віброізоляторах, на основі чого проведено їх розрахунок на жорсткість та міцність. Достовірність отриманих результатів було підтверджено комп'ютерним моделюванням методом скінченних елементів. Це завершило конструкторську частину й надало всі вихідні дані для створення експериментального зразка дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора.

Експериментально встановлено парціальну частоту коливань континуальної ділянки, що дозволило опосередковано підтвердити наявність в ній інерційно-жорсткісних параметрів, закладених під час розрахунку. На основі знятих

часових залежностей руху активної та проміжної мас, експериментально підтверджено наявність закладених розрахункових амплітудно-частотних характеристик, що загалом вказало на правильність розробленої методології дисертаційних досліджень. Експериментально підтверджено безперешкодний вхід у міжрезонансну зону керованого кривошипно-шатунного привода, що дозволило стверджувати про обґрунтованість використання запропонованих структур під час створення високоефективних міжрезонансних вібраційних машин.

На основі конструкторської частини була сформована методологія побудови дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора, де вперше застосовано гібридні (дискретно-континуальні) структури коливальних систем, відмінністю яких є введення у якості третьої (реактивної) маси континуальної ділянки, наділеної на першій власній частоті певною зведеною жорсткістю та зведеною масою. Це дозволило ефективно забезпечувати міжрезонансні режими роботи, розкривши прихований потенціал синтезованих систем, обумовлений синергією дискретної та континуальної коливальних систем.

**Ключові слова:** дискретно-континуальна механічна коливальна система, вібраційна машина, міжрезонансний режим роботи, власна частота коливань.

## ABSTRACT

*Kachur Oleksandr Yuriyovych.* Synthesis of energy-efficient discrete-continuous inter-resonance vibratory machines with controllable crank drive – Qualifying scientific hearing on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of philosophy (PhD) on a specialty 131 – Applied mechanics. Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv – 2021.

In the introduction it is established that despite the presence of a wide range of designs of vibrating machines (mostly single- and two-mass), which fully meet the needs of industry, modern energy conservation trends require finding new solutions in



creating highly efficient vibrating technology equipment. The most promising for further research are discrete three-mass inter-resonant vibrating machines. However, during the implementation of highly efficient inter-resonant modes of operation there are difficulties with the propulsion of ultralight reactive masses. There is an awareness that discrete structures of three-mass inter-resonant mechanical oscillatory systems have exhausted their potential, because the existing methods of their calculation are not able to provide a stable oscillation zone for ultralight reactive masses.

Therefore, the search for new structures and approaches in the calculation of inter-resonant vibrating machines, the drives of which are able to freely enter the inter-resonant zone and drive ultralight reactive masses, implementing effective high-performance structures, is one of the promising scientific and applied problems of mechanical engineering. further dissertation research.

In order to find ways to solve the scientific and applied problem, a literature review of the current state and areas of improvement of vibrating machines was conducted. It has been proved once again that single- and two-mass oscillating systems are incapable of realizing the highly efficient modes of operation inherent in interresonance. Therefore, their further analysis was not promising.

It is confirmed that three-mass mechanical oscillating systems are characterized by high coefficients of dynamism and they are, without a doubt, energy-saving. However, their wide distribution is really limited by a number of factors. Thus, in systems with electromagnetic wire, the problem of stabilizing the amplitude of oscillations of ultrasmall reactive mass, which in inter-resonant modes can acquire critical values, leveling the strength conditions of elastic elements, is unsolved. In systems with unbalanced drive, there are difficulties of trouble-free entry into the inter-resonance zone, when the speed of the unbalance can "hang" on the first own resonant peak (without considering the resonant peak formed by the action of vibration isolators).

It was found that three-mass inter-resonant oscillatory systems have exhausted their potential, because the existing methods of their calculation are not able to provide a stable oscillation zone for ultralight reactive masses, the amplitude-frequency

characteristics of which are rapid. Therefore, one of the ways to improve inter-resonant vibration machines is to find approaches in the synthesis of new structures, based on which it will be possible to develop effective high-performance vibration equipment.

It is noted that in highly efficient inter-resonant systems, the reactive mass and stiffness of the corresponding elastic node should be ultralight and ultrasmall, respectively. Such properties may have a flexible body (a body with distributed parameters), ie a continuous section that optimally combines inertial and rigid parameters.

Based on the results of the literature review, an idea was formulated to solve the scientific and applied problem. It consists in a combination of discrete and continuous oscillatory systems, the synergy of which in hybrid structures is able to give vibrating machines new properties in terms of efficiency. The hypothesis that ensures the implementation of this idea was reduced to the introduction into a discrete oscillatory system of a body with distributed parameters (a continuous section in the form of a rod, plate, etc.), which is simultaneously endowed with ultralight inertial and ultra small stiffness parameters. The results of dissertation research, as it turned out, fully confirmed the correctness of the ideas and hypotheses. Their implementation has ensured the high-quality development of energy-saving inter-resonant vibration machines, which effectively provide highly efficient modes of operation, implementing a narrow inter-resonance zone with ultra-high coefficients of dynamism.

With this in mind, the emphasis was on developing a block diagram of a mechanical oscillating system of a vibrating machine with a continuous section (a body with distributed parameters, most likely a rod), establishing its parameters, studying its properties and combining it with a discrete model. Studies have shown that the most suitable object for the implementation of the continuum is a rod that has sufficient flexibility (low rigidity) and low inertial parameters. The rods are able to develop significant amplitudes of oscillations, providing strength conditions that are valuable during the implementation of the node of the reactive mass. It is substantiated that it is most expedient to set in motion a discrete-continuum system by a crank mechanism.

Since the key element of the hybrid structure of the mechanical oscillatory system was a continuous section in the form of a rod, a separate section formed the methodology of its research, which is a necessary material for establishing basic analytical relationships, provides understanding of the physics of its oscillations and forms the methodological basis for further dissertation research. Thus, the differential equation of the bent axis of the rod is considered, from which the known analytical dependences of the bending moment and the transverse force required to establish its transverse deflections are obtained. The method of forming the differential equation of bending oscillations of the rod is considered, which allows to describe its forced motion and to determine its natural frequencies of oscillations. The Rayleigh-Ritz method is outlined, which allows to approximate the natural frequency of the rod, to establish its reduced mass and stiffness, which are involved in the oscillatory process. A method for finding the consolidated velocity of the rod - the point at which its inertial-stiffness parameters are actually reduced - is proposed. The methodology of establishing the parameters of a discrete three-mass inter-resonant oscillatory system as a reference for the analysis of a discrete-continuum is analyzed.

As an initial stage in the synthesis of discrete-continuum inter-resonant vibrating machine, inertial-rigid and force parameters of high-efficiency discrete three-mass inter-resonant oscillatory vibration conveyor-separator system are substantiated as a reference model, the parameters of which are determined to form discrete-continuum systems. The basic technological and constructive parameters of the reference system are established, namely: expediency of use of low-frequency operating modes is substantiated; the inertial parameters of the active and intermediate oscillating masses are determined; in order to provide the necessary additional dynamic amplification of oscillations, the location of its own resonant peaks is chosen; the inertial value of the reactive mass and stiffness of two resonant elastic nodes is established. The actual inertial value of the reactive mass and the stiffness of the corresponding elastic node are combined in the continuous section of the vibrating machine (rods) and are key during its implementation. The mathematical model of the reference discrete oscillatory system is considered, its amplitude-frequency characteristics and transient

modes of operation are analyzed. The efficiency of functioning of the reference three-mass discrete system in comparison with the adequate two-mass resonance one is established. The partial frequency of oscillations of the reactive mass is determined, which is decisive during the selection of the continuum section (rod).

A body with distributed parameters in the form of a rod mounted on two hinged supports, one of the ends of which is cantilevered, and the other is driven by an eccentric, is chosen as the most rational scheme for the implementation of the continuum section of a high-efficiency inter-resonant vibrating machine. In fact, the presence of a console, the oscillating motion of which is not limited by anything, as it turns out, will provide the possibility of accumulation of the necessary inertial forces in the jet node (continuum), so necessary to drive the entire mechanical oscillating system.

The free bending oscillations of the continuum section using Krylov functions are considered and its first natural frequency of oscillations is established, which almost completely coincides with the corresponding partial frequency of the reference discrete model. The forced oscillations of the continuum section are considered and a mathematical model in the form of a system of equations describing its motion is formed on the basis of circular and hyperbolic Krylov functions. By selecting the frequency matrix, the value of the first natural frequency of oscillations of the continuum is confirmed again. A mathematical model of a discrete-continuous oscillatory system of a vibrating machine is formed, in which a discrete part of the system is combined with a continuous one due to reactions in the supports of a continuous section. The values of constant parameters and reactions in the supports are determined. The amplitude-frequency characteristic of the discrete-continuous oscillatory system is constructed, which is completely consistent with the characteristic of the reference discrete three-mass system. This allowed us to assert the presence in the synthesized structure of parameters and properties of the reference discrete system. The scheme of deflections of the continuum section is constructed, its strength is calculated. The natural frequency of oscillations was checked by the approximate Rayleigh-Ritz method. Using the same method, the consolidated mass and the reduced

stiffness of the continuum section were established, which almost completely agreed with the calculated values.

The design and experimental part of the dissertation is devoted to the final formation and research of the discrete-continuum inter-resonant vibration machine. Considerable attention is paid to the creation of a controlled crank drive, which differs from existing vibrators by the ability to change the value of the eccentricity in a wide range and smoothly control the frequency of perturbation. The listed advantages provide unobstructed entry of turns of the crank in an inter-resonance zone, bypassing Sommerfeld's effect; simplify the process of regulating the modes of operation of vibrating equipment in accordance with changing technological or production conditions. The design and operational parameters of the proposed controlled crank mechanism are substantiated. Using the method of closed vector contours, the kinematics of the mechanism is described, on the basis of which analytical expressions are obtained that describe the dependence of the change in eccentricity on the movement of the controlled slider. Appropriate graphs are constructed. The correctness of the obtained expressions and the results of numerical modeling was confirmed by simulation modeling of the motion of the mechanism. Based on the analysis of the mechanism, a controlled crank drive was developed and implemented in a vibrating conveyor-separator.

The scheme of placement and fastening of elastic elements connecting the active and intermediate masses of the vibrating conveyor-separator is developed. Analytical calculations of their stiffness parameters were performed, which agreed with the discrete mathematical model. The geometrical parameters of elastic elements are established and the stresses arising in them are analytically calculated. Computer modeling of the elastic element by the finite element method is carried out. This allowed us to verify the results of analytical calculations of stiffness and maximum stresses that occur in it.

Based on the condition of minimizing the transfer of dynamic loads to the foundation, the required frequency of natural oscillations of the system on vibration isolators was selected, on the basis of which their calculation for rigidity and strength

was performed. The reliability of the obtained results was confirmed by computer simulation by the finite element method. This completed the design part and provided all the initial data for the creation of an experimental sample of a discrete-continuous interresonant vibration conveyor-separator.

The partial frequency of oscillations of the continuum section was experimentally established, which allowed to indirectly confirm the presence of inertial-rigid parameters laid down during the calculation. On the basis of the removed time dependences of the motion of the active and intermediate masses, the presence of the laid down calculated amplitude-frequency characteristics was experimentally confirmed, which in general indicated the correctness of the developed methodology of dissertation research. The unobstructed entry into the inter-resonance zone of the controlled crank drive has been experimentally confirmed, which allowed to assert the validity of the use of the proposed structures during the creation of highly efficient inter-resonant vibrating machines.

On the basis of the design part the methodology of construction of the discrete-continuous inter-resonant vibrating conveyor-separator was formed, where for the first time hybrid (discrete-continuous) structures of oscillatory systems were used, the difference of which is the introduction as a third (reactive) mass of the continuum. consolidated stiffness and consolidated mass. This allowed to effectively provide inter-resonant modes of operation, revealing the latent potential of the synthesized systems due to the synergy of discrete and continuous oscillatory systems.

**Keywords:** discrete-continuous mechanical oscillatory system, vibrating machine, interresonant mode of operation, natural frequency of oscillations.

## СПИСОК ОСНОВНИХ ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати*

1. Ланець О. С. Виявлення шляхів подальшого вдосконалення високо-ефективних міжрезонансних коливальних систем. / О. С. Ланець, О. Ю. Качур // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2017. – Вип. 51. – С. 62 – 65.
2. Ланець О. С., Качур О. Ю. Тримасова коливальна система. Патент на корисну модель 126876 U Україна, подано 29. 01. 2018, опуб. 10. 07. 2018.
3. Lanets O.S. Classical approach to determining the natural frequency of continual subsystem of three-mass inter-resonant vibratory machine / O. S. Lanets, O. Yu. Kachur, V. M. Korendiy // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. – 2019. – Vol. 5, no. 3 – 4. – pp. 77 – 87.
4. Korendiy V. Substantiation of parameters and modelling the operation of three-mass vibratory conveyer with directed oscillations of the working element / V. Korendiy, O. Kachur, Y. Novitskyi, V. Mazuryk, V. Sereda // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: український міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2019. – Вип. 53. – С. 84 – 100.
5. Ланець О. С. Встановлення власної частоти континуальної ділянки міжрезонансної вібромашини з використанням наближеного методу Релея-Рітца. / О. С. Ланець, О. Ю. Качур, В. М. Боровець, П. Р. Дмитерко, І. А. Деревенько, А. Я. Зварич // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2020. – Вип. 54. – С. 5 – 15.
6. Lanets O. S. Derivation of analytical dependencies for determining stiffness parameters of vibration isolators of vibratory machine / O. S. Lanets, O. Yu. Kachur, V. M. Korendiy // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. – 2020. – Vol. 6, no. 3 – 4. – pp. 1 – 8.

7. Korendiy V. Determination of inertia-stiffness parameters and motion modelling of three-mass vibratory system with crank excitation mechanism / V. Korendiy, O. Lanets, O. Kachur, P. Dmyterko, R. Kachmar // *Vibroengineering PROCEDIA*. – 2021. – Vol. 36, pp. 7 – 12.

8. Lanets O. Determination of the first natural frequency of an elastic rod of a discrete-continuous vibratory system / O. Lanets, O. Kachur, V. Korendiy, P. Dmyterko, S. Nikipchuk, I. Derevenko // *Vibroengineering PROCEDIA*. – 2021. – Vol. 37, pp. 7 – 12.

9. Lanets O. Controllable Crank Mechanism for Exciting Oscillations of Vibratory Equipment / O. Lanets, O. Kachur, V. Korendiy, V. Lozynskyy // *Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV*, – 2021. – Vol. 2 pp. 43 – 52.

*Наукові праці апробаційного характеру та праці,  
в яких опубліковані додаткові наукові результати*

10. Корендій В. М., Качур О. Ю. Динаміка руху мобільного вібраційного робота з віброударним режимом функціонування // *Вібрації в техніці та технологіях: тези доповідей XVII Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 140-річчю випуску інженерів-механіків у Львівській політехніці (Львів, 11–12 жовтня 2018 р.)*, Львів. – С. 68 – 69.

11. Корендій В. М., Гурей В. І., Качур О. Ю. Динаміка руху мобільного вібраційного робота з двома дебалансними віброзбудниками // *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції (Львів, 25–26 жовтня 2018 р.)*, Львів: Кінпатрі ЛТД. – С. 123 – 125.

12. Корендій В. М., Качур О. Ю., Дмитерко П. Р., Новіцький Ю. Я. Моделювання роботи тримасового вібротранспортера з напрямленими коливаннями робочого органа // *XIV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (м. Львів, 23 – 24 травня 2019 р.)*: Матеріали симпозіуму, Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2019. – С. 136 – 138.



13. Качур О. Ю. Аналіз кривошипно-шатунного приводу міжрезонансної вібраційної машини // Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Експлуатаційна та сервісна інженерія» (м. Харків, 15 – 16 жовтня 2020 р.), Харків: ХНТУСГ, 2020. – С. 9 – 11.

14. Качур О. Ю. Встановлення центра швидкостей стержня, як тіла з розподіленими параметрами, що перебуває в коливальному русі // V Міжнародна наукова конференція з нових тенденцій у науці та освіті «Theoretical and scientific bases of development of scientific thought», (м. Рим, Італія, 16 – 19 лютого 2021 р.), Рим, 2021. – С. 642 – 644.

15. Korendiy V., Lanets O., Kachur O. Determination of inertia-stiffness parameters and motion modelling of three-mass vibratory system with crank excitation mechanism // 50th International JVE Conference (м. Дубаї, Об'єднані Арабські Емірати, 25 – 27 березня 2021 р.).

16. Качур О. Ю. Експериментальне встановлення частоти вимушених коливань дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи // XIX Всеукраїнська науково-технічна конференції «Потураївські читання», (м. Дніпро, 22 квітня 2021 р.), Дніпро, 2021. – С. 38.

17. Lanets O., Kachur O., Korendiy V. Determination of the first natural frequency of an elastic rod of a discrete-continuous vibratory system // 51st International JVE Conference (м. Дублін, Ірландія, 7 – 8 травня 2021 р.).

18. Ланець О. С., Качур О. Ю., Корендій В. М. Розрахунок на міцність континуальної ділянки вібромашини // XV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові : матеріали симпозіуму (м. Львів, 20 – 21 травня 2021 р.) – 2021. – С. 8–10.

19. Корендій В. М., Качур О. Ю., Новіцький Ю. Я., Дмитерко П. Р. Вібраційний бункерний живильник одномасової структури // XV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові : матеріали симпозіуму (м. Львів, 20 – 21 травня 2021 р.) – 2021. – С. 153–155.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ТЛУМАЧЕНЬ .....	22
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ .....	23
ВСТУП .....	29
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТА ВИЯВЛЕННЯ НАП- РЯМКІВ УДОСКОНАЛЕННЯ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН .....	37
1.1. Порівняльний аналіз механічних коливальних систем вібротомашин ..	37
1.1.1. Одномасові коливальні системи .....	39
1.1.2. Двомасові коливальні системи .....	42
1.1.3. Псевдо тримасові коливальні системи з динамічним гасником ..	47
1.1.4. Тримасові міжрезонансні коливальні системи .....	53
1.2. Аналіз конструкцій тримасових міжрезонансних вібротомашин .....	60
1.3. Шляхи вдосконалення тримасових міжрезонансних вібротомашин. Формування ідеї та гіпотези подальших досліджень .....	69
1.4. Висновки до першого розділу .....	72
РОЗДІЛ 2. МЕТОДОЛОГІЯ ДИСЕРТАЦІЙНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ .....	74
2.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі стержня .....	74
2.2. Диференціальне рівняння згинальних коливань стержня. Його точний розв'язок з використанням функцій Крилова .....	78
2.3. Встановлення власних частот стержня методом Релея-Рітца .....	82
2.4. Методологія розрахунку дискретної тримасової міжрезонансної механічної коливальної системи вібраційної машини .....	86
2.5. Встановлення зведеної швидкості стержня, що перебуває в коли- вальному русі .....	91
2.6. Встановлення з використанням методу Релея-Рітца зведеної маси та зведеної жорсткості стержня, що перебуває в коливальному русі .....	93
2.7. Висновки до другого розділу .....	94

РОЗДІЛ 3. ФОРМУВАННЯ ЕТАЛОННОЇ ВИСОКОЕФЕКТИВНОЇ	
ДИСКРЕТНОЇ ТРИМАСОВОЇ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ	
КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ .....	
	96
3.1. Структура та математична модель еталонної коливальної системи ...	96
3.2. Обґрунтування конструктивних та інерційно-жорсткісних пара-	
метрів еталонної коливальної системи .....	98
3.3. Дослідження перехідних режимів еталонної коливальної системи ...	111
3.3.1. Чисельне моделювання перехідних режимів еталонної коли-	
вальної системи .....	111
3.3.2. Комп'ютерна імітація руху еталонної коливальної системи .....	113
3.4. Висновки до до третього розділу .....	115
РОЗДІЛ 4. ВСТАНОВЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТА ФОРМУВАННЯ	
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНО-	
КОНТИНУАЛЬНОЇ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ	
КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ВІБРАЦІЙНОГО	
ТРАНСПОРТЕРА-СЕПАРАТОРА .....	
	117
4.1. Структура дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної	
системи вібромашини .....	117
4.2. Математична модель вільних коливань континуальної ділянки.	
Встановлення її першої власної частоти .....	119
4.3. Математична модель вимушених коливань континуальної ділянки.	
Перевірка значення її першої власної частоти .....	130
4.4. Математична модель дискретно-континуальної міжрезонансної	
коливальної системи вібромашини .....	137
4.5. Розрахунок прогину континуальної ділянки .....	143
4.6. Амплітудно-частотна характеристику коливальної системи з двома	
континуальними ділянками .....	146
4.7. Розрахунок континуальної ділянки на міцність .....	148
4.8. Встановлення власної частоти континуальної ділянки з викорис-	
танням наближеного методу Релея-Рітца .....	151

4.9. Встановлення точки зведення інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки. Визначення її зведених маси та жорсткості ..	155
4.10. Висновки до четвертого розділу .....	164
<b>РОЗДІЛ 5. КОНСТРУКТИВНЕ РОЗРОБЛЕННЯ ТА ЕКСПЕРИМЕН-</b> <b>ТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬ-</b> <b>НОГО ВИСОКОЕФЕКТИВНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО</b> <b>ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТЕРА-СЕПАРАТОРА .....</b>	<b>166</b>
5.1. Розроблення та моделювання керованого кривошипно-шатунного привода .....	166
5.1.1. Розроблення та конструктивні особливості привода .....	167
5.1.2. Кінематичний аналіз кривошипно-шатунного механізму .....	169
5.1.3. Чисельне та комп'ютерне моделювання руху кривошипно- шатунного механізму .....	172
5.2. Розрахунок пружних вузлів міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора .....	175
5.2.1. Обґрунтування параметрів резонансних пружних елементів, що пов'язують активну та проміжну маси .....	175
5.2.2. Підбір та розрахунок віброізоляторів .....	180
5.3. Загальний вигляд міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора .....	184
5.4. Експериментальні дослідження дискретно-континуального між- резонансного вібраційного транспортера-сепаратора .....	189
5.5. Узагальнення методології розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора .....	195
5.6. Висновки до п'ятого розділу .....	200
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>202</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>208</b>

ДОДАТКИ .....	226
Додаток А. Акти впровадження результатів наукових досліджень у навчальний процес та виробництво .....	227
Додаток В. Дискретна модель двомасової коливальної системи .....	232
Додаток С. Дискретна модель тримасової коливальної системи .....	234
Додаток D. Математична модель вільних коливань стержня з вільним кінцем у початку відліку. Його перша власна частота .....	238
Додаток Е. Математична модель вільних коливань стержня з шарнірно опертим кінцем у початку відліку. Його перша власна частота .....	241
Додаток F. Математична модель вільних коливань континуальної ділянки. Її перша власна частота .....	244
Додаток G. Математична модель вимушених коливань континуальної ділянки .....	247
Додаток H. Прогин континуальної ділянки на частоті вимушених коливань .....	276
Додаток I. Напруження, що виникають у континуальній ділянці на частоті вимушених коливань .....	285
Додаток J. Встановлення власної частоти коливань континуальної ділянки з використанням наближеного методу Релея-Рітца ..	289
Додаток K. Встановлення точки зведення інерційно-жорсткісних пара- метрів континуальної ділянки .....	293
Додаток L. Встановлення зведеної маси та зведеної жорсткості конти- нуальної ділянки з використанням методу Релея-Рітца .....	296
Додаток M. Перехідні процеси в еталонній дискретній тримасовій коливальній системі .....	300
Додаток N. Кінематичний аналіз керованого кривошипно-шатунного механізму .....	302

## ПЕРЕЛІК ТЛУМАЧЕНЬ

*Високоєфективна міжрезонансна механічна коливальна система* – коливальна система, коефіцієнти динамічності якої в рази вищі порівняно з ідентичною класичною резонансною двомасовою. Як наслідок, ті ж амплітуди коливань мас реалізуються за значно нижчих сил збурення.

*Дискретна система* – механічна коливальна система, яка складається з абсолютно твердих тіл (мас), зв'язаних пружними вузлами.

*Континуальна ділянка* – гнучке пружне тіло з розподіленими параметрами (стержень тощо).

*Дискретно-континуальна (гібридна) система* – міжрезонансна коливальна система, яка поєднує в собі дві структури: дискретну систему та континуальну ділянку.

*Еталонна система* – тримасова міжрезонансна дискретна коливальна система, параметри якої реалізуються в дискретно-континуальній.

*Міжрезонансна коливальна система* – тримасова механічна коливальна система, в якій реалізуються міжрезонансні режими роботи.

*Міжрезонансний режим роботи* – режим роботи тримасової механічної коливальної системи, частота вимушених коливань якої на частотній області розташована між двома резонансними піками (резонансами).

*Надлегка маса* – реактивна маса міжрезонансної механічної коливальної системи, інерційні параметри якої на порядок і вище є меншими за решту інерційних параметрів тіл (мас) системи.

*Надмала жорсткість* – коефіцієнт жорсткості пружного вузла, що зв'язує реактивну та проміжну масу міжрезонансної механічної коливальної системи, значення якого на порядок і вище є меншим за решту жорсткісних параметрів системи.

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Позначення	Опис	Розмірність
$m_1, m_2, m_3$	відповідно, інерційні параметри активної, проміжної та реактивної мас коливальної системи	[кг]
$m_{зв\delta}$	зведена маса коливальної системи	[кг]
$c$	жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну та реактивну маси одно- та двомасової коливальних систем	[Н/м]
$c_{12}, c_{23}$	жорсткість пружних вузлів, що відповідно з'єднують активну з проміжною та проміжну з реактивною масами тримасової коливальної системи	[Н/м]
$c_{i3}$	жорсткість віброізоляторів	[Н/м]
$z$	резонансне налагодження коливальної системи	[-]
$z_{i3}$	резонансне налагодження одномасової коливальної системи на віброізоляторах	[-]
$\varepsilon$	ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму загалом	[м]
$\varepsilon_2, \varepsilon_3$	ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму відповідно для двомасової дискретної та еталонної тримасової дискретної коливальних систем	[м]
$F_0$	амплітудне значення сили збурення коливальної системи загалом	[Н]

$F_{02}, F_{03}$	амплітудне значення сили збурення відповідно для двомасової дискретної та еталонної тримасової дискретної коливальних систем	[Н]
$R_1, R_2$	реакції сил відповідно в лівій та правій (першій та другій) опорах стержня (континуальної ділянки)	[Н]
$\delta_1, \delta_2$	лінійні зміщення відповідно в першій та другій опори стержня (континуальної ділянки)	[М]
$\delta, \delta_y$	відповідно лінійне зміщення загалом та відносне зміщення кінців робочої ділянки пружного елемента	[М]
$D$	додаткова ефективність функціонування еталонної тримасової коливальної системи по відношенню до двомасової (коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань)	[-]
$\Omega$	вимушена (робоча) колова частота коливань системи	[рад/с]
$\Omega_{e1}, \Omega_{e2}$	відповідно перша та друга власні колові частоти коливань міжрезонансної коливальної системи (не враховуючи піка, сформованого віброізоляторами)	[рад/с]
$\Lambda$	коефіцієнт, що відображає співвідношення першої власної частоти коливань $\Omega_{e1}$ до другої $\Omega_{e2}$ в тримасовій міжрезонансній коливальній системі	[-]
$\omega$	миттєва колова частота вимушених коливань системи	[рад/с]
$\omega_n$	парціальна колова частота еталонної тримасової міжрезонансної коливальної системи, сформованої реактивною масою та відповідним їй пружним вузлом	[рад/с]



$\omega_{\theta c}$	власна колова частота коливань континуальної ділянки (стержня)	[рад/с]
$\omega_{pp}$	власна колова частота коливань континуальної ділянки, встановлена методом Релея-Рітца	[рад/с]
$\nu$	циклічна частота вимушених коливань системи загалом	[Гц]
$\nu_{\theta c}$	власна циклічна частота коливань континуальної ділянки	[Гц]
$\nu_{iz}$	власна циклічна частота коливань одномасової коливальної системи на віброізоляторах	[Гц]
$n$	кількість обертів електродвигуна	[об/хв]
$Y_1, Y_2, Y_3$	відповідно, амплітуда коливань активної, проміжної та реактивної мас коливальної системи	[м]
$\zeta$	перевантаження на робочому органі	[-]
$g$	прискорення вільного падіння	[м/с <sup>2</sup> ]
$J_z$	момент інерції поперечного перерізу стержня прямокутного перерізу відносно нейтральної осі $z - z$	[м <sup>4</sup> ]
$h, b_n$	відповідно ширина та товщина стержня (континуальної ділянки)	[м]
$k_y$	коефіцієнт, який залежить від форми поперечного прямокутного перерізу стержня (континуальної ділянки)	[-]
$J_{cn}$	погонний момент інерції стержня (континуальної ділянки)	[м <sup>4</sup> ]

$F_c$	площа поперечного перерізу стержня (континуальної ділянки)	$[м^2]$
$m_{nm}$	погонна маса стержня (континуальної ділянки)	$[кг/м]$
$\rho$	питома маса сталі (густина сталі)	$[кг/м^3]$
$Q$	поперечна сила, що діє на стержень	$[Н]$
$M$	згинальний момент, що діє в поперечному перерізі стержня	$[Н \cdot м]$
$R$	радіус кривої згину стержня (радіус кривизни)	$[м]$
$\theta$	кут повороту ділянки стержня	$[рад]$
$\sigma, \tau$	відповідно нормальне напруження під час розтягу (стиску), згину та дотичне напруження під час кручення	$[Па]$
$E, G$	відповідно модуль пружності I-го та II-го роду	$[Па]$
$K_c, P_c$	кінетична та потенціальна енергії стержня (континуальної ділянки)	$[Дж]$
$K_{cn}$ та $K_{cn1}$ , $K_{cn3}, K_{cn3}$	відповідно сумарна кінетична енергія стержня (континуальної ділянки) та кінетичні енергії лівої, середньої та правої його ділянок від лінійного переміщення	$[Дж]$
$K_{co}$ та $K_{co1}$ , $K_{co2}, K_{co3}$	відповідно сумарна кінетична енергія стержня (континуальної ділянки) та кінетичні енергії лівої, середньої та правої його ділянок від провертання	$[Дж]$
$P_{c3}$ та $P_{c31}$ , $P_{c32}, P_{c33}$	відповідно сумарна потенціальна енергія стержня (континуальної ділянки) та потенціальні енергії лівої, середньої та правої його ділянок від згину	$[Дж]$

$\Pi_{cd}$ та $\Pi_{cd1}$ , $\Pi_{cd2}$ , $\Pi_{cd3}$	відповідно сумарна потенціальна енергія стержня (континуальної ділянки) та потенціальні енергії лівої, середньої та правої його ділянок від зсуву в шарах	[Дж]
$\eta(x, t)$	поперечне зміщення пружного стержня (континуальної ділянки), як функція від поздовжньої координати $x$ та часу $t$	[м]
$v$	лінійна швидкість поперечного перерізу стержня (континуальної ділянки)	[м/с]
$A, B, C, D$	чотири довільні постійні	[–]
$S, T, U, V$	комбінації кругових і гіперболічних функцій (функції О. М. Крилова)	[–]
$w(x)$	функція зміщення поперечного перерізу стержня у вертикальному напрямку по його довжині	[м]
$w_{лів}(x)$ , $w_{сер}(x)$ , $w_{пр}(x)$	функції зміщення поперечного перерізу стержня (континуальної ділянки) у вертикальному напрямку по його довжині відповідно на лівій, середній та правій його ділянках	[м]
$X_{зв}$ та $X_{зв1}$ , $X_{зв2}$ , $X_{зв3}$	відповідно сумарне значення по осі $x$ точки зведення інерційних та жорсткісних параметрів стержня (континуальної ділянки) та значення по осі $x$ точок зведення лівої, середньої та правої його ділянок	[м]
$m_{зв}$	зведена маса стержня (континуальної ділянки)	[кг]
$m_{зв1}$ , $m_{зв2}$ , $m_{зв3}$	частки зведеної маси від лінійного переміщення стержня (континуальної ділянки), що припадають відповідно на ліву, середню та праву його ділянки	[кг]

$m_{3\delta 1i}, m_{3\delta 2i},$ $m_{3\delta 3i}$	частки зведеної маси від провертання стержня (континуальної ділянки), що припадають відповідно на ліву, середню та праву його ділянки	[кг]
$c_{3\delta}$	зведена жорсткість стержня (континуальної ділянки)	[Н/м]
$c_{3\delta 1}, c_{3\delta 2},$ $c_{3\delta 3}$	частки зведених жорсткостей від згину стержня (континуальної ділянки), що припадають відповідно на ліву, середню та праву його ділянки	[Н/м]
$c_{3\delta 1i}, c_{3\delta 2i},$ $c_{3\delta 3i}$	частки зведених жорсткостей від зсуву в шарах стержня (континуальної ділянки), що припадають відповідно на ліву, середню та праву його ділянки	[Н/м]
$L$	довжина стержня (континуальної ділянки)	[м]
$L_1, L_2, L_3$	довжина відповідно лівої, середньої та правої ділянок стержня (континуальної ділянки)	[м]
$l_c, h_c, b_c$	відповідно довжина, ширина та товщина робочої ділянки плоского елемента резонансного пружного вузла	[м]
$k_{кон}, k$	коефіцієнти, що враховують відповідно концентрацію напружень та защемлення пружного елемента	[-]
$i$	кількість робочих ділянок в пружному елементі	[-]
$i_{\delta}$	кількість витків витої пружини	[-]
$d_{\delta}$	діаметр дроту витої пружини	[м]
$D_{нв}$	середній діаметр навивки витків витої пружини	[м]
$k_{\delta}$	коефіцієнт кривизни витків витої пружини	[-]

## ВСТУП

На сьогоднішній день вібраційні технології є поширеними в усіх галузях промисловості України. Зародились вони в Західній Європі в середині XIX століття, коли сформувалось підґрунтя для активного розвитку промисловості та сільського господарства [40, 61, 65]. Вже тоді розвивалися методи розрахунку та базові конструкції широкого класу вібраційних машин.

Завдяки своїй конструктивній простоті та унікальним властивостям вібраційні машини при низькій собівартості їх впровадження у виробництво, забезпечують високу ефективність реалізації технологічних процесів, що сприяє їх швидкому розповсюдженню в різних галузях промисловості провідних країн світу. Широкий спектр використання вібраційного обладнання на даний час дає усвідомлення його унікальності та незамінності на багатьох технологічних операціях, обумовлює потребу його подальшого розвитку.

З тих пір в промисловості найбільшого поширення отримали одномасові конструкції з інерційним приводом та двомасові резонансні, в основному з електромагнітним приводом. Часто зустрічаються резонансні двомасові конструкції з інерційними та кривошипно-шатунними приводами. Останні можуть бути просто динамічно збалансованими.

Згаданий клас машин повністю задовольняє потреби промисловості. Кожна з вібротехнічних машин виконує оптимально свої технологічні функції. Усі ці машини за своєю функціональністю є практично рівними. Так, якщо порівнювати одномасові (далеко зарезонансні) вібраційні машини з інерційним приводом та двомасові резонансні з тим же приводом, то на перший погляд напрошується висновок, що резонансні конструкції більш енергоощадні, а тому їм належить пріоритет у застосуванні. Проте, якщо перерахувати енергоспоживання таких конструкцій, то виявиться, що вони затрачають потужність, значення якої не є пропорційно меншим до закладених в них коефіцієнтів динамічності. Пов'язано це з тим, що такі конструкції, порівняно з одномасовими, приводять в рух дві, а не одну масу. Чим менша реактивна маса (мінімізуючи металоємність конструкції),

тим ближче їх споживання потужності наближається до затрат в одномасових системах. Крім того, такі конструкції значно складніші. Висновок, який напрошується зводиться до того, що ні одна з конструкцій немає вагомих переваг, а їх застосування залежить виключно від розробника під час реалізації завдання.

Розвиток промисловості та сучасні тенденції енергозбереження вимагають пошуку нових рішень у створенні високоефективного вібраційного технологічного обладнання, що є завданням науковців. Не всі конструктивні рішення є ідеальними, проте дають поштовх для подальшого вдосконалення вібраційних машин. Тому розроблення нових конструкцій та методів їх розрахунку є запорукою подальшого розвитку машинобудівної промисловості.

**Актуальність роботи.** Однією з пріоритетних тенденцій розвитку промисловості в Україні є реалізація енергозберігаючих технологій. Особливо це вагомо у машинобудуванні, невід'ємною частиною якого є вібротехнології. Найбільш поширеним класом вібраційних машин є одно- та двомасові, що використовують зарезонансні та білярезонансні режими роботи і загалом задовольняють технологічні потреби промисловості. Проте зустрічаються тримасові вібраційні машини, що володіють низкою переваг порівняно з найбільш поширеним вібраційним технологічним обладнанням. Вони застосовують міжрезонансні режими роботи, завдяки яким можна досягнути високої ефективності функціонування вібраційних машин, а саме підвищених значень коефіцієнтів динамічності за тих же значень сил збурення.

Проте і тримасові конструкції є недосконалими, адже роботі вібраційних машин в міжрезонансній зоні притаманні і недоліки. Так, в системах з електромагнітним приводом, найбільш апробованих на практиці для такого типу машин, третя (реактивна) надлегка маса, що перебуває у силовому збуренні, в міжрезонансній зоні має стрімкоподібну амплітудно-частотну характеристику, завдяки чому її амплітуда коливань може різко змінюватися на невеликій частотній ділянці. Як наслідок, в системах з електромагнітним приводом, повітряний проміжок яких обмежений, можуть виникати биття якоря об осердя з котушками віброзбудувача, що унеможлиблює реалізацію стабільного режиму роботи.

Реалізація міжрезонансних коливальних систем з інерційним приводом ускладнена наявністю ефекту Зоммерфельда, завдяки якому оберти дебаланса часто не в стані увійти у міжрезонансну зону завдяки наявності першого резонансного піка (не враховуючи піка сформованого віброізоляторами). Оберти дебаланса можуть “зависнути” в околі цього піка, або ж, проходячи його, “зірватися” і проскочити міжрезонансну зону.

Формується усвідомлення того, що дискретні структури тримасових міжрезонансних механічних коливальних систем вичерпали свій потенціал, оскільки існуючі методики їх розрахунку не в стані забезпечити стійку зону коливань для надлегких реактивних мас.

Зважаючи на перспективність подальших досліджень міжрезонансних вібраційних машин, коливальні системи яких можуть забезпечувати високоефективні режими роботи, існує необхідність подальших досліджень в цьому напрямку, що дозволить реалізувати дієві енергоощадні вібраційні машини для промисловості України. Тож пошук нових структур і підходів у розрахунку міжрезонансних вібраційних машин, приводи яких здатні безперешкодно входити в міжрезонансну зону та приводити в рух надлегкі реактивні маси, реалізуючи дієві високоефективні конструкції, є актуальною науково-прикладною задачею машинобудування.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційні дослідження узгоджуються із Законом України про пріоритетні напрями інноваційної діяльності в Україні (Відомості Верховної Ради України (ВВР), 2012, № 19-20, ст. 166 (із змінами внесеними згідно із Законом № 5460-VI від 16.10.2012, ВВР, 2014, № 2-3, ст. 41)), де в статті 4 “Стратегічні пріоритетні напрями інноваційної діяльності на 2011-2021 роки”, декларується освоєння нових технологій транспортування енергії, впровадження енергоефективних, ресурсозберігаючих технологій, освоєння альтернативних джерел енергії.

**Мета роботи** полягає в обґрунтуванні нових структур механічних коливальних систем вібраційних машин, здатних ефективно реалізовувати міжрезонансні режими роботи.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні завдання:

1. На основі аналізу існуючих методів розрахунку, конструктивних та структурних особливостей міжрезонансних вібраційних машин формування напрямків їх подальшого вдосконалення з метою ефективною реалізації ними міжрезонансних режимів роботи.

2. Обґрунтування структури механічної коливальної системи, здатної ефективно забезпечувати міжрезонансний режим роботи. Формування методології подальших досліджень, яка дозволить синтезувати параметри запропонованої коливальної системи із заданою ефективністю функціонування, з умови технологічної стійкості у міжрезонансних режимах.

3. Синтез інерційно-жорсткісних та частотних параметрів запропонованої коливальної системи, встановлення її параметричних та структурних особливостей. Формування математичної моделі синтезованої коливальної системи, побудова її амплітудно-частотної характеристики. Встановлення характеру поведінки коливальної системи у міжрезонансних режимах.

4. Розроблення на базі запропонованої коливальної системи конструкції експериментальної вібромашини, встановлення її технічних характеристик. Порівняння отриманих результатів з теоретичними. Виявлення достовірності проведених розрахунків.

5. Узагальнення розробленої методології зі створення високоефективних вібромашин, здатних ефективно реалізовувати міжрезонансні режими роботи.

**Об'єктом дослідження** є коливальні процеси механічної системи в міжрезонансних режимах роботи.

**Предметом дослідження** – структури механічних коливальних систем міжрезонансних вібраційних машин, співвідношення інерційно-жорсткісних та силових параметрів, амплітудно-частотні та частотні характеристики коливальних систем та вузлів.

**Методи досліджень.** Робота базується на фундаментальних методах механіки, зокрема теорії механічних коливань. Складання диференціальних рівнянь 2-го порядку для опису дискретних моделей лінійних механічних коливальних



систем здійснювалося з використанням методу Д'Аламбера. Власні частоти, прогини під час вимушених коливань та реакції в опорах континуальної ділянки знаходилися шляхом розв'язку диференціального рівняння згинальних коливань стержня, застосовуючи функції Крилова. Зведені масу та жорсткість континуальної ділянки, наближені значення її власних частот коливань встановлювалися з використанням методу Релея-Рітца. Дискретизація континуальної ділянки відбувалася шляхом пошуку точки зведення розподілених маси, жорсткості через зведену швидкість прогинів континуальної ділянки. Поєднання континуальної ділянки з дискретною коливальною системою проводилося через реакції в її опорах. Аналітичні та чисельні розрахунки проводилися в математичних програмних продуктах MathCAD та Mathematica. Розроблення конструкції відбувалось в програмному продукті твердотілого проектування SOLIDWORKS. Чисельні розрахунки окремих вузлів здійснювалось в програмному модулі SOLIDWORKS Simulation.

**Наукова новизна** полягає у подальшому розвитку методології створення високоефективних міжрезонансних вібраційних машин, результатом якої є поява нового класу дискретно-континуальних вібромашин, в яких вперше застосовано гібридні структури коливальних систем, відмінністю яких є введення у якості третьої (реактивної) маси континуальної ділянки, наділеної на першій власній частоті певною зведеною жорсткістю та зведеною масою, що дозволило ефективно забезпечувати міжрезонансні режими роботи, розкривши прихований потенціал синтезованих систем, обумовлений синергією дискретної коливальної системи та континуальної ділянки, а саме:

– вперше описана математична модель вимушених коливань континуальної ділянки з найбільш оптимальною для міжрезонансних систем схемою кріплення у вигляді стержня, що встановлений на двох шарнірних опорах, один з кінців якого консольно закріплений, а другий приводиться в рух від ексцентрика;

– вперше обґрунтовано параметри та отримано адекватну математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини з кривошипно-шатунним приводом, де зведення континуальної ділянки з дискретною

частиною коливальної системи проведене через реакції в опорах стержня, що стали в'язуючими під час їх поєднання;

– вперше обґрунтовано методику встановлення зведеної жорсткості та зведеної маси стержня з розподіленими параметрами для переходу від дискретно-континуальної системи до дискретної, згідно якої виявлено, що дискретизована міжрезонансна коливальна система сприймає континуальну ділянку з розподіленими параметрами саме відносно точки, що проходить через зведену швидкість стержня;

– вперше обґрунтовано структуру та описано кінематику керованого механізму кривошипно-шатунного привода, де з використанням замкнених векторних контурів встановлено параметричні залежності, що описують зміну ексцентриситету від переміщення керованого повзуна.

**Практичне значення** отриманих результатів полягає у розробленні ефективних концепцій побудови та інженерних методик розрахунку дискретно-континуального вібраційного технологічного обладнання різноманітного технологічного призначення, здатного ефективно реалізовувати міжрезонансні режими роботи. Результати роботи впроваджено у навчальному процесі кафедри робототехніки та інтегрованих технологій машинобудування Національного університету “Львівська політехніка” для підготовки студентів освітнього рівня магістр за спеціалізацією 131.01 – “Роботомеханічні системи та комплекси” спеціальності 131 – “Прикладна механіка”. Методологію побудови високоефективних міжрезонансних вібраційних машин використано структурою ФОП Струк М. І. (м. Миколаїв Львівської області) у створенні технологічного обладнання для виготовлення бетонних виробів (Додаток А).

**Особистий внесок здобувача.** Результати теоретичних і експериментальних досліджень, що представлені до захисту, отримані автором самостійно. У роботах опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: [1] – висунення гіпотези, згідно якої передбачається, що застосування дискретно-континуальних коливальних систем забезпечить усунення

стрімкого зростання амплітуди коливань надлегких реактивних мас у міжрезонансних вібраційних машинах. Наведення принципів структурних схем коливальних систем; [2] – розроблення принципової схеми дискретно-континуальної коливальної системи міжрезонансної вібраційної машини; [3] – апробація методики розрахунку дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи та проведення імітаційного моделювання; [4, 12] – проведення імітаційного моделювання роботи тримасового вібраційного конвеєра з направленими коливаннями робочого органу; [5] – встановлення власної частоти континуальної ділянки з використанням методу Релея-Рітца; [6] – виконано підбір віброізоляторів та проведено імітаційне моделювання прогинів та напружень витої пружини; [7, 15] – проведення чисельне та імітаційного моделювання перехідних режимів роботи тримасової міжрезонансної коливальної системи; [8, 17] – розроблення схеми кріплення континуальної ділянки та встановлення її власної частоти з використанням функцій Крилова, проведення імітаційного моделювання власної частоти континуальної ділянки; [9] – розроблено структуру та кінематичні схеми приводу оснащеного керованим кривошипно-шатунним механізмом, проаналізовано його та встановлено відповідні рівняння руху методом замкнених векторних контурів; проведено чисельне та імітаційне моделювання руху механізму; методу Релея-Рітца; [10 – 11, 19] – аналіз одно-, дво- та тримасових коливальних систем. Виявлення найбільш перспективних структур та методів їх збурення, проведення імітаційного моделювання руху мобільного вібраційного робота; [18] – проведення чисельне моделювання напружень в континуальній ділянці.

**Апробація результатів роботи.** Результати наукових досліджень доповідались на XVII-й Міжнародній науково-технічній конференції, присвяченій 140-річчю випуску інженерів-механіків у Львівській політехніці (Львів, 2018 р.); VI-й Міжнародній науково-технічній конференції (Львів, 2018 р.); XIV-ому Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2019 р.); Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Експлуатаційна та сервісна інженерія» (м. Харків, 2020 р.);

V Міжнародній науковій конференції з нових тенденцій у науці та освіті «Theoretical and scientific bases of development of scientific thought», (м. Рим, Італія, 2021 р.), 50th International JVE Conference (м. Дубаї, Об'єднані Арабські Емірати, 2021 р.), XIX Всеукраїнська науково-технічна конференції «Потураївські читання», (м. Дніпро, 2021 р.), 51st International JVE Conference (м. Дублін, Ірландія, 2021 р.); XV-ому Міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2021 р.).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 19 наукових праць: 5 статей у фахових виданнях України, з яких 2 статті у виданнях, які включені до міжнародної наукометричної бази даних Index Copernicus International, та 3 статті у періодичних виданнях інших держав, які включено до міжнародної наукометричної бази даних SCOPUS; 10 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях та 1 патент України на корисну модель.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із анотації; змісту; переліку тлумачень; переліку умовних позначень; вступу; п'ятих розділів; висновків; списку використаних джерел з 169 найменувань на 18 сторінках; 14 додатків на 80 сторінках. Основна частина дисертації займає 226 сторінок (з них 172 сторінок основного тексту), містить 64 рисунків та 7 таблиць. Загальний обсяг роботи – 306 сторінок.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ТА ВИЯВЛЕННЯ НАПРЯМКІВ УДОСКОНАЛЕННЯ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН

*В результаті літературного огляду підтверджено, що одномасові коливальні системи не здатні використовувати резонансні режими, а тому в даній дисертаційній роботі вони не розглядались як перспективний напрямок досліджень вібраційного технологічного обладнання з точки зору енергоефективності. Встановлено, що хоч на основі двомасових резонансних систем можна реалізувати будь-яку конструкцію вібраційного технологічного обладнання, повноцінно розкрити потенціал та суттєво підвищити показники ефективності функціонування здатні лише тримасові міжрезонансні вібраційні машини. Виявлені недоліки, що обмежують їх застосування в промисловості. Запропоновано шляхи вдосконалення вібраційних машин даного типу, на основі яких можна буде розробити дієве високоефективне технологічне обладнання.*

#### **1.1. Порівняльний аналіз механічних коливальних систем вібромашин**

Визначальним показником технологічної ефективності вібраційного обладнання різноманітного призначення є розвинена амплітуда коливань робочого органу певної маси за певного значення сили збурення та частоти вимушених коливань механічної коливальної системи. Власне досягнення необхідних амплітуд коливань робочого органа за мінімальних затрат потужностей у приводі – це один із шляхів підвищення функціональної ефективності вібраційного технологічного обладнання. Саме з такого ракурсу проводитиметься порівняльний аналіз механічних коливальних систем вібраційних машин.

Вібраційні машини, незалежно від конструкції та технологічного призначення, розрізняють за кількістю мас, але, в основному, вони є багатомасовими конструкціями, хоча в літературі зустрічаються такі вислови (словосполучення) як “одномасова конструкція” або ж “одномасова вібраційна машина”. Дані

конструкції згідно третього закону Ньютона (закон дії і протидії) не можуть існувати, адже для приведення в рух однієї маси повинна бути друга для протидії. Так, для забезпечення руху маси  $m_1$  необхідна друга маса  $m_2$ , в ролі якої є фундамент (земля) (рис. 1.1). Жорсткість  $c$  пружного вузла можна знайти як для двомасової системи за формулою [61, 65, 79, 97, 98, 106, 169]:

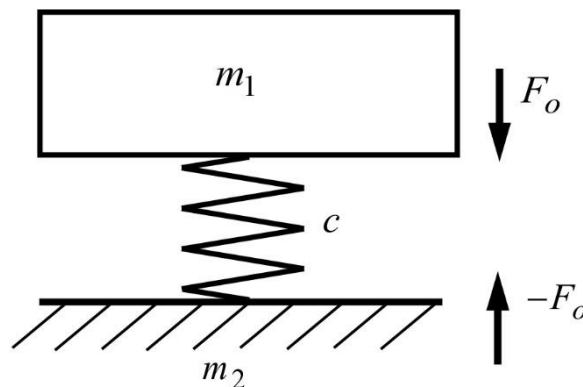
$$c = m_{зв\delta} \left( \frac{\omega}{z} \right)^2, \quad (1.1)$$

де  $m_{зв\delta} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – зведена маса;

$z$  – резонансне налагодження механічної коливальної системи.

Та, якщо другою (реактивною) масою  $m_2$  вважати масу, еквівалентну масі фундаменту, коливальна система математично вироджується в одномасову, а розрахунок жорсткості  $c$  пружного вузла зводиться до виразу

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} c = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \left( \frac{\omega}{z} \right)^2 = m_1 \left( \frac{\omega}{z} \right)^2. \quad (1.2)$$



**Рис. 1.1.** Одномасова механічна коливальна система

Тож під час математичних розрахунків та описів можна зводити конструкцію до найпростіших моделей (одномасових систем), однак розуміється, що коливальна система насправді налічує не одну коливальну масу. На практиці апробовано вібрмашини, що переважно містять не більше трьох мас. Саме тому їх зручно розділяти за кількістю незалежних коливальних мас на одно-, дво- та тримасові. Зупинимось окремо на цих коливальних системах.

### 1.1.1. Одномасові коливальні системи

Одномасовою механічною коливальною системою вважається така, в якій маса встановлена на фундаменті через пружні елементи або ж підвішена за їх допомогою (рис. 1.1). Визначальними параметрами одномасової коливальної системи є: маса  $m_1$ , жорсткість  $c$  пружного вузла та амплітудне значення сили збурення  $F_0$  (табл. 1.1). Параметри цих складових між собою повинні бути узгоджені так, щоб під час роботи вібраційної машини вони забезпечували задані технологічні показники, а саме за визначеного амплітудного значення сили збурення  $F_0$  маса  $m_1$  повинна розвивати певне значення амплітуди коливань  $Y_1$  на заданій коловій частоті  $\omega$  (на частоті вимушених коливань  $\Omega$ ).

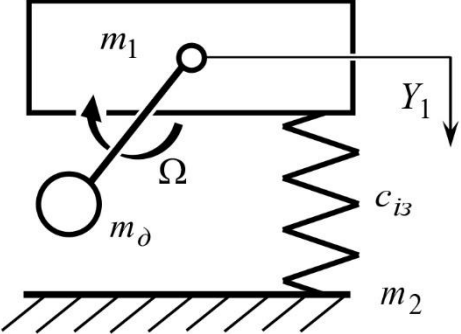
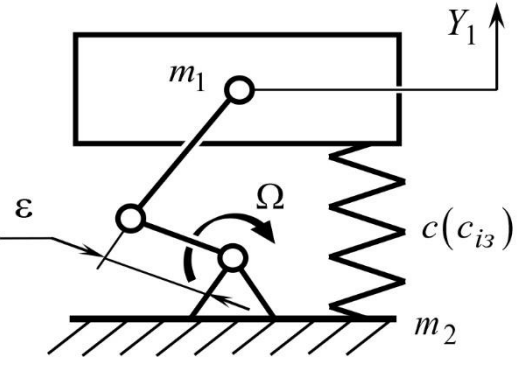
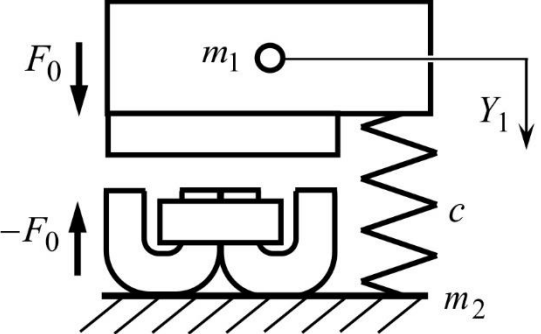
Надалі жорсткість  $c$  приймаємо постійною, що істотно спрощує аналіз і є справедливим, коли розглядаємо малі коливання (їх можна вважати такими, якщо деформації в пружних елементах малі порівняно з їх розмірами). Це передбачає, що деформація в пружному елементі завжди пропорційна до прикладеного зусилля, тобто змінюється згідно із законом Гука [24, 61, 65].

Реалізація одномасової коливальної системи на основі електромагнітного привода обумовлює використання резонансних пружних вузлів, що призводить до повного передавання через них динамічного навантаження на фундамент (табл. 1.1). Динамічні реакції в опорах пружних елементів таких систем значні та можуть на порядок і вище перевищувати силу збурення  $F_0$ , що спричиняє неминуче руйнування фундаменту, а крім того, це порушує санітарні норми. В системах з кривошипно-шатунним механізмом може бути відсутній резонансний пружний вузол, проте відбуватиметься повне передавання динамічного навантаження через привод. Як наслідок, виконувати одномасові коливальні системи з даними приводами є неприйнятно.

Одномасові вібромашини ж з дебалансним приводом можуть також реалізовуватися резонансними і їм будуть властиві вище перераховані недоліки. Проте, їх особливістю є те, що вони є цілком роботоздатними, використовуючи

Таблиця 1.1

## Одномасові коливальні системи

Інерційний привод	Ексцентриковий (кривошипно-шатунний) привод	Електромагнітний привод
<b>Принципова схема</b>		
		
<b>Ступінь поширення в промисловості</b>		
++	-	-
<b>Основні аналітичні залежності</b>		
<i>Колова частота вимушених коливань</i>		
$\Omega = \frac{\pi n}{30}, \text{ де } n - \text{кількість обертів двигуна}$		$\Omega = 2\pi \nu, \text{ де } \nu - \text{циклічна частота вимушених коливань}$



Продовження табл. 1.1

<i>Амплітуда коливань робочого органу</i>		
$Y_1 = \zeta g / \Omega^2$ , де $\zeta$ – коефіцієнт перевантаження $\zeta \in (2...6)$		
<i>Жорсткісні параметри</i>		
$c_{i3} = m_1 \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2$ , де $z_{i3} = 3...7$	$c = m_1 \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2$ , де $z = 0,95...0,97$ або $c_{i3} = m_1 \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2$ , де $z_{i3} = 3...7$	$c = m_1 \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2$ , де $z$ – резонансне налагодження, $z = 0,95...0,97$ ,
<i>Амплітуда гармонійної сили збурення та споживана потужність</i>		
$F_0 = Y_1 \sqrt{(c - m_1 \Omega^2)^2 + \Omega^2}$	$F_0 = \varepsilon \sqrt{(m_1 \Omega^2)^2 + \Omega^2}$	$F_0 = Y_1 \sqrt{(c - m_1 \Omega^2)^2 + \Omega^2}$
<b>Схематичне відображення амплітудно-частотної характеристики</b>		

нерезонансні режими роботи. Це пояснюється тим, що такі вібромашини вже є як мінімум двомасовими (маса робочого органу  $m_1$  та маса дебаланса  $m_\delta$  (маси дебалансів)). Вони самодостатні для того, щоб забезпечити свій рух без залучення фундаменту, оскільки їх робочий орган (маса  $m_1$ ) приводиться в рух відносно дебалансів масою  $m_\delta$ . Такі коливальні системи встановлюють на фундамент через “м’які” пружні елементи (віброізолятори), завдяки чому динамічні навантаження на нього будуть мізерними, порівняно з тим, якщо б застосовувати резонансні пружні елементи.

Тож одномасові коливальні системи не здатні використовувати резонансні режими, а тому в даній дисертаційній роботі вони не розглядаються як перспективний напрямок досліджень вібраційного технологічного обладнання з точки зору енергоощадності.

Для можливості реалізації резонансних коливальних систем незалежно від типу збурення, в яких буде усунено динамічний вплив на фундамент, необхідно ввести ще одну масу, від якої буде “відштовхуватися” робочий орган. Такі, уже двомасові коливальні системи, зможуть повноцінно застосовувати енергоощадні режими роботи.

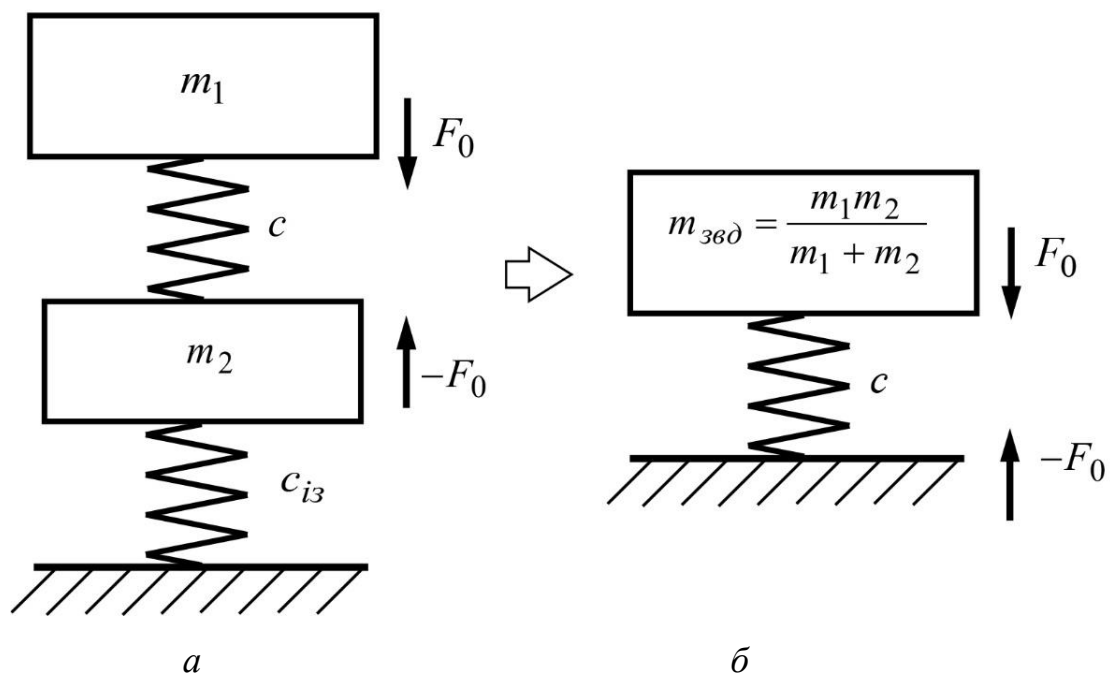
### 1.1.2. Двомасові коливальні системи

Двомасові вібраційні машини (рис. 1.2) демонструють присутність двох незалежних мас: активної  $m_1$  та реактивної  $m_2$ , зв’язаних резонансним пружним вузлом (у системах з ексцентриковим приводом його може і не бути) (табл. 1.2). Введення другої (реактивної) маси пояснюється лише двома причинами, що забезпечують:

- можливість застосування резонансних режимів роботи, за яких двомасова коливальна система, утворена активною та реактивною масами, що жорстко з’єднані між собою резонансним пружним вузлом, стає самодостатньою структурою, здатною розвивати значні динамічні навантаження, не передаючи їх на

фундамент. Такі коливальні системи встановлюються на віброізолятори із жорсткістю  $c_{із}$ , яка на порядок і вище є меншою від жорсткості  $c$  резонансного пружного вузла. Це дає змогу здійснити механічну розв'язку з фундаментом, мінімізуючи силовий вплив на нього з боку коливальної системи;

– можливість лише динамічного зрівноваження робочого органу іншою масою, яка, по суті, використовується як маса, від якої можна відштовхнутись, не передаючи динамічного навантаження на фундамент. Зрозуміло, що пружний вузол, який пов'язує ці маси, є нерезонансним.



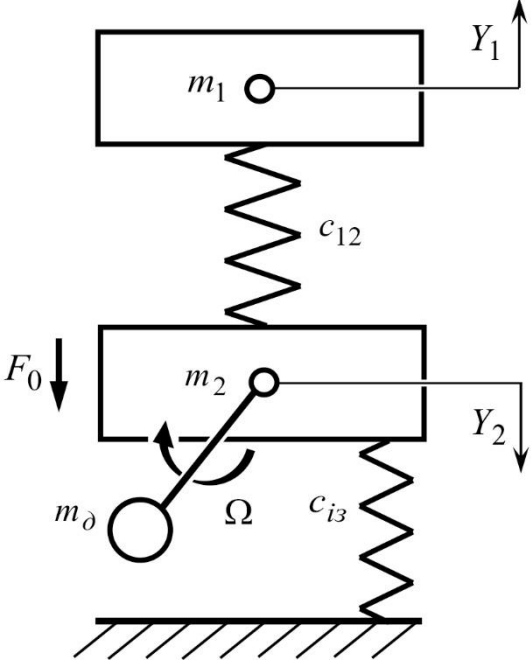
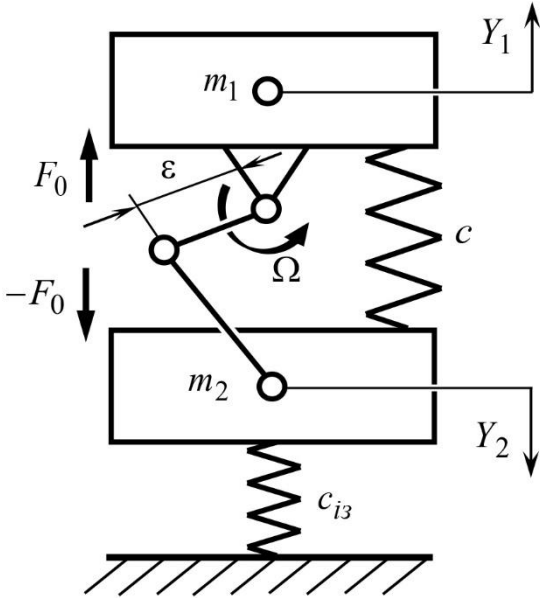
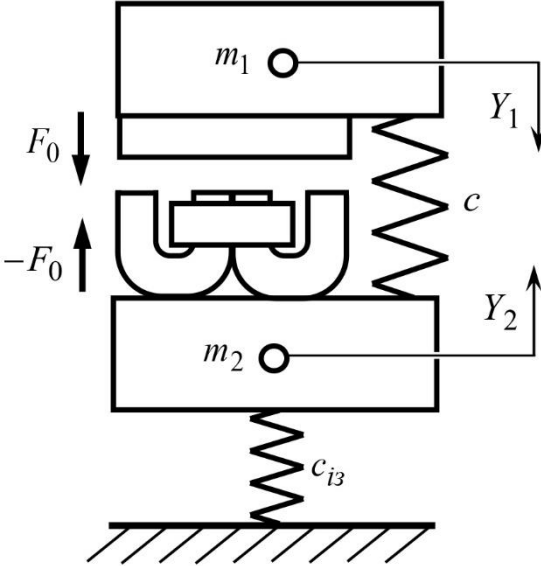
**Рис. 1.2.** Двомасова механічна коливальна система:

*а – принципова схема; б – схема, зведена до одномасової*

Коли вібраційну машину характеризують як двомасову, то часто вважають, що це резонансна конструкція, яка уже має резонансний пружний вузол. Це справджується для систем з електромагнітним та дебалансним приводами [48, 49]. Системи з кривошипно-шатунними механізмами, будучи двомасовими, не обов'язково реалізовувати резонансними, більш важлива роль припадає на динамічне зрівноваження конструкції.

Таблиця 1.2

## Двомасові коливальні системи

Інерційний привод	Ексцентриковий (кривошипно-шатунний) привод	Електромагнітний привод
<b>Принципова схема</b>		
		
<b>Ступінь поширення в промисловості</b>		
++	++	++
<b>Основні аналітичні залежності</b>		

Продовження табл. 1.2

<i>Колова частота вимушених коливань</i>		
$\Omega = \frac{\pi n}{30}$	$\Omega = 2\pi \nu$	
<i>Амплітуда коливань робочого органу <math>m_1</math></i>		
$Y_1 = \frac{\zeta g}{\Omega^2}$ , де $\zeta \in (2...6)$		
<i>Амплітуда коливань реактивної маси <math>m_2</math></i>		
$Y_2 = Y_1 \frac{m_1}{m_2}$	$Y_2 = \frac{\varepsilon m_1}{m_1 + m_2}$ , $\varepsilon = Y_1 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (*)$	$Y_2 = Y_1 \frac{m_2 - z^2 (m_1 + m_2)}{m_2}$ , де $z = 0,94...0,97$
<i>Жорсткісні параметри</i>		
$c = m_{зв\theta} \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2$ , де $z = 0,94...0,97$ , $m_{зв\theta} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – зведена маса $c_{i3} = m_1 + m_2 \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2$ , де $z_{i3} = 3...7$		

Продовження табл. 1.2

Амплітуда гармонійної сили збурення		
Через амплітуду коливань маси $m_1$		
$F_0 = \left  \frac{Y_1 \Omega^2 (m_1 + m_2) (c - m_{зв\delta} \Omega^2)}{c} \right $	$F_0 = \left  \frac{Y_1 (m_1 + m_2) (c - m_{зв\delta} \Omega^2)}{m_2} \right  \quad (**)$	
Через амплітуду коливань маси $m_2$		
$F_0 = \left  \frac{Y_2 \Omega^2 (m_1 + m_2) (c - m_{зв\delta} \Omega^2)}{c - m_1 \Omega^2} \right $	$F_0 = \left  \frac{Y_2 (m_1 + m_2) (c - m_{зв\delta} \Omega^2)}{m_1} \right  \quad (***)$	
Схематичне відображення амплітудно-частотної характеристики		

Будь-яку двомасову систему можна звести до одномасової і навпаки (рис. 1.2) [79, 97, 98, 106]. Одномасові та двомасові системи дуже схожі за принципами розрахунку. Це прослідковується у подібності аналітичних залежностей для встановлення жорсткостей пружних вузлів (див. табл. 1.1 та табл. 1.2). Відмінність між ними, по суті, полягає лише в наявності чи відсутності резонансних режимів роботи. На основі двомасових систем можна реалізувати будь-яку конструкцію вібраційного технологічного обладнання. Їх достатньо для втілення усіх задумів конструктора. Та незважаючи на досконалість двомасових конструкцій, на практиці зустрічаються тримасові, що володіють низкою переваг.

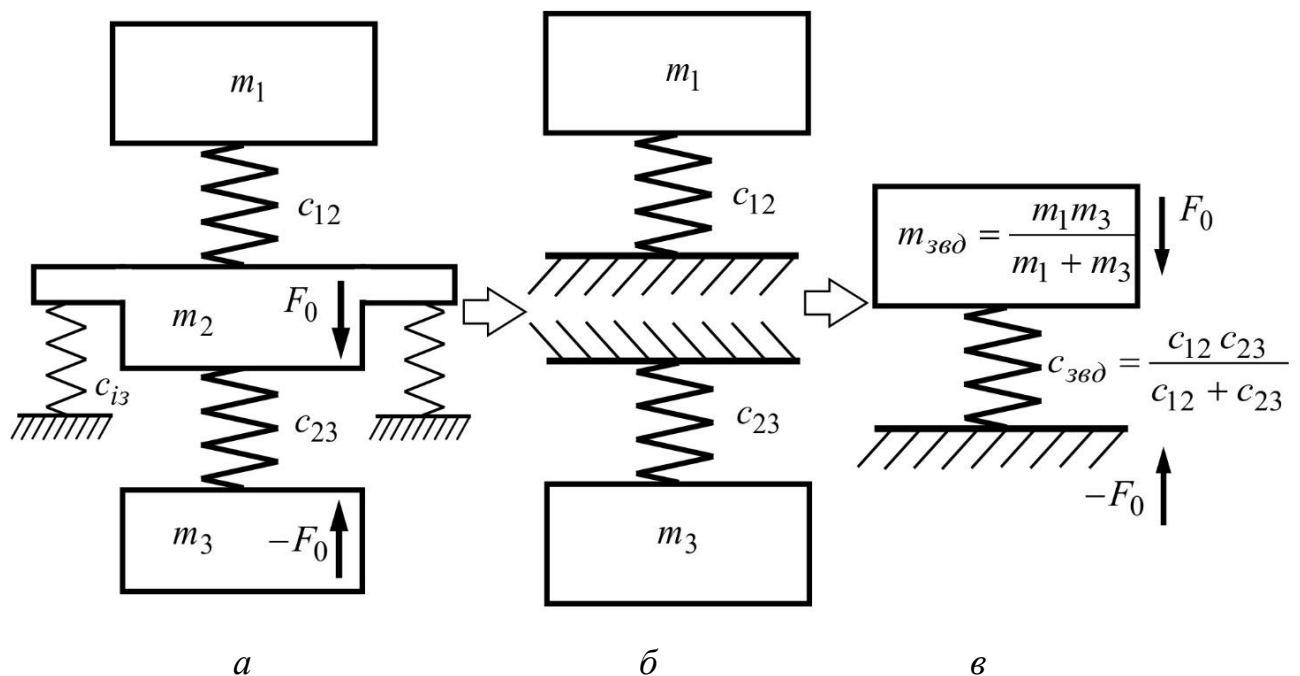
### 1.1.3. Псевдо тримасові коливальні системи з динамічним гасником

Псевдо тримасова механічна коливальна система на базі динамічного гасника формується за рахунок введення в конструкцію третьої маси (проміжної)  $m_2$ , що дозволяє розглядати її як коливальну систему, яка складається з трьох незалежних коливальних мас:  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$ , які попарно з'єднані між собою пружними вузлами, жорсткості яких відповідно  $c_{12}$  та  $c_{23}$  (рис. 1.3). Особливістю даних конструкцій є те, що їх коливальна система зводиться до двох одномасових схем, а проміжна маса  $m_2$  у розрахунках не враховується (випадає) (табл. 1.3). Парціальні частоти обох одномасових коливальних систем однакові і співпадають з першою власною частотою коливань  $\Omega_{e1}$  тримасової коливальної системи. Друга власна частота  $\Omega_{e2}$  знаходиться значно далі від першої. Ці власні частоти взаємопов'язані і їх можна визначити згідно виразу [65]:

$$\Omega_{e1, 2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{c_{12}}{m_1} + \frac{c_{12} + c_{23}}{m_2} + \frac{c_{23}}{m_3} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_{12}}{m_1} + \frac{c_{12} + c_{23}}{m_2} + \frac{c_{23}}{m_3} \right)^2 - \frac{c_{12}c_{23}}{m_1m_2m_3} (m_1 + m_2 + m_3)}}. \quad (1.3)$$

Кріплення такої коливальної системи відбувається, по суті, в умовно нерухомій точці резонансного пружного вузла, утвореного послідовним з'єднанням пружних вузлів одномасових систем. Роль нерухомої точки відіграє проміжна маса  $m_2$ . Таку коливальну систему можна звести до одномасової, що не може її характеризувати як повноцінну тримасову (рис. 1.3).

Тож тримасові конструкції з динамічним гасником не можна вважати повноцінними тримасовими. Вони за своїми характеристиками близькі до двомасових, оскільки зводяться до одно- чи двомасових коливальних систем. Подальший аналіз таких конструкцій безперспективний.



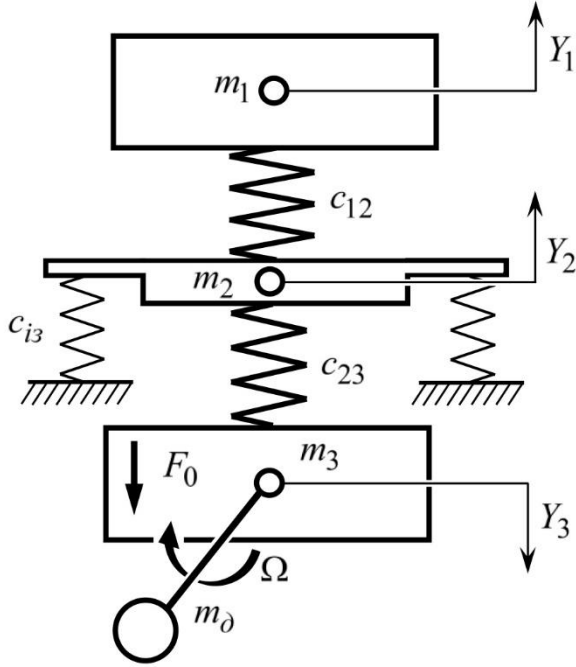
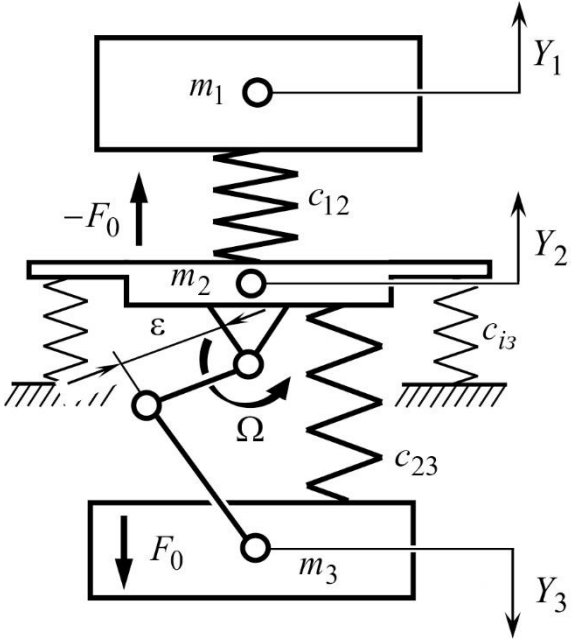
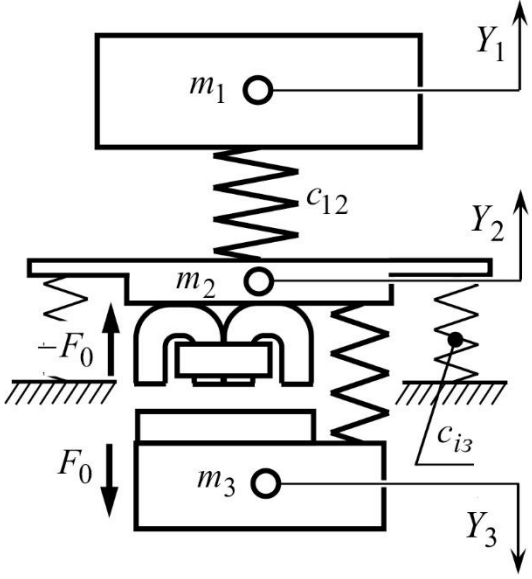
**Рис. 1.3.** Тримасова механічна коливальна системи (а), її розрахункова модель за дво- (б) та одномасовою (в) схемами

Справжні тримасові конструкції є міжрезонансні системи. Вони повноцінно розкривають у коливальних системах якісно нові властивості, які неможливо виявити в одно- та двомасових, а також дозволяють суттєво підвищити показники ефективності функціонування вібраційних машин, що є вагомим кроком у вдосконаленні вібраційного технологічного обладнання.



Таблиця 1.3

## Тримасова коливальна система на базі динамічного гасника

Інерційний привод	Ексцентриковий (кривошипно-шатунний) привод	Електромагнітний привод
<b>Принципова схема</b>		
		
<b>Ступінь поширення в промисловості</b>		
+	+	+

Продовження табл. 1.3

<b>Основні аналітичні залежності</b>		
<i>Колова частота вимушених коливань</i>		
$\Omega = \pi n / 30$		$\Omega = 2\pi \nu$
<i>Амплітуда коливань робочого органу <math>m_1</math></i>		
$Y_1 = \frac{\zeta g}{\Omega^2}$ , де $\zeta \in (2...6)$		
<i>Амплітуда коливань проміжної маси <math>m_2</math></i>		
$Y_2 = Y_1(1 - z^2)$		
<i>Амплітуда коливань реактивної маси <math>m_3</math></i>		
$Y_3 = \frac{Y_1 \left( \begin{array}{c} z^4 m_2 + m_3 \Omega^2 - \\ -z^2 \Omega^2 (m_1 + m_2 + m_3) \end{array} \right)}{m_3 \Omega^2}$	$Y_3 = \frac{Y_1 (m_1 + m_2)(1 - z^2)}{m_3}$ , $\varepsilon = Y_2 + Y_3 =$ $= Y_1 \left( \frac{m_1 + (m_2 + m_3)(1 - z^2)}{m_3} \right) \approx Y_3$	$Y_3 = \frac{Y_1 (m_1 + m_2)(1 - z^2)}{m_3}$
<i>Жорсткісні параметри</i>		

Продовження табл. 1.3

$$c_{12} = m_1 \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2, \text{ де } z = 0,94 \dots 0,97, \quad c_{23} = m_3 \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2,$$

$$c_{i3} = m_1 + m_2 + m_3 \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2, \text{ де } z_{i3} = 3 \dots 7$$

Амплітуда гармонійної сили збурення

Через амплітуду коливань активної маси  $m_1$ 

$F_0 = \left  \frac{-Y_1 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{12} c_{23}} \right $	$F_0 = \left  \frac{-Y_1 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{12} m_3} \right $
---	--

Через амплітуду коливань проміжної маси  $m_2$ 

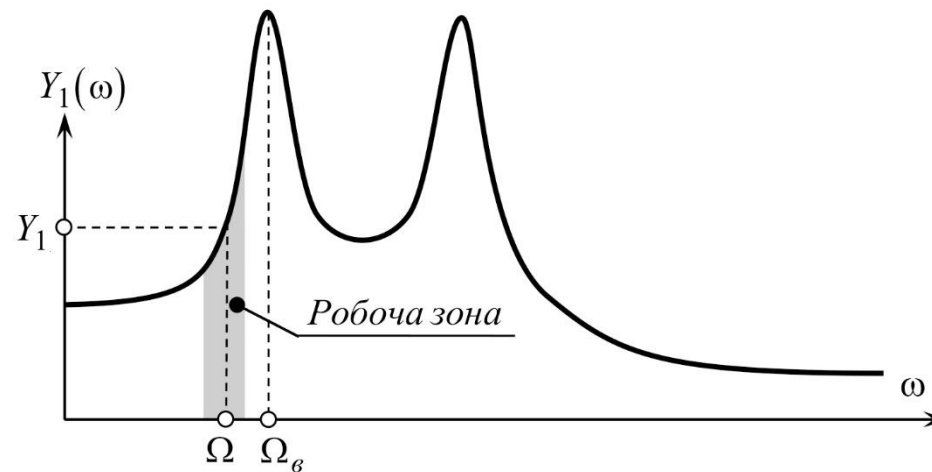
$F_0 = \left  \frac{-Y_2 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \times \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} \times (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{23} (c_{12} - m_1 \Omega^2)} \right $	$F_0 = \left  \frac{-Y_2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{m_3 (c_{12} - m_1 \Omega^2)} \right $
--	---

Через амплітуду коливань реактивної маси  $m_3$

$$F_0 = \frac{Y_3 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \times \right.}{c_{12} \Omega^2 (m_1 + m_2) - c_{23} (c_{12} + m_1 \Omega^2) \Omega^2 m_1 m_2} \times \left. \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} \times (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{Y_3 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right) + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$F_0 = \frac{c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3)}{c_{12} (m_1 + m_2) - \Omega^2 m_1 m_2}$$

Схематичне відображення амплітудно-частотної характеристики



### 1.1.4. Тримасові міжрезонансні коливальні системи

Тримасовою міжрезонансною механічною коливальною системою називається така система, в якій вимушена (робоча) колова частота  $\Omega$  знаходиться між двома піками  $\Omega_{e1} < \Omega < \Omega_{e2}$  [22, 56] (структурні схеми даних коливальних систем наведені в табл. 1.4). Для таких систем значення жорсткостей залежать від наступних параметрів:

$$\begin{cases} c_{12} \\ c_{23} \end{cases} = f(m_1, m_2, m_3, \Omega_{e1}, \Omega_{e2}), \text{ причому } \Omega_{e1} \neq \Omega_{e2} \text{ і } \Omega_{e1} < \Omega < \Omega_{e2}. \quad (1.4)$$

Згідно [61, 65] розрахунок зводиться до аналітичного встановлення п'ятьох визначальних параметрів тримасової міжрезонансної коливальної системи, а саме за відомих інерційних параметрів активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас визначається інерційний параметр реактивної маси  $m_3$ , наприклад, для системи з електромагнітним приводом згідно залежності:

$$m_3 = \frac{Q - m_1 - \zeta m_2 (1 - z^2)}{\zeta (1 - z^2)}, \quad (1.5)$$

де

$$Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - z^2)(m_2 + m_1(1 - \zeta)) + m_1 + \sqrt{z^4 [m_1(1 - \zeta) + m_2]^2 + (\zeta m_1 + m_2)^2 + 2z^2 [m_1^2 \zeta (1 - \zeta) - m_2(m_1 + m_2)]}}{(1 - z^2)(m_2 + m_1(1 - \zeta)) + m_1 + \sqrt{z^4 [m_1(1 - \zeta) + m_2]^2 + (\zeta m_1 + m_2)^2 + 2z^2 [m_1^2 \zeta (1 - \zeta) - m_2(m_1 + m_2)]}} \right],$$

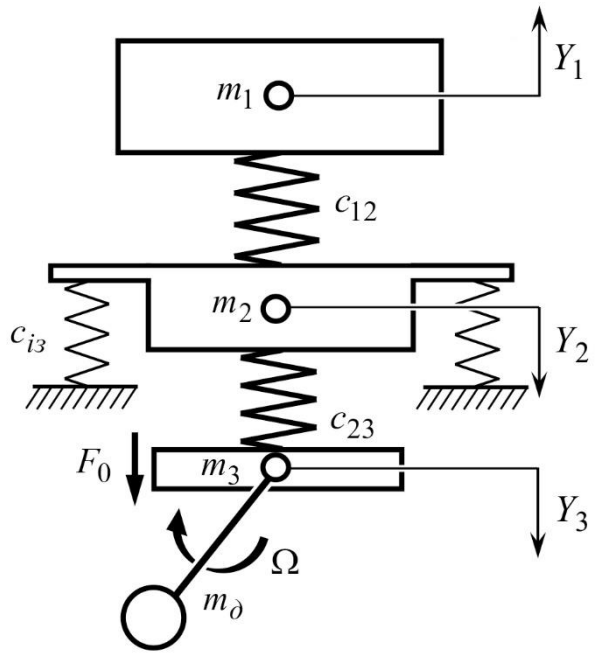
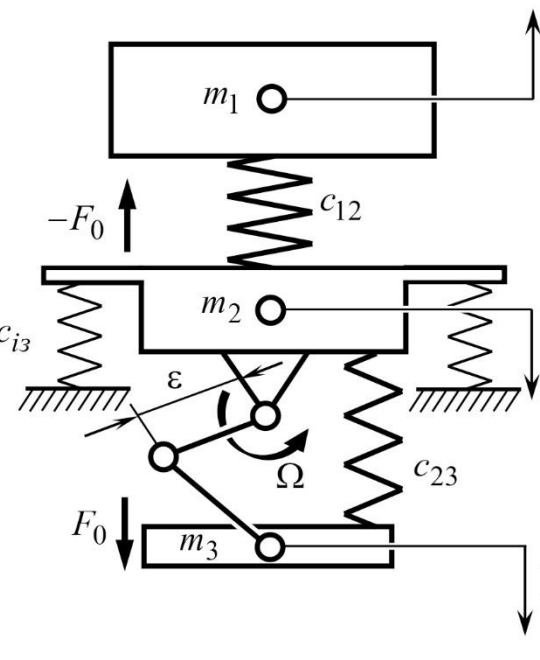
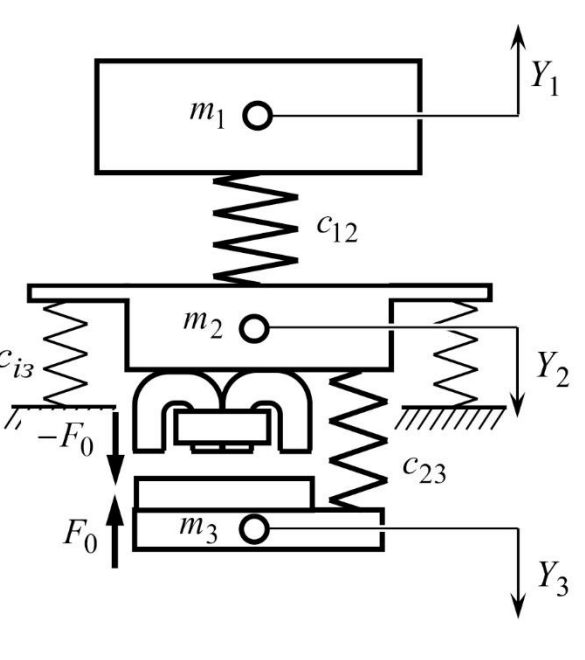
а відповідні жорсткісні параметри  $c_{12}$  й  $c_{23}$  згідно таблиці 1.4. Ефективність функціонування ж таких коливальних систем, що вимірюється коефіцієнтом додаткового динамічного підсилення коливань  $D$  порівняно з двомасовими резонансними, визначатиметься згідно залежності:

$$D = \frac{Q}{z^2 (1 - \zeta)(m_1 + m_2)}. \quad (1.6)$$

Чим більша частка жорсткості  $\zeta \rightarrow 1$ , тим менший інерційний параметр  $m_3$  і тим більший коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D$ .

Таблиця 1.4

## Тримасова міжрезонансна коливальна система

Інерційний привод	Ексцентриковий (кривошипно-шатунний) привод	Електромагнітний привод
<b>Принципова схема</b>		
		
<b>Ступінь поширення в промисловості</b>		
+	-	+
<b>Основні аналітичні залежності</b>		

Продовження табл. 1.4

<i>Колова частота вимушених коливань</i>		
$\Omega = \pi n / 30$	$\Omega = 2\pi \nu$	
<i>Амплітуда коливань робочого органу <math>m_1</math></i>		
$Y_1 = \frac{\zeta g}{\Omega^2}$ , де $\zeta \in (2...6)$		
<i>Амплітуда коливань проміжної маси <math>m_2</math></i>		
$Y_2 = \frac{Y_1 \left[ \zeta \left( z^2 (m_1 + m_2 + m_3) - (m_2 + m_3) \right) + m_2 - z^2 (m_1 + m_2) \right]}{m_2 - \zeta (m_2 + m_3)}$ , де $\zeta \in [0...1)$		
<i>Амплітуда коливань реактивної маси <math>m_3</math></i>		
$Y_3 = Y_1 \left[ \Omega^2 \left\{ m_3 \zeta^2 \left[ z^2 (m_1 + m_2 + m_3) - (m_2 + m_3) \right] + \zeta m_2 \times \left[ z^2 (m_1 + m_2) + m_3 \right] - z^2 m_2 \times (m_1 + m_2) \right\} + \zeta m_2 z^4 (m_1 + m_2 + m_3) + m_2 z^2 (m_1 + m_2) \right] / \Omega^2 \zeta m_3 [m_2 - \zeta (m_2 + m_3)]$	$Y_1 \left[ \zeta \left( \begin{array}{l} m_1 m_3 + (1 - z^2) m_2 \times \\ \times (m_1 + m_2 + m_3) \end{array} \right) - \left( 1 - z^2 \right) m_2 (m_1 + m_2) \right]$ $Y_3 = \frac{\quad}{m_3 [\zeta (m_2 + m_3) - m_2]}$ , $\varepsilon = Y_2 + Y_3 \approx Y_3$	$Y_1 \left[ \zeta \left( \begin{array}{l} m_1 m_3 + (1 - z^2) m_2 \times \\ \times (m_1 + m_2 + m_3) \end{array} \right) - \left( 1 - z^2 \right) m_2 (m_1 + m_2) \right]$ $Y_3 = \frac{\quad}{m_3 [\zeta (m_2 + m_3) - m_2]}$

Продовження табл. 1.4

<i>Жорсткісні параметри</i>	
$c_{12} = m_1 \left( \frac{\Omega}{z} \right)^2 \left( \frac{m_3 \zeta + m_2 (\zeta - 1)}{(\zeta - 1)(m_1 + m_2) + m_3 \zeta} \right), \text{ де } z = 0,94 \dots 0,97,$ $c_{23} = m_3 (\Omega / z)^2 \zeta, \quad c_{i3} = m_1 + m_2 + m_3 (\Omega / z_{i3})^2, \text{ де } z_{i3} = 3 \dots 7$	
<i>Амплітуда гармонійної сили збурення</i>	
<i>Через амплітуду коливань активної маси <math>m_1</math></i>	
$F_o = \left  \frac{-Y_1 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{12} c_{23}} \right $	$F_0 = \left  \frac{-Y_1 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{12} m_3} \right $
<i>Через амплітуду коливань проміжної маси <math>m_2</math></i>	
$F_o = \left  \frac{-Y_2 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \times \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} \times (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{23} (c_{12} - m_1 \Omega^2)} \right $	$F_0 = \left  \frac{-Y_2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{m_3 (c_{12} - m_1 \Omega^2)} \right $



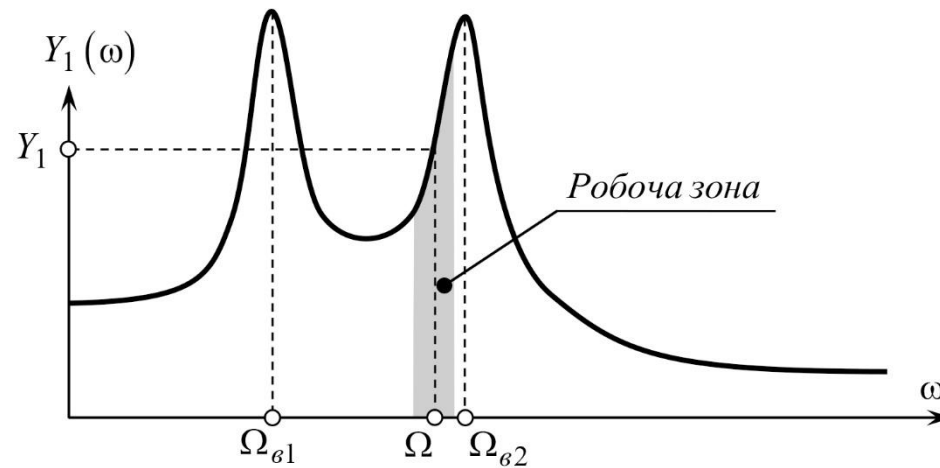
Продовження табл. 1.4

Через амплітуду коливань реактивної маси  $m_3$ 

$$F_0 = \frac{Y_3 \Omega^2 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \times \right. \\ \times \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 \times \right. \\ \left. \left. \times (c_{12} + c_{23}) \right] + c_{12} c_{23} \times \right. \\ \left. \left. \times (m_1 + m_2 + m_3) \right) \right)}{c_{12} \Omega^2 (m_1 + m_2) - c_{23} (c_{12} + \\ + m_1 \Omega^2) \Omega^2 m_1 m_2}$$

$$F_0 = \frac{Y_3 \left( \Omega^4 m_1 m_2 m_3 - \Omega^2 \left[ m_2 (m_1 c_{23} + m_3 c_{12}) + m_1 m_3 (c_{12} + c_{23}) \right] + \right. \\ \left. + c_{12} c_{23} (m_1 + m_2 + m_3) \right)}{c_{12} (m_1 + m_2) - \Omega^2 m_1 m_2}$$

Схематичне відображення амплітудно-частотної характеристики



В підтвердження сказаного, якщо розглянути абстрактну структуру, для якої  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 1$  кг,  $\zeta \rightarrow 1$ , застосовуючи вираз (1.5) можна отримати:

$$\lim_{z \rightarrow 1} m_3 = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{Q - m_1 - \zeta m_2 (1 - z^2)}{\zeta (1 - z^2)} \right) \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

згідно якого реактивна маса  $m_3$  вироджується, що наглядно підтверджує наявність надлегких реактивних мас у високоефективних міжрезонансних коливальних системах.

У тримасових міжрезонансних коливальних системах робочим органом переважно є активна або ж проміжна маси. Реактивна маса здебільшого призначена для збурення коливань і не несе технологічного навантаження. Однією з характерних властивостей міжрезонансних коливальних систем є те, що зменшення (збільшення) маси робочого органу практично не призводить до зміни амплітуди коливань. Це пояснюється наявністю так званого “сідла” на амплітудно-частотній характеристиці активної та проміжної мас (див. табл. 1.4).

Зведення двох резонансних піків дає змогу накопичувати високий динамічний потенціал коливальної системи на відносно вузькій частотній області. Завдяки цьому такі коливальні системи можуть володіти значно вищими коефіцієнтами динамічності мас порівняно з двомасовими резонансними системами, а тому їх називають високоефективними [56, 63]. Тож за тих самих значень збурювальних зусиль можна реалізовувати значно вищі амплітуди коливань мас.

Вагомим недоліком високоефективних тримасових коливальних систем є те, що третя реактивна маса  $m_3$  є малою, а її амплітудно-частотна характеристика в міжрезонансній зоні стрімкоподібна [58, 61, 62, 64, 65]. Це призводить до ускладнення забезпечення міжрезонансного режиму, особливо у системах з електромагнітним приводом (биття якоря об осердя з котушками вібророзбуджувача). Дебалансний ж привод взагалі не в стані ввійти у міжрезонансну зону (наявність ефекту Зоммерфельда).

Підтвердити стрімкоподібну характеристику реактивної маси можна так. Перший та другий резонансні піки встановлюються згідно залежностей [65]:

$$\Omega_{\delta 1} = \Omega \cdot \sqrt{\frac{z^2 D(m_1 + m_2) - m_1}{z^2 D(m_1 + m_2) - m_1(1 - z^2)}}; \quad \Omega_{\delta 2} = \frac{\Omega}{z}. \quad (1.8)$$

Чим вища ефективність системи, коли  $z \rightarrow 1$ , а  $D \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{z \rightarrow 1, D \rightarrow \infty} \Omega_{\delta 1} = \lim_{z \rightarrow 1, D \rightarrow \infty} \left( \Omega \cdot \sqrt{\frac{z^2 D(m_1 + m_2) - m_1}{z^2 D(m_1 + m_2) - m_1(1 - z^2)}} \right) = \Omega.$$

Тобто формується дуже вузька міжрезонансна зона в області  $\Omega \dots \Omega/z$ , де  $z \rightarrow 1$ . В цій зоні реактивна маса змінює свою фазу і можна уявити на скільки стрімкоподібна залежність.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що тримасовим міжрезонансним механічним коливальним системам притаманні високі коефіцієнти динамічності і вони, без сумніву, є енергоощадними. Проте, широке їх поширення обмежується низкою чинників. В системах з електромагнітним проводом є невирішеними до кінця задачі стабілізації коливань реактивної маси. В системах з інерційним приводом існують труднощі безпроблемного входження дебалансів у міжрезонансну зону. Варто зазначити, що наведена вище методологія синфазного розрахунку тримасових міжрезонансних коливальних систем апробована лише для структур з електромагнітним приводом. Застосування інших типів збурення може виявити її непридатність під час розрахунку коливальних систем.

Тож можна сформулювати висновок, що наведені в таблиці 1.4 дискретні структури вичерпали свій потенціал, оскільки існуючі методики розрахунку тримасових міжрезонансних вібраційних машин не в стані забезпечити стійку зону коливань для надлегких реактивних мас, амплітудно-частотні характеристики яких стрімкоподібні. Амплітудно-частотну характеристику реактивної маси зробити пологою неможливо. Тож пошук нових структур і підходів у розрахунку нових конструкцій тримасових міжрезонансних вібраційних машин, що усунуть згадані недоліки, є однією з перспективних наукових задач.

## 1.2. Аналіз конструкцій тримасових міжрезонансних вібр машин

Аналіз конструкцій вібраційного обладнання в основному проводитимемо, використовуючи Європейську патентну базу даних [40] та академічну пошукову систему Google Scholar [1], що дозволяє сформулювати достовірне бачення розвитку вібраційної техніки й встановити науковців, які займалися у даній сфері.

Варто відзначити визначні здобутки у розробленні та дослідженні широкого класу вібраційних технологічних машин таких науковців: А. П. Бабічев [5 – 7], В. А. Бауман [9], І. І. Биховський [9, 21], І. І. Блехман [17], П. С. Берник [3, 11], Л. А. Вайсберг [19, 22], В. Д. Варсанов'єв [23], І. Х. Гончаревич [28 – 32, 115, 126], Е. Е. Лавендел [56], М. В. Медвідь [79], В. П. Надутий [80, 81, 105], І. І. Назаренко [82 – 85, 130], В. О. Повідайло [96 – 99], В. М. Потураєв [102 – 105], Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв [111 – 114], О. О. Співаковський [115], А. П. Субач [117], В. П. Франчук [102, 105], М. В. Хвінгія [124, 125], М. П. Ярошевич [134 – 137] та ін.

В розвиток теорії механічних коливань, без якої неможливий синтез вібраційних машин, зробили вклад такі видатні науковці: І. М. Бабаков [4], В. Л. Бідерман [13], М. В. Василенко [24], Я. Г. Пановко [14, 87 – 89], С. П. Тимошенко [118], А. П. Філіппов [119, 120].

Вагомий внесок у розвиток синтезу конструкцій, динаміки та міцності машин, на чому і базується методика розрахунку віброобладнання, зробили такі вчені як: М. М. Беляєв [10], І. А. Біргер [14 – 16], В. Л. Вейц [25], С. С. Гутиря [37], А. Ф. Дашенко [8], А. П. Зіньковський [41], С. М. Кожевников [45], М. С. Комаров [46], І. В. Кузьо [35, 53, 54, 60], Б. І. Кіндрацький [55], В. С. Ловейкін [75], В. О. Малащенко [77, 78], П. Л. Носко [86], Г. С. Писаренко [90 – 95], С. Д. Пономарьов [100, 101], Ю. Н. Работнов [108], В. Б. Струтинський [116], Є. В. Харченко [121 – 123] та ін.

Одні з перших згадок тримасових коливальних систем зустрічаються в патентах США кінця 40-х років ХХ століття, автором яких є англійський винахідник William W. Triggs [165 (перевидання 166)]. У цьому патенті розглянуто тримасовий вібраційний транспортер, для якого обґрунтовано необхідність налагодження на білярезонансний режим роботи. Із аналізу запропонованої автором коливальної системи можна зробити висновок, що вже в ті далекі часи з'явилося розуміння переваг багатомасових конструкцій, які насамперед пов'язані з їх набагато кращими амплітудно-частотними характеристиками у міжрезонансному режимі роботи.

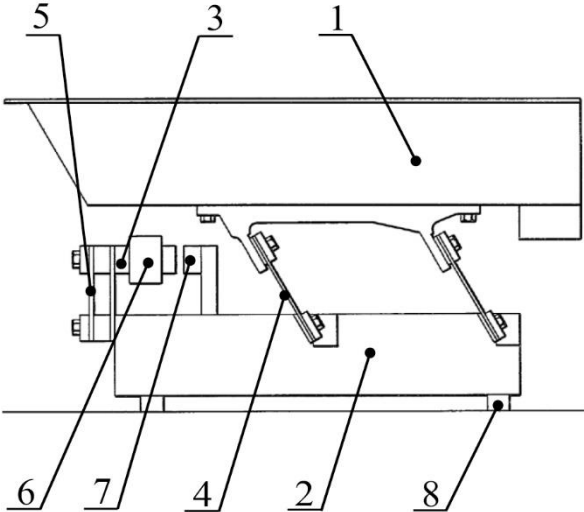
Слід відзначити здобутки у розробленні тримасових вібраційних технологічних машин наступних представників: німецьку компанію Signal Gesellschaft [156 – 161], науковців: John C. O'Connor [143], Joseph W. Sherwen [145, 146], Arthur W. Forman [139], Gulertan Vural та Albert Linz [141], Franklin C. Pereny [140], Mikata Yoshitaka [150, 151], Albert R. Probert [138], Richard B. Kraus [155], Mouldsdale Timothy, John Blackwall та Mendelewicz Ran [152], Ralph A. Stearns, Vozrah [154], He Li та ін. [149], Wang Yun [163], Г. Б. Букати [19], Л. А. Вайсберг [19, 22], І. Х. Гончаревич [28 – 32, 115, 126], Б. В. Гусев [36], О. П. Дєдов [38, 39, 85], Л. П. Левін [72 – 74], В. П. Надутий [80, 81, 105], І. І. Назаренко [82 – 85, 130], В. М. Потураєв [102 – 105], П. А. Сергєєв [29], Л. П. Стрельников [28], М. В. Хвінгія [124, 125], О. В. Цуркан [127 – 129], Ю. Ф. Чубук [130], В. М. Шатохін [131], В. Б. Яковенко [132, 133] та ін.

У межах Національного університету “Львівська політехніка” над створенням тримасових вібраційних машин працювали такі науковці та провідні інженери, як І. С. Афтаназів [2, 3], А. Л. Беспалов [12, 98], О. В. Гаврильченко [26, 27], В. О. Повідайло [96 – 99], А. Н. Рабінович [106 – 107], В. О. Яхимович [106], Ю. П. Шоловій [54, 60], В. А. Щигель [97]. Вони розробляли конструкції машин, що були тримасовими, однак у розрахункових схемах вони зводились переважно до двох одномасових (табл. 1.3).

Розробками тримасових міжрезонансних систем в науковій школі Національного університету “Львівська політехніка” займаються такі науковці: О. С. Ланець [26, 27, 33, 34, 53, 57 – 71] та В. М. Гурський [27, 33 – 35, 60]. Серед великого різноманіття розробок тримасових міжрезонансних вібраційних машин можна виділити ряд таких, що наведені в табл. 1.5 і систематизовані за типом привода.

Таблиця 1.5

Класифікація тримасових вібраційних машин  
за типом привода

Принципова схема, графічне зображення	Опис конструкції
<b>Електромагнітний привод</b>	
<p><b>1.</b></p> 	<p>В патенті William R. Brown [164] запропонована конструкція вібраційного живильника з електромагнітним приводом, що складається з робочого органу 1 (активної маси), який за допомогою похилих пружних елементів 4 з'єднаний з проміжною масою 2, до якої через плоскі пружні елементи 5 закріплена реактивна маса 3. Якір 7 та осердя з котушкою 6 електромагнітного віброзбуджувача відповідно кріпляться до проміжної 2 та реактивної 3 мас. Вібраційний живильник через віброізолятори 8, закріплені до проміжної маси 2, встановлений на фундамент.</p>

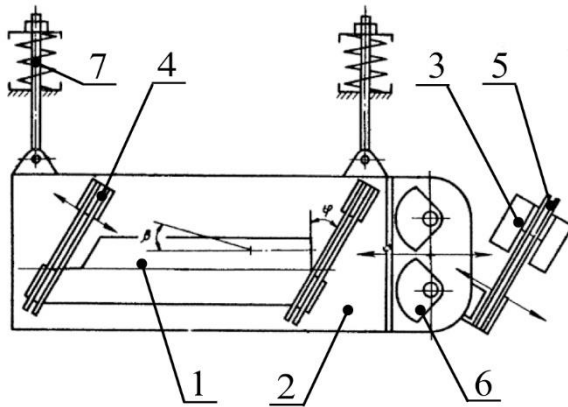
<p>2.</p>	<p>В патенті Thomas H. Falconer та Eriez Manufacturing Company [162] розглядається тримасовий віброживильник для транспортування вугілля, де функцію робочого органу виконує активна маса 1. Силове збудження віброживильника від електромагнітного віброзбуджувача 6, 7 передається на проміжну 2 та активну 1 маси, що з'єднані між собою пружним вузлом 4. Реактивна маса 3 кінематично збуджується від проміжної маси 2 через пружний вузол 5. Коливальна система встановлена на віброізолятори 8, закріплені до проміжної маси 2.</p>
<p>3.</p>	<p>В патенті ВАТ “Механобр – техніка” [28] розглядається довгомірний вібротранспортер, де функцію робочого органу виконує активна маса 1. Якір електромагнітного віброзбуджувача закріплений до реактивної маси 3, а осердя з котушками – до проміжної 2. Проміжна 2 та реактивна 3 маси з'єднані між собою пружним вузлом 5. Активна маса 1 кінематично збуджується через пружний вузол 4 від коливального руху проміжної маси 2, яка встановлена на віброізолятори 6.</p>

<p><b>4.</b></p> 	<p>Авторське свідоцтво А. І. Макарова та А. Д. Рудіна [76] демонструє три-масовий грохот, в якому функцію робочого органу покладено на проміжну масу 2, до якої кріпиться якір 6 електромагнітного вібробуджувача. Активна маса 1, кінематично збурюється через пружний вузол 4. Котушка з осердям 3 утворює окрему реактивну масу, що через пружний вузол 5 з'єднується з робочим органом 2. Коливальна система встановлена через проміжну масу 2 на віброізолятори 7.</p>
<p><b>5.</b></p> 	<p>Розробка Л. П. Левіна [73] (тепер ВАТ “Механобр–техніка”) знайомить з віброживильником, в якому робочий орган – активна маса 1 через пружні вузли 4 та 5 кінематично збурюється від мас 2 та 3. Силоне збурення проміжної 2 та реактивної 3 мас відбувається завдяки електромагнітному вібробуджувачу 6. Дана тримасова коливальна система побудована на замкненій структурі, яка реалізована завдяки з'єднанню реактивної маси 3 з активною масою 1 пружним вузлом 7 малої жорсткості.</p>



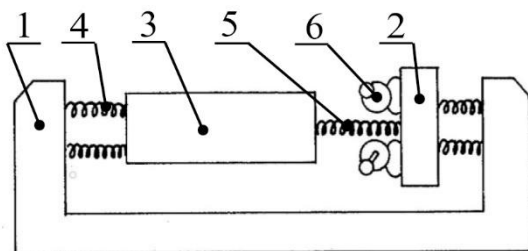
## Інерційний привод

6.

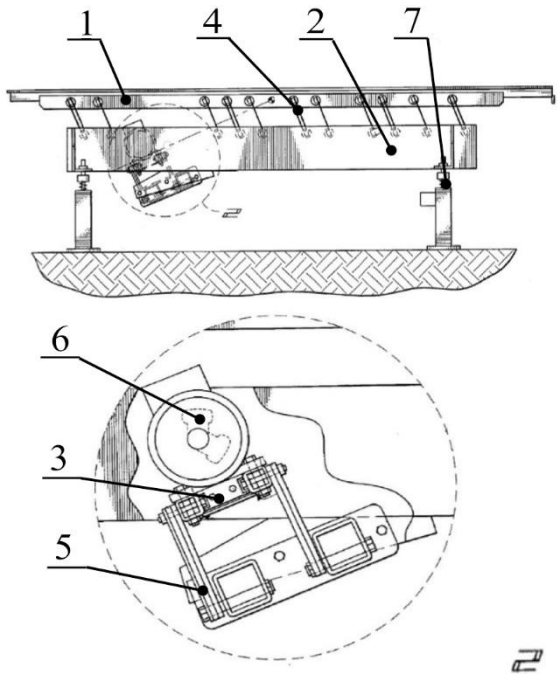
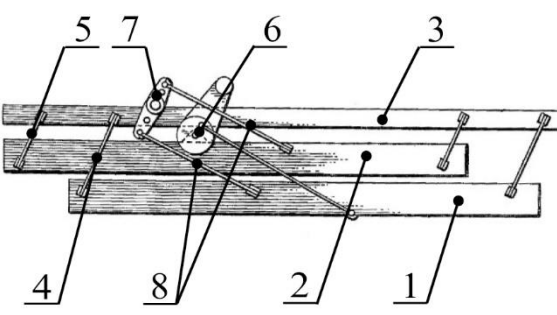


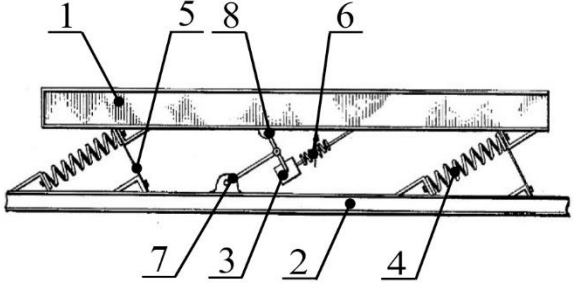
В розробці Інституту гірничої справи ім. О. О. Скочинського [126], запропоновано віброживильник, силове збудження якого забезпечується двома синхронізованими дебалансними віброзбуджувачами 6, які передають вимушені коливання на промісну робочу масу 2. Кінематичне збудження коливання активної 1 та реактивної 3 мас забезпечено проміжною масою 2 через пружні вузли 4 та 5 відповідно. Віброживильник підвішується на віброізоляторах 7 через масу 2.

7.

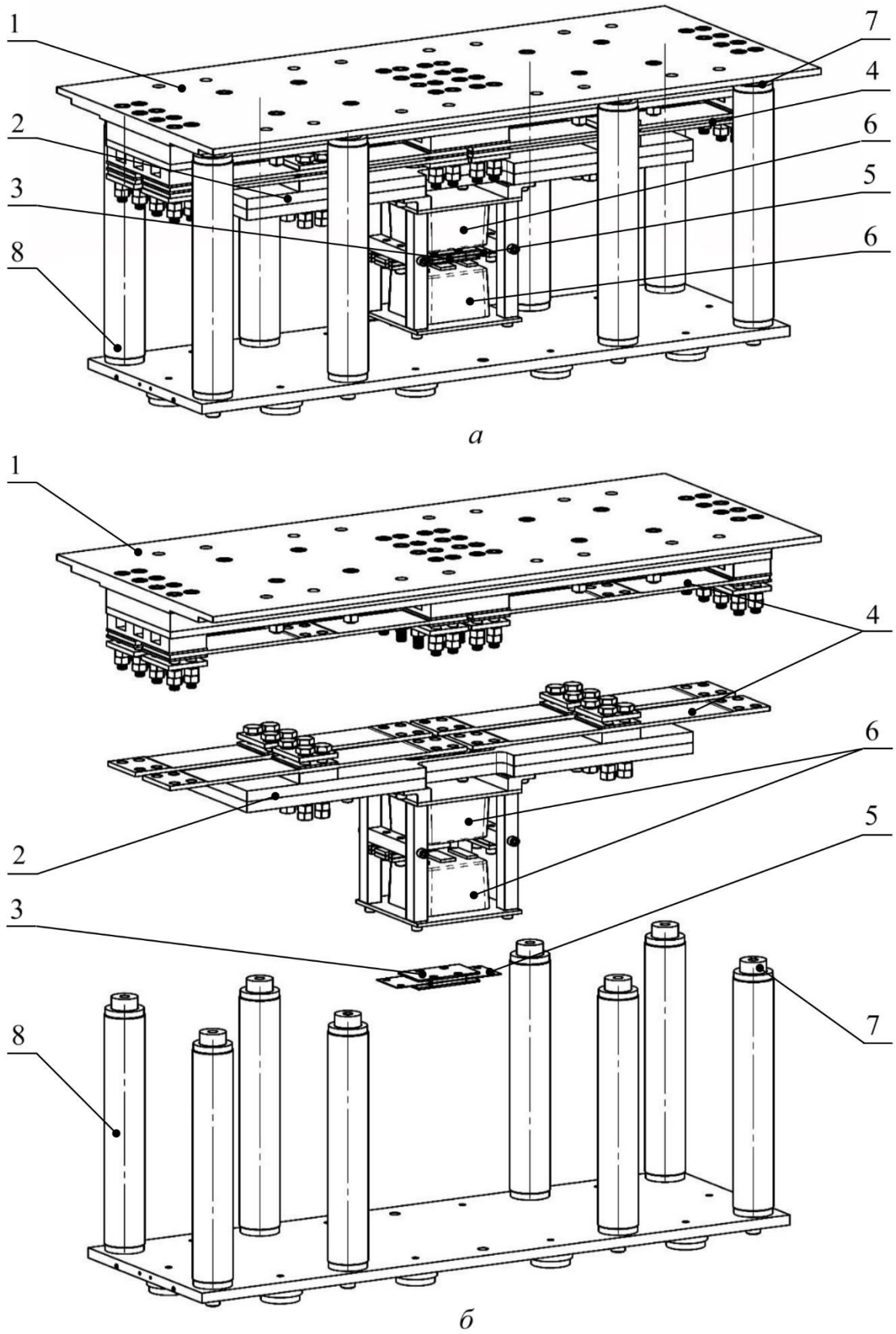


Ізраїльські винахідники Jakhin B. Popper та Kyriat Motzkin [142] запропонували вібраційний лоток, в якого силове збудження забезпечене з використанням двох синхронізованих дебалансних віброзбуджувачів 6, які розміщені на проміжній масі 2 і приводяться в рух від одного або ж двох електродвигунів. Робочий орган – активна маса 1. Кінематичне збудження коливань активної 1 та реактивної 3 мас забезпечується від проміжної маси 2 через пружні вузли 4 та 5 відповідно.

<p><b>8.</b></p> 	<p>Американські винахідники Peter T. Jones та Kennewick [153] запропонували вібраційний транспортер, який складається з робочої активної маси 1, що через похилі плоскі пружні елементи 4 з'єднана з проміжною 2, до якої через пружні елементи 5 кріпиться реактивна маса 3, на якій монтується дебалансний віброзбудувач 6, що і забезпечує силове збурення. На проміжній масі 2 розміщені віброізолятори 7, через які транспортер встановлюють на фундамент.</p>
<p><b>Кривошипно-шатунний привод</b></p>	
<p><b>9.</b></p> 	<p>Німецький патент [147], автором якого є Josef Wölz, демонструє тримасовий вібраційний сепаратор, в якого привод кривошипно-шатунного механізму 6 розміщено на проміжній масі 2, що збурює реактивну масу 1 від шатуна. Від маси 2 через важелі 8 та 7 послідовно приводяться в рух активна 3 та проміжна 2 маси. Попарно активна 3 та проміжна 2 маси, активна 3 та реактивна 1 маси з'єднані відповідно за допомогою плоских пружних вузлів 5 та 4.</p>

<p><b>10.</b></p> 	<p>Американці John M. Morris та Louisville [144] наводять схему вібраційного транспортера, в якого до робочого органу – активної маси 1 приєднаний кронштейн 8, що направляє коливальний рух реактивної маси 3. Привод кривошипно-шатунного механізму 7 розміщено на проміжній масі 2, що безпосередньо приводить в рух реактивну масу 3. Активна маса 1 зв'язана з проміжною через виті 4 й плоскі 5 пружні елементи, а з реактивною через пружний вузол 6. Саме через пружні вузли 4, 5 та 6 відбувається кінематичне збурення активної маси 1. В конструкції забезпечено зміну ексцентриситету в кривошипно-шатунному механізмі.</p>
---	---

З наведених конструкцій вібраційних машин (табл. 1.5) помітна тенденція до зменшення інерційного значення реактивної маси, що дозволяє їм ефективно використовувати енергоощадні міжрезонансні режими роботи. Підтвердженням цих слів є розробки [59, 61, 62], в яких експериментально та математично доведено вище сказані слова. Окремо варто відзначити тримасовий міжрезонансний вібраційний стіл, реалізований на базі високоефективної коливальної системи [57, 61, 65] (рис. 1.4). Він складається з активної маси 1, яка відіграє роль робочого органу, проміжної маси 2 та реактивної маси 3. Активна 1 та проміжна 2 маси з'єднані резонансним пружним вузлом 4, а проміжна 2 та реактивна 3 – пружним вузлом 5.



**Рис. 1.4.** Вібраційний тримасовий міжрезонансний вібраційний стіл:  
 а – твердотіла модель; б – вигляд з рознесеними модулями

Силове збурення безпосередньо прикладається до проміжної 2 та реактивної 3 мас і реалізується за двотактною схемою, за якої осердя з котушками 6 кріпляться до проміжної маси 2, а якорі – до реактивної. Активна маса 1 збурюється кінематично від проміжної 2 через пружні вузли 4. Вібраційний стіл розміщений на основі 8 через віброізолятори 7 у вигляді гумових вставок.

Згідно з технічними характеристиками інерційні параметри мас вібростола наступні: маса робочого органу (активна маса)  $m_1 = 91,1$  кг, проміжна маса  $m_2 = 41,5$  кг та реактивна маса  $m_3 = 0,243$  кг. Дана конструкція демонструє хороші показники ефективності функціонування, яскраво розкриваючи потенціал міжрезонансних тримасових вібраційних машин. Так, завдяки тому, що реактивна маса 3 становить лише  $m_3 = 0,243$  кг і є на два порядки меншою від інших, пружний вузол 5 також на два порядки відрізняється в меншу сторону по жорсткості відносно пружного вузла 4, – тримасова конструкція в 6,8 разів ефективніша порівняно з двомасовою. Тож чим менше значення реактивної маси  $m_3$ , тим вища ефективність функціонування системи, а якщо більш точно висловитися, то відносний приріст додаткового динамічного підсилення коливань [63]. Це збігається з результатами розрахунку (1.7).

Щоб пересвідчитися у вище сказаному, мною проведено моделювання тримасового вібраційного транспортера з направленими коливаннями [50]. Дане дослідження в черговий раз підтвердило, що для високоефективних конструкцій потрібно забезпечувати надлегку реактивну масу й надмалу жорсткість пружного вузла, який з'єднує реактивну масу з проміжною.

### **1.3. Шляхи вдосконалення тримасових міжрезонансних вібротранспортерів.**

#### **Формування ідеї та гіпотези подальших досліджень**

Аналіз конструкції тримасового міжрезонансного стола (рис. 1.4) узагальнює проведений аналіз сучасного стану перспективного вібраційного обладнання і дозволяє встановити подальший напрямок наукових досліджень по

підвищенню енергоощадності систем. Він вказує на те, що у високоефективних системах реактивна маса та жорсткість відповідного пружного вузла повинні бути надмалими. Такими властивостями може володіти лише гнучке тіло, тобто континуальна ділянка, яка оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри. Тому одним із шляхів по вдосконаленню міжрезонансних вібраційних машин є пошук підходів у синтезі нових структур, на основі яких можна буде розробити дієве високоефективне технологічне обладнання [64].

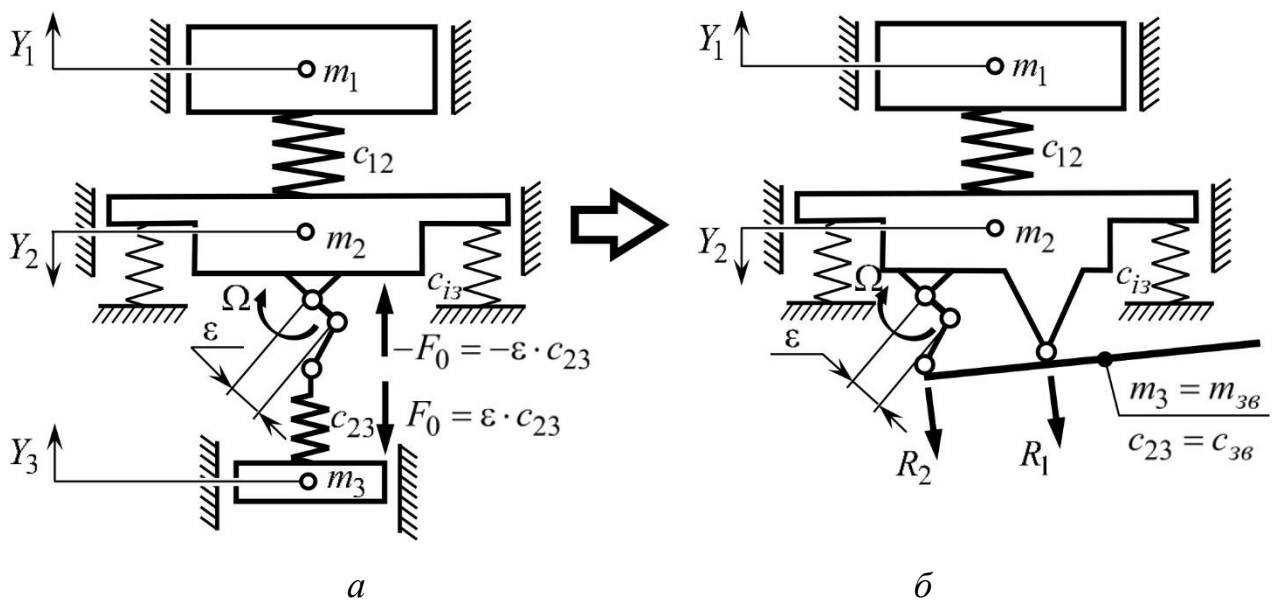
Тож *ідея*, що ймовірно обумовить подальший якісний розвиток енергоощадних міжрезонансних вібраційних машин та дозволить розв'язати поставлену науково-прикладну задачу, полягає у наступному: синергія дискретних та континуальних коливальних систем здатна надати гібридним структурам вібраційних машин нових властивостей по ефективності функціонування.

*Гіпотеза*, що забезпечує реалізацію даної ідеї, зводиться до введення в дискретну коливальну систему тіла з розподіленими параметрами (континуальної ділянки у вигляді стержня, пластини тощо), яке одночасно наділене надлегкими інерційними та надмалими жорсткісними параметрами, що ймовірно дасть змогу ефективно забезпечувати високоефективні режими роботи вібраційних машин, реалізуючи вузьку міжрезонансну зону з надвисокими коефіцієнтами динамічності.

Вище наведені недоліки систем з електромагнітним та дебалансним приводами примушують задуматися над використанням інших типів збурення, до яких можна віднести кривошипно-шатунний. Проте, він не є розповсюджений, більш того, мало апробований у тримасових міжрезонансних коливальних системах і в основному використовується у двомасових.

Передові розробки вібраційного обладнання, в яких застосовують коливальні системи з керованим кривошипно-шатунним приводом [148] належать Jr. Robert, M. Carrier та John M. Morris (одна з конструкцій John M. Morris наведена у табл. 1.5, позиція 10), що дозволяє окреслити наступний крок у розвитку міжрезонансних вібраційних машин, які використовують надлегку третю масу та кривошипно-шатунний механізм для її збурення.

Тож, для практичного втілення закладених ідеї та гіпотези, запропоновано структурну схему гібридної міжрезонансної вібраційної машини (рис 1.5, б), де замість реактивної маси та відповідного їй пружного вузла введено континуальну ділянку (стержень), апріорі наділений відповідними інерційними та жорсткісними параметрами. Подана схема міжрезонансної дискретно-континуальної коливальної системи потребує, як і в дискретних системах, встановленню п'яти визначальних параметрів: інерційних параметрів трьох мас та жорсткостей двох пружних вузлів з відмінністю у тому, що реактивна маса та її відповідна жорсткість взаємопов'язані одним континуальним тілом.



**Рис. 1.5.** Принципова схема дискретної (а) та дискретно-континуальної (гібридної) (б) міжрезонансних коливальних систем

Тому подальші наукові дослідження у дисертаційній роботі спрямовані саме у напрямку теоретико-експериментального обґрунтування міжрезонансної гібридної вібраційної машини, принципова схема якої наведена на рис. 1.5, б. Вагома частка досліджень припадатиме на математичний опис фізичних процесів, що протікають в континуальній ділянці під час її вимушених коливань, та на поєднанні математичних моделей дискретної частини коливальної системи з континуальною ділянкою.

## 1.4. Висновки до першого розділу

1. В результаті проведеного аналізу існуючих коливальних систем вібраційних машин вкотре було доведено, що одно- та двомасові коливальні системи не здатні реалізовувати високоефективні режими роботи, притаманні міжрезонансним.

2. Встановлено, що незважаючи на вагомі переваги міжрезонансних систем, їх широке поширення обмежене низкою чинників, основний з яких є те, що реактивна маса та жорсткість відповідного пружного вузла повинні бути надлегкими та надмалими (більш ніж в 10 разів меншими порівняно з рештою відповідних параметрів системи). Це утруднює забезпечення усталених режимів роботи в системах з такими параметрами незалежно від типу збурення.

3. Припущено, що подальший якісний розвиток міжрезонансних вібраційних машин можливий лише в поєднанні дискретних коливальних систем з легкими континуальними ділянками, синергія яких надасть їм нових властивостей по ефективності функціонування. Надлегку реактивну масу та надмалу жорсткість відповідного пружного вузла може замінити лише гнучке тіло, тобто континуальна ділянка, яка оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри.

4. Встановлено, що реалізація припущень можлива лише застосовуючи керований кривошипно-шатунний механізм у якості приводу. Попередньо запропоновано структурну схему механічної коливальної системи вібраційної машини з континуальною ділянкою (тілом з розподіленими параметрами, найбільш ймовірно стержнем).

5. Тож для повноцінного синтезу енергоощадних дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин з керованим кривошипно-шатунним приводом необхідно розв'язати наступні науково-прикладні завдання, що є деяким уточненням завдань, сформованих у вступі до дисертації:

– окреслити методологію наукових досліджень, зосередивши увагу на континуальних ділянках коливальних систем;



- виконати конструктивний вибір форми континуальної ділянки, обґрунтувати її схему кріплення. Провести її розрахунок;
- обґрунтувати методику розрахунку інерційно-жорсткісних, силових та частотних параметрів дискретно-континуальної системи, яка дозволить синтезувати міжрезонансні системи вібраційних машин із забезпеченням заданої ефективності функціонування – мінімуму енергоспоживання з умови технологічної стійкості у міжрезонансних режимах;
- сформулювати математичну модель гібридної системи, що адекватно пов'яже континуальну ділянку з дискретною системою. Провести аналіз руху коливальних мас. Встановити характер поведінки коливальної системи у міжрезонансних режимах роботи.
- розробити конструкцію експериментальної установки, провести перевірку технічних характеристик, порівняти отримані результати з теоретичними. Встановити достовірність підходу при розрахунках та його адекватність;
- узагальнити отримані результати з їх перспективою застосування у виробництві та навчальному процесі.

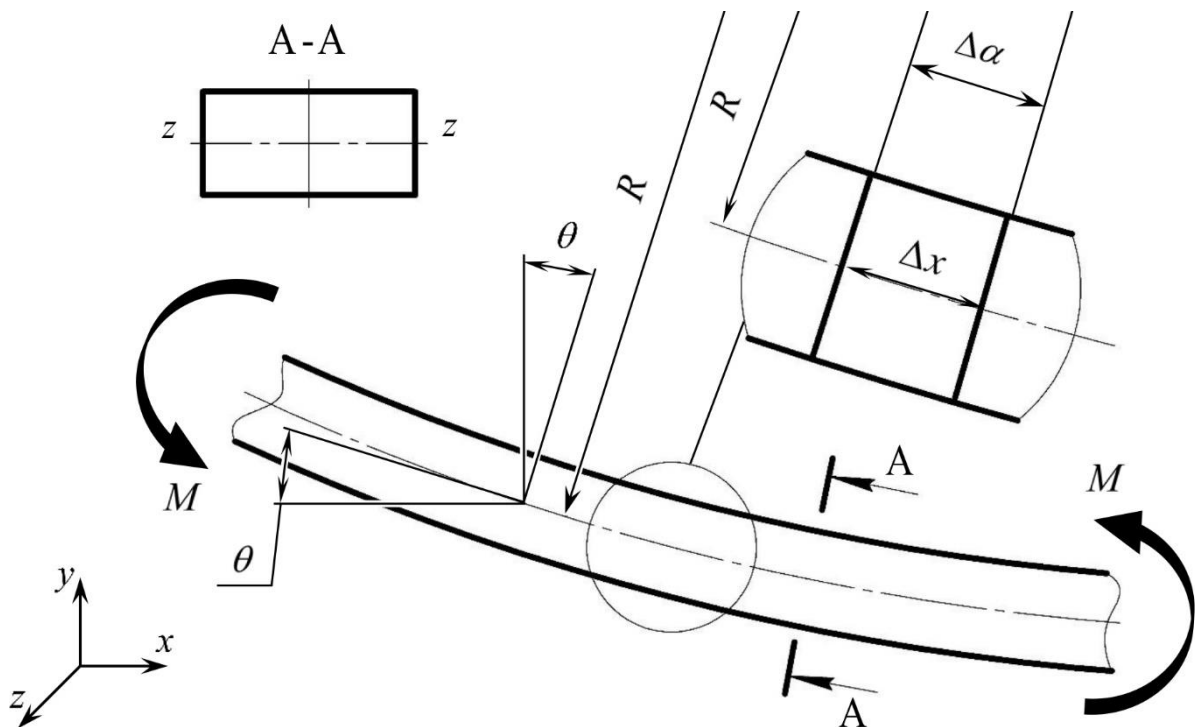
## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДОЛОГІЯ ДИСЕРТАЦІЙНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*В дисертаційних дослідженнях застосовуються фундаментальні методи механіки. Найбільш складною задачею є розрахунок континуальної ділянки (пружного стержня), як тіла з розподіленими параметрами. Тому окреслено основні класичні підходи (методи, аналітичні вирази), які застосовуватимуться в даних дослідженнях. Нижче наведений матеріал є необхідний для встановлення базових аналітичних залежностей та для розуміння фізики процесу коливань стержня, що дасть методологічне підґрунтя дисертаційним дослідженням та забезпечить прозорість викладання. Окреслено відому методику розрахунку міжрезонансних коливальних систем.*

#### 2.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі стержня

Розглянемо виокремлену ділянку стержня (рис. 2.1) під дією згинальних моментів  $M$ .



**Рис. 2.1.** Деформований стан ділянки стержня

Відоме рівняння з опору матеріалів, що встановлює згинальний момент, який діє в поперечному перерізі стержня має вигляд [10, 16, 95]:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ_z}, \quad (2.1)$$

де  $R$  – радіус кривої згину стержня (радіус кривизни);

$M$  – згинальний момент, що діє в поперечному перерізі стержня;

$E$  – модуль пружності I-го роду;

$J_z$  – момент інерції поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії перерізу (головної центральної осі  $z$  перерізу);

$EJ_z$  – жорсткість поперечного перерізу стержня.

Рівняння (2.1), як функція від координати  $x$ , переписеться як:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{M(x)}{EJ_z}, \quad (2.2)$$

де  $R(x)$ ,  $M(x)$ ,  $J_z(x)$  – функції відповідних параметрів від координати  $x$ .

Нормальне напруження в поперечному перерізі стержня встановлюватиметься згідно формули Нав'є [95]:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z}, \quad (2.3)$$

де  $y$  – відстань від точки поперечного перерізу до нейтральної лінії поперечного перерізу. Вираз (2.3), як функція від координати  $x$ , набуде вигляду:

$$\sigma(x) = \frac{M(x) \cdot y}{J_z(x)}. \quad (2.4)$$

З рис. 2.1 можна записати рівність:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{R} \quad \text{або} \quad d\alpha = \frac{dx}{R}. \quad (2.5)$$

При згині безкінечно малої ділянки стержня довжиною  $\Delta x$ , елементарна робота  $\Delta A$  згинального моменту  $M$  на елементарному кутовому переміщенні  $\Delta\alpha$  буде [10]:

$$\Delta A = M \Delta \alpha / 2. \quad (2.6)$$

Підставляючи  $\Delta \alpha$  з рівняння (2.5) в рівняння (2.6), отримаємо:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \frac{M^2 \Delta x}{EJ_z}. \quad (2.7)$$

На всій довжині пружного стержня (вздовж координати  $x$ ) сумарна робота, а отже і затрачена потенціальна енергія  $\Pi_c$ , становитиме:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2 \Delta x}{EJ_{zi}}, \quad (2.8)$$

де  $M_i$  – момент в  $i$ -ій точці по координаті  $x$ ;

$J_{zi}$  – момент інерції поперечного перерізу стержня в  $i$ -ій точці по координаті  $x$ .

Переходячи до інтегрування виразу (2.8), отримаємо:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EJ_z(x)} dx. \quad (2.9)$$

Математична залежність між радіусом кривизни  $R$  нейтральної лінії стержня і координатами  $x$  і  $y$  її точок має вигляд [10, 16, 95]:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\frac{d^2 w(x)}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2\right]^3}}, \quad (2.10)$$

де  $w(x)$  – зміщення поперечного перерізу стержня у вертикальному напрямку (вздовж осі  $y$ ) залежно від координати  $x$  (по довжині пружного стержня).

Прирівнявши праві частини виразів (2.10) та (2.2), отримаємо диференціальне рівняння зігнутої осі стержня (диференціальне рівняння пружної лінії):

$$\frac{\frac{d^2 w(x)}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M(x)}{EJ_z(x)}. \quad (2.11)$$

Величина  $\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 = \text{tg}^2\theta(x)$  є малою. Тому рівняння (2.11) можна переписати як:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z(x)}. \quad (2.12)$$

З рівняння (2.12) можна встановити, що:

$$M(x) = EJ_z(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (2.13)$$

Тангенс кута  $\theta$ , утвореного дотичною з кривою нейтральної осі стержня та віссю  $x$  (рис. 2.1), рівний [10, 95]:

$$\text{tg}\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (2.14)$$

Кут  $\theta$  малий, тому (2.14) перепишемо у вигляді:

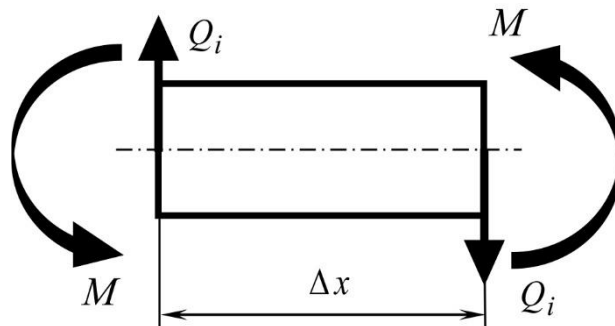
$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (2.15)$$

Поперечна сила  $Q$ , що діє на елементарній ділянці  $\Delta x$ , пов'язана з моментом  $\Delta M$  (рис. 2.2) так:

$$\Delta M = Q_i \Delta x \quad \text{або} \quad \frac{dM(x)}{dx} = Q(x). \quad (2.16)$$

Використовуючи (2.13), вираз (2.16) перепишеться як:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ EJ_z(x) \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right]. \quad (2.17)$$



**Рис. 2.2.** Дія поперечної сили та моменту на елементарну ділянку стержня

Враховуючи, що поперечний переріз стержня по довжині постійний, вирази (2.13) та (2.17) відповідно для згинального моменту та поперечної сили переписуються як:

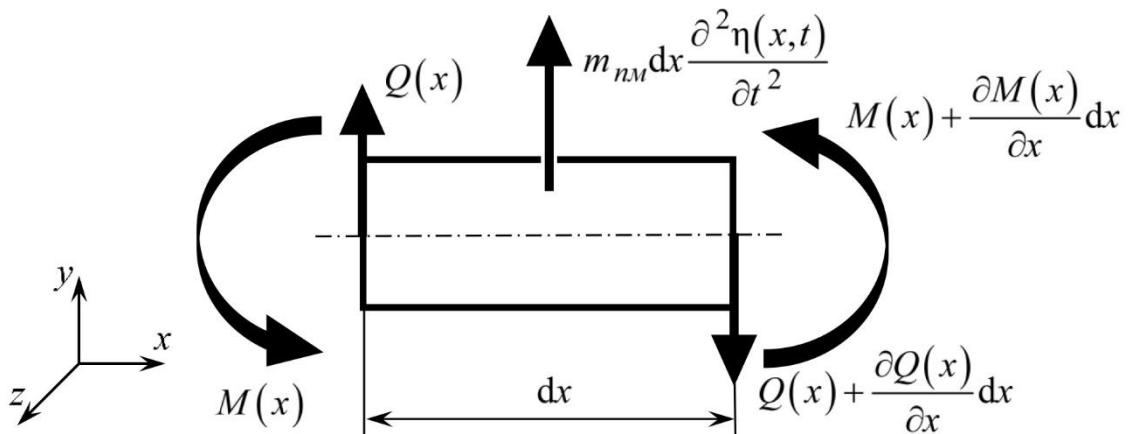
$$M(x) = EJ_z \frac{d^2 w(x)}{dx^2}; \quad (2.18)$$

$$Q(x) = EJ_z \frac{d^3 w(x)}{dx^3}. \quad (2.19)$$

## 2.2. Диференціальне рівняння згинальних коливань стержня.

### Його точний розв'язок з використанням функцій Крилова

Розглянемо елементарну ділянку стержня довжиною  $dx$  (рис. 2.3) [95].



*Рис. 2.3. Рівноважний стан елементарної ділянки стержня*

Елементарна ділянка  $dx$  перебуватиме в рівновазі, коли сума всіх сил (по вертикалі) рівна нулю. Тобто:

$$Q(x) - \left( Q(x) + \frac{\partial Q(x)}{\partial x} dx \right) + m_{nm} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} dx = 0, \quad (2.20)$$

де  $Q(x)$  – функція поперечної сили по довжині пружного стержня;

$m_{nm}$  – маса одиниці довжини стержня (маса погонного метра);

$$m_{nm} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.21)$$

– інерційна сила, що діє на елементарну ділянку;

$$\eta(x,t) = w(x) \sin \omega t \quad (2.22)$$

– функція поперечного зміщення пружного стержня за двома змінними: по довжині  $x$  та за часом  $t$ . Враховуючи вираз (2.16), де

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = Q(x), \quad (2.23)$$

вираз (2.20) перепишеться як:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + m_{nm} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} dx = 0. \quad (2.24)$$

Відомо, що згинальний момент  $M(x)$  для нашого випадку, використовуючи вираз (2.18), можна подати у вигляді:

$$M(x) = EJ_z \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Підставивши його в (2.24), отримаємо диференціальне рівняння поперечних (згинальних) коливань стержня:

$$EJ_z \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} + m_{nm} \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.26)$$

або

$$c_v^2 \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.27)$$

де

$$c_v = \sqrt{\frac{EJ_z}{m_{nm}}} \quad (2.28)$$

– швидкість поширення хвилі деформації по стержню.

Розв'язок рівняння (2.26) шукається у вигляді (2.22) [4, 100]. Підставляючи (2.22) в (2.26), отримаємо звичайне диференціальне рівняння від функції  $w(x)$ :

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \xi^4 w(x) = 0, \quad (2.29)$$

в якому введено наступне позначення:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{m_{лм} \omega^2}{EJ_z}}, \quad (2.30)$$

де  $\omega$  – колова частота коливань стержня.

Рівняння (2.29) можна подати у вигляді:

$$w^{IV}(x) - \xi^4 w(x) = 0, \quad (2.31)$$

розв'язком якого будуть чотири незалежних часткових рішення:

$$\cos(\xi x), \sin(\xi x), \operatorname{ch}(\xi x), \operatorname{sh}(\xi x), \quad (2.32)$$

загальний інтеграл яких [4, 24, 100]:

$$w(x) = A \cos(\xi x) + B \sin(\xi x) + C \operatorname{ch}(\xi x) + D \operatorname{sh}(\xi x), \quad (2.33)$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  та  $D$  – чотири довільні постійні, що підбираються так, щоб для функції (2.33) виконувались крайові умови, тобто умови закріплення кінців стержня (ділянок стержня). Для кожного кінця (ділянки) стержня можна вказати дві граничні умови (табл. 2.1).

В багатьох випадках зручно розв'язок рівняння (2.31) шукати у вигляді:


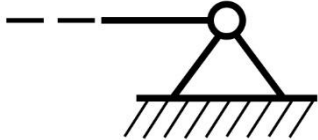
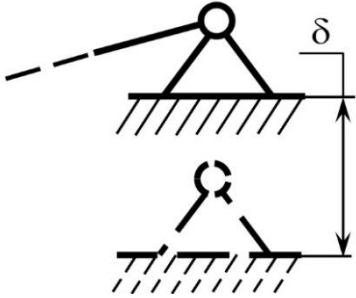

$$w(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + C \cdot U(\xi x) + D \cdot V(\xi x), \quad (2.34)$$

де  $S(\xi x)$ ,  $T(\xi x)$ ,  $U(\xi x)$  і  $V(\xi x)$  – комбінації кругових і гіперболічних функцій, які називаються функціями О. М. Крилова:

$$\begin{aligned} S(\xi x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\xi x) + \cos(\xi x)); \\ T(\xi x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\xi x) + \sin(\xi x)); \\ U(\xi x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\xi x) - \cos(\xi x)); \\ V(\xi x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\xi x) - \sin(\xi x)). \end{aligned} \quad (2.35)$$



Схеми кріплення кінців стержня та їх граничні умови

№	Схема закріплення кінця	Граничні умови
1	<p style="text-align: center;">Вільний</p> 	<p>На вільному кінці присутні поперечні переміщення <math>w(x)</math> та кут повороту <math>\theta(x) = dw(x)/dx</math> (2.15). Тож <math>w(x) \neq 0</math> та <math>dw(x)/dx \neq 0</math>. Момент <math>M(x) = EJ_z \frac{d^2w(x)}{dx^2}</math> (2.18) та поперечна сила <math>Q(x) = EJ_z \frac{d^3w(x)}{dx^3}</math> (2.19) дорівнюють 0. Тож умовами такого кріплення кінця є <math>\frac{d^2w(x)}{dx^2} = 0</math>; <math>\frac{d^3w(x)}{dx^3} = 0</math>.</p>
2	<p style="text-align: center;">Шарнірно опертий</p> 	<p>Поперечне переміщення <math>w(x)</math> та момент <math>M(x) = EJ_z \left( d^2w(x)/dx^2 \right)</math> дорівнюють нулю, тобто умовами такого кріплення кінця є: <math>w(x) = 0</math>; <math>d^2w(x)/dx^2 = 0</math>.</p>
3	<p style="text-align: center;">Шарнірно опертий з переміщенням опори</p> 	<p>Поперечне переміщення <math>w(x) = \delta</math>, а момент <math>M(x) = EJ_z \frac{d^2w(x)}{dx^2}</math> дорівнює нулю, тобто умовами такого кріплення кінця є: <math>w(x) = \delta</math>; <math>d^2w(x)/dx^2 = 0</math>.</p>
4	<p style="text-align: center;">Жорстко зацемлений</p> 	<p>Поперечне переміщення <math>w(x)</math> та кут повороту <math>\theta(x) = dw(x)/dx</math> відсутні. Тож умовами кріплення є: <math>w(x) = 0</math>, <math>dw(x)/dx = 0</math>.</p>

Послідовні похідні по координаті  $x$  функцій (2.35) визначаються наступними залежностями [100]:

$$\begin{aligned}
 S'(\xi x) &= \xi V(\xi x); & S''(\xi x) &= \xi^2 U(\xi x); & S'''(\xi x) &= \xi^3 T(\xi x); \\
 T'(\xi x) &= \xi S(\xi x); & T''(\xi x) &= \xi^2 V(\xi x); & T'''(\xi x) &= \xi^3 U(\xi x); \\
 U'(\xi x) &= \xi T(\xi x); & U''(\xi x) &= \xi^2 S(\xi x); & U'''(\xi x) &= \xi^3 V(\xi x); \\
 V'(\xi x) &= \xi U(\xi x); & V''(\xi x) &= \xi^2 T(\xi x); & V'''(\xi x) &= \xi^3 S(\xi x).
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

При значенні  $x = 0$  залежності (2.36) набувають вигляду [4]:

$$\begin{aligned}
 S(0) &= 1; & S'(0) &= 0; & S''(0) &= 0; & S'''(0) &= 0; \\
 T(0) &= 0; & T'(0) &= 1; & T''(0) &= 0; & T'''(0) &= 0; \\
 U(0) &= 0; & U'(0) &= 0; & U''(0) &= 1; & U'''(0) &= 0; \\
 V(0) &= 0; & V'(0) &= 0; & V''(0) &= 0; & V'''(0) &= 1.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

З використанням наведеного вище методу розрахунку можна встановити власні частоти стержня, його прогини  $w(x)$  при вимушених коливаннях.

### 2.3. Встановлення власних частот стержня методом Релея-Рітца

Метод базується на тому, що кінетична енергія  $K_c$  та потенціальна  $\Pi_c$  пружного стержня однакові [4, 16, 95]. Тобто:

$$K_c = \Pi_c. \tag{2.38}$$

Кінетична енергія  $K_c$  стержня складається з кінетичної енергії  $K_{cn}$  від переміщення по координаті  $y$  та від повертання  $K_{co}$  на кут  $\theta$  (рис. 2.1). Тому:

$$K_c = K_{cn} + K_{co}, \tag{2.39}$$

де 
$$K_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} v(x)^2 dx; \tag{2.40}$$

$$K_{co} = \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) v_k(x)^2 dx, \tag{2.41}$$

в яких  $v(x)$  та  $v_k(x)$  – лінійна та кутова швидкість переміщення ділянки стержня, як функція від координати  $x$ ;

$J_{cn}$  – момент інерції одиниці довжини стержня (погонний момент інерції);

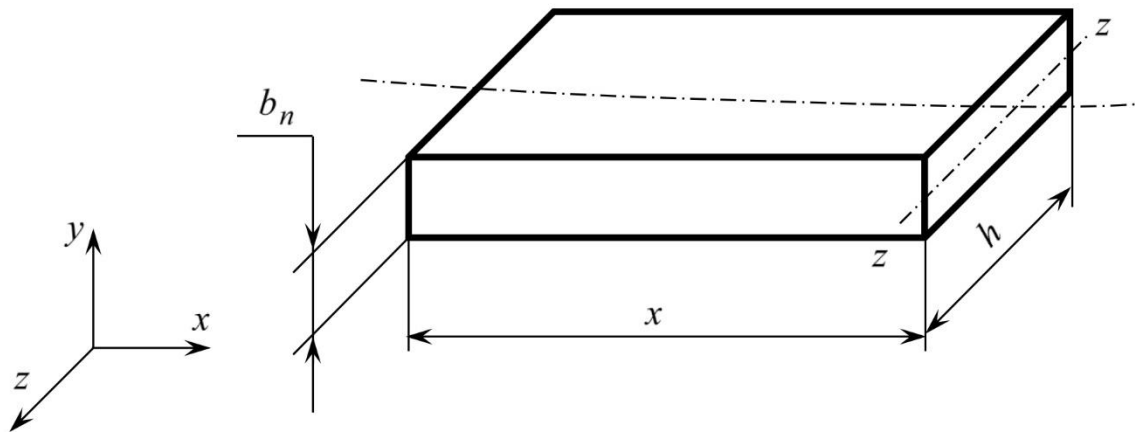
$m_{nm}$  – погонна маса, яка визначається як (рис. 2.4):

$$m_{nm} = \rho h b_n, \quad (2.42)$$

де  $\rho$  – питома маса для сталі;

$h$  – ширина пружного стержня;

$b_n$  – товщина пружного стержня.



**Рис. 2.4.** Ділянка стержня з геометричними параметрами

Якщо закон руху стержня гармонійний, як прийнято в (2.22), то:

$$v(x) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \omega w(x) \sin \omega t. \quad (2.43)$$

Оперуючи амплітудними значеннями, вираз (2.43) запишеться як:

$$v(x) = \omega w(x). \quad (2.44)$$

За аналогією до виразу (2.44), кутова швидкість провертання ділянки стержня становить:

$$v_k(x) = \omega \theta(x). \quad (2.45)$$

Підставляючи (2.15) в (2.45), отримаємо:

$$v_k(x) = \omega \frac{dw(x)}{dx}. \quad (2.46)$$

Підставляючи (2.44) в (2.40), кінетична енергія стержня  $K_{cn}$  від переміщення ділянки стержня по координаті  $x$  визначатиметься як:

$$K_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} \omega^2 w(x)^2 dx. \quad (2.47)$$

Підставляючи (2.46) в (2.41), кінетична енергія стержня  $K_{co}$  від провертання на кут  $\theta(x)$  запишеться у вигляді:

$$K_{co} = \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) \omega^2 \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (2.48)$$

де  $J_{cn}(x)$  – погонний момент інерції, як функція від координати  $x$ , відносно осі  $z - z$  (рис. 2.4). З використанням теореми Штейнера [95]:

$$J_{cn}(x) = \frac{\rho h b_n}{12} (x^2 + b_n^2) + \frac{\rho h b_n}{4} x^2, \quad (2.49)$$

або спрощено, розглядаючи тіло як стержень:

$$J_{cn}(x) = \frac{\rho h b_n}{3} x^2 = \frac{m_{nm}}{3} x^2. \quad (2.50)$$

Підставляючи вирази (2.47) та (2.48) в (2.39), повна кінетична енергія руху стержня становить:

$$K_c = \frac{1}{2} \int_0^L m_{nm} \omega^2 w(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L J_{cn}(x) \omega^2 \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.51)$$

Потенціальна енергія зігнутої осі стержня  $\Pi_c$  складається із потенціальної енергії від згину  $\Pi_{c3}$  та зсуву в шарах  $\Pi_{c\delta}$ :

$$\Pi_c = \Pi_{c3} + \Pi_{c\delta}. \quad (2.52)$$

Згідно [4, 16, 94, 95] потенціальна енергія  $d\Pi_{c3}$  від згину елементарної ділянки має вигляд:

$$d\Pi_{c3} = \frac{M(x) d\alpha}{2}. \quad (2.53)$$

З виразу (2.5) відомо, що  $d\alpha = dx / R(x)$ . Підставляючи у цей вираз значення  $R(x)$ , встановлене з (2.2), отримаємо:

$$d\alpha = \frac{M(x)}{EJ_z} dx. \quad (2.54)$$

Підставляючи (2.54) в (2.53), маємо:

$$d\Pi_{c3} = \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EJ_z} dx. \quad (2.55)$$

Тому загальна енергія від згину пружного стержня буде:

$$\Pi_{c3} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EJ_z} dx. \quad (2.56)$$

Враховуючи вираз (2.13), вираз (2.56) переписеться як:

$$\Pi_{c3} = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_z \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.57)$$

Потенціальна енергія від зсуву в шарах стержня становить [16]:

$$\Pi_{c\partial} = \frac{1}{2} \int_0^L k_y \frac{Q(x)^2}{GF_c} dx, \quad (2.58)$$

де  $G$  – модуль пружності II-го роду;

$F_c$  – площа поперечного перерізу стержня (постійна по довжині стержня);

$Q(x)$  – розподіл поперечних сил по довжині стержня;

$k_y$  – коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу [10].

Враховуючи вираз (2.19), формула (2.58) переписеться у вигляді:

$$\Pi_{c\partial} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \left( \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (2.59)$$

Тож сумарна потенціальна енергія (2.52), враховуючи (2.57) та (2.59):

$$\Pi_c = \frac{1}{2} EJ_z \int_0^L \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (2.60)$$

Прирівнявши кінетичну енергію  $K_c$  стержня (вираз (2.51)) та його потенціальну енергію  $\Pi_c$  (вираз (2.60)):

$$\begin{aligned}
& \frac{m_{nm}\omega^2}{2} \int_0^L w(x)^2 dx + \frac{\omega^2}{2} \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx = \\
& = \frac{EJ_z}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3w(x)}{dx^3} \right)^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

власна частота  $\omega_{pp}$  коливань стержня визначається як:

$$\omega_{pp} = \sqrt{\frac{EJ_z \int_0^L \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3w(x)}{dx^3} \right)^2 dx}{m_{nm} \int_0^L w(x)^2 dx + \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx}}. \tag{2.62}$$

#### 2.4. Методологія розрахунку дискретної тримасової міжрезонансної механічної коливальної системи вібраційної машини

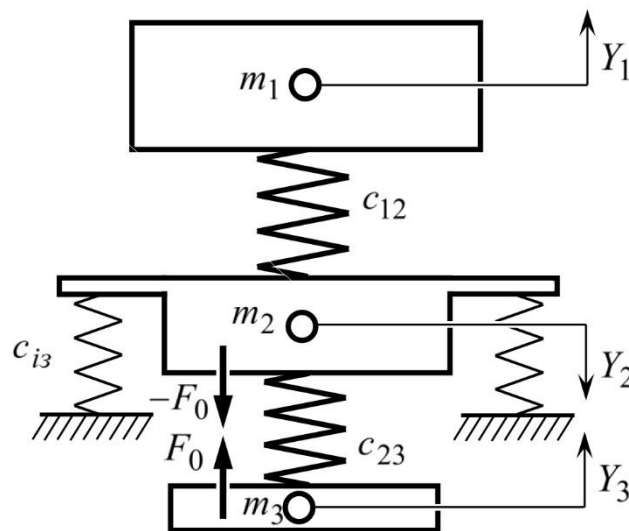
В результаті попереднього аналізу виявлено, що розрахунок міжрезонансних дискретно-континуальних коливальних систем, застосовуючи теорію синфазних коливань [62, 65] (див. п. 1.1.4), непридатний для жорсткого збурення проміжної маси та континуальної ділянки, як для нашого випадку в системах з кривошипно-шатунним приводом. Розподіл інерційно-жорсткісних параметрів згідно цієї теорії такий, що гібридна міжрезонансна система не може існувати. Умовно зведена маса континуальної ділянки не може перебувати в синфазному русі з проміжною масою. Тому за основу взято теорію несинфазних коливань [53, 65], що виявилася придатною для розрахунку.

Розглянемо алгоритм розрахунку дискретної тримасової механічної коливальної системи (рис. 2.5) [53, 65], де присутні активна, проміжна та реактивна маси з інерційними параметрами відповідно  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$ , що здійснюють прямолінійні коливання вздовж вертикальної осі  $y$  за узагальненими координатами відповідно  $y_1$ ,  $y_2$  та  $y_3$ . Активна маса приводиться в рух завдяки кінематичному збуренню від проміжної маси. Збурення вимушених коливань відбувається за

рахунок двох взаємопов'язаних зусиль  $F_0$  та  $-F_0$ , що прикладаються до проміжної та реактивної мас. Активна маса  $m_1$  з проміжною масою  $m_2$  з'єднані пружним вузлом жорсткістю  $c_{12}$ , а проміжна маса  $m_2$  з реактивною масою  $m_3$  відповідно з'єднана пружним вузлом жорсткістю  $c_{23}$ . Механічна коливальна система встановлена на фундамент через віброізолятори жорсткістю  $c_{i3}$ , які кріпляться до проміжної маси (впливом віброізоляторів на систему нехтуємо).

Система диференціальних рівнянь для такої тримасової коливальної системи, в якій силове збурення буде відбуватися вздовж осі  $y$ , набуде вигляду [65]:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + c_{12}(y_1 - y_2) = 0; \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + c_{12}(y_2 - y_1) + c_{23}(y_2 - y_3) = -F_0 \cdot \sin \omega t; \\ m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} + c_{23}(y_3 - y_2) = F_0 \cdot \sin \omega t. \end{cases} \quad (2.63)$$



*Рис. 2.5. Принципова схема дискретної тримасової міжрезонансної механічної коливальної системи вібраційної машини*

Користуючись загальними методами розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.63) [17, 25, 29], аналітичні вирази руху мас за трьома незалежними

ступенями вільності шукаємо у вигляді  $y_1 = Y_1 e^{i\omega t}$ ,  $y_2 = Y_2 e^{i\omega t}$  та  $y_3 = Y_3 e^{i\omega t}$ , де  $Y_1, Y_2, Y_3$  – амплітудні значення лінійних вимушених коливань відповідно за узагальненими координатами  $y_1, y_2$  та  $y_3$ . Підставляючи ці вирази в (2.63) і скоротивши в кожній частині системи рівнянь член  $e^{i\omega t}$ , отримаємо рівняння в амплітудних значеннях, які описують рух системи в усталених режимах.

У матричному записі за амплітудами коливань мас це рішення матиме вигляд:

$$X = C^{-1} \cdot P, \quad (2.64)$$

де  $X$  – матриця-стовпець невідомих (матриця переміщень);

$C^{-1}$  – матриця коефіцієнтів при невідомих (матриця жорсткості);

$P$  – матриця-стовпець сил збурення.

Розписавши рівняння (2.64), отримаємо [53]:

$$\begin{bmatrix} c_{12} - m_1 \omega^2 & -c_{12} & 0 \\ -c_{12} & c_{12} + c_{23} - m_2 \omega^2 & -c_{23} \\ 0 & -c_{23} & c_{23} - m_3 \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Визначник матриці коефіцієнтів рівняння (2.65) рівний:

$$\begin{aligned} \Delta_m = & c_{23}^2 (c_{12} - m_1 \omega^2) + c_{12}^2 (c_{23} - m_3 \omega^2) - (c_{12} - m_1 \omega^2) \times \\ & \times (c_{12} + c_{23} - m_2 \omega^2) (c_{23} - m_3 \omega^2). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Вирази для амплітуд коливань мас відповідно активної  $Y_1$ , проміжної  $Y_2$  та реактивної  $Y_3$  в усталених режимах роботи, як розв'язок системи (2.65), зведуться до наступних залежностей:

$$Y_1 = \frac{-F_0 c_{12} m_3 \omega^2}{\Delta_m}; \quad (2.67)$$

$$Y_2 = \frac{-F_0 (c_{12} - m_1 \omega^2) m_3 \omega^2}{\Delta_m}; \quad (2.68)$$



$$Y_3 = \frac{-F_0 \left[ c_{12}^2 - (c_{12} - m_1 \omega^2)(c_{12} + c_{23} - m_2 \omega^2) + c_{23}(c_{12} - m_1 \omega^2) \right]}{\Delta_m}. \quad (2.69).$$

Формуючи характеристичне рівняння системи, прирівнявши (2.66) до нуля, можемо записати рівняння для знаходження жорсткості  $c_{12}$  через першу власну частоту коливань  $\Omega_{\epsilon 1}$ , а через другу  $\Omega_{\epsilon 2}$  – рівняння для знаходження значення жорсткості  $c_{23}$ :

$$\begin{cases} c_{12} = \frac{m_1 \Omega_{\epsilon 1}^2 \left[ m_2 m_3 \Omega_{\epsilon 1}^2 - c_{23} (m_2 + m_3) \right]}{m_3 \Omega_{\epsilon 1}^2 (m_1 + m_2) - c_{23} (m_1 + m_2 + m_3)}; \\ c_{23} = \frac{m_3 \Omega_{\epsilon 2}^2 \left[ m_1 m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2 - c_{12} (m_1 + m_2) \right]}{m_1 \Omega_{\epsilon 2}^2 (m_2 + m_3) - c_{12} (m_1 + m_2 + m_3)}. \end{cases} \quad (2.70).$$

Розв'язуючи (2.70) як систему рівнянь, вирази для встановлення значень жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$  набудуть вигляду:

$$c_{12} = \frac{(m_2 + m_3) m_1 \Omega_{\epsilon 2}^2 \left[ (m_1 + m_2 + m_3) m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2 (\Lambda^2 - 1) \pm H \right]}{(m_1 + m_2 + m_3) \left[ (m_1 + m_2 + m_3) m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2 (\Lambda^2 - 1) + (\pm H - 2 m_1 m_3 \Omega_{\epsilon 2}^2) \right]}; \quad (2.71).$$

$$c_{23} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2 (\Lambda^2 - 1) \pm H}{2 \cdot (m_2 + m_3) (m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3, \quad (2.72).$$

$$\text{де} \quad \Lambda = \frac{\Omega_{\epsilon 1}}{\Omega_{\epsilon 2}}; \quad (2.73).$$

$$H = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3) m_2 \Omega_{\epsilon 2}^4 \left[ (m_1 + m_2 + m_3) m_2 (\Lambda^2 - 1)^2 - 4 m_1 m_3 \Lambda^2 \right]}. \quad (2.74).$$

Беручи до уваги умову, що інерційні параметри  $m_1$  та  $m_2$  забезпечуються конструктивно, параметр  $m_3$  встановлюємо з наступних міркувань: задавшись двома власними частотами  $\Omega_{\epsilon 1}$  та  $\Omega_{\epsilon 2}$  коливальної системи, маса  $m_3$  повинна бути такою, щоб система фізично могла існувати. Тобто, за відомих двох власних

частот  $\Omega_{\epsilon 1}$ ;  $\Omega_{\epsilon 2}$  і мас  $m_1$ ,  $m_2$ , встановивши інерційний параметр  $m_3$ , жорсткості  $c_{12}$  та  $c_{23}$  двох резонансних пружних вузлів, розрахунок яких проводиться з використанням виразів (2.71) та (2.72), повинні бути дійсними числами.

Комплексні жорсткості  $c_{12}$  та  $c_{23}$  можуть вийти тоді, коли підкореневий вираз  $[(m_1 + m_2 + m_3)m_2(\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1 m_3 \Lambda^2]$  із (2.74) буде від'ємним. Тому, перше критичне значення маси  $m_3$ , яке встановлює її верхнє граничне значення, визначаємо згідно умови:

$$(m_1 + m_2 + m_3)m_2(\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1 m_3 \Lambda^2 = 0. \quad (2.75)$$

Використовуючи (2.75), інерційний параметр маси  $m_3$  повинен визначатись з нерівності:

$$m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)(1 - \Lambda^2)^2}{m_2(1 - \Lambda^2)^2 - 4m_1 \Lambda^2}. \quad (2.76)$$

Від'ємні значення жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$  можуть вийти тоді, коли добуток  $[(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2(\Lambda^2 - 1) + (\pm H - 2m_1 m_3 \Omega_{\epsilon 2}^2)]$  в знаменнику виразу (2.71) для  $c_{12}$  буде від'ємним. Тому друге критичне значення маси  $m_3$ , яке встановлює її нижнє граничне значення, визначаємо згідно умови:

$$(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{\epsilon 2}^2(\Lambda^2 - 1) + (\pm H - 2m_1 m_3 \Omega_{\epsilon 2}^2) = 0. \quad (2.77)$$

Враховуючи (2.77) та вирази (2.73), (2.74) відповідно для  $H$  та  $\Lambda$ , маємо:

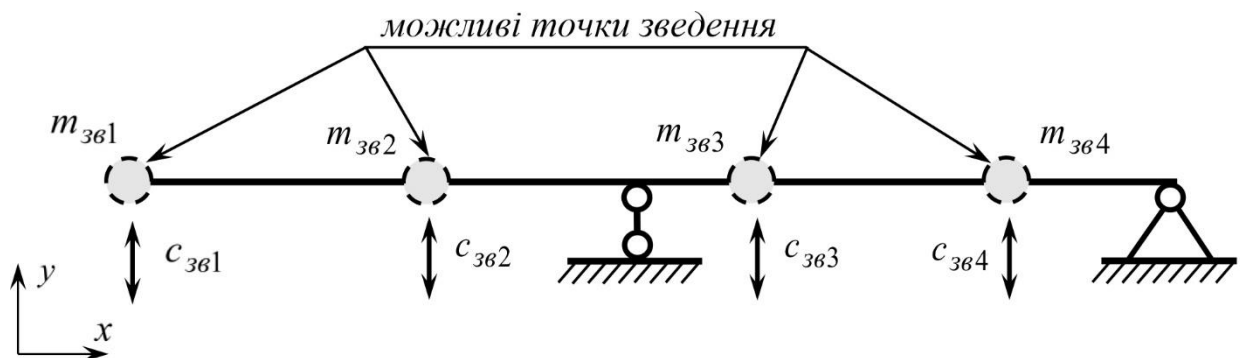
$$m_3 > 0. \quad (2.78)$$

Отже, за відомих двох власних частот  $\Omega_{\epsilon 1}$  і  $\Omega_{\epsilon 2}$  та двох мас  $m_1$ ,  $m_2$ , інерційне значення реактивної маси  $m_3$ , враховуючи (2.76) та (2.78), встановлюється (приймається) із наступного діапазону:

$$0 < m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)(1 - \Lambda^2)^2}{m_2(1 - \Lambda^2)^2 - 4m_1 \Lambda^2}. \quad (2.79)$$

## 2.5. Встановлення зведеної швидкостей стержня, що перебуває в коливальному русі

Перш ніж перейти до встановлення зведених жорсткостей та маси стержня, що перебуває в коливальному русі, необхідно знайти точку зведення – точку, в якій умовно зосереджуються інерційний та жорсткісний параметри стержня, які сприймаються коливальною системою в динаміці (рис. 2.6) [43].



*Рис. 2.6. Можливі розміщення точки зведення інерційно-жорсткісних параметрів стержня*

Точок зведення стержня може бути безліч. Для кожного випадку ми можемо знайти певне значення маси та жорсткості і ввести їх у дискретну модель. Проте постає питання, на скільки адекватні ці значення та чи дійсно саме їх сприймає система в динаміці під час коливального руху.

Наша гіпотеза полягає в тому, що дискретизована міжрезонансна коливальна система сприйматиме пружний елемент з розподіленими параметрами дискретно, саме відносно зведеної точки, яка проходить відносно зведеної швидкості стержня. Математично це можна пояснити так, що зведена швидкість буде рівний відношенню суми статичних моментів швидкостей кожної ділянки на суму швидкостей по всій довжині стержня.

В інтегральній формі для амплітудних значень, коли швидкість встановлюється згідно (2.44), точка зведення по координаті  $x$ , як зведена швидкість руху ділянок стержня, знаходитиметься згідно виразу (рис. 2.7):

$$X_{3\theta} = \frac{\omega X_{3\theta 1} \int_0^{L_1} w(x) dx + \omega X_{3\theta 2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \omega X_{3\theta 3} \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}{\omega \int_0^{L_1} w(x) dx + \omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \omega \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}, \quad (2.80)$$

де координати зведених швидкостей на лівій, середній та правій ділянках (рис. 2.7) відповідно шукаються згідно виразів:

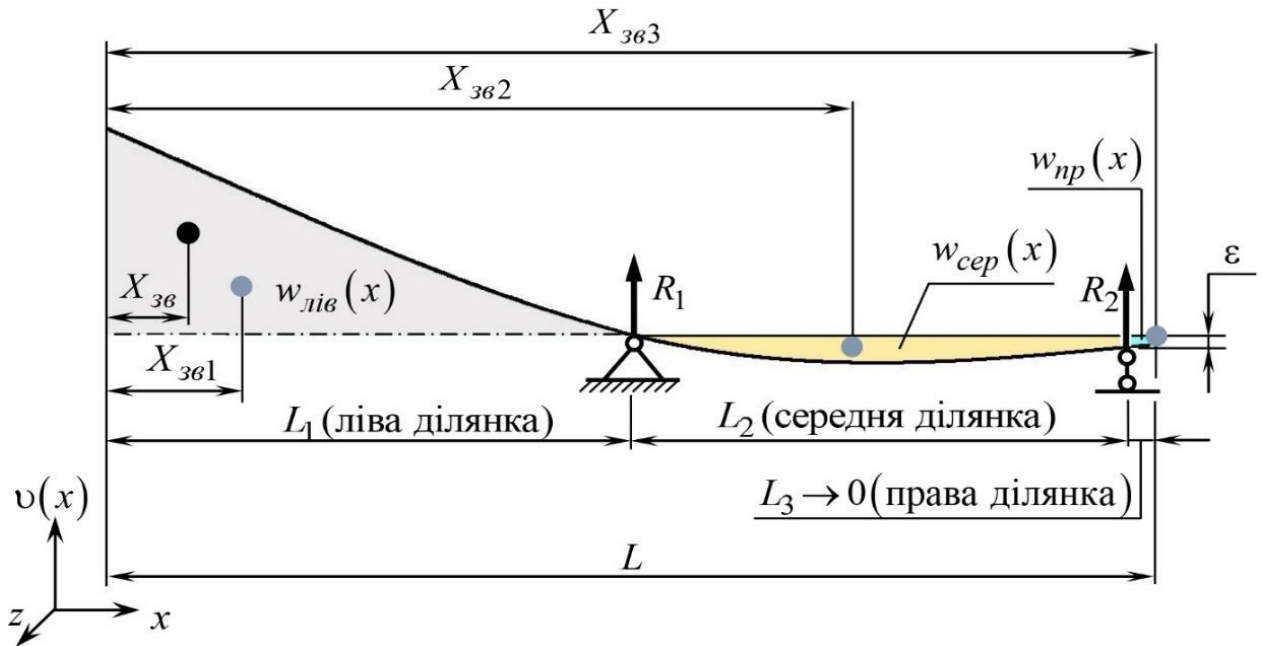
$$X_{3\theta 1} = \frac{\omega \int_0^{L_1} x w(x) dx}{\omega \int_0^{L_1} w(x) dx}; \quad X_{3\theta 2} = \frac{\omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} x w(x) dx}{\omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx}; \quad X_{3\theta 3} = \frac{\omega \int_{L_1+L_2}^L x w(x) dx}{\omega \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}. \quad (2.81)$$

Підставляючи (2.81) в (2.80), отримаємо формулу для встановлення координати зведеної швидкості пружного стержня, що є аналогією знаходження центра мас тіла:

$$X_{3\theta} = \frac{\left( \frac{\omega \int_0^{L_1} x w(x) dx}{\omega \int_0^{L_1} w(x) dx} \int_0^{L_1} w(x) dx + \frac{\omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} x w(x) dx}{\omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx} \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \frac{\omega \int_{L_1+L_2}^L x w(x) dx}{\omega \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx} \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx \right)}{\int_0^{L_1} w(x) dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}. \quad (2.82)$$

Спростивши вираз (2.82), остаточно матимемо:

$$X_{3\theta} = \frac{\int_0^{L_1} x w(x) dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} x w(x) dx + \int_{L_1+L_2}^L x w(x) dx}{\omega \int_0^{L_1} w(x) dx + \omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \omega \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}. \quad (2.83)$$



**Рис. 2.7.** Схема розміщення точки зведення як зведеної швидкості руху ділянок стержня

Саме в точці, координата якої знаходиться згідно виразу (2.83), зосереджуватимуться зведені інерційний та жорсткісний параметри континуальної ділянки (стержня): зведена маса  $m_{36}$  та зведена жорсткість  $c_{36}$ .

## 2.6. Встановлення з використанням методу Релея-Рітца зведеної маси та зведеної жорсткості стержня, що перебуває в коливальному русі

Використаємо рівняння (2.61). Виділимо з кожного члена рівняння амплітуду коливань стержня в зведеній точці  $w(X_{36})$ , що є постійною величиною. Тоді залежність (2.61) запишеться як:

$$\frac{\omega^2 w(X_{36})^2}{2} \left[ \frac{m_{nm}}{w(X_{36})^2} \int_0^L w(x)^2 dx + \frac{1}{w(X_{36})^2} \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx \right] =$$

$$= \frac{w(X_{36})^2}{2} \left[ \frac{EJ_z}{w(X_{36})^2} \int_0^L \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{w(X_{36})^2 GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx \right]. \quad (2.84)$$

Вираз (2.84) подається у вигляді рівності кінетичної і потенціальної енергій. Враховуючи, що  $\omega \cdot w(X_{3\theta})$  – це лінійна швидкість  $v(X_{3\theta})$  (див. вираз (2.44)), вираз (2.84) можна подати у вигляді:

$$\frac{v(X_{3\theta})^2 \cdot m_{3\theta}}{2} = \frac{w(X_{3\theta})^2 \cdot c_{3\theta}}{2}, \quad (2.85)$$

де  $m_{3\theta}$  та  $c_{3\theta}$  – зведені маса та жорсткість пружного стержня з розподіленими параметрами в точці зведення  $X_{3\theta}$  (п. 2.5). Вони становлять:

$$m_{3\theta} = \frac{m_{nm}}{w(X_{3\theta})^2} \int_0^L w(x)^2 dx + \frac{1}{w(X_{3\theta})^2} \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx; \quad (2.86)$$

$$c_{3\theta} = \frac{EJ_z}{w(X_{3\theta})^2} \int_0^L \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{w(X_{3\theta})^2 GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3w(x)}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (2.87)$$

Саме за виразами (2.86) та (2.87) і знаходимо зведену масу та зведену жорсткість пружного стержня (континуальної ділянки), які сприйматиме дискретна тримасова міжрезонансна коливальна система в динаміці.

## 2.7. Висновки до другого розділу

У зв'язку з необхідністю ретельного дослідження континуальної ділянки вібраційної машини окреслено матеріал, який є необхідний для встановлення базових аналітичних залежностей та для розуміння фізики процесу коливань стержня. Це надало методологічне підґрунтя дисертаційним дослідженням та забезпечило прозорість викладання. Для цього:

– розглянуто основні відомі аналітичні залежності, які формуються з диференціального рівняння зігнутої осі стержня, а саме залежності для кута прогину стержня, поперечної сили та згинального моменту, що діють на нього і виражені через прогини стержня. Досліджено методику формування диференціального рівнянь згинальних коливань стержня, яка дозволяє описати його вимушений рух, встановити його власні частоти та встановити його поперечні прогини в динаміці. Розв'язок проаналізовано з використанням функцій Крилова;

– розглянуто метод Релея-Рітца, який дозволяє наближено встановити власну частоту стержня, частку маси та частку жорсткості стержня (зведену масу та зведену жорсткість), що задіяні в коливальному процесі.

– проаналізовано методологію досліджень дискретної тримасової коливальної системи, як еталонної для аналізу дискретно-континуальної. Для цього наведено характеристичне рівняння системи та аналітичні залежності знаходження резонансних жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$ . Окреслено відому послідовність знаходження параметру реактивної маси  $m_3$ , який встановлюється з міркувань фізичного існування коливальної системи, коли дві власні частоти  $\Omega_{e1}$  та  $\Omega_{e2}$ ; маси  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$ ; жорсткості  $c_{12}$  та  $c_{23}$  двох резонансних пружних вузлів повинні бути дійсними числами. Наведено вирази для амплітуд коливань активної  $Y_1$ , проміжної  $Y_2$  та реактивної  $Y_3$  мас;

– проаналізовано континуальну ділянку, яка пов'язує в собі два визначальних параметри коливальної системи, а саме: інерційний параметр реактивної маси та відповідну жорсткість пружного вузла. Ці величини проявляються лише в динамічних процесах і явно не входять у параметри континуальної ділянки. Для цього було встановлено аналітичні залежності для знаходження точки зведення континуальної ділянки, що проходить через її зведену швидкість. Саме через цю точку і проводитиметься зведення інерційного параметру та жорсткості континуальної ділянки з використанням методу Релея-Рітца.

– на основі вище наведеного пункту запропоновано методику встановлення зведеної жорсткості та зведеної маси стержня з розподіленими параметрами для переходу від дискретно-континуальної системи до дискретної, згідно якої дискретизована міжрезонансна коливальна система сприйматиме пружний елемент з розподіленими параметрами дискретно саме відносно зведеної точки, що проходить відносно зведеної швидкості стержня. Дана методика дозволить синтезувати континуальні ділянки, властивості яких узгоджуються з відповідними ділянками дискретних систем.

## РОЗДІЛ 3

### ФОРМУВАННЯ ЕТАЛОННОЇ ВИСОКОЕФЕКТИВНОЇ ДИСКРЕТНОЇ ТРИМАСОВОЇ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

*Розділ присвячений обґрунтуванню інерційно-жорсткісних та силових параметрів високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи вібраційного транспортера-сепаратора – як еталонної моделі, параметри якої приймаються визначальними для формування дискретно-континуальної системи і повинні бути реалізовані в ній. Досліджена математична модель еталонної тримасової дискретної коливальної системи, проаналізовано її амплітудно-частотну характеристику та перехідні режими роботи. Встановлено ефективність функціонування такої системи порівняно з адекватною двомасовою резонансною.*

#### 3.1. Структура та математична модель еталонної коливальної системи

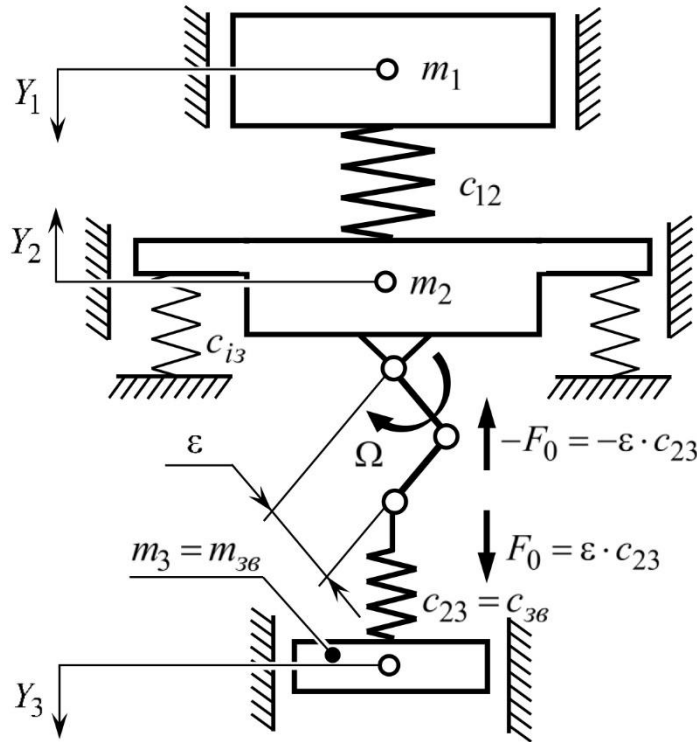
Структура еталонної високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи, дослідження якої проводиться в даному розділі, власне і відображає дискретно-континуальну систему, зведену до дискретної. Методи аналізу дискретної міжрезонансної тримасової коливальної системи уже відомі [53], що дозволяє однозначно встановити її ефективність функціонування. Тож якщо синтезована дискретно-континуальна система набуде параметрів еталонної, можна однозначно стверджувати про наявність в ній властивостей, притаманних високоефективним тримасовим міжрезонансним коливальним системам.

У якості базової математичної моделі еталонної тримасової міжрезонансної системи вибираємо коливальну схему зі збуренням від кривошипно-шатунного механізму, де сила збурення  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  прикладається до проміжної та реактивної мас. Амплітудне значення сили збурення  $F_0$  встановлюється як добуток



ексцентриситету кривошипно-шатунного механізму на жорсткість  $c_{23}$  пружного вузла (рис. 3.1):

$$F_0 = \varepsilon \cdot c_{23}. \quad (3.1)$$



*Рис. 3.1. Структурна схема еталонної дискретної тримасової механічної коливальної системи з кривошипно-шатунним приводом*

Використовуючи математичну модель (2.63), яка є ідентичною нашій, в амплітудних значеннях математична модель еталонної дискретної тримасової механічної коливальної системи з кривошипно-шатунним приводом матиме вигляд [51, 52]:

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 Y_1 + c_{12} (Y_1 - Y_2) = 0; \\ -m_2 \omega^2 Y_2 + c_{12} (Y_2 - Y_1) + c_{23} (Y_2 - Y_3) = -\varepsilon c_{23}; \\ -m_3 \omega^2 Y_3 + c_{23} (Y_2 - Y_3) = \varepsilon c_{23}, \end{cases} \quad (3.2)$$

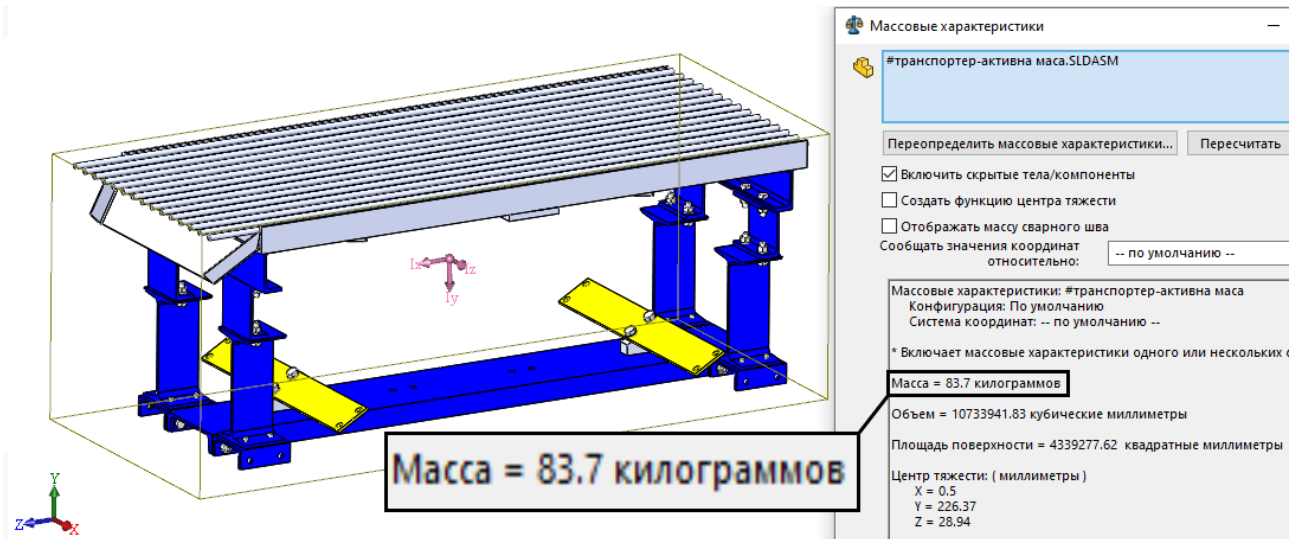
інерційно-жорсткісні та силові параметри якої встановлюються згідно методології, наведеної в п. 2.4.

Саме модель (3.2) є вихідною для оцінки параметрів еталонної високоефективної міжрезонансної тримасової дискретної коливальної системи, параметри якої повинні бути максимально точно реалізовані у дискретно-континуальній системі (в першу чергу мова йде про реалізацію в континуальній ділянці значення жорсткості  $c_{36} = c_{23}$  та інерційного параметру  $m_{36} = m_3$ ). Як наслідок, амплітудно-частотна характеристика дискретної тримасової системи повинна співпасти з характеристикою дискретно-континуальної. У такому випадку, як говорилось вище, ми матимемо повне право стверджувати, що дискретно-континуальна система наділена тою ж ефективністю функціонування, як і дискретна, прямо підтверджуючи наявність енергоощадності синтезованої дискретно-континуальної системи.

### **3.2. Обґрунтування конструктивних та інерційно-жорсткісних параметрів еталонної коливальної системи**

В дисертаційній роботі розробляється транспортер-сепаратор для сепарування відносно легкого полімерного матеріалу, в якого поверхня робочого органу повинна забезпечити довжину в 1,2 м та ширину 0,48 м з кроком напрямних прутків сита 34 мм й діаметром прутка 10 мм. З технологічної точки зору прийнято, що перевантаження на робочому органі  $\zeta = 2,5g$ , а режим роботи – низькочастотний. Тож закладено, що частота вимушених коливань в околі  $\nu = 16$  Гц (близько 950 об/хв). Оскільки габарити робочого органу можуть мати доволі значні інерційні маси коливальної системи (якщо їх виготовляти з металу), передбачається відносно високе споживання потужності, якщо застосовувати двомасові резонансні системи. З огляду на те, що транспортується надлегкий матеріал, доцільно розробити високоефективну конструкцію, дискретна принципова схема якої наведена на рис. 3.1. Планується забезпечити надмале споживання електроенергії. Це повністю узгоджується з тематикою дисертаційних досліджень.

Алгоритм розрахунку дискретної тримасової механічної коливальної системи потребує попереднього встановлення інерційних параметрів активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас (див. п. 2.4). Для вирішення поставленої задачі застосовуємо програмний продукт SOLIDWORKS 2018. Згідно з проведенням моделювання маса робочого органу рівна  $m_1 = 83,7$  кг (рис. 3.2).



*Рис. 3.2. Вікно програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображено інерційний параметр активної маси (робочого органу)*

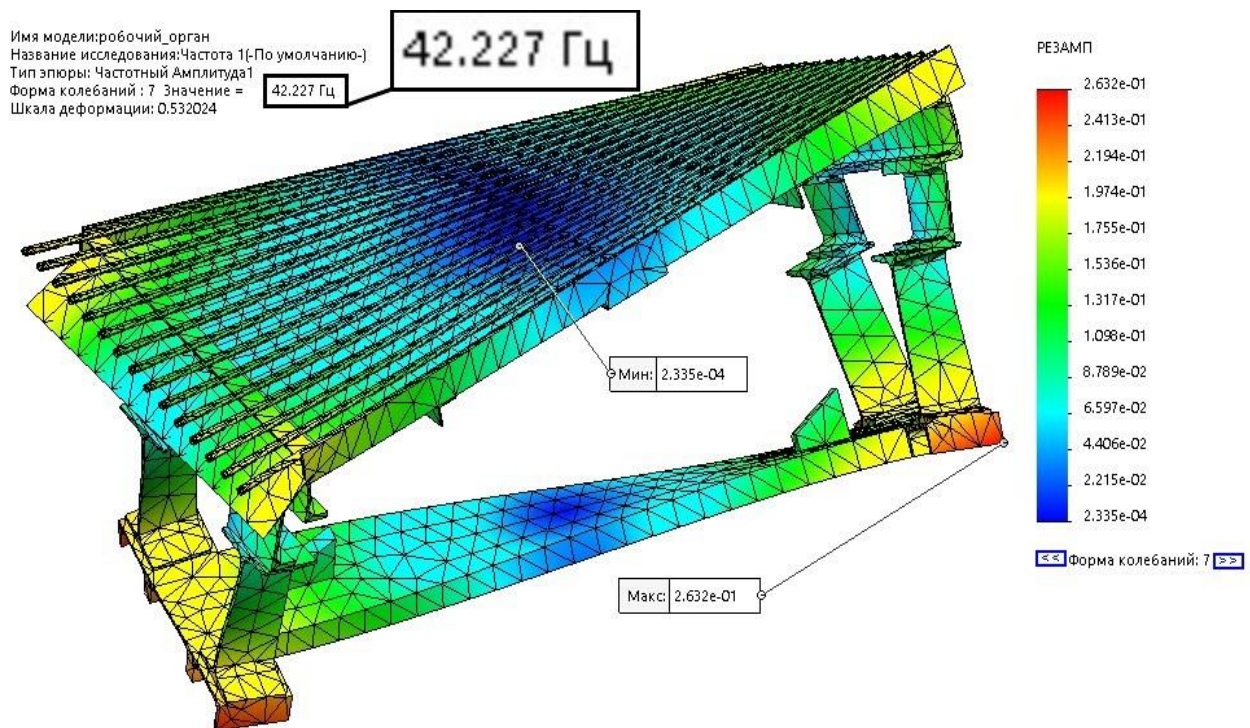
Активна маса складається з двох незалежних частин, які з'єднані між собою за допомогою болтового з'єднання. Між ними розміщені проміжна та реактивна маси. Така конструкція надає доступ до діагностики та налагодження кривошипно-шатунного привода.

Забезпечення стабільного значення амплітуди коливань по всій поверхні робочого органу є черговим завданням під час проектування. Дана умова значно впливає на експлуатаційні властивості вібраційних машин. Це можна пояснити тим, що під час збурення можуть виникати паразитні коливання, за умови, якщо власна частота тіла (робочого органу) близька до вимушеної. Такі коливання накладаються

по всій площині робочого органу, що призводить до нерівномірності значення амплітуди коливань на певних ділянках.

Для забезпечення стабільного та рівномірного руху по поверхні робочого органу необхідно задовільнити вимогу, яка полягає в тому, що перша власна частота робочого органу повинна бути вищою в 2...4 рази за вимушену. Знаходження власної частоти можна проводити різними способами. Завдяки сучасному розвитку технологій одним з найпростіших та доступних способів встановлення власної частоти є розрахунок методом скінченних елементів.

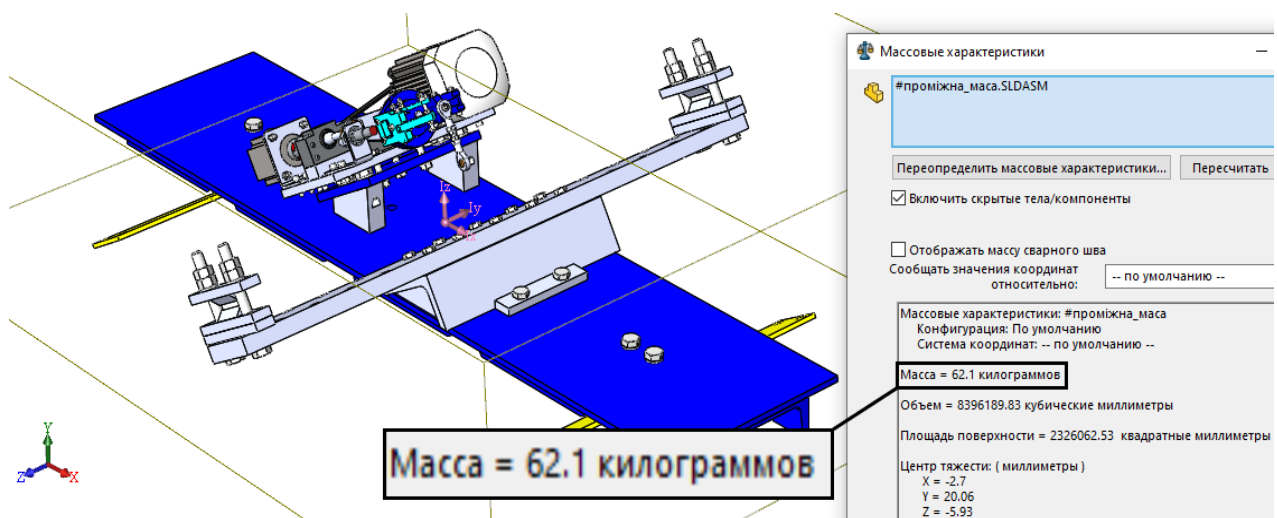
Перша власна частота коливань робочого органу становить  $\nu_{вр} = 42,2$  Гц ( $\omega_{вр} = 265,3$  рад/с) (рис. 3.3), а отже є в 2,6 рази нижчою за вимушену. Тож можна гарантувати, що робочий орган, маючи достатню жорсткість, унеможливило виникнення паразитних коливань.



*Рис. 3.3. Вікно програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображено результат частотного аналізу робочого органу в модулі Simulation*

Забезпечення такої жорсткості було досягнуто завдяки використанню швелера № 16, як основи, та ребр жорсткості. Однак, конструкція не позбавлена і негативних властивостей. Одним з вагомих її недоліків є те, що робочий орган зварний, що може спричиняти виникнення тріщин під час вібрацій. Проте, такий підхід дозволив збільшити її жорсткість за рахунок приварювання сталевих ребр жорсткості до несучої конструкції робочого органу та спростити реалізацію сита.

Проміжна маса побудована також на основі швелера того ж січення, що і активна маса, але з іншими конструктивними особливостями. До неї вже безпосередньо закріплений кривошипно-шатунний привод та шарнірні призматичні зажими для реактивної маси (континуальної ділянки) (рис. 3.4). Опираючись на твердотілу модель проміжної маси стверджуємо, що її інерційне значення складає  $m_2 = 62,1$  кг.



*Рис. 3.4. Вікно програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображено інерційний параметр проміжної маси*

Тож уже конструктивно встановлено значення інерційних параметрів активної та проміжної мас:  $m_1$  й  $m_2$ . Для того, щоб встановити інерційний параметр реактивної маси  $m_3$ , необхідно, згідно з п. 2.4, задатися двома власними частотами коливальної системи. Чим ближче їх взаємне розташування, тим вискоєфективнішу

коливальну систему можна отримати. Так приймаємо, що перша власна колова частота системи  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с ( $n_{e1} = 907$  об/хв), а друга –  $\Omega_{e2} = 104$  рад/с ( $n_{e2} = 993$  об/хв) (власною частотою коливань системи, що спричинена віброізоляторами, нехтуємо). Інерційний параметр для реактивної маси  $m_3$  встановлюємо з умови (2.79), звідки (додаток С, вираз (С.2)):

$$0 < m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)(1 - \Lambda^2)^2}{m_2(1 - \Lambda^2)^2 - 4m_1\Lambda^2} = \frac{-62,1 \cdot (83,7 + 62,1) \cdot (1 - 0,913^2)^2}{62,1 \cdot (1 - 0,913^2)^2 - 4 \cdot 83,7 \cdot 0,913^2} =$$

$$= 0,894 \text{ кг}, \quad (3.3)$$

де 
$$\Lambda = \frac{\Omega_{e1}}{\Omega_{e2}} = \frac{95}{104} = 0,913.$$

Отже, реактивна маса  $m_3$  може знаходитись у діапазоні:

$$0 < m_3 < 0,894 \text{ кг}.$$

Обґрунтуємо вибір інерційного параметра реактивної маси  $m_3$  через коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D$ , що в даній постановці питання власне і відображає наявність високої ефективності функціонування проектованої еталонної тримасової коливальної системи порівняно з класичною двомасовою. Параметр  $D$  визначатимемо як співвідношення амплітуд сил збурення проектованої машини до класичної двомасової резонансної, за умови забезпечення однакових амплітуд коливань робочих органів.

Попередньо приймемо, що ефективність функціонування еталонної тримасової міжрезонансної коливальної системи повинна бути в 6,9 разів вищою від двомасової. Дану ефективність функціонування, виражену через коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D$ , будемо встановлювати із співвідношення сил збурення:

$$D = \frac{F_{02}}{F_{03}}, \quad (3.4)$$

де  $F_{02}$  та  $F_{03}$  – амплітудні значення сил збурення відповідно для двомасової та тримасової коливальних систем. Амплітудне значення сили збурення  $F_{02}$  для двомасової коливальної системи, виражена через амплітуду коливань  $Y_1$  активної маси (робочого органу), визначається з використанням виразу (\*\*\*) табл. 1.2:

$$F_{02} = \left| \frac{Y_1 (m_1 + m_2) \left( c - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 \right)}{m_2} \right|, \quad (3.5)$$

де

$$c = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Omega_{\text{г2}}^2 \quad (3.6)$$

– жорсткість резонансного пружного вузла двомасової коливальної системи.

Вираз для знаходження необхідного амплітудного значення сили збурення  $F_{03}$  для еталонної тримасової коливальної системи, виражене через амплітуду коливань  $Y_1$  робочого органу, використовуючи вираз (2.67), визначатиметься згідно залежності:

$$F_{03} = \left| \frac{-Y_1 \left[ c_{23}^2 (c_{12} - m_1 \Omega^2) + c_{12}^2 (c_{23} - m_3 \Omega^2) - (c_{12} - m_1 \Omega^2) \times \right. \right.}{c_{12} m_3 \Omega^2} \left. \left. \times (c_{12} + c_{23} - m_2 \Omega^2) (c_{23} - m_3 \Omega^2) \right] \right|. \quad (3.7)$$

Підставивши вирази (3.5) й (3.7) в (3.4) та провівши спрощення, отримаємо залежність для встановлення додаткового динамічного підсилення коливань  $D$  в еталонній тримасовій коливальній системі:

$$D = \frac{c_{12} m_3 \Omega^2 \left( c - \frac{m_1 m_2 \Omega^2}{m_1 + m_2} \right) (m_1 + m_2)}{m_2 \left[ c_{23}^2 (c_{12} - m_1 \Omega^2) + c_{12}^2 (c_{23} - m_3 \Omega^2) - (c_{12} - m_1 \Omega^2) \times \right. \left. \times (c_{23} - m_3 \Omega^2) (c_{12} - m_2 \Omega^2 + c_{23}) \right]}. \quad (3.8)$$

Чітке встановлення параметру реактивної маси  $m_3$ , від якого залежить закладена ефективність системи  $D$ , здійснимо з наступних міркувань. Розв'яжемо чисельно як систему рівнянь вирази (2.71), (2.72) та (3.8) з врахуванням (2.73), (2.74) та (3.6), оскільки аналітично інерційний параметр  $m_3$  неможливо встановити. Вирішуючи цю систему, ми одночасно зможемо вже встановити і параметри жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$  двох резонансних пружних вузлів еталонної тримасової коливальної системи. Результатом чисельного розв'язку вище обумовленої системи рівнянь є наступні інерційно-жорсткісні параметри (додаток С, вираз (С.2.2)):

$$m_3 = 0,456 \text{ кг}; \quad c_{12} = 3,76 \cdot 10^5 \text{ Н/м}; \quad c_{23} = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Н/м}. \quad (3.9)$$

Як бачимо, інерційний параметр реактивної маси знаходиться у встановлених межах (див. нерівність (3.3)), а отже, прийнятий нами параметр додаткового динамічного підсилення коливань  $D$  вибрано коректно (така високоефективна система може існувати). Для підтвердження отриманих результатів проведемо розрахунок жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$  двох пружних вузлів. Так, згідно виразу (2.71) жорсткість  $c_{12}$  становитиме (додаток С, вираз (С.3)):

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{(m_2 + m_3)m_1 \Omega_{\delta 2}^2 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{\delta 2}^2 (\Lambda^2 - 1) - H \right]}{(m_1 + m_2 + m_3) \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{\delta 2}^2 (\Lambda^2 - 1) + (-H - 2m_1 m_3 \Omega_{\delta 2}^2) \right]} = \\ &= \frac{(62,1 + 0,456) \cdot 83,7 \cdot 104^2 \cdot \left[ (83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot 62,1 \cdot 104^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times (0,913^2 - 1) - 1,137 \cdot 10^7 \right]}{(83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot \left[ (83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot 62,1 \cdot 104^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times (0,913^2 - 1) + \left( -1,137 \cdot 10^7 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cdot 83,7 \cdot 0,456 \cdot 104^2 \right) \right]} = \\ &= 3,76 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \end{aligned} \quad (3.10)$$



де  $H$  згідно (2.74) становить:

$$H = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{g2}^4 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 (\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1 m_3 \Lambda^2 \right]} =$$

$$= \sqrt{\left[ \begin{array}{l} (83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot 62,1 \cdot 104^4 \times \\ (83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot 62,1 \cdot (0,913^2 - 1)^2 - \\ - 4 \cdot 83,7 \cdot 0,456 \cdot 0,913^2 \end{array} \right]} = 1,137 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}^2}{\text{с}^2}.$$

Жорсткість пружного вузла  $c_{23}$ , використовуючи вираз (2.72), буде рівна (додаток С, вираз (С.4)):

$$c_{23} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{g2}^2 (\Lambda^2 - 1) - H}{2 \cdot (m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3 =$$

$$= \frac{(83,7 + 62,1 + 0,456) \cdot 62,1 \cdot 104^2 \cdot (0,913^2 - 1) - 1,137 \cdot 10^7}{2 \cdot (62,1 + 0,456) \cdot (83,7 + 62,1 + 0,456)} \cdot 0,456 =$$

$$= 4,21 \cdot 10^3 \text{ Н/м.} \quad (3.11)$$

Згідно з поставленою умовою потрібно забезпечити коливальний рух робочого органу з перевантаженням  $\zeta = 2,5g$ . З [65] перевантаження  $\zeta$  на робочому органі визначається як:

$$\zeta = Y_1 \Omega^2 / g. \quad (3.12)$$

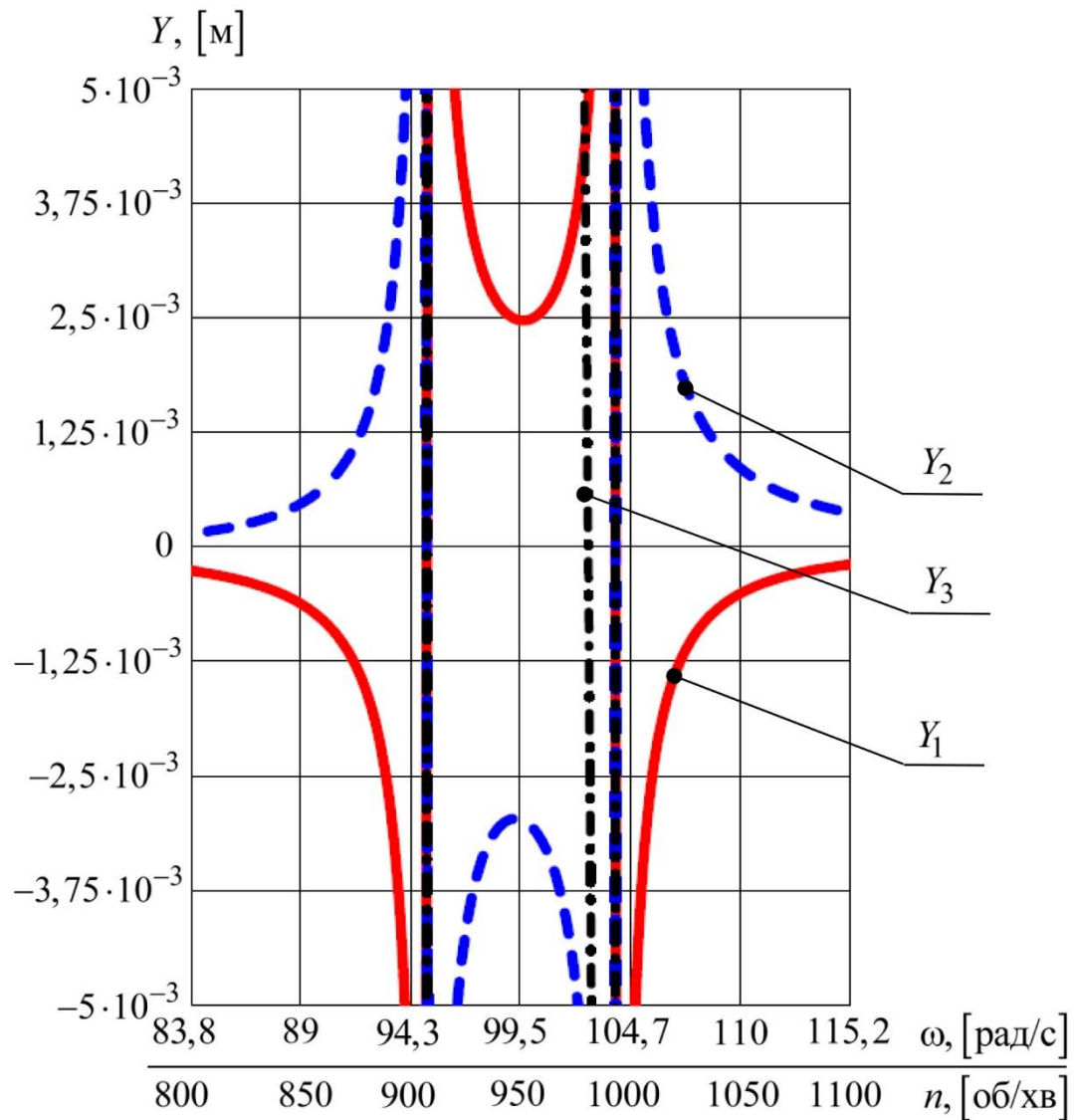
Підставивши вираз для  $Y_1$ , встановлений з (3.12), в (2.67), визначимо зусилля, яке повинна розвивати еталонна тримасова міжрезонансна коливальна система для забезпечення перевантаження  $\zeta = 2,5g$  на частоті вимушених коливань системи  $\Omega = 99,5$  рад/с ( $n = 950$  об/хв). Тож (додаток С, вираз (С.5)):

$$F_{03} = \left| \frac{\zeta g \left( \begin{array}{l} c_{12} c_{23} m_1 + c_{12} c_{23} m_2 + c_{12} c_{23} m_3 - \Omega^2 c_{12} m_1 m_3 - \\ - \Omega^2 c_{12} m_2 m_3 - \Omega^2 c_{23} m_1 m_2 - \Omega^2 c_{23} m_1 m_3 + \Omega^2 m_1 m_2 m_3 \end{array} \right)}{\Omega^2 c_{12} m_3} \right| = 27,4 \text{ Н.} \quad (3.13)$$

Тоді ексцентриситет  $\varepsilon_3$  кривошипно-шатунного механізму тримасової системи, використовуючи вираз (3.1) (додаток С, вираз (С.6)), становитиме:

$$\varepsilon_3 = F_{03} / c_{23} = 27,4 / 4,21 \cdot 10^3 = 6,5 \cdot 10^3 \text{ м} . \quad (3.14)$$

Будуємо амплітудно-частотну характеристику еталонної тримасової міжрезонансної механічної коливальної системи [51, 52] (рис. 3.5 (додаток С, рис. С.1)) з використанням вище встановлених параметрів та виразів (2.67) – (2.69).



**Рис. 3.5.** Амплітудно-частотна характеристика еталонної дискретної тримасової міжрезонансної механічної коливальної системи

З графіка помітно два резонансних піки, сформованих на закладених частотах  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с та  $\Omega_{e2} = 104$  рад/с, які знаходяться відповідно зліва та справа від передбачуваної частоти вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с. Активна та проміжна маси в міжрезонансній зоні мають сідлоподібну характеристику, що дозволяє мінімізувати вплив маси завантаження на амплітуду коливань робочого органу.

Проте, як і передбачалося, амплітудно-частотна характеристика реактивної маси стрімкоподібна і можна зрозуміти, що амплітуда коливань її вимірюється сантиметрами ( $Y_3 = 4,9$  см на частоті вимушених коливань  $\Omega$  (додаток С, вираз (С.9))), якщо не враховувати дисипацію в системі. Тож використання електромагнітного збурення для такої коливальної системи є нереальним, оскільки повітряний проміжок між якорем та осердям з котушками електромагнітного вібробуджувача повинен вимірюватися також сантиметрами. Саме введення континуальної ділянки, приведеної в рух від кривошипно-шатунного механізму, яка замінить реактивну масу з відповідним їй пружним вузлом, є обґрунтованим кроком.

Амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с, згідно з виразом (2.63), становить (додаток С, вираз (С.7)):

$$Y_1 = \frac{-F_{03} c_{12} m_3 \Omega^2}{\left( c_{23}^2 (c_{12} - m_1 \Omega^2) + c_{12}^2 (c_{23} - m_3 \Omega^2) - (c_{12} - m_1 \Omega^2) \times \right.} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad (3.15)$$

$$\left. \times (c_{12} + c_{23} - m_2 \Omega^2) (c_{23} - m_3 \Omega^2) \right)$$

що відповідає перевантаженню  $\zeta = 2,5g$  і підтверджено амплітудно-частотною характеристикою системи (рис. 3.5).

Для порівняння енергоефективності синтезованої тримасової коливальної системи з двомасовою визначимо, яке зусилля повинна розвивати адекватна двомасова резонансна коливальна система для забезпечення перевантаження  $\zeta = 2,5g$  на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с ( $n = 950$  об/хв) з ідентичними інерційними параметрами активної  $m_1 = 83,7$  кг та проміжної (реактивної)

$m_2 = 62,1$  кг мас. Підставивши вираз (3.12) в (3.5), сила збурення для двомасової резонансної коливальної системи становитиме (додаток В, вираз (В.3)):

$$F_{02} = \left| \frac{\zeta g \left( c - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 \right) (m_1 + m_2)}{\Omega^2 m_2} \right| = 190,5 \text{ Н.} \quad (3.16)$$

де  $c$  згідно (3.6) становить (додаток В, вираз (В.2)):

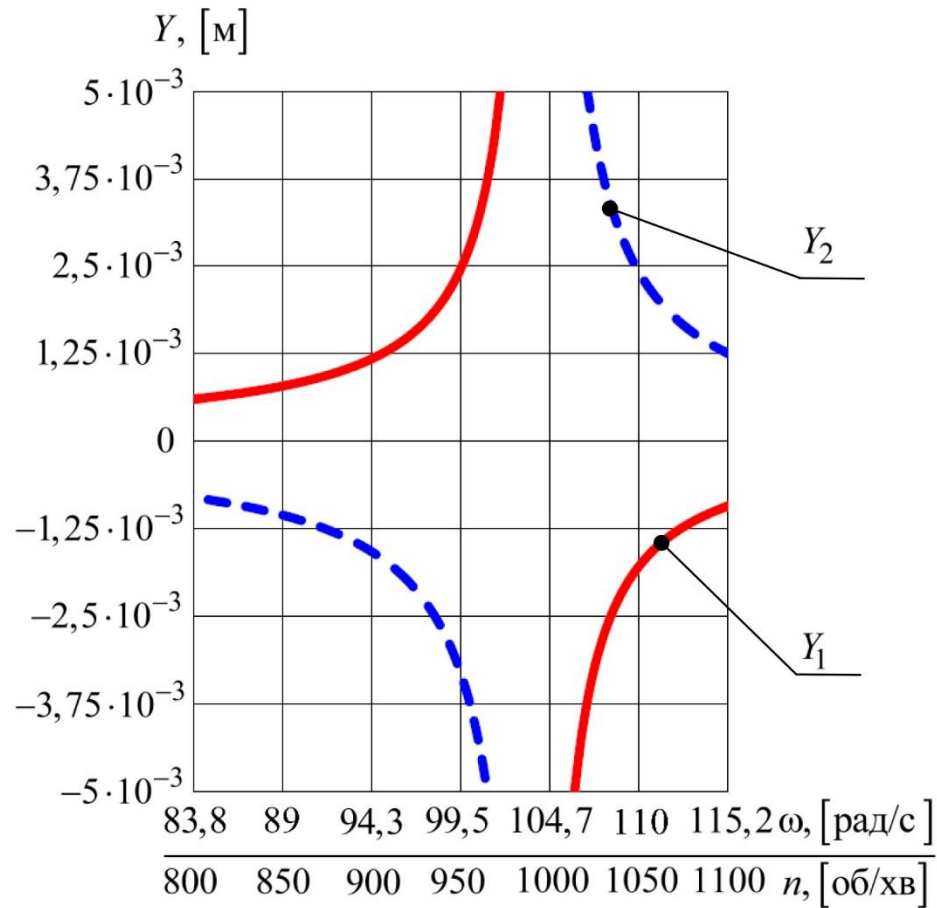
$$c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega_{e2}^2 = \frac{83,7 \cdot 62,1}{83,7 + 62,1} \cdot 104^2 = 3,856 \cdot 10^5 \text{ Н/м.} \quad (3.17)$$

Встановимо ексцентриситет  $\varepsilon_2$  кривошипно-шатунного механізму двомасової коливальної системи. Прирівнявши амплітуду коливань робочого органу  $Y_1$ , визначеної з виразу для ексцентриситета (вираз (\*)) з табл. 1.2), з амплітудою коливань  $Y_1$ , визначеної з виразу для амплітудного значення сили збурення (вираз (\*\*)) з табл. 1.2; вираз (3.5)), отримаємо (додаток В, вираз (В.4)):

$$\varepsilon_2 = \frac{F_{02}}{c - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2} = \frac{190,5}{3,856 \cdot 10^5 - \frac{83,7 \cdot 62,1}{83,7 + 62,1} \cdot 99,5^2} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (3.18)$$

Виразивши амплітуди коливань  $Y_1$  та  $Y_2$  відповідно з виразів (\*\*\*) та (\*\*\*) табл. 1.2, будуємо амплітудно-частотну характеристику двомасової резонансної механічної коливальної системи (рис. 3.6), заклавши силу збурення  $F_{02} = 190,5$  Н, визначену у (3.16). Помічаємо ту ж амплітуду коливань активної маси  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с, що і в тримасовій системі (див. вираз (3.15)), проте отриману за значно вищих сил збурення. Дійсно, амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с ( $n = 950$  об/хв) згідно виразу (\*\*) табл. 1.2 становитиме:

$$Y_1 = \frac{F_{02} m_2}{(m_1 + m_2) \left( c - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 \right)} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (3.19)$$



**Рис. 3.6.** Амплітудно-частотна характеристика двомасової резонансної механічної коливальної системи

Тож двомасова та еталонна тримасова коливальні системи на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с розвивають однакові амплітуди коливань активної маси (робочого органу)  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м, проте за різних значень сили збурення. На основі цього встановимо дійсну ефективність функціонування тримасової міжрезонансної коливальної системи по відношенню до двомасової резонансної коливальної системи за виразом (3.4). Використовуючи отримані значення в (3.13) та (3.16), ефективність функціонування (коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D$ ) складе (додаток С, вираз (С.1)):

$$D = \frac{F_{02}}{F_{03}} = \frac{190,5}{27,4} = 6,9, \quad (3.20).$$

що повністю збігається із закладеним параметром під час розрахунків.

Отже, задавшись двома власними частотами  $\Omega_{e1}$  та  $\Omega_{e2}$  еталонної коливальної системи та масами  $m_1$  та  $m_2$  встановлено, що для забезпечення заданої ефективності функціонування тримасової коливальної системи, для якої коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D = 6,9$  порівняно з двомасовою, реактивна маса повинна складати  $m_3 = 0,456$  кг, а значення жорсткостей  $c_{12}$  та  $c_{23}$  двох резонансних пружних вузлів повинні становити відповідно:  $c_{12} = 3,76 \cdot 10^5$  Н/м та  $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3$  Н/м. Параметри створюваної дискретно-континуальної коливальної системи, які формуватимуться в наступному розділі, повинні узгоджуватись з вище отриманими значеннями інерційних та жорсткісних параметрів еталонної тримасової дискретної коливальної системи.

Якщо з активною  $m_1$  та проміжною  $m_2$  масами все зрозуміло – вони повністю переносяться у дискретно-континуальну систему (це відноситься і до жорсткості  $c_{12}$ ), реалізуючи дискретну частину системи, то дискретний інерційний параметр реактивної маси  $m_3$  та дискретна жорсткість пружного вузла  $c_{23}$  повинні бути реалізовані в континуальній ділянці. Оскільки залишається невідомим механізм ідентифікації цих параметрів в континуальній ділянці, необхідно встановити параметр, який пов'язуватиме їх і буде легко фізично визначатись.

З огляду на це прийнято, що реперним параметром, який відображатиме дискретний інерційний параметр реактивної маси  $m_3$  та дискретну жорсткість пружного вузла  $c_{23}$  в континуальній ділянці, буде парціальна частота  $\omega_n$  реактивної маси (додаток С, вираз (С.10)):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} = \sqrt{\frac{4,21 \cdot 10^3}{0,456}} = 96,1 \text{ рад/с}, \quad (3.21)$$

яка в континуальній ділянці фізично набуватиме змісту першої власної частоти коливань тіла з розподіленими параметрами.

### 3.3. Дослідження перехідних режимів еталонної коливальної системи

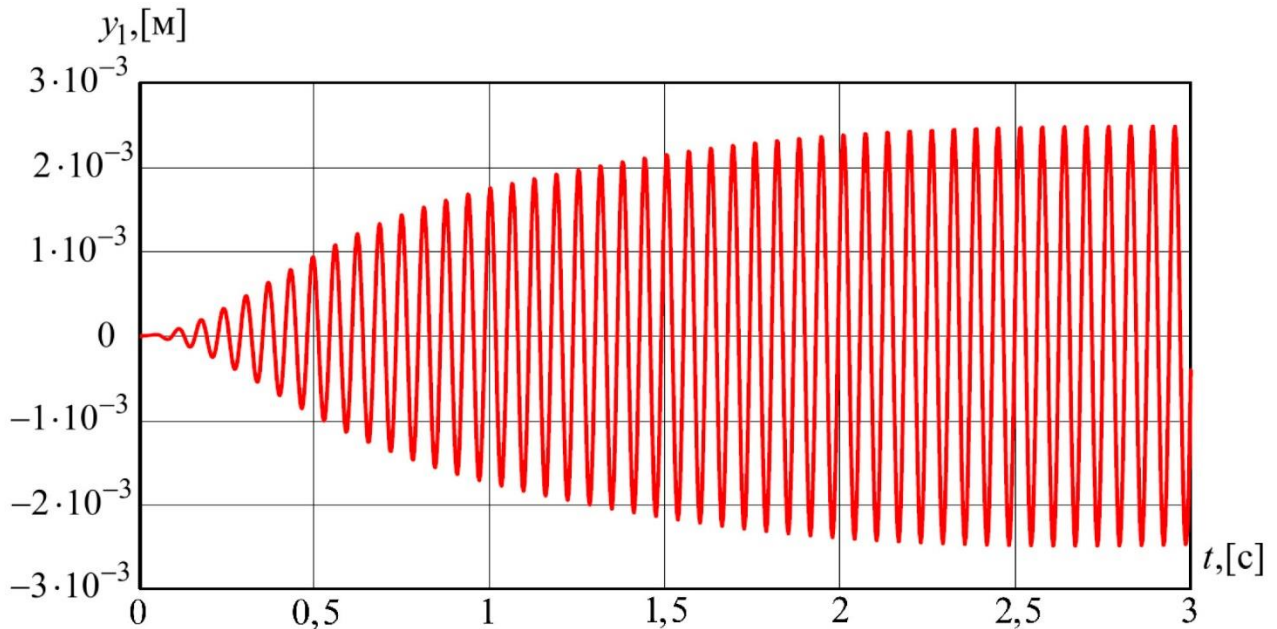
Розглянемо дискретну тримасову коливальну систему, яка наведена на рис. 3.1. Активна  $m_1$ , проміжна  $m_2$  та реактивна  $m_3$  маси здійснюють коливальний рух завдяки силовому збуренню, яке прикладене до проміжної та реактивної мас і спричинене рівномірним обертанням кривошипа з постійною вимушеною коловою частотою (кутовою швидкістю)  $\Omega$ . Рух системи може бути повністю описаний координатами  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  та  $y_3(t)$  (див. п. 2.4) [27], які визначають коливання мас  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  відносно відповідних положень рівноваги в будь-який момент часу  $t$ .

#### 3.3.1. Чисельне моделювання перехідних режимів еталонної коливальної системи

Для аналізу перехідних режимів руху коливальної системи використаємо диференціальні рівняння (2.63). Ввівши в математичну модель коефіцієнти в'язкого опору  $\mu_{12}$  та  $\mu_{23}$ , що відображають дисипативні властивості двох резонансних пружних вузлів з жорсткостями відповідно  $c_{12}$  та  $c_{23}$ , система диференціальних рівнянь (2.63) набуде вигляду [50]:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \mu_{12} \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{12} (y_1 - y_2) = 0; \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \mu_{12} \left( \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) + \mu_{23} \left( \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} \right) + \\ + c_{12} (y_2 - y_1) + c_{23} (y_2 - y_3) = -\varepsilon \cdot c_{23} \cdot \sin \omega t; \\ m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \mu_{23} \left( \frac{dy_3}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) + c_{23} (y_3 - y_2) = \varepsilon \cdot c_{23} \cdot \sin \omega t. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Опираючись на вище одержані параметри системи (п. 3.2), отримано чисельний розв'язок диференціальних рівнянь (3.22) за допомогою методу Рунге-Кутти з використанням програмного забезпечення MathCAD і з урахуванням таких початкових умов:  $y_1(0) = 0$ ;  $y_2(0) = 0$ ;  $y_3(0) = 0$ ;  $y'_1(0) = 0$ ;  $y'_2(0) = 0$ ;  $y'_3(0) = 0$  (додаток М). Часові залежності коливального руху активної маси дискретної вібраційної машини в перші 3 с після запуску (рис. 3.7 (додаток М, рис. М.1)) на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с свідчать про те, що перехідні процеси тривали до 2,5 с після пуску. Максимальна амплітуда коливань транспортера-сепаратора рівна  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м, що відповідає всім проведеним вище розрахункам.



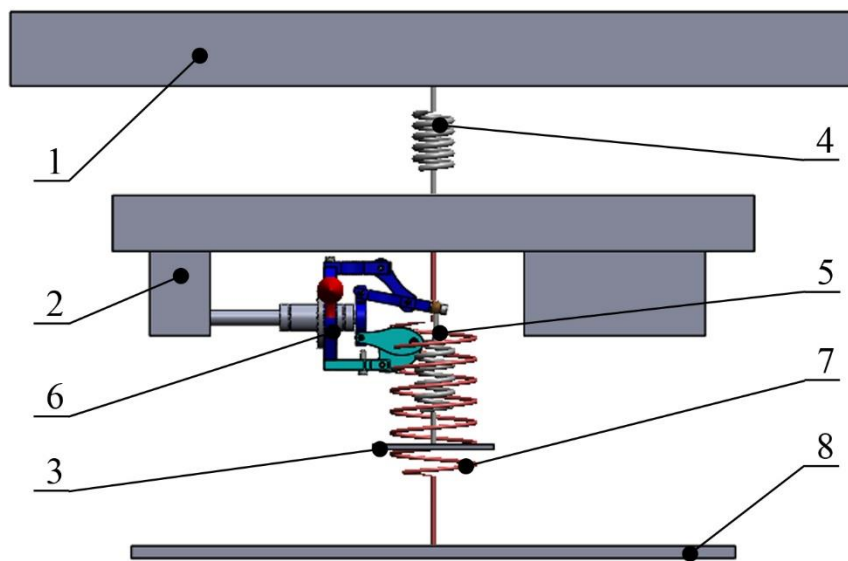
**Рис. 3.7.** Часова залежність коливального руху активної маси в перші 3 с після запуску на коловій частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с

З рис. 3.7 помічаємо плавне наростання амплітуди коливань активної маси, при тому, що збурення реактивної відбувалося відразу на частоті вимушених коливань з необхідним амплітудним значенням сили збурення. Як висновок, дані коливальні системи наділені плавністю запуску.



### 3.3.2. Комп'ютерна імітація руху еталонної коливальної системи

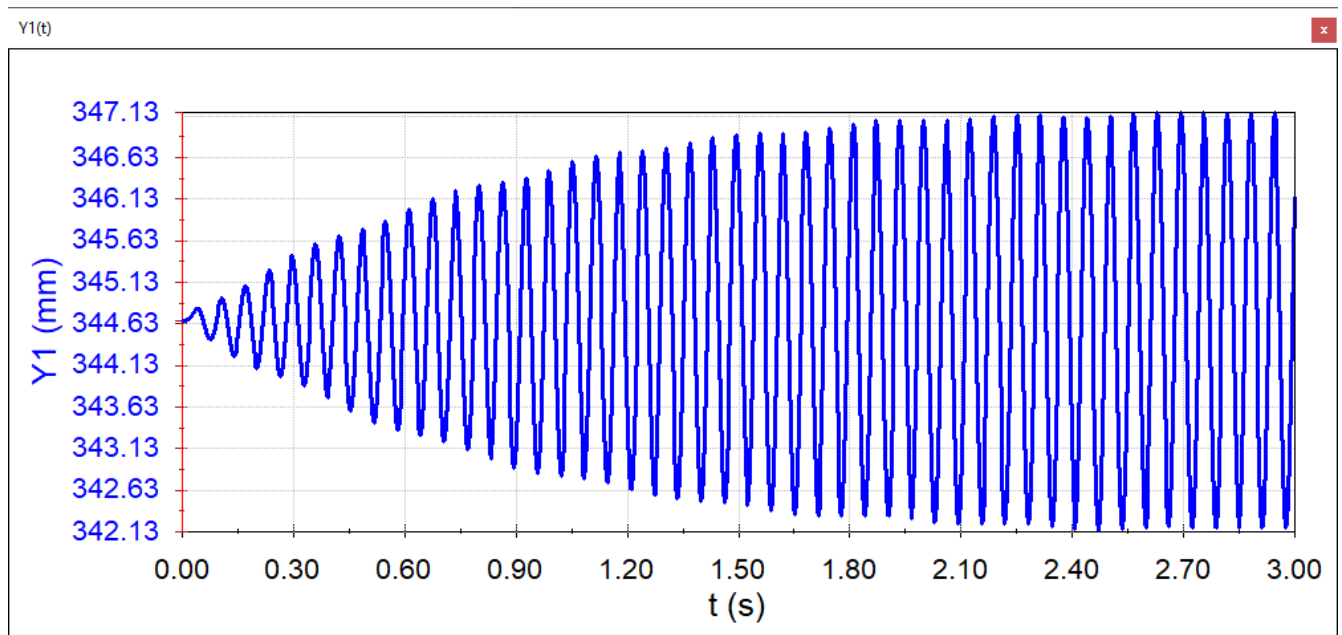
Для того, щоб перевірити правильність отриманих результатів теоретичних досліджень та чисельного моделювання, проведемо комп'ютерну імітацію руху коливальної системи в програмному продукті SOLIDWORKS модуля Motion. Відповідна твердотіла модель представлена на рис. 3.8.



*Рис. 3.8. Твердотіла імітаційна модель еталонної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи, сформована в програмному продукті SOLIDWORKS 2018 з використанням модуля Motion: 1 – активна маса; 2 – проміжна маса; 3 – реактивна маса; 4, 5 – пружні вузли (відповідно жорсткістю  $c_{12}$  та  $c_{23}$ ); 6 – кривошипно-шатунний механізм; 7 – віброізолятори; 8 – фундамент (нерухому основу)*

Імітаційна модель складається з активної маси 1 ( $m_1 = 83,7$  кг), яка з'єднана пружинним вузлом 4 ( $c_{12} = 3,76 \cdot 10^5$  Н/м) з проміжною масою 2 ( $m_2 = 62,1$  кг). Твердотіла модель через віброізолятори 7, закріплені до проміжної маси 2,

встановлена на фундамент (нерухому основу) 8. Кривошипно-шатунний механізм 6 прикріплений до проміжної маси 2, а його шарнір, який задає ексцентриситет, з'єднаний з пружинним вузлом 5 ( $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3$  Н/м). Пружний вузол 5 у свою чергу приєднаний до реактивної маси 3 ( $m_3 = 0,456$  кг). Комп'ютерну імітацію руху проводимо на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с з ексцентриситетом  $\varepsilon_3 = 6,5 \cdot 10^3$  м. Результати імітації представлені на графіку часової залежності коливань активної маси 1 ( $m_1$ ) відносно положення рівноваги (рис. 3.9).



**Рис. 3.9.** Часова залежність коливального руху активної маси, отримана в програмному продукті SOLIDWORKS 2018 з використанням модуля Motion

Як бачимо з рис. 3.9, результат імітаційного моделювання еталонної дискретної тримасової коливальної системи повністю узгоджуються з результатами її чисельного моделювання (рис. 3.7). Це опосередковано підтверджує достовірність отриманих даних. Передбачається, що саме за такими залежностями відбуватиметься рух активної коливальної маси в реальній конструкції дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини.

Коливальний рух проміжної маси має аналогічну характеристику, яка відрізняється лише амплітудними значеннями коливань.

### 3.4. Висновки до третього розділу

1. З метою виробничої необхідності у створенні вібраційного технологічного обладнання з площею робочої поверхні  $1 \text{ м}^2$  для транспортування та сепарування легкого полімерного матеріалу, було обґрунтовано розроблення високоефективної вібромашини на базі тримасової міжрезонансної коливальної системи – як еталонної моделі, параметри якої приймаються визначальними для формування дискретно-континуальної системи і повинні бути реалізовані в ній. Система приводиться в рух від кривошипо-шатунного механізму. Раціональний режим її роботи вибрано низькочастотний ( $n = 950 \text{ об/хв}$ ,  $\nu = 15,8 \text{ Гц}$ ,  $\Omega = 99,5 \text{ рад/с}$ ) з переважанням на робочому органі (маса  $m_1$ )  $\zeta = 2,5 \text{ г}$ , яке відповідає амплітуді коливань  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

2. Конструктивно встановлено інерційні параметри активної ( $m_1 = 83,7 \text{ кг}$ ) та проміжної коливальних мас ( $m_2 = 62,1 \text{ кг}$ ). Заклавши розташування власних резонансних піків еталонної тримасової дискретної міжрезонансної коливальної системи ( $\Omega_{e1} = 95 \text{ рад/с}$ ,  $\Omega_{e2} = 104 \text{ рад/с}$ ) та додаткове динамічне підсилення коливань  $D = 6,9$  порівняно з класичною двомасовою, встановлено інерційне значення її реактивної маси ( $m_3 = 0,456 \text{ кг}$ ) та жорсткості ( $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ). Такі параметри складно реалізувати на практиці і згідно поставлених завдань мають бути забезпечені в дискретно-континуальній системі.

3. Побудовано амплітудно-частотну характеристику еталонної дискретної тримасової коливальної системи, де спостерігаються два резонансних піки, сформованих на закладених частотах  $\Omega_{e1} = 95 \text{ рад/с}$  та  $\Omega_{e2} = 104 \text{ рад/с}$ , які знаходяться відповідно зліва та справа від передбачуваної частоти вимушених коливань

$\Omega = 99,5$  рад/с. Активна та проміжна маси в міжрезонансній зоні мають сідлоподібну характеристику. Проте, амплітудно-частотна характеристика реактивної маси стрімкоподібна і її амплітуда коливань вимірюється сантиметрами (без врахування дисипації). Тож використання електромагнітного збурення для такої коливальної системи є недоцільним, оскільки повітряний проміжок між якорем та осердям з котушками віброзбуджувача повинен вимірюватися також сантиметрами. Саме введення в систему континуальної ділянки, приведеної в рух від кривошипно-шатунного механізму, яка замінить реактивну масу з відповідним їй пружним вузлом, буде обґрунтованим кроком.

4. Оскільки параметри створюваної дискретно-континуальної коливальної системи повинні забезпечувати отримані інерційні та жорсткісні параметри дискретної ( $m_3, c_{23}$ ), комплексним параметром, який відобразить  $m_3$  та  $c_{23}$  в континуальній ділянці вибрано парціальну частоту коливань реактивної маси дискретної системи  $\omega_n = \sqrt{c_{23} / m_3} = 96,1$  рад/с.

5. Проведено чисельне та імітаційного моделювання руху активної маси еталонної дискретної тримасової коливальної системи. Результати повністю узгодились, що опосередковано підтвердило достовірність отриманих даних. Передбачається, що саме за такими залежностями відбуватиметься рух активної коливальної маси в реальній конструкції дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини.

## РОЗДІЛ 4

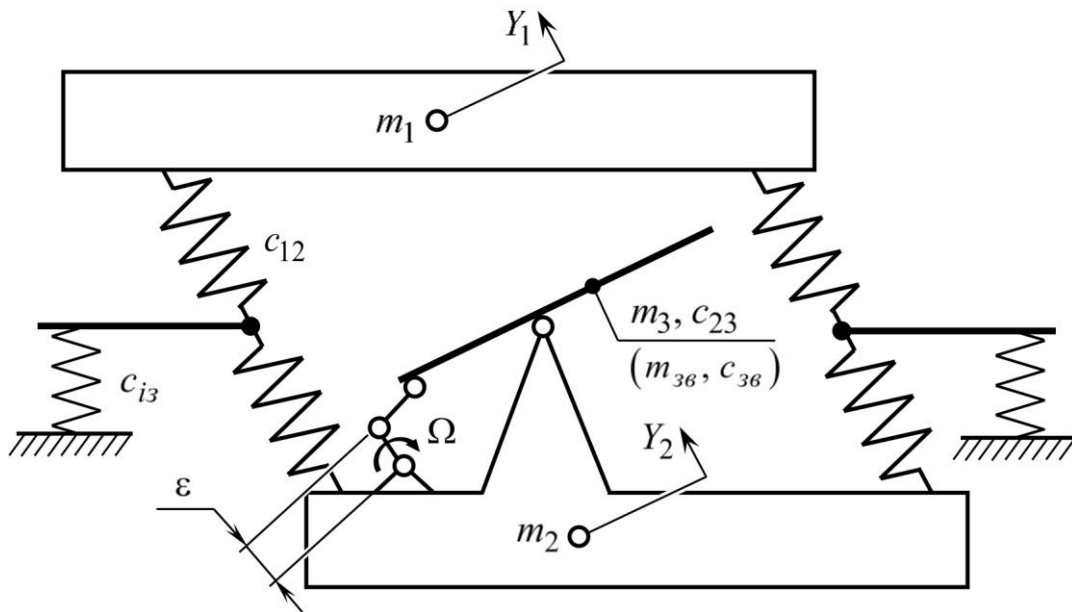
### ВСТАНОВЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТЕРА-СЕПАРАТОРА

*Значна увага в розділі приділена встановленню інерційно-жорсткісних та частотних параметрів континуальної ділянки (стержня) транспортера-сепаратора, яка в новоутвореній структурі адекватно замінила реактивну масу з відповідним їй пружним вузлом дискретної системи. Сформована математична модель дискретно-континуальної системи. Проаналізовано її амплітудно-частотну характеристику, яка виявилась практично ідентичною еталонній дискретній моделі, чим опосередковано було підтверджено наявність високоефективних режимів роботи синтезованої системи.*

#### 4.1. Структура дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи вібромашини

Беручи за основу структурну схему дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи на рис. 1.5, б, отриману як результат втілення закладених ідеї та гіпотези, та зважаючи на напрацювання попереднього розділу, виконання високоефективного міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора здійснюємо за структурною схемою на рис. 4.1.

Коливальний рух активної маси  $m_1$ , як і решти мас, відбуватиметься під певним кутом кидання, конструктивно закладеним розташуванням резонансних пружних елементів жорсткістю  $c_{12}$ . Силове збурення від кривошипно-шатунного механізму прикладається до проміжної маси  $m_2$ , на якій він встановлений, та до кінця континуальної ділянки, яка з'єднана з його шатуном. Система встановлена на фундамент через віброізолятори жорсткістю  $c_{i3}$ , які закріплені в умовно нерухомих точках пружних вузлів жорсткістю  $c_{12}$ .



**Рис. 4.1.** Принципова схема дискретно-континуального міжрезонансного транспортера-сепаратора

Особливістю структурної схеми, наведеної на рис. 4.1, є те, що вона поєднує в собі одночасно дискретну та континуальну структури. До дискретної структури ми відносимо двомасову коливальну систему утворену з активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас, з'єднаних резонансним пружним вузлом жорсткістю  $c_{12}$ . До континуальної структури (ділянки) відносимо тіло з розподіленими параметрами, яке поєднує в собі одночасно жорсткість  $c_{23} = c_{36}$  та інерційний параметр  $m_3 = m_{36}$ . Така структура є гібридною і апіорі вважаємо, що певні частки маси та жорсткості континуальної ділянки (стержня) сприйматимуться двомасовою дискретною частиною системи як підпружинена реактивна маса і коливальна система загалом набуватиме властивостей міжрезонансних.

У якості тіла з розподіленими параметрами приймаємо прямий пружний стержень прямокутного поперечного перерізу, тобто тіло, у якого розміри поперечного перерізу є малими порівняно з його довжиною. Тож саме стержень повинен поєднувати в собі два незалежних параметри: жорсткість  $c_{23}$  та інерційний параметр маси  $m_3$ , значення яких встановлені в попередньому розділі. Математичний опис континуальної ділянки, ідентифікація її параметрів та її

поєднання в одне ціле з дискретною системою є складною задачею, розв'язку якої присвячений матеріал даного розділу.

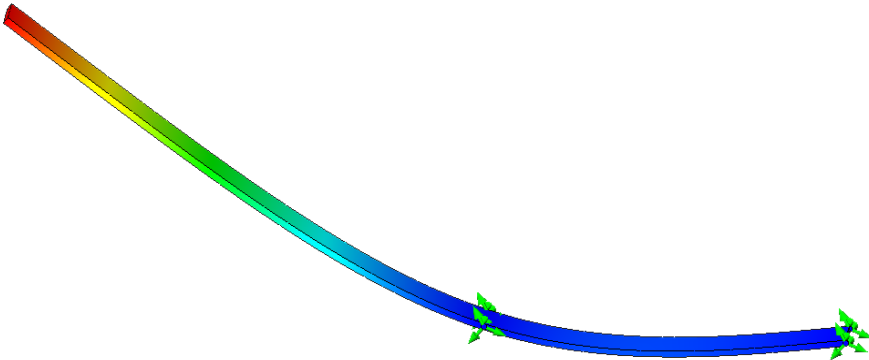
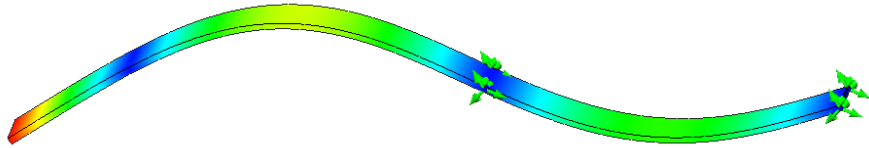
#### 4.2. Математична модель вільних коливань континуальної ділянки.

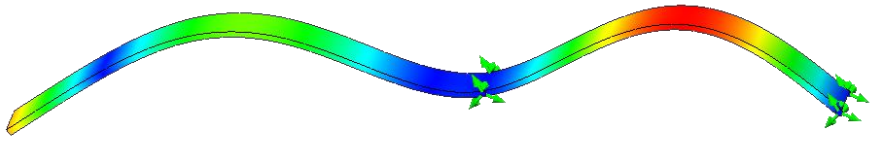
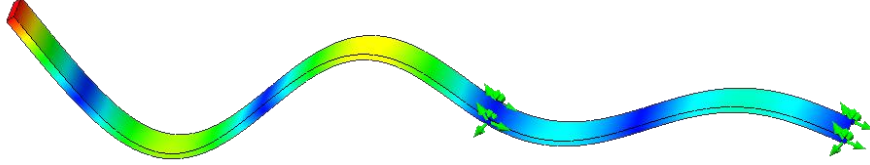
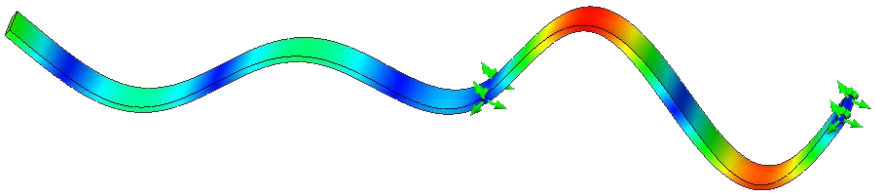
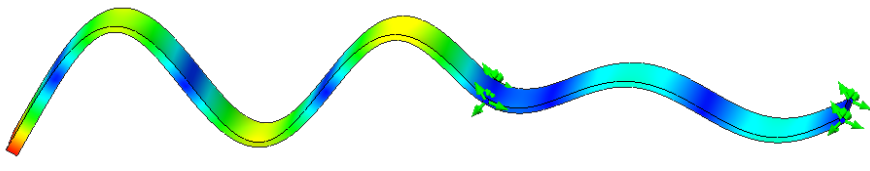
##### Встановлення її першої власної частоти

З огляду на те, що реперним параметром, який відображає дискретний інерційний параметр реактивної маси  $m_3$  та дискретну жорсткість пружного вузла  $c_{23}$  в континуальній ділянці є парціальна частота реактивної маси (див. вираз (3.21)), дослідження розпочнемо зі встановлення першої власної частоти коливань стержня. Саме перша власна частота (перша форма) коливань стержня наділена найвищою амплітудою коливань консолі (табл. 4.1). Це опосередковано дозволить підтвердити наявність в стержні згаданих параметрів (їх співвідношень), за умови якщо його перша власна частота коливань співпаде з парціальною частотою реактивної маси еталонної дискретної моделі.

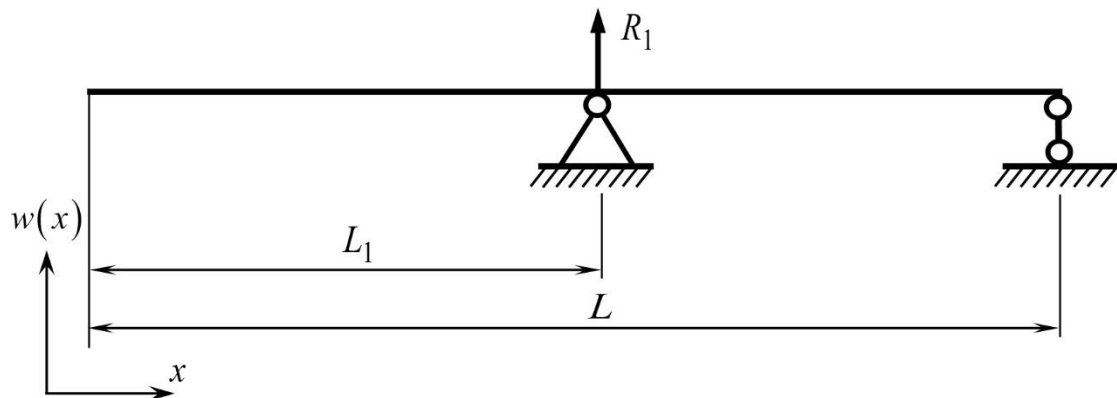
Таблиця 4.1

Форми коливань стержня

№ форми коливань	Схема прогинів
<b>I</b>	
<b>II</b>	

III	
IV	
V	
VI	

Конструктивна схема кріплення стержня пропонується такою, як це зображено на рис. 4.2. Її перевагами є те, що передбачено консоль зі значним прольотом (по відношенню до усієї довжини стержня), здатна збурюватись кінематично і накопичувати значні інерційні сили, необхідні для приведення коливальної системи в рух. Збурення стержня можна здійснювати через приведення в рух однієї з опор ексцентриковим приводом. Для опису такого стержня користуємось класичною теорією коливань прямих пружних стержнів.



**Рис. 4.2.** Розрахункова схема стержня з вільним кінцем у початку координат



Встановлення власної частоти континуальної системи зводиться до того, що необхідно розглянути стержень, що має декілька прольотів [67]. Два незалежних прольоти пов'язуватимуться через реакцію  $R_1$  в шарнірній опорі. Використовуючи [4, 100], рівняння прогинів лівої  $w_{лів1}$  та правої  $w_{пр1}$  ділянок стержня пов'язуватимемо згідно залежності:

$$w_{пр1} = w_{лів1} + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_1)), \quad (4.1)$$

де  $\xi$  – параметр, що встановлюється згідно виразу (2.30);

$R_1$  – реакція в лівій (першій) опорі;

$$V(\xi(x - L_1)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(x - L_1)) - \sin(\xi(x - L_1)));$$

$L_1$  – довжина консольного прольоту (лівої ділянки).

За початок відліку беремо лівий кінець, який перебуває у вільному стані. Саме за умовами на лівому кінці формуємо рівняння прогинів  $w_{лів1}$  лівої ділянки. Згідно з даними табл. 2.1, початкові умови на цьому кінці становлять:

$$\left. \frac{d^2 w_{лів1}(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{d^3 w_{лів1}(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 0. \quad (4.3)$$

Умови (4.2) та (4.3) виконують функції Крилова  $S$  та  $T$  (див. значення функцій (2.37)). Тож рівняння прогинів  $w_{лів1}$  лівої ділянки ( $0 \leq x \leq L_1$ ), залишаючи в загальному рівнянні (2.34) лише функції  $S$  та  $T$ , матиме вигляд:

$$w_{лів1}(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x), \quad (4.4)$$

де  $S(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L) + \cos(\xi L));$

$$T(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) + \sin(\xi L));$$

$A, B$  – довільні постійні.

Тоді рівняння прогинів  $w_{np1}$  на правій ділянці ( $L_1 \leq x \leq L$ ), підставляючи (4.4) в вираз (4.1), набуде вигляду:

$$w_{np1}(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_1)). \quad (4.5)$$

Рівняння (4.4) та (4.5) записані у загальному вигляді. Щоб встановити першу власну частоту стержня складемо частотне рівняння. Для його формування синтезуємо систему рівнянь, яка задовольнить крайовим умовам на другому (правому) кінці та в першій опорі (в опорі з реакцією  $R_1$ ).

Перше рівняння формуємо наступним чином. Правий кінець стержня на довжині  $L$  (рис. 4.2) шарнірно опертий, тож прогин та момент на кінці рівні нулю. Початкові умови його кріплення (табл. 2.1) матимуть вигляд:

$$w_{np1}(L) = 0; \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{d^2 w_{np1}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.7)$$

Зважаючи на умову (4.6), рівняння (4.5), коли  $x = L$ , набуде вигляду:

$$w_{np1}(L) = A \cdot S(\xi L) + B \cdot T(\xi L) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(L - L_1)) = 0, \quad (4.8)$$

де  $V(\xi(L - L_1)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L - L_1)) - \sin(\xi(L - L_1)))$ .

Друге рівняння формуємо згідно умови (4.7), за якої друга похідна прогину  $w_{np1}$  кінця правої ділянки, що символізує момент, дорівнює нулю. Тож двічі про- диференціювавши рівняння (4.5) та підставивши в нього значення  $x = L$ , отримаємо:

$$\left. \frac{d^2 w_{np1}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = A \xi^2 \cdot U(\xi L) + B \xi^2 \cdot V(\xi L) + \frac{R_1 \xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T(\xi(L - L_1)) = 0, \quad (4.9)$$

де  $U(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L) - \cos(\xi L))$ ;

$$V(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) - \sin(\xi L));$$

$$T(\xi(L - L_1)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L - L_1)) + \sin(\xi(L - L_1))).$$

Оскільки у нас три невідомих: постійні  $A$ ,  $B$  та реакція  $R_1$  на першій опорі, а ми оперуємо лише двома рівняннями (4.8) та (4.9), потрібно додати ще одне рівняння. Його сформуємо з умови рівності нулю прогину на першій опорі. Використовуючи рівняння прогину лівої ділянки (4.4) на довжині  $x = L_1$ , де саме розташована перша опора, рівняння матиме вигляд:

$$w_{\text{лів}}(L_1) = A \cdot S(\xi L_1) + B \cdot T(\xi L_1) = 0, \quad (4.10)$$

де  $S(\xi L_1) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L_1) + \cos(\xi L_1));$

$$T(\xi L_1) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L_1) + \sin(\xi L_1)).$$

Тож враховуючи (4.8) – (4.10), отримуємо систему з трьох рівнянь, яка описує вільні коливання стержня [67], зображеного на рис. 4.2:

$$\begin{cases} A \cdot S(\xi L) + B \cdot T(\xi L) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(L - L_1)) = 0; \\ A \cdot U(\xi L) + B \cdot V(\xi L) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot T(\xi(L - L_1)) = 0; \\ A \cdot S(\xi L_1) + B \cdot T(\xi L_1) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

З системи рівнянь (4.11) виділимо частотну матрицю:

$$\Delta(\xi L) = \begin{vmatrix} S(\xi L) & T(\xi L) & V(\xi(L - L_1)) \\ U(\xi L) & V(\xi L) & T(\xi(L - L_1)) \\ S(\xi L_1) & T(\xi L_1) & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

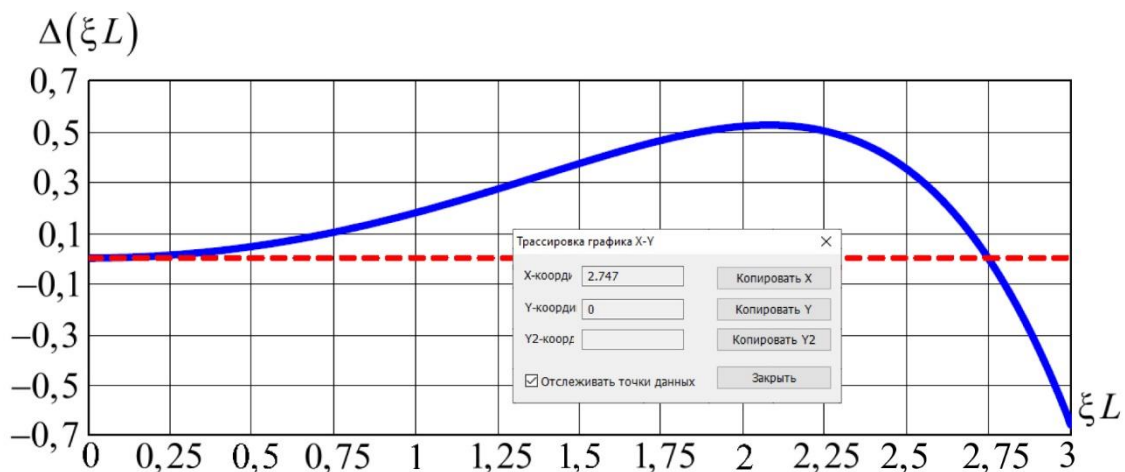
визначник якої запишеться як (додаток D, вираз (D.2)):

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & -S(\xi L) \cdot T(\xi(L - L_1)) \cdot T(\xi L_1) + U(\xi L) \times \\ & \times V(\xi(L - L_1)) \cdot T(\xi L_1) + S(\xi L_1) \cdot T(\xi L) \times \\ & \times T(\xi(L - L_1)) - S(\xi L_1) \cdot V(\xi(L - L_1)) \cdot V(\xi L). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Розписавши та спростивши рівняння (4.13), підставивши в нього вирази функцій Кривола, отримаємо (додаток D, вираз (D.3)):

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & \frac{\operatorname{sh}(\xi L) \cdot \sin(\xi L - 2\xi L_1)}{8} - \frac{\operatorname{ch}(\xi L) \cdot \cos(\xi L - 2\xi L_1)}{8} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\xi L - 2\xi L_1) \cdot \sin(\xi L)}{8} + \frac{\operatorname{ch}(\xi L) \cdot \cos(\xi L)}{8} + \frac{\operatorname{sh}(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\xi L - \xi L_1) \cdot \sin(\xi L - \xi L_1)}{2} - \frac{\operatorname{sh}(\xi L_1) \cdot \operatorname{sh}(\xi L - \xi L_1) \cdot \cos(\xi L)}{4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Початково задаємося довжинами стержня  $L = 0,83\text{ м}$  й  $L_1 = 0,475\text{ м}$ . Використовуючи програмний продукт MathCAD, проведемо графічне відображення результатів розрахунку визначника частотної матриці на проміжку  $\xi L \in [0...3]$ . Визначник (4.14) є рівний нулю при  $\xi L = 2,7469$  (додаток D, вираз (D.4), рис. 4.3 (додаток D, рис. D.2)).



**Рис. 4.3.** Графічна інтерпретація значення визначника частотної матриці (4.14) на проміжку  $\xi L \in [0...3]$

Перш ніж встановити колову частоту  $\omega_{вс}$  власних коливань стержня, визначимо з (2.42) масу погонного метра  $m_{нм}$  (додаток D):

$$m_{нм} = \rho h b_n = 7850 \cdot 0,045 \cdot 5,74 \cdot 10^{-3} = 2,028 \text{ кг}, \quad (4.15)$$

де  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$  – питома маса (густина) сталі;

$h = 0,045$  м – ширина пружного стержня;

$b_n = 5,74 \cdot 10^{-3}$  м – товщина пружного стержня.

Використовуючи вираз (2.30), перша власна колова частота коливань  $\omega_{\text{вс}}$  стержня визначатиметься згідно виразу:

$$\omega_{\text{вс}} = (\xi L)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m_{nm} L^4}}. \quad (4.16)$$

де  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па – модуль пружності I-го роду. Приймаємо поперечний переріз пружного стержня прямокутним, для якого момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної лінії визначається згідно залежності [91]:

$$J_z = h \cdot b_n^3 / 12. \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.17) в (4.16), перша власна колова частота коливань стержня, як тіла з розподіленими параметрами, становитиме (додаток D, вираз (D.5)):

$$\begin{aligned} \omega_{\text{вс}} &= (\xi L)^2 \sqrt{\frac{Ehb_n^3}{12m_{nm} L^4}} = 2,768^2 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,045 \cdot (5,74 \cdot 10^{-3})^3}{12 \cdot 2,028 \cdot 0,83^4}} = \\ &= 93,8 \text{ рад/с.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Як бачмо із виразу (4.18), колова частота власних коливань стержня є близькою до  $\omega_n = 96,1$  рад/с, встановленої згідно з (3.21). Похибка в отриманих результатах є допустимою, тому вказані геометричні параметри стержня є прийнятними для подальших обрахунків в дисертаційній роботі.

Для перевірки отриманих результатів проведемо аналогічний зворотній розрахунок за схемою на рис. 4.4, де лівий кінець шарнірно опертий [67]. Аналогічно до (4.1), два незалежних прольоти, лівий та правий, пов'язуватимемо через реакцію  $R_2$  в уже другій опорі. Рівняння прогинів лівої  $w_{\text{лів}2}$  та правої  $w_{\text{пр}2}$  ділянок стержня пов'язуватимемо згідно залежності:

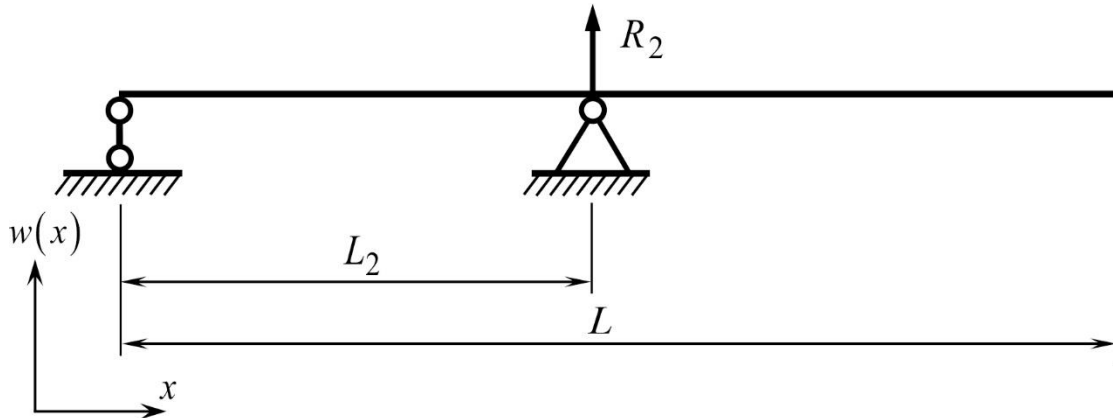
$$w_{\text{пр}2} = w_{\text{лів}2} + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_2)), \quad (4.19)$$

де  $\xi$  – параметр, що встановлюється згідно виразу (2.30);

$R_2$  – реакція в правій (другій) опорі;

$$V(\xi(x - L_2)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(x - L_2)) - \sin(\xi(x - L_2)));$$

$L_2$  – довжина лівої ділянки між двома шарнірними опорами.



*Рис. 4.4. Розрахункова схема стержня з шарнірно опертим кінцем у початку координат*

За початок відліку беремо лівий кінець, який шарнірно опертий. Саме за умовами на лівому кінці формуємо рівняння прогинів  $w_{лів2}$  лівої ділянки. Згідно з даними табл. 2.1 початкові умови на цьому кінці становлять:

$$w_{лів2}(0) = 0; \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{d^2 w_{лів2}(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0. \quad (4.21)$$

Умови (4.20) та (4.21) виконують функції Крилова  $T$  та  $V$  (див. значення функцій (2.37)). Тож рівняння прогинів  $w_{лів2}$  лівої ділянки ( $0 \leq x \leq L_2$ ), залишаючи в загальному рівнянні (2.34) лише функції  $T$  та  $V$ , матиме вигляд:

$$w_{лів2}(x) = B \cdot T(\xi x) + D \cdot V(\xi x), \quad (4.22)$$

де  $T(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) + \sin(\xi L));$

$$V(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) - \sin(\xi L));$$

$B, D$  – довільні постійні.

Рівняння прогинів  $w_{np2}$  на правій ділянці ( $L_2 \leq x \leq L$ ), підставляючи (4.22) в вираз (4.19), набуде вигляду:

$$w_{np2}(x) = B \cdot T(\xi x) + D \cdot V(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_2)), \quad (4.23)$$

де  $V(\xi(x - L_2)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(x - L_2)) - \sin(\xi(x - L_2)))$ .

Рівняння (4.22) та (4.23), як і (4.4) та (4.5), записані у загальному вигляді. Для встановлення основної власної частоти стержня необхідно сформулювати частотне рівняння. Для цього синтезуємо систему рівнянь, яка задовольнить крайовим умовам правого кінця та умовам в другій опорі. Перше рівняння формуємо наступним чином. Правий кінець стержня на довжині  $L$  вільний (рис. 4.4), тож початкові умови його защемлення матимуть вигляд (табл. 2.1):

$$\left. \frac{d^2 w_{np2}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0; \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{d^3 w_{np2}(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.25)$$

Застосовуючи крайову умову (4.24) до виразу (4.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 w_{np2}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} &= B \xi^2 \cdot V(\xi L) + D \xi^2 \cdot T(\xi L) + \\ &+ \frac{R_2 \xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T(\xi(L - L_2)) = 0; \end{aligned} \quad (4.26)$$

де  $T(\xi(L - L_2)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L - L_2)) + \sin(\xi(L - L_2)))$ .

Друге рівняння формуємо згідно умови (4.25), за якої третя похідна прогину  $w_{np2}$  кінця правої ділянки дорівнює нулю. Тож тричі продиференціювавши рівняння (4.23) та підставивши в нього значення  $x = L$ , отримаємо:

$$\left. \frac{d^3 w_{np2}(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = B\xi^3 \cdot U(\xi L) + D\xi^3 \cdot S(\xi L) + \frac{R_2 \xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S(\xi(L-L_2)) = 0, \quad (4.27)$$

$$\text{де } U(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L) - \cos(\xi L));$$

$$S(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L) + \cos(\xi L));$$

$$S(\xi(L-L_2)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L-L_2)) - \sin(\xi(L-L_2))).$$

Маючи три невідомі: постійні  $T$ ,  $V$  та реакцію  $R_2$  в другій опорі, на даний момент оперуємо двома рівняннями (4.26) та (4.27). Третє рівняння сформуємо з умови рівності нулю прогину на другій опорі. Використовуючи рівняння прогину лівої ділянки (4.22) на довжині  $x = L_2$ , де якраз знаходиться друга опора, матимемо:

$$w_{лів2}(L_2) = B \cdot T(\xi L_2) + D \cdot V(\xi L_2) = 0, \quad (4.28)$$

$$\text{де } T(\xi L_2) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L_2) + \sin(\xi L_2));$$

$$V(\xi L_2) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L_2) - \sin(\xi L_2)).$$

З врахуванням (4.26) – (4.28) отримуємо систему з трьох рівнянь, яка описує вільні коливання стержня [67], зображеного на рис. 4.4:

$$\begin{cases} B \cdot V(\xi L) + D \cdot T(\xi L) + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot T(\xi(L-L_2)) = 0; \\ B \cdot U(\xi L) + D \cdot S(\xi L) + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot S(\xi(L-L_2)) = 0; \\ B \cdot T(\xi L_2) + D \cdot V(\xi L_2) = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Частотна матриця із системи (4.29) набуде вигляду:

$$\Delta(\xi L) = \begin{vmatrix} V(\xi L) & T(\xi L) & T(\xi(L-L_2)) \\ U(\xi L) & S(\xi L) & S(\xi(L-L_2)) \\ T(\xi L_2) & V(\xi L_2) & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.30)$$

Визначник матриці (4.30) рівний (додаток Е, вираз (Е.2)):

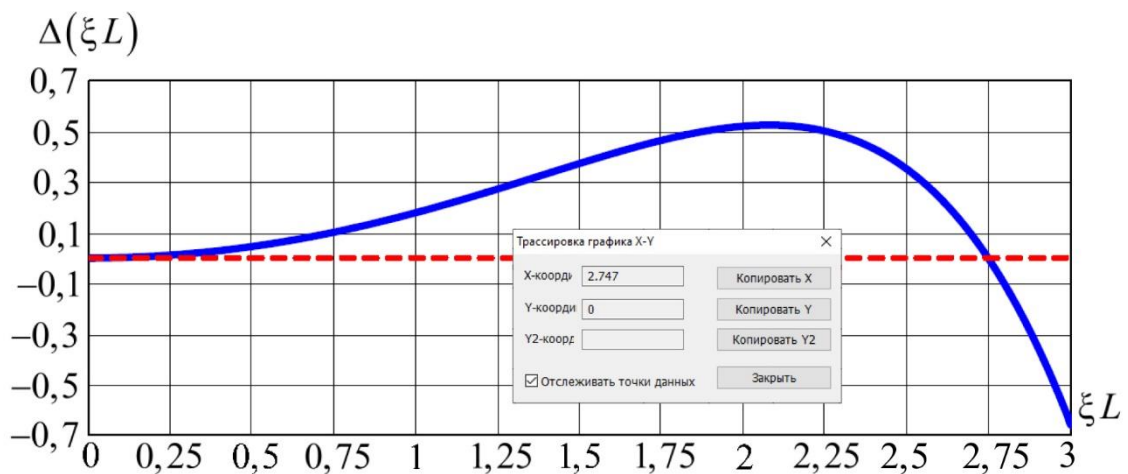


$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & -V(\xi L) \cdot S(\xi(L - L_2)) \cdot V(\xi L_2) + U(\xi L) \times \\ & \times T(\xi(L - L_2)) \cdot V(\xi L_2) + T(\xi L_2) \cdot T(\xi L) \times \\ & \times S(\xi(L - L_2)) - T(\xi L_2) \cdot T(\xi(L - L_2)) \cdot S(\xi L). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Спростивши рівняння (4.31), підставивши значення функцій Кривола, отримаємо (додаток Е, вираз (Е.3)):

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & \frac{\text{ch}(\xi L) \cdot \cos(\xi L)}{8} - \frac{\text{sh}(\xi L) \cdot \sin(\xi L - 2\xi L_2)}{8} - \\ & - \frac{\text{sh}(\xi L - 2\xi L_2) \cdot \sin(\xi L)}{8} - \frac{\text{ch}(\xi L) \cdot \cos(\xi L - 2\xi L_2)}{8} + \frac{\text{sh}(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \\ & + \frac{\text{sh}(\xi L_2) \cdot \sin(\xi L_2)}{2} - \frac{\text{sh}(\xi L_2) \cdot \text{sh}(\xi L - \xi L_2) \cdot \cos(\xi L)}{4}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Зважаючи, що довжини  $L = 0,83$  м й  $L_2 = 0,355$  м (рис. 4.4), визначник (4.32) є рівний нулю при  $\xi L = 2,7469$  (рис. 4.5 (додаток Е, рис. Е.2, вираз (Е.4))). Результат збігся зі значенням, отриманим згідно (4.14).



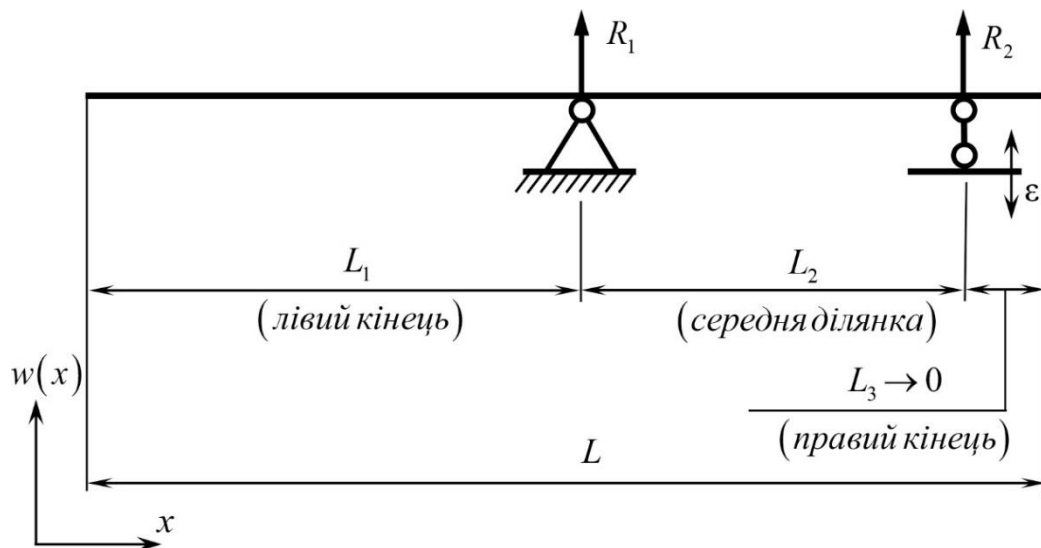
**Рис. 4.5.** Графічна інтерпретація визначника частотної матриці (4.32) на проміжку  $\xi L \in [0...3]$

Отже, незалежно від того з якого кінця був розпочатий розрахунок стержня (рис. 4.2 або рис. 4.4), значення його першої власної частоти незмінне. Тому опосередковано можна стверджувати, що частотний розрахунок проведено правильно, а результат можна використовувати для подальшого синтезу.

### 4.3. Математична модель вимушених коливань континуальної ділянки.

#### Перевірка значення її першої власної частоти

Розрахунок вимушених коливань континуальної ділянки зі збуренням від кривошипно-шатунного механізму з ексцентриситетом  $\varepsilon$  проводимо за схемою (рис. 4.6). Наведена схема відрізняється від схеми на рис. 4.2 додатково введеною правою ділянкою довжиною  $L_3 = 0,1$  мм, що дасть нам можливість додатково врахувати в розрахунках реакцію  $R_2$ . Реакції в опорах  $R_1$  та  $R_2$  необхідні для синтезу дискретно-континуальної системи. Передбачається, що мізерна довжина  $L_3$  правої ділянки не вплине на точність розрахунку.



**Рис. 4.6.** Розрахункова схема континуальної ділянки  
(стержня з розподіленими параметрами)

Як і в п. 4.2 розв'язок рівняння (2.31) шукаємо у загальному вигляді, згідно залежності (2.34), де постійні інтегрування визначаємо з граничних умов. За початок відліку приймаємо лівий кінець стержня, який знаходиться у вільному стані [70, 71]. Надалі стержень називатимемо континуальною ділянкою, оскільки схема на рис. 4.6 повністю відображає реактивний вузол дискретно-континуальної вібраційної машини. Використовуючи умови спряження, рівняння прогинів на середній та правій ділянках визначатимуться згідно залежностей:

$$w_{сер}(x) = w_{лів}(x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_1)); \quad (4.33)$$

$$w_{пр}(x) = w_{сер}(x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - (L_1 + L_2))), \quad (4.34)$$

де  $\xi$  – параметр, що встановлюється згідно виразу (2.30);

$R_1, R_2$  – реакції відповідно в лівій та правій (першій та другій) опорах;

$$V(\xi(x - (L_1 + L_2))) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(x - (L_1 + L_2))) - \sin(\xi(x - (L_1 + L_2)))).$$

За початок відліку вибираємо лівий кінець, що перебуває у вільному стані. За граничними умовами на цьому кінці формуємо рівняння прогинів  $w_{лів}$  лівої ділянки. Згідно з даними табл. 2.1 початкові умови на цьому кінці становлять:

$$\left. \frac{d^2 w_{лів}(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad (4.35)$$

$$\left. \frac{d^3 w_{лів}(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad (4.36)$$

і є ідентичними умовам (4.2) та (4.3). Тоді рівняння прогинів  $w_{лів}$  на лівій ділянці ( $0 \leq x \leq L_1$ ), з врахуванням умов (4.35) та (4.36), набуде вигляду ідентичного (4.4):

$$w_{лів}(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x). \quad (4.37)$$

Рівняння прогинів  $w_{сер}$  на середній ділянці ( $L_1 \leq x \leq L_2$ ), підставляючи (4.37) в вираз (4.33), набуде вигляду ідентичного до виразу (4.5):

$$w_{сер}(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_1)). \quad (4.38)$$

Рівняння прогинів  $w_{пр}$  на правій ділянці ( $L_2 \leq x \leq L$ ), підставляючи (4.38) в вираз (4.34), набуде вигляду:

$$w_{пр}(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - L_1)) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi(x - (L_1 + L_2))). \quad (4.39)$$

де  $V(\xi(x - (L_1 + L_2))) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(x - (L_1 + L_2))) - \sin(\xi(x - (L_1 + L_2))))$ .

Оскільки рівняння (4.37) – (4.39) записані у загальному вигляді, для встановлення першої власної частоти коливань континуальної ділянки необхідно синтезувати систему рівнянь, яка задовольнить крайовим умовам на правому кінці та в опорах. Так як правий кінець континуальної ділянки вільний, початкові умови його кріплення згідно з табл. 2.1 запишуться як:

$$\left. \frac{d^2 w_{np}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0; \quad (4.40)$$

$$\left. \frac{d^3 w_{np}(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.41)$$

і перше рівняння формуємо згідно умови (4.40), за якої друга похідна прогину  $w_{np}$  кінця правої ділянки, що символізує момент, дорівнює нулю. Двічі продиференціювавши рівняння (4.39) та підставивши в нього значення  $x = L$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 w_{np}(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = A \xi^2 \cdot U(\xi L) + B \xi^2 \cdot V(\xi L) + \frac{R_1 \xi^2}{\xi^3 E J_z} \cdot T(\xi(L - L_1)) + \\ + \frac{R_2 \xi^2}{\xi^3 E J_z} \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))), \end{aligned} \quad (4.42)$$

де  $U(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L) - \cos(\xi L))$ ;

$V(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) - \sin(\xi L))$ ;

$T(\xi(L - L_1)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L - L_1)) + \sin(\xi(L - L_1)))$ ;

$T(\xi(L - (L_1 + L_2))) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L - (L_1 + L_2))) + \sin(\xi(L - (L_1 + L_2))))$ .

Друге рівняння формуємо згідно умови (4.41), за якої третя похідна прогину  $w_{np}$  кінця правої ділянки, що символізує поперечну силу, дорівнює нулю. Застосовуючи рівняння (4.39), коли  $x = L$ , вираз набуде вигляду:

$$\left. \frac{d^3 w_{np}(x)}{dx^3} \right|_{x=L} = A \xi^3 \cdot T(\xi L) + B \xi^3 \cdot U(\xi L) + \frac{R_1 \xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S(\xi(L-L_1)) + \frac{R_2 \xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S(\xi(L-(L_1+L_2))), \quad (4.43)$$

$$\text{де } T(\xi L) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) + \sin(\xi L));$$

$$S(\xi(L-L_1)) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi(L-L_1)) + \cos(\xi(L-L_1)));$$

$$S(\xi(L-(L_1+L_2))) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi(L-(L_1+L_2))) + \cos(\xi(L-(L_1+L_2)))).$$

Зважаючи, що в нас чотири невідомих: постійні  $A$ ,  $B$  та реакції на опорах  $R_1$  й  $R_2$ , нам потрібні ще два рівняння крім (4.42) та (4.43). Їх сформуємо з умов, що опори переміщаються на певні амплітудні значення. Враховуючи, що в першій опорі, де реакція  $R_1$ , зміщення  $\delta_1 = Y_2$  ( $Y_2$  – амплітуда коливань проміжної маси  $m_2$ ) (рис. 4.7), рівняння прогину лівої ділянки (4.37) на довжині  $x = L_1$  набуде вигляду:

$$w_{лів}(L_1) = A \cdot S(\xi L_1) + B \cdot T(\xi L_1) = \delta_1, \quad (4.44)$$

$$\text{де } S(\xi L_1) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L_1) + \cos(\xi L_1));$$

$$T(\xi L_1) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L_1) + \sin(\xi L_1)).$$

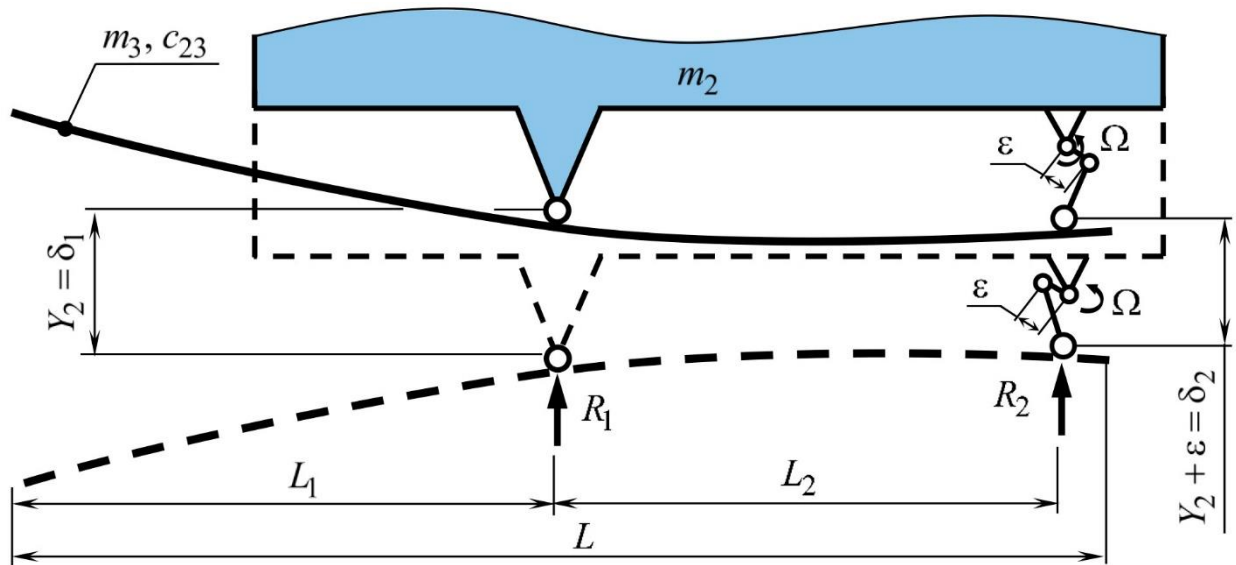
Вираз (4.44) є третім рівнянням. Четверте рівняння формуємо з наступних міркувань. В другій опорі, де реакція  $R_2$ , зміщення  $\delta_2 = Y_2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму) (рис. 4.7). Рівняння прогину середньої ділянки (4.38) на довжині  $x = L_1 + L_2$  набуде вигляду:

$$w_{сеп}(L_1 + L_2) = A \cdot S(\xi(L_1 + L_2)) + B \cdot T(\xi(L_1 + L_2)) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V(\xi L_2) = \delta_2, \quad (4.45)$$

$$\text{де } S(\xi(L_1 + L_2)) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi(L_1 + L_2)) + \cos(\xi(L_1 + L_2)));$$

$$T(\xi(L_1 + L_2)) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(L_1 + L_2)) + \sin(\xi(L_1 + L_2)));$$

$$V(\xi L_2) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L_2) - \sin(\xi L_2)).$$



**Рис. 4.7.** Схема руху проміжної маси  $m_2$  з континуальною ділянкою

Згідно виразів (4.42) – (4.45) отримуємо систему з чотирьох рівнянь, яка описує вимушені коливання континуальної ділянки [70, 71]:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot U(\xi L) + B \cdot V(\xi L) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot T(\xi(L - L_1)) + \\ \quad + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))) = 0; \\ A \cdot T(\xi L) + B \cdot U(\xi L) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot S(\xi(L - L_1)) + \\ \quad + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot S(\xi(L - (L_1 + L_2))) = 0; \\ A \cdot S(\xi L_1) + B \cdot T(\xi L_1) = \delta_1 = Y_2; \\ A \cdot S(\xi(L_1 + L_2)) + B \cdot T(\xi(L_1 + L_2)) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi L_2) = \delta_2 = Y_2 + \varepsilon. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

З системи рівнянь (4.46) складемо частотну матрицю:

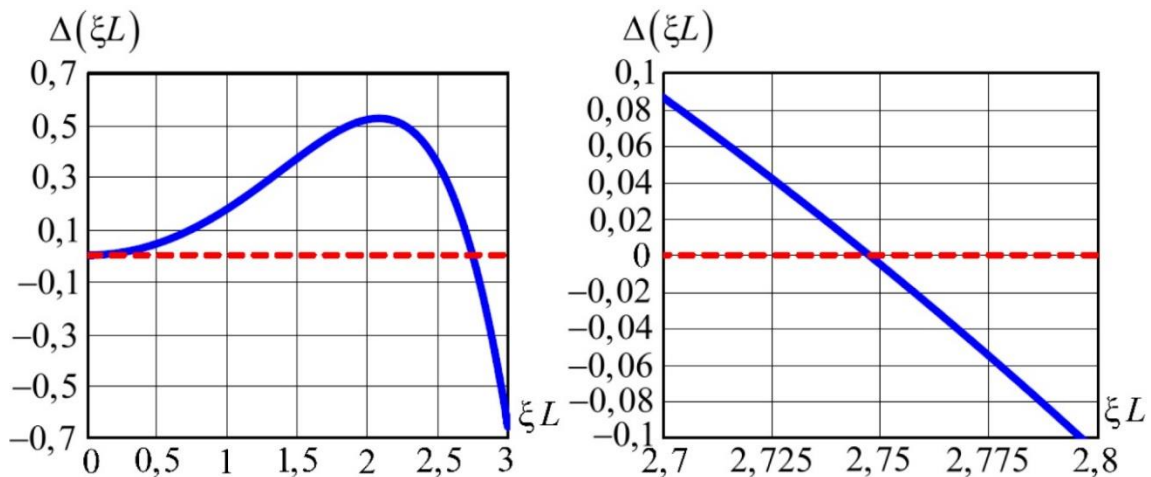
$$\Delta(\xi L) = \begin{vmatrix} U(\xi L) & V(\xi L) & T(\xi(L-L_1)) & T(\xi(L-(L_1+L_2))) \\ T(\xi L) & U(\xi L) & S(\xi(L-L_1)) & S(\xi(L-(L_1+L_2))) \\ S(\xi L_1) & T(\xi L_1) & 0 & 0 \\ S(\xi(L_1+L_2)) & T(\xi(L_1+L_2)) & V(\xi L_2) & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.47)$$

Визначник (4.47) набуде вигляду (додаток F, вираз F.2):

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & U(\xi L) \cdot T(\xi L_1) \cdot S(\xi(L-(L_1+L_2))) \cdot V(\xi L_2) - T(\xi L) \times \\ & \times T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L-(L_1+L_2))) \cdot V(\xi L_2) - S(\xi L_1) \cdot V(\xi L) \times \\ & \times S(\xi(L-(L_1+L_2))) \cdot V(\xi L_2) + S(\xi L_1) \cdot U(\xi L) \cdot T(\xi(L-(L_1+L_2))) \times \\ & \times V(\xi L_2) + S(\xi L_1) \cdot T(\xi(L_1+L_2)) \cdot T(\xi(L-L_1)) \cdot S(\xi(L-(L_1+L_2))) - \\ & - S(\xi L_1) \cdot T(\xi(L_1+L_2)) \cdot T(\xi(L-(L_1+L_2))) \cdot S(\xi(L-L_1)) - \\ & - S(\xi(L_1+L_2)) \cdot T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L-L_1)) \cdot S(\xi(L-(L_1+L_2))) + \\ & + S(\xi(L_1+L_2)) \cdot T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L-(L_1+L_2))) \cdot S(\xi(L-L_1)). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Враховуючи довжини  $L = 0,8301$  м,  $L_1 = 0,475$  м й  $L_2 = 0,355$  м, визначник (4.48) рівний нулю при  $\xi L = 2,7472$  (рис. 4.8, додаток F, рис. F.2, вираз (F.3)).

Дане значення практично не відрізняється від результатів, отриманих згідно (4.14) й (4.32), де воно становить  $\xi L = 2,7469$ .



**Рис. 4.8.** Графічна інтерпретація визначника частотної матриці (4.48) на проміжку  $\xi L \in [0...3]$

Використавши вирази (4.18), колова частота власних коливань стержня з правим кінцем рівна (додаток F, вираз (F.4)):

$$\omega_{\text{вс}} = (\xi L)^2 \sqrt{\frac{Ehb_n^3}{12m_{\text{нм}}L^4}} =$$

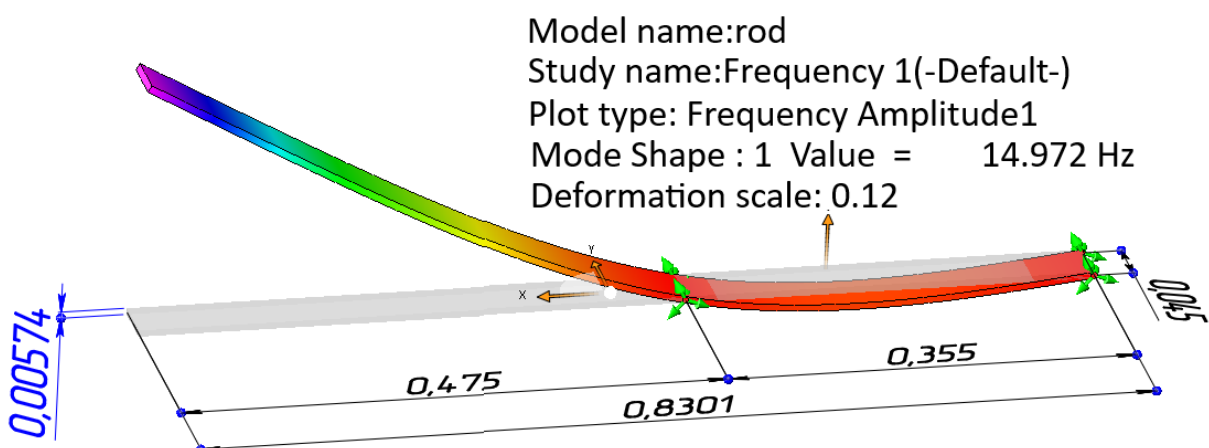
$$= 2,7472^2 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,045 \cdot (5,74 \cdot 10^{-3})^3}{12 \cdot 2,028 \cdot 0,8301^4}} = 93,9 \text{ рад/с},$$
(4.49).

звідки циклічна частота власних коливань становить (додаток F, вираз (F.5)):

$$\nu_{\text{вс}} = \frac{\omega_{\text{вс}}}{2\pi} = \frac{93,9}{2\pi} = 14,9 \text{ Гц}.$$
(4.50).

Можемо стверджувати, що введення в розрахунок малого правого кінця практично не вплинуло на значення колової власної частоти  $\omega_{\text{вс}}$  (див. результат, отриманий в (4.18)). Отже припущення, закладені в принципову схему (рис. 4.6), допустимі.

З метою перевірки аналітичних розрахунків, методом скінченних елементів в програмному продукті SOLIDWORKS 2018 знайдено першу власну частоту коливань континуальної ділянки, яка складає  $\nu_{\text{вс}} = 15 \text{ Гц}$  ( $\omega_{\text{вс}} = 94,2 \text{ рад/с}$ ) (рис. 4.9). Результат практично повністю збігається зі значенням, отриманим в (4.50).



**Рис. 4.9.** Перша власна частота коливання континуальної ділянки, значення якої розраховане в програмному продукті SOLIDWORKS 2018



#### 4.4. Математична модель дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи вібромашини

Повернемося до аналізу вимушених коливань континуальної ділянки. Використовуючи систему рівнянь (4.46), знайдемо аналітичні вирази для чотирьох невідомих  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$  та  $R_2$  (додаток G, вирази (G.2) – (G.5)):

$$A = \frac{T((L-L_1-L_2)\xi) \left( S((L-L_1)\xi) \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)T(L_1\xi) - \\ -Y_2T((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} + \right.}{\Delta_k};$$

$$\left. + S((L-L_1-L_2)\xi) \begin{pmatrix} -T((L-L_1)\xi) \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)T(L_1\xi) - \\ -Y_2T((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} - \\ -Y_2V(L\xi)V(L_2\xi) \end{pmatrix} \right); \quad (4.51)$$

$$B = - \frac{\begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)S(L_1\xi) - \\ -Y_2S((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S((L-L_1-L_2)\xi)T((L-L_1)\xi) - \\ -S((L-L_1)\xi)T((L-L_1-L_2)\xi) \end{pmatrix} +}{\Delta_k};$$

$$+ Y_2 \begin{pmatrix} S((L-L_1-L_2)\xi)U(L\xi) - \\ -T(L\xi)T((L-L_1-L_2)\xi) \end{pmatrix} V(L_2\xi); \quad (4.52)$$

$$R_1 = \frac{EJ_z \xi^3 \left( \begin{array}{l} T(L\xi)T((L-L_1-L_2)\xi) \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)T(L_1\xi) - \\ -Y_2T((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)S(L_1\xi) - \\ -Y_2S((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} T((L-L_1-L_2)\xi)U(L\xi) + \\ + S((L-L_1-L_2)\xi) \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)S(L_1\xi) - \\ -Y_2S((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} V(L\xi) - \\ - \begin{pmatrix} (Y_2 + \varepsilon)T(L_1\xi) - \\ -Y_2T((L_1+L_2)\xi) \end{pmatrix} U(L\xi) \end{array} \right)}{\Delta_k}; \quad (4.53)$$

$$R_2 = \frac{EJ_z \xi^3 \left( \begin{array}{c} Y_2 V(L_2 \xi) U(L \xi)^2 - \\ -Y_2 S((L_1 + L_2) \xi) T((L - L_1) \xi) U(L \xi) + \\ + Y_2 S((L - L_1) \xi) T(L_1 \xi) U(L \xi) + \\ + \varepsilon S((L - L_1) \xi) T(L_1 \xi) U(L \xi) - \\ -Y_2 S((L - L_1) \xi) T((L_1 + L_2) \xi) U(L \xi) + \\ + Y_2 S((L - L_1) \xi) S((L_1 + L_2) \xi) V(L \xi) + \\ + (Y_2 + \varepsilon) S(L_1 \xi) \left( \begin{array}{c} T((L - L_1) \xi) U(L \xi) - \\ -S((L - L_1) \xi) V(L \xi) \end{array} \right) + \\ + T(L \xi) \left( \begin{array}{c} -T((L - L_1) \xi) \left( \begin{array}{c} (Y_2 + \varepsilon) T(L_1 \xi) - \\ -Y_2 T((L_1 + L_2) \xi) \end{array} \right) - \\ -Y_2 V(L \xi) V(L_2 \xi) \end{array} \right) \end{array} \right)}{\Delta_k}, \quad (4.54)$$

де

$$\Delta_k = T((L - L_1 - L_2) \xi) \left( \begin{array}{c} S((L - L_1) \xi) \left( \begin{array}{c} S((L_1 + L_2) \xi) T(L_1 \xi) - \\ -S(L_1 \xi) T((L_1 + L_2) \xi) \end{array} \right) + \\ + (S(L_1 \xi) U(L \xi) - T(L \xi) T(L_1 \xi)) V(L_2 \xi) \end{array} \right) + \\ + S((L - L_1 - L_2) \xi) \left( \begin{array}{c} T((L - L_1) \xi) \left( \begin{array}{c} S(L_1 \xi) T((L_1 + L_2) \xi) - \\ -S((L_1 + L_2) \xi) T(L_1 \xi) \end{array} \right) + \\ + (T(L_1 \xi) U(L \xi) - S(L_1 \xi) V(L \xi)) V(L_2 \xi) \end{array} \right).$$

Щоб отримати числові значення для виразів, необхідно попередньо мати амплітуду коливань  $Y_2$  проміжної маси, до якої безпосередньо кріпиться континуальна ділянка. Вона та проміжна маса перебувають у взаємному русі. На амплітуду коливань проміжної маси впливає рух активної.

По суті, рухи активної маси, проміжної маси та континуальної ділянки повністю взаємопов'язані дискретно-континуальною коливальною системою. Тому, щоб знайти необхідні невідомі амплітуди коливань мас, потрібно скласти математичну модель дискретно-континуальної коливальної системи.

Для знаходження амплітудних значень активної та проміжної мас (відповідно  $Y_1$  та  $Y_2$ ) достатньо використати математичну модель механічної коливної системи (див. рис. 4.1 та рис. 4.6), яка прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 Y_1 + c_{12}(Y_1 - Y_2) = 0; \\ -m_2\omega^2 Y_2 + c_{12}(Y_2 - Y_1) = R_1 + R_2. \end{cases} \quad (4.55)$$

Особливістю цієї моделі є те, що вона уособлює міжрезонансну дискретно-континуальну систему, частина якої

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 Y_1 + c_{12}(Y_1 - Y_2) = 0; \\ -m_2\omega^2 Y_2 + c_{12}(Y_2 - Y_1) = \dots, \end{cases} \quad (4.56)$$

описує дискретну частину системи (рух двох мас  $m_1$  та  $m_2$ ), а частка

$$R_1 + R_2 \quad (4.57)$$

символізує континуальну ділянку, яка вводиться в модель у вигляді реакцій опор.

Підставивши вирази (4.53) та (4.54) відповідно для  $R_1$  і  $R_2$  в (4.55), знайдено аналітичні залежності для амплітуд  $Y_1$  та  $Y_2$  (додаток G, вирази (G.7), (G.8)), за якими можна аналізувати амплітудно-частотні характеристики дискретно-континуальної системи. Амплітуди коливань активної та проміжної мас (відповідно  $Y_1$  та  $Y_2$ ) залежать від багатьох чинників. Інерційно-жорсткісні параметри уже встановлені. Проте, для аналізу вимушених коливань залишається невідомим значення ексцентриситету  $\varepsilon$  кривошипно-шатунного механізму дискретно-континуальної системи, від якого залежить сила збурення (див. вираз (3.1)), а як наслідок амплітуди коливань ( $Y_1$  та  $Y_2$ ) та реакції в опорах ( $R_1$  та  $R_2$ ).

Аналітичний вираз для ексцентриситету  $\varepsilon$  встановлюємо з виразу для амплітуди коливань  $Y_1$  активної маси (додаток G, вираз (G.9)). Зважаючи на те, що амплітуда коливань  $Y_1$  активної маси на частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с ( $n = 950$  об/хв) повинна становити  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м (див. вираз (3.15)), інерційні параметри активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас відповідно рівні  $m_1 = 83,7$  кг й  $m_2 = 62,1$  кг, а жорсткість пружного вузла  $c_{12} = 3,76 \cdot 10^5$  Н/м ,

розрахована величина ексцентриситету  $\varepsilon$  кривошипно-шатунного механізму буде рівна  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м (додаток G, вираз (G.9)).

Відразу варто зазначити, що отримане значення ексцентриситету  $\varepsilon$  для дискретно-континуальної системи відрізняється від значення ексцентриситету  $\varepsilon_3 = 6,5 \cdot 10^{-3}$  м для еталонної тримасової дискретної системи (див. вираз (3.14)). Воно в 2,8 разів менше, що є безсумнівною перевагою дискретно-континуальних систем. Підставивши у вираз для амплітуди коливань проміжної маси (додаток G, вираз (G.8)) всі вище встановлені параметри, отримаємо величину амплітуди коливань  $Y_2$  проміжної маси (додаток G, вираз (G.10)):

$$Y_2 = -3 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (4.58)$$

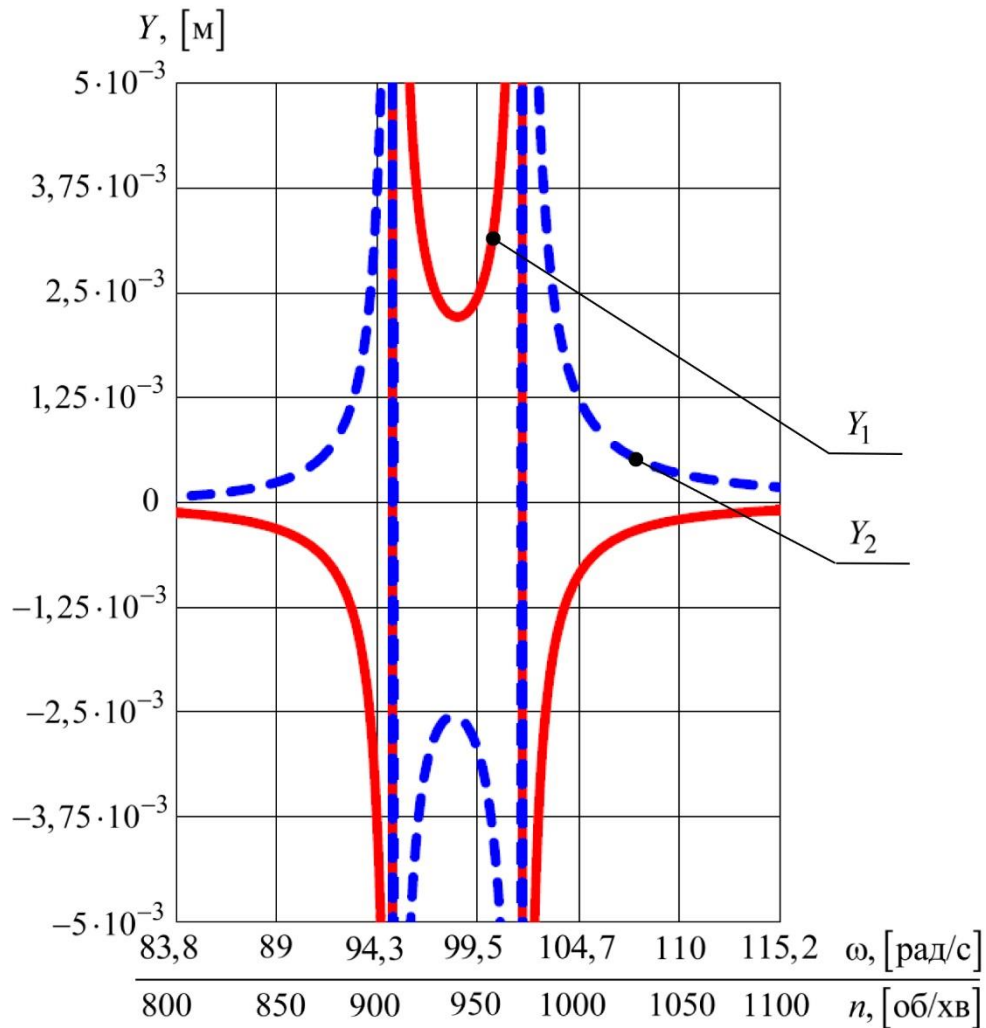
Використавши отримане значення  $Y_2 = -3 \cdot 10^{-3}$  м амплітуди коливань проміжної маси, встановлюємо величини  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$  та  $R_2$  згідно виразів (4.51) – (4.54) (додаток G):

$$\begin{aligned} A &= 0,065; \\ B &= -0,05; \\ R_1 &= -480,9 \text{ Н}; \\ R_2 &= 260,8 \text{ Н.} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Так, бачимо, що забезпечивши перевантаження  $\zeta = 2,5g$  на робочому органі, реакція на кривошипно-шатунному механізмі з ексцентриситетом  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м становить  $R_2 = 260,8$  Н.

За виразами (G.7) – (G.8) (додаток G) будуємо амплітудно-частотну характеристику дискретної частини дискретно-континуальної міжрезонансної механічної коливальної системи (рис. 4.10 (додаток G, рис. G.2)).

На амплітудно-частотній характеристиці, як і на рис. 3.5, помітно два резонансних піки. Проте, вони формуються не на закладених частотах  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с та  $\Omega_{e2} = 104$  рад/с. Резонансні піки спостерігаємо на частотах  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с та  $\Omega_{e2} = 101,8$  рад/с, значення яких дещо відрізняється від закладених, що пов'язано з похибкою під час синтезу дискретно-континуальної системи.



**Рис. 4.10.** Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуального транспортера-сепаратора

Можна стверджувати, що отримана математична модель дискретно-континуальної системи є міжрезонансною та високоефективною. Амплітуду коливань континуальної ділянки оцінимо нижче, дослідивши її вимушені коливання.

Для уникнення паразитних коливань вирішено ввести в систему дві ідентичні континуальні ділянки, відмінність яких полягатиме тільки у зменшенні ширини відповідно у два рази ( $h = 0,0225$  м). Зменшення ширини зумовлене тим, що ширина континуальної ділянки практично не впливає на значення її власної частоти, але веде до зміни інерційних та жорсткісних параметрів, які повинні відповідати системі з однією континуальною ділянкою (згідно проведених вище

розрахунків можна стверджувати, що коливальна система з однією континуальною ділянкою узгодилася з результати розрахунків еталонної дискретної моделі). Математична модель (в амплітудних значеннях) для системи з двома континуальними ділянками набуде вигляду:

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 Y_1 + c_{12}(Y_1 - Y_2) = 0; \\ -m_2\omega^2 Y_2 + c_{12}(Y_2 - Y_1) = 2 \cdot (R_1 + R_2), \end{cases} \quad (4.60)$$

де множник 2 вказує саме на наявність двох континуальних ділянок.

Аналогічно до проведених вище обрахунків, знайдемо аналітичні залежності для амплітуд  $Y_1$  та  $Y_2$  (додаток G, вирази (G.12), (G.13)), підставивши вирази (4.53) та (4.54) в (4.60). Тоді ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму буде рівний  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м (додаток G, вираз (G.14)). Отримане значення ексцентриситету  $\varepsilon$  для дискретно-континуальної системи з двома континуальними ділянками рівне значенню ексцентриситету з однією континуальною ділянкою і відповідно у 2,8 разів меншим від ексцентриситету еталонної тримасової дискретної міжрезонансної системи.

Встановимо величини  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$  та  $R_2$  (див. вирази (4.51) – (4.54)) для дискретно-континуальної системи з двома ідентичними континуальними ділянками, для якої значення ексцентриситету  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м (додаток G):

$$A = 0,065; \quad B = -0,05; \quad R_1 = -240,4 \text{ Н}; \quad R_2 = 130,4 \text{ Н}. \quad (4.61)$$

Так, бачимо, що забезпечивши перевантаження  $\zeta = 2,5g$  на робочому органі, реакція на кривошипно-шатунному механізмі з ексцентриситетом  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м становить  $R_2 = 130,4$  Н. Від двох континуальних ділянок сумарна реакція в кривошипно-шатунній опорі (сила збурення) складе 260,8 Н (близько 26,1 кгС), що відповідає значенню з однією континуальною ділянкою і є зовсім небагато для приведення в рух робочого органу масою  $m_1 = 83,7$  кг з перевантаженням  $\zeta = 2,5g$ .

Тож за основу у подальших дослідженнях приймаємо схему коливальної системи з двома вужчими ідентичними континуальними ділянками.

#### 4.5. Розрахунок прогину континуальної ділянки

Побудуємо прогини на окремих ділянках стержня (рис. 4.6). Використавши вираз (4.37), прогин  $w_{лів}$  лівої ділянки стержня (на діапазоні  $x_1 \in [0...0,475]$ ) буде:

$$w_{лів}(x_1) = A \cdot S(\xi x_1) + B \cdot T(\xi x_1), \quad (4.62)$$

$$\text{де } S(\xi x_1) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)); \quad T(\xi x_1) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)).$$

Прогин  $w_{сеп}$  середньої ділянки стержня (на діапазоні  $x_2 \in [0,475...0,83]$ ) згідно виразу (4.38) складе:

$$w_{сеп}(x_2) = A \cdot S(\xi x_2) + B \cdot T(\xi x_2) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi x_2), \quad (4.63)$$

$$\text{де } S(\xi x_2) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)); \quad T(\xi x_2) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2));$$

$$V(\xi x_2) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_2) - \sin(\xi x_2)).$$

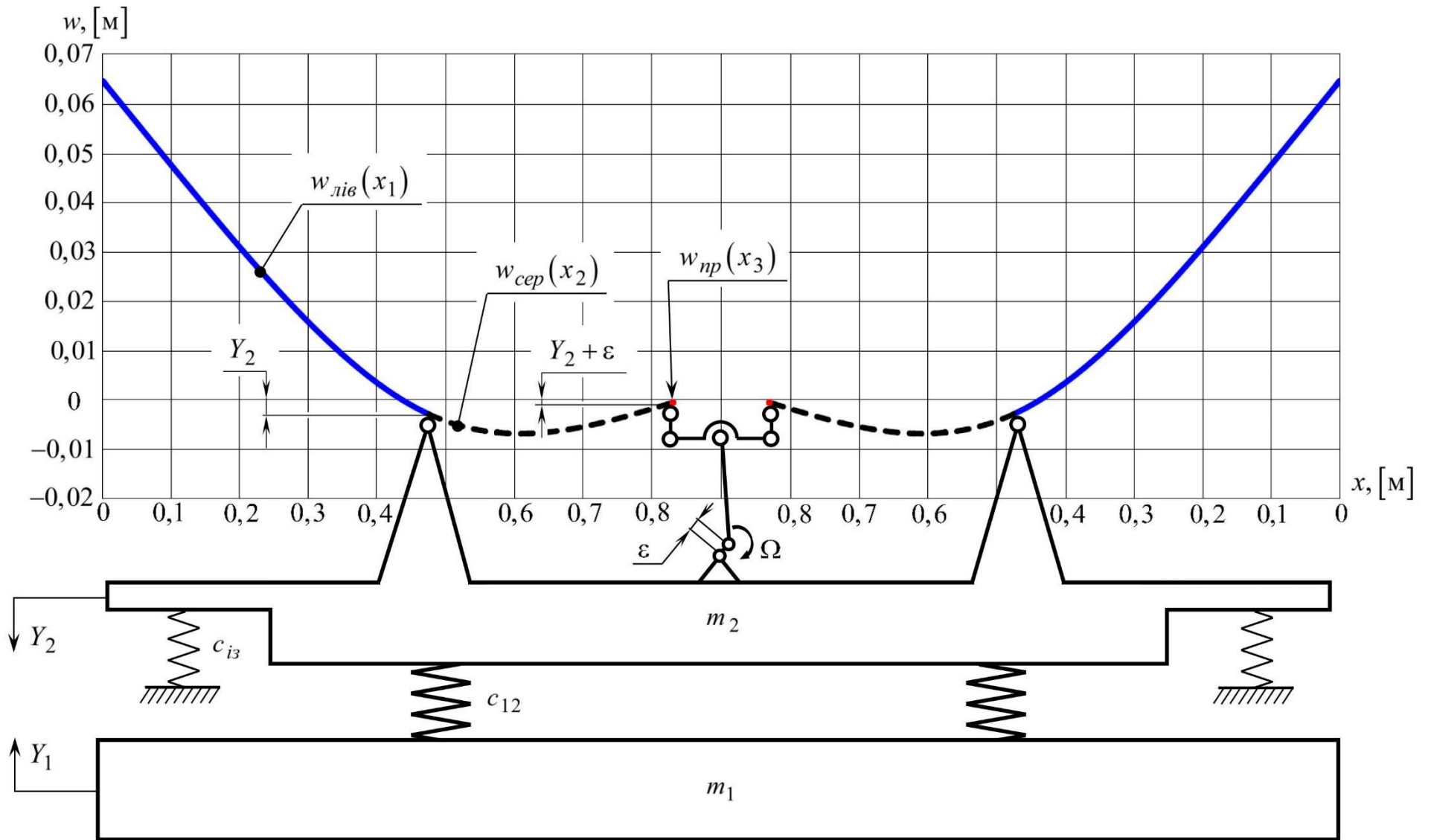
Прогин  $w_{пр}$  правої ділянки стержня (на діапазоні  $x_3 \in [0,83...0,8301]$ ), використовуючи вираз (4.39), буде:

$$w_{пр}(x_3) = A \cdot S(\xi x_3) + B \cdot T(\xi x_3) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V(\xi x_3) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x_3), \quad (4.64)$$

$$\text{де } S(\xi x_3) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)); \quad T(\xi x_3) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3));$$

$$V(\xi x_3) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_3) - \sin(\xi x_3)); \quad V_2(\xi x_3) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi x_3) - \sin(\xi x_3)).$$

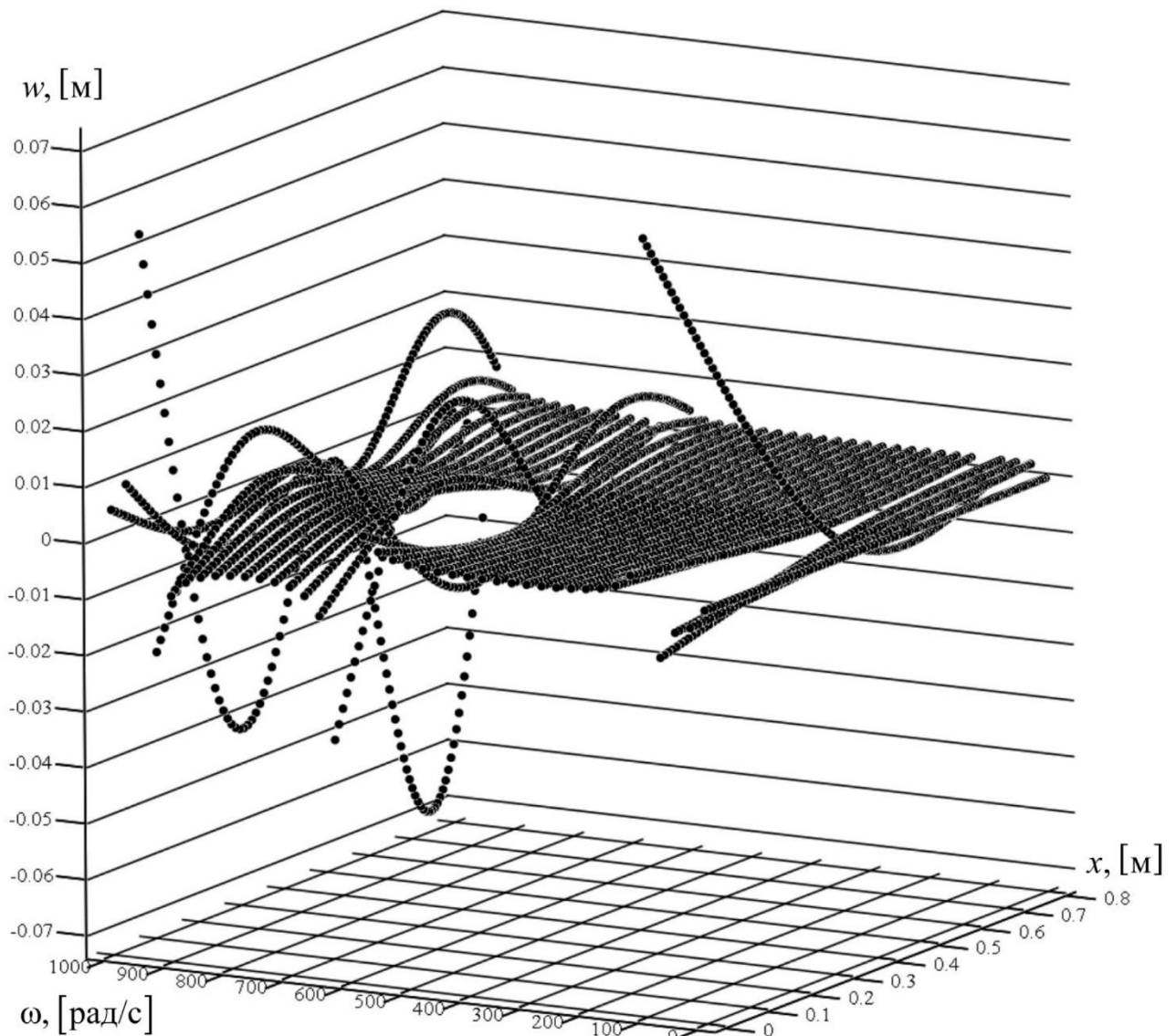
Згідно виразів (4.62) – (4.64) та встановлених вище параметрів прогин континуальної ділянки під час вимушених коливань набуде вигляду як на рис. 4.11 (додаток Н, рис. Н.2). З цього рисунка бачимо, що найбільший прогин континуальної ділянки спостерігається на лівій консольно закріпленій ділянці. Амплітуда коливань вільного кінця якої становить  $w_{лів}(0) = Y_{вільного\ кінця} = 0,065$  м (додаток Н, вираз (Н.5)). Ліва шарнірна опора зміщена на амплітуду коливань  $Y_2 = -3 \cdot 10^{-3}$  м, а права зміщена на величину  $Y_2 + \varepsilon = -3 \cdot 10^{-3} + 2,4 \cdot 10^{-3} = -6 \cdot 10^{-4}$  м.



*Рис. 4.11. Схема прогинів континуальної ділянки в динаміці під час вимушених коливань системи*



Розглянемо поведінку континуальної ділянки залежно від частоти її збурення (рис. 4.12 (додаток Н, рис. Н.3)).

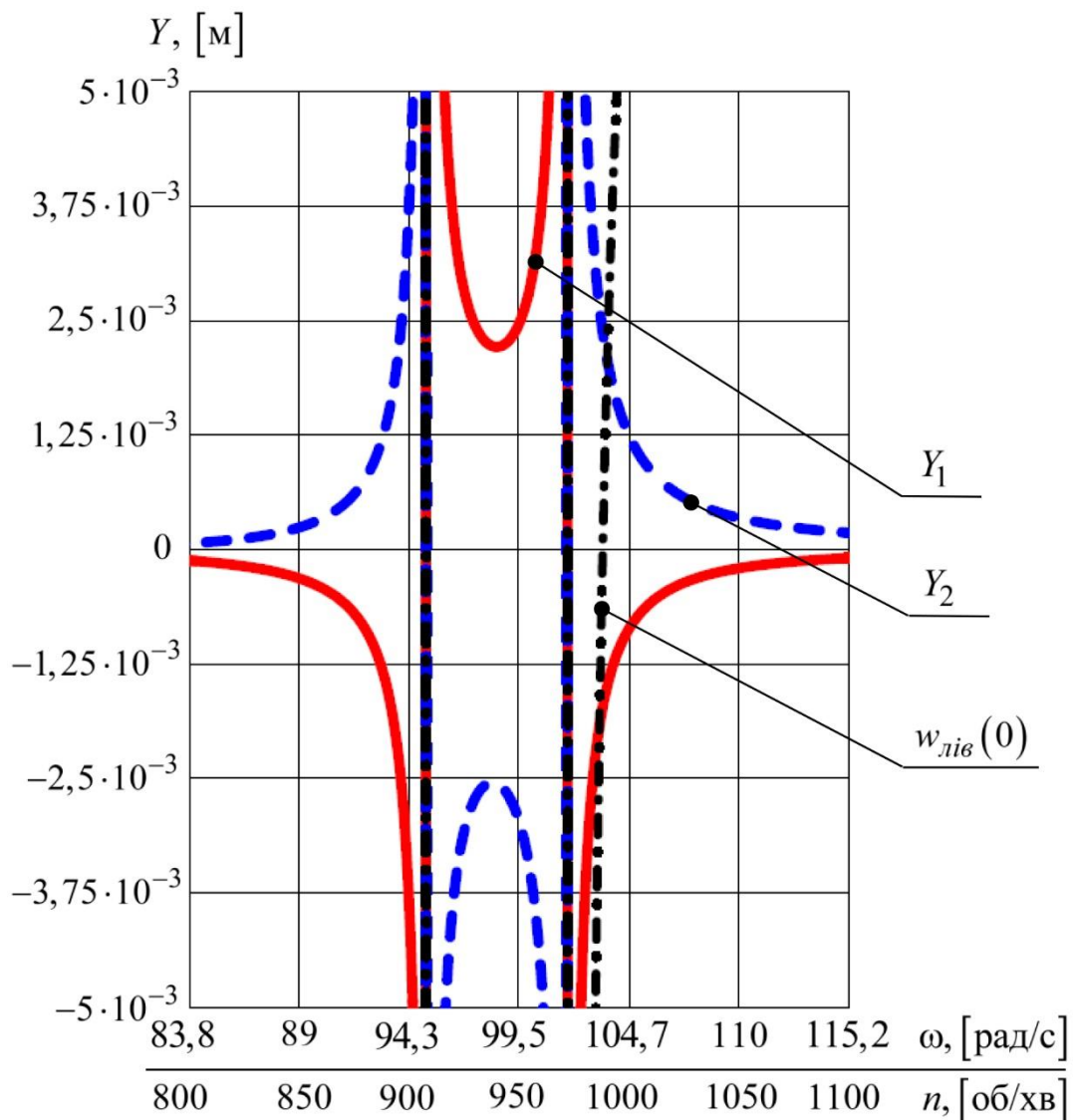


*Рис. 4.12. Схема прогинів континуальної ділянки в динаміці на широкому діапазоні частот збурення*

Спостерігаємо декілька форм коливань стержня, які б можна було отримати, збурюючи коливальну систему вібраційної машини на частотах до 1000 рад/с. Власне стержень, що має безліч ступенів рухомості і наділяє дискретно-континуальну систему полічастотними властивостями.

#### 4.6. Амплітудно-частотна характеристику коливальної системи з двома континуальними ділянками

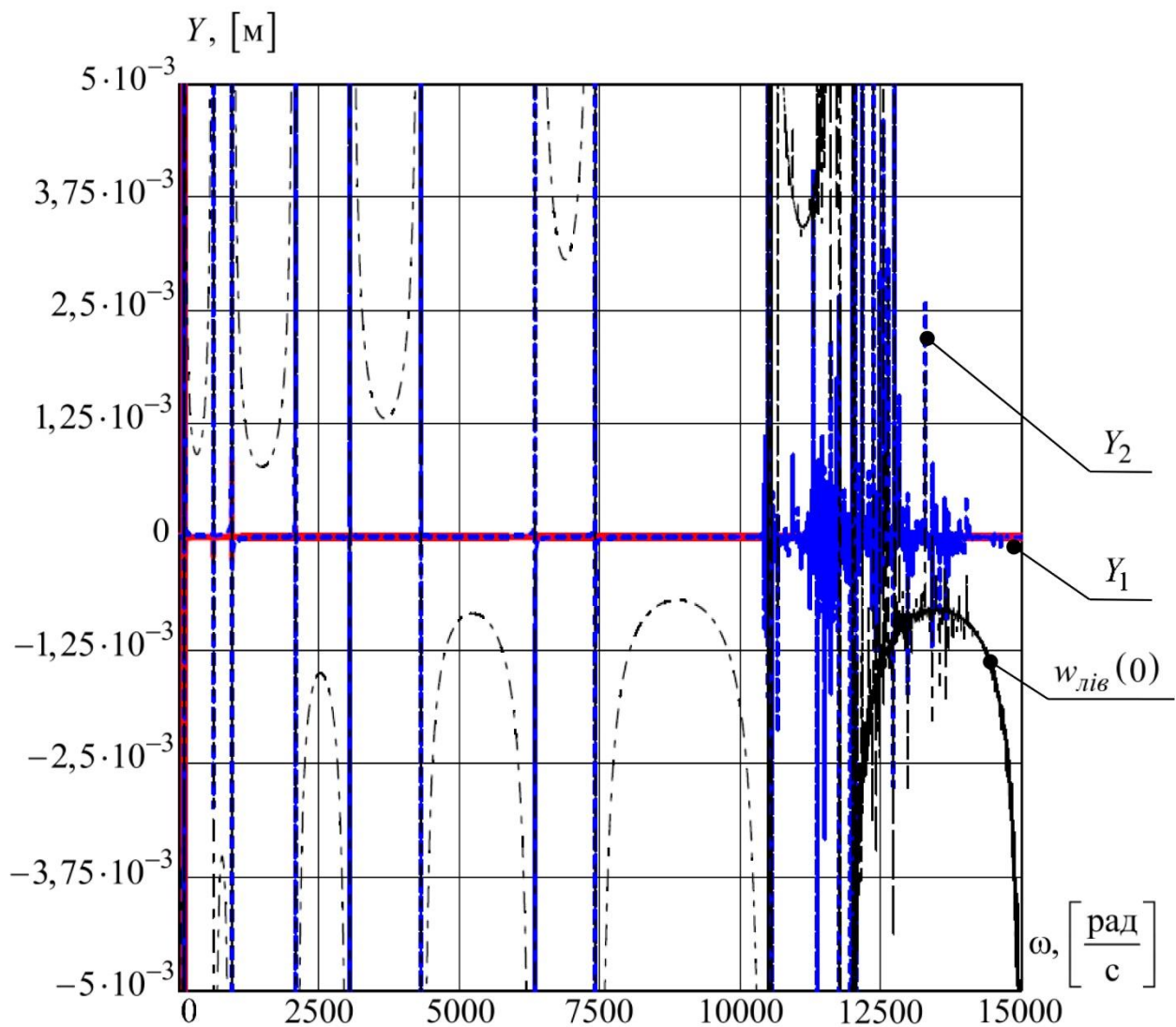
Оперуючи виразом прогину вільного кінця континуальної ділянки  $w_{лів}(0)$ , аналітичними залежності для амплітуд  $Y_1$ ,  $Y_2$  й величиною ексцентриситету кривошипно-шатунного механізму  $\varepsilon = 2,4 \cdot 10^{-3}$  м, який забезпечить перевантаження  $\zeta = 2,5g$  на робочому органі, побудуємо амплітудно-частотну характеристику коливальної системи з двома континуальними ділянками (рис. 4.13) (додаток G, рис. G.3).



**Рис. 4.13.** Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуального транспортера-сепаратора з двома континуальним ділянками

Амплітудно-частотна характеристика коливальної системи з двома континуальними ділянками ідентична системі з однією. Отже, можна стверджувати, що дискретна частина дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи сприйняла на частотній області зведені інерційні та жорсткісні параметри двох ідентичних континуальних ділянок аналогічно одній ширшій континуальній ділянці.

На підтвердження адекватності математичної моделі побудуємо амплітудно-частотну характеристику дискретної системи під впливом континуальної ділянки на широкому діапазоні частот (рис. 4.14 (додаток G, рис. G.4)).



*Рис. 4.14. Полічастотний відгук гібридної системи від впливу континуальної ділянки*

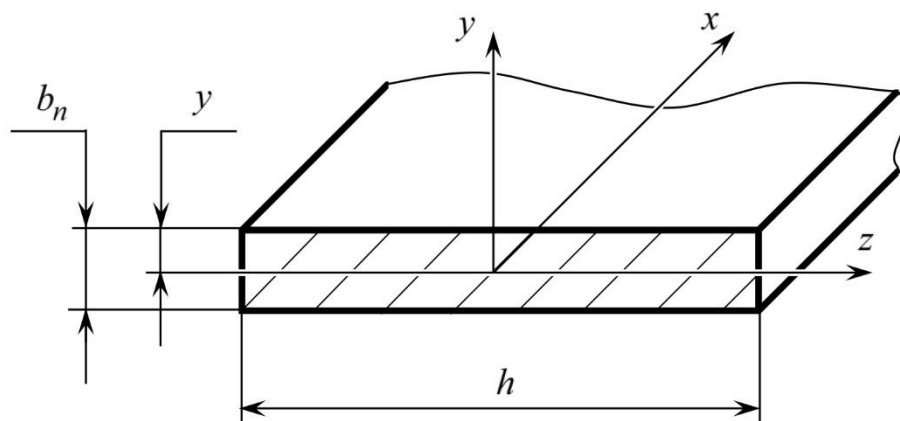
На рис. 4.14 спостерігаємо безліч резонансних піків, які є відгуками від впливу континуальної ділянки, що має безліч ступенів рухомості.

#### 4.7. Розрахунок континуальної ділянки на міцність

Використовуючи формулу Нав'є (2.3) та спрощене диференціальне рівняння пружної лінії стержня постійного поперечного перерізу (2.12), можна встановити нормальні напруження при чистому згині стержня в поперечному перерізі (рис. 4.15). Найбільший інтерес для нас представляють напруження на поверхні стержня на відстані:

$$y = \frac{b_n}{2}, \quad (4.65)$$

що максимально віддалена від нейтральної лінії перерізу. Саме там будуть виникати максимальні напруження, які нас цікавлять.



*Рис. 4.15. Поперечний переріз континуальної ділянки (стержня)*

Тож підставляючи вираз (2.13) (для  $M(x)$ ) у формулу (2.3) та враховуючи (4.65) та (4.17), отримаємо функцію розподілу нормальних напружень на поверхні континуальної ділянки [168]:

$$\sigma(x) = E \frac{J_z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} y}{J_z} = \frac{E b_n}{2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (4.66)$$

Отже, підставляючи у вираз (4.66) залежність прогину (4.62), напруження на лівій ділянці стержня (на діапазоні  $x_1 \in [0...0,475]$ ) встановлюватимуться згідно залежності:

$$\sigma_{лів}(x_1) = \frac{Eb_n}{2} \cdot \frac{d^2 w_{лів}(x_1)}{dx_1^2} = \frac{Eb_n}{2} \cdot \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \text{ch}(\xi x_1) \xi^2 - \cos(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) + B \left( \frac{1}{2} \left( \text{sh}(\xi x_1) \xi^2 - \sin(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) \right]. \quad (4.67)$$

Напруження на середній ділянці стержня (на діапазоні  $x_2 \in [0,475...0,83]$ ), підставляючи у (4.66) залежність прогину (4.63), визначатимуться згідно виразу:

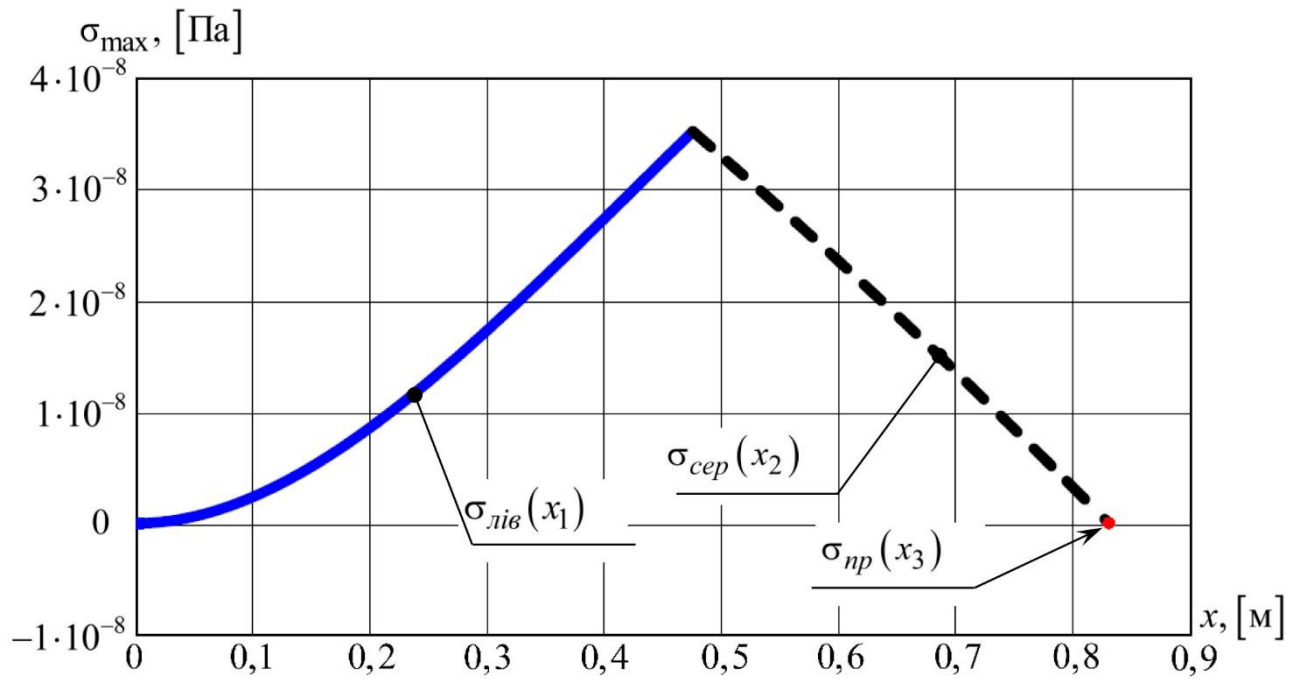
$$\sigma_{сеп}(x_2) = \frac{Eb_n}{2} \cdot \frac{d^2 w_{сеп}(x_2)}{dx_2^2} = \frac{Eb_n}{2} \times \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \text{ch}(\xi x_2) \xi^2 - \cos(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + B \left( \frac{1}{2} \left( \text{sh}(\xi x_2) \xi^2 - \sin(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \left( \frac{1}{2} \text{sh}(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 + \sin(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 \right) \right]. \quad (4.68)$$

Підставляючи у вираз (4.66) залежність прогину (4.64), напруження на правій ділянці стержня (на діапазоні  $x_3 \in [0,83...0,8301]$ ) шукатимемо за залежністю:

$$\sigma_{пр}(x_3) = \frac{Eb_n}{2} \cdot \frac{d^2 w_{пр}(x_3)}{dx_3^2} = \frac{Eb_n}{2} \times \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \text{ch}(\xi x_3) \xi^2 - \cos(\xi x_3) \xi^2 \right) \right) + B \left( \frac{1}{2} \left( \text{sh}(\xi x_3) \xi^2 - \sin(\xi x_3) \xi^2 \right) \right) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \left( \frac{1}{2} \text{sh}(\xi(x_3 - L_1)) \xi^2 + \sin(\xi(x_3 - L_1)) \xi^2 \right) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \left[ \frac{1}{2} \text{sh}[\xi(x_3 - (L_1 + L_2))] \xi^2 + \sin[\xi(x_3 - (L_1 + L_2))] \xi^2 \right] \right]. \quad (4.69)$$

Проводячи розрахунок згідно виразів (4.67) – (4.69), розподіл напружень по довжині стержня матиме вигляд наведений на рис. 4.16 (додаток I, рис. I.1). Як бачимо, найбільші напруження спостерігаються в околі шарнірного кріплення першої опори. Дана точка є місцем перегину лівої та середньої ділянок стержня

і напруження в ній становить  $\sigma_{\max} = 352,3$  МПа (додаток I, вираз (I.4)). Допустиме нормальне напруження на згин при знакозмінних навантаженнях для сталі 60С2А становить  $[\sigma_{-1}] = 392$  МПа [15] – умова міцності витримується.



**Рис. 4.16.** Епюра напружень в континуальній ділянці (стержні)

Можна констатувати, що континуальна ділянка цілком справляється з забезпеченням високоефективних режимів роботи у міжрезонансній дискретно-континуальній коливальній системі. Розвиваючи високі амплітуди коливань (на кінці  $w_{лив}(0) = 0,065$  м), так необхідні для формування інерційних сил (свого роду сил збурення, що власне і “розганяють” коливальну систему). Власне наявність відносно великого вильоту консолі і забезпечує виконання умови міцності в континуальній ділянці.

Тож черговою перевагою досліджуваної дискретно-континуальної коливальної системи є застосування довгомірних континуальних ділянок, які виявились незамінними для забезпечення міжрезонансних режимів роботи в транспортері-сепараторі.

#### 4.8. Встановлення власної частоти континуальної ділянки з використанням наближеного методу Релея-Рітца

Метод Релея-Рітца є наближеним методом встановлення власних частот стержня (континуальної ділянки). Він полягає в тому, що у континуальній ділянці (пружному стержні) кінетична енергія  $K_c$ , яка складається з кінетичної енергії  $K_{cn}$  від лінійного переміщення та від провертання  $K_{co}$  ділянок стержня, та потенціальна енергія  $P_c$ , яка складається із потенціальної енергії  $P_{cz}$  згину стержня та потенціальної енергії  $P_{cd}$  зсуву у шарах стержня, однакові. З рівності кінетичної  $K_{cn}$  та потенціальної  $P_c$  енергій власне і встановлюється перша власна частота коливань континуальної ділянки.

Розглядаємо континуальну ділянку, як тіло з розподіленими параметрами. Тоді кінетична  $K_c$  та потенціальна  $P_c$  енергії будуть визначатися відповідно з виразів (2.51) та (2.60) [69].

Знайдемо кінетичну енергію  $K_{cn}$  континуальної ділянки від лінійного переміщення (вираз (2.47)), задавшись вище встановленими значеннями для маси погонного метра  $m_{nm} = 1,014$  кг з (4.15), постійними  $A = 0,065$ ;  $B = -0,05$  та реакціями на опорах  $R_1 = -240,4$  Н;  $R_2 = 130,4$  Н з (4.59), довжинами:  $L = 0,8301$  м,  $L_1 = 0,475$  м і  $L_2 = 0,355$  м.

Для лівої ділянки стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$  (див. рис. 4.6)) кінетична енергія  $K_{cn1}$  від лінійного переміщення (вираз (2.47)) поділена на квадрат колової частоти, з використанням (4.62), рівна (додаток J, вираз (J.1)):

$$\frac{K_{cn1}}{\omega^2} = m_{nm} \int_0^{L_1} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right]^2 dx_1 = 5,44 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2. \quad (4.70)$$

Кінетична енергія  $K_{cn2}$  від лінійного переміщення (вираз (2.47)) середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) поділена на квадрат колової частоти, використовуючи рівняння прогину (4.63), складе (додаток J, вираз (J.2)):

$$\begin{aligned} \frac{K_{cn2}}{\omega^2} = m_{nm} \int_{L_1}^{L_1+L_2} & \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \\ & \left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \\ & \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1)) \right] \right]^2 dx_2 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Кінетична енергія  $K_{cn3}$  від лінійного переміщення (вираз (2.47)) правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) поділена на квадрат колової частоти, використовуючи рівняння прогину (4.64), буде (додаток J, вираз (J.3)):

$$\begin{aligned} \frac{K_{cn3}}{\omega^2} = m_{nm} \int_{L_1+L_2}^L & \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \right. \\ & \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1)) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) \right] \right]^2 dx_3 = \\ & = 3,72 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Кінетична енергія  $K_{co1}$  від провертання (вираз (2.48)) лівої ділянки стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ) поділена на квадрат колової частоти, використовуючи рівняння прогину (4.62), становитиме (додаток J, вираз (J.4)):

$$\begin{aligned} \frac{K_{co1}}{\omega^2} = \int_0^{L_1} & \left( \frac{m_{nm}}{3} x_1^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = \\ & = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Кінетична енергія  $K_{co2}$  від провертання (вираз (2.48)) середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) поділена на квадрат колової частоти, з використанням рівняння прогину (4.63), становитиме (додаток J, вираз (J.5)):



$$\begin{aligned}
\frac{K_{co2}}{\omega^2} &= \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left( \frac{m_{nm}}{3} (x_2 - L_1)^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1)) \right] \right] \right\}^2 dx_2 = \\
&= 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Кінетична енергія  $K_{co3}$  від повертання (вираз (2.48)) правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) поділена на квадрат колової частоти, використавши рівняння прогину (4.64), становитиме (додаток J, вираз (J.6)):

$$\begin{aligned}
\frac{K_{co3}}{\omega^2} &= \int_{L_1+L_2}^L \left( \frac{m_{nm}}{3} (x_3 - L_1 - L_2)^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_3} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1)) \right] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) \right] \right] \right\}^2 dx_3 \rightarrow 0 \text{ Дж} \cdot \text{с}^2.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Встановимо потенціальну енергію  $\Pi_{c3}$  згину стержня згідно виразу (2.57). Потенціальна енергія  $\Pi_{c31}$  згину лівої ділянки стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ) з врахуванням рівняння прогину (4.62) (додаток J, вираз (J.7)):

$$\Pi_{c31} = EJ_z \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^2}{dx_1^2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = 2,98 \text{ Дж}. \tag{4.76}$$

Потенціальна енергія згину  $\Pi_{c32}$  середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ), використавши вираз (4.63), буде рівна (додаток J, вираз (J.8)):

$$\begin{aligned}
\Pi_{c32} &= EJ_z \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^2}{dx_2^2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1)) \right] \right] \right\}^2 dx_2 = 3,27 \text{ Дж}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

На правій ділянці стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) потенціальна енергія згину  $\Pi_{c33}$ , використовуючи вираз (4.64), складе (додаток J, вираз (J.9)):

$$\begin{aligned} \Pi_{c33} = EJ_z \int_{L_1+L_2}^L & \left\{ \frac{d^2}{dx_3^2} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \right. \right. \\ & + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \\ & \left. \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} \left[ \text{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) \right] \right] \right\}^2 dx_3 = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Встановимо потенціальну енергію  $\Pi_{c\partial}$  від зсуву в шарах стержня (вираз (2.58)). Потенціальна енергія  $\Pi_{c\partial 1}$  від зсуву в шарах лівої ділянки стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ), використавши рівняння прогину (4.62), становитиме (додаток J, вираз (J.10)):

$$\Pi_{c\partial 1} = k_y \frac{(EJ_z)^2 L_1}{GF_n} \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^3}{dx_1^3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 = 5,36 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.} \quad (4.79)$$

Потенціальна енергія  $\Pi_{c\partial 2}$  (вираз (2.58)), від зсуву в шарах середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ), використавши рівняння прогину (4.63), буде рівна (додаток J, вираз (J.11)):

$$\begin{aligned} \Pi_{c\partial 2} = k_y \frac{(EJ_z)^2 L_1+L_2}{GF_n} & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^3}{dx_2^3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \right. \\ & + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} \times \\ & \left. \left. \times [\text{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\}^2 dx_2 = 6,14 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Потенціальна енергія  $\Pi_{c\partial 3}$  (вираз (2.58)) від зсуву в шарах правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ), враховуючи рівняння прогину (4.64), буде становити (додаток J, вираз (J.12)):

$$\begin{aligned}
\Pi_{cd3} = & k_y \frac{(EJ_z)^2}{GF_n} \int_{L_1+L_2}^L \left\{ \frac{d^3}{dx_3^3} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \right. \right. \\
& + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \\
& \left. \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] \right\}^2 dx_3 \rightarrow 0 \text{ Дж.} \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Згідно виразу (2.62) власна частота коливань стержня  $\omega_{pp}$ , з використанням методу Релея-Рітца, становитиме (додаток J, вираз (J.13)):

$$\begin{aligned}
\omega_{pp} &= \sqrt{\frac{\Pi_{c31} + \Pi_{c32} + \Pi_{c33} + \Pi_{cd1} + \Pi_{cd2} + \Pi_{cd3}}{\frac{K_{cn1}}{\omega^2} - \frac{K_{cn2}}{\omega^2} - \frac{K_{cn3}}{\omega^2} + \frac{K_{co1}}{\omega^2} - \frac{K_{co2}}{\omega^2} - \frac{K_{co3}}{\omega^2}}} = \\
&= \sqrt{\frac{2,98 + 3,27 + 1,3 \cdot 10^{-13} + 5,36 \cdot 10^{-4} + 6,14 \cdot 10^{-4} + 0}{5,44 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-5} - 3,72 \cdot 10^{-11} + 1,7 \cdot 10^{-4} - 6,17 \cdot 10^{-5} - 0}} = \\
&= 94,7 \text{ рад/с.} \quad (4.82)
\end{aligned}$$

Як бачимо, отримане значення власної частоти коливань, з використанням наближеного методу Релея-Рітца, є дуже близьке до точного (див. вираз (4.49),  $\omega_{bc} = 93,9$  рад/с). Це дає нам підстави застосовувати даний метод в подальших розрахунках, будучи впевненими, що результати будуть адекватними.

#### 4.9. Встановлення точки зведення інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки.

##### Визначення її зведених маси та жорсткості

Згідно з нашою гіпотезою коливальна система буде сприймати пружний елемент з розподіленими параметрами дискретно відносно зведеної точки, котра умовно зосереджує інерційне значення та жорсткість усього стержня (див. п. 2.5). Координату точки зведення шукаємо відповідно до рис. 2.7, як зведену швидкість стержня. Координата точки зведення  $X_{z61}$  лівої ділянки, застосовуючи перший вираз з (2.81) та рівняння прогину (4.62), буде рівна (додаток K, вираз (K.1)):

$$X_{361} = \frac{\int_0^{L_1} x_1 \cdot \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] dx_1}{\int_0^{L_1} \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) dx_1} = 0,134 \text{ м.} \quad (4.83)$$

Знайдемо координату точки зведення  $X_{362}$  середньої ділянки стержня. Застосовуючи другий вираз з (2.81) та рівняння прогину (4.63), координата точки зведення становитиме (додаток К, вираз (К.2)):

$$X_{362} = \frac{\int_{L_1}^{L_1+L_2} x_2 \cdot \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] dx_2}{\int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] dx_2} = \quad (4.84)$$

$$= 0,631 \text{ м.}$$

Координата точки зведення  $X_{363}$  правої ділянки стержня, застосовуючи третій вираз з (2.81) та рівняння прогину (4.64), буде рівна (додаток К, вираз (К.3)):

$$X_{363} = \frac{\int_{L_1+L_2}^L x_3 \cdot \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] dx_3}{\int_{L_1+L_2}^L \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] dx_3} = \quad (4.85)$$

$$= 0,83 \text{ м.}$$

Підставивши отримані вирази (4.83) – (4.85) в (2.83), координата по осі  $x$  точки зведення  $X_{36}$  інерційної маси  $m_{36}$  та жорсткості  $c_{36}$  усього стержня становитиме (додаток К, вираз (К.4)):

$$\begin{aligned}
X_{36} = & \left\{ X_{361} \int_0^{L_1} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] dx_1 + \right. \\
& + X_{362} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] dx_2 + X_{363} \times \right. \\
& \times \int_{L_1+L_2}^L \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] dx_3 \right\} / \\
& / \left\{ \int_0^{L_1} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] dx_1 + \right. \\
& + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] dx_2 + \right. \\
& + \int_{L_1+L_2}^L \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] dx_3 \right\} = \\
& = 0,054 \text{ м.}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Знаючи вже координату точки зведення, перейдемо до встановлення зведеної маси та зведеної жорсткості стержня згідно виразів (2.86) та (2.87). Ці параметри формуватимемо як алгебраїчну суму відповідних параметрів на кожній ділянці стержня. Тобто:

$$m_{3\delta} = m_{3\delta 1} - m_{3\delta 2} - m_{3\delta 3} + m_{3\delta 1i} - m_{3\delta 2i} - m_{3\delta 3i}; \quad (4.87)$$

$$C_{3\delta} = C_{3\delta 1} + C_{3\delta 2} + C_{3\delta 3} + C_{3\delta 1i} + C_{3\delta 2i} + C_{3\delta 3i}, \quad (4.88)$$

де  $m_{3\delta 1}$ ,  $m_{3\delta 2}$ ,  $m_{3\delta 3}$  – частки зведеної маси від лінійного переміщення стержня відповідно лівої, середньої та правої ділянок;

$m_{3\delta 1i}$ ,  $m_{3\delta 2i}$ ,  $m_{3\delta 3i}$  – частки зведеної маси від провертання стержня відповідно лівої, середньої та правої ділянок;

$C_{3\delta 1}$ ,  $C_{3\delta 2}$ ,  $C_{3\delta 3}$  – частки зведених жорсткостей від згину стержня відповідно лівої, середньої та правої ділянок;

$C_{3\delta 1i}$ ,  $C_{3\delta 2i}$ ,  $C_{3\delta 3i}$  – частки зведених жорсткостей від зсуву в шарах стержня відповідно лівої, середньої та правої ділянок.

Встановимо частку зведеної маси  $m_{3\delta 1}$  лівого кінця стержня від його лінійного переміщення (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ). Використовуючи ліву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.62) (додаток L, вираз (L.1)):

$$m_{3\delta 1} = m_{nm} \int_0^{L_1} \frac{\left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right]^2}{\left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{3\delta}) + \cos(\xi X_{3\delta})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{3\delta}) + \sin(\xi X_{3\delta})) \right]^2} dx_1 = 0,178 \text{ кг}. \quad (4.89)$$

Аналогічно, для середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) частка зведеної маси  $m_{3\delta 2}$  від її лінійного переміщення, використовуючи ліву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.63), становитиме (додаток L, вираз (L.2)):

$$\begin{aligned}
m_{362} = m_{nm} \int_{L_1}^{L_1+L_2} & \left\{ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\} / \\
& \left/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right] \right\}^2 dx_2 = \\
& = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Частка зведеної маси  $m_{363}$  правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) від її лінійного переміщення, використовуючи ліву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.64), становитиме (додаток L, вираз (L.3)):

$$\begin{aligned}
m_{363} = m_{nm} \int_{L_1+L_2}^L & \left\{ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] \right\} / \\
& \left/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right] \right\}^2 dx_3 = \\
& = 1,22 \cdot 10^{-8} \text{ кг.}
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Встановимо частку зведеної маси  $m_{36li}$  лівого кінця стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ) від його повертання. Використовуючи праву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.62), отримаємо (додаток L, вираз (L.4)):

$$\begin{aligned}
m_{36li} = \int_0^{L_1} & \left( \frac{m_{nm}}{3} x_1^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\} / \\
& \left/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right] \right\}^2 dx_1 = \\
& = 0,055 \text{ кг.}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Частка зведеної маси  $m_{3\delta 2i}$  середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) від її провертання, використовуючи праву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.63), становитиме (додаток L, вираз (L.5)):

$$\begin{aligned}
 m_{3\delta 2i} = & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left( \frac{m_{нм}}{3} (x_2 - L_1)^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_2} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\} / \\
 & \left/ \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi X_{3\delta}) + \cos(\xi X_{3\delta})) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi X_{3\delta}) + \sin(\xi X_{3\delta})) \right] \right\}^2 dx_2 = \\
 & = 2,02 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Частка зведеної маси  $m_{3\delta 3i}$  правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) від її провертання, використовуючи праву частину виразу (2.86) та рівняння прогинів (4.64), складе (додаток L, вираз (L.6)):

$$\begin{aligned}
 m_{3\delta 3i} = & \int_{L_1+L_2}^L \left( \frac{m_{нм}}{3} (x_3 - L_1 + L_2)^2 \right) \left\{ \frac{d}{dx_3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] \right\} / \\
 & \left/ \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi X_{3\delta}) + \cos(\xi X_{3\delta})) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi X_{3\delta}) + \sin(\xi X_{3\delta})) \right] \right\}^2 dx_3 = \\
 & = 6,7 \cdot 10^{-14} \text{ кг.}
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Встановимо частку зведеної жорсткості  $c_{3\delta 1}$  лівого кінця стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ) від його згину. Використовуючи ліву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.62), отримаємо (додаток L, вираз (L.7)):



$$c_{361} = EJ_z \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^2}{dx_1^2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\} /$$

$$/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right]^2 dx_1 = \quad (4.95)$$

$$= 974,62 \text{ Н/м.}$$

Частка зведеної жорсткості  $c_{362}$  середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) від її згину, використовуючи ліву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.63), становитиме (додаток L, вираз (L.8)):

$$c_{362} = EJ_z \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^2}{dx_2^2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\} /$$

$$/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right]^2 dx_2 = \quad (4.96)$$

$$= 1,027 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Частка зведеної жорсткості  $c_{363}$  правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) від її згину, використовуючи ліву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.64), буде рівна (додаток L, вираз (L.9)):

$$c_{363} = EJ_z \int_{L_1+L_2}^L \left\{ \frac{d^2}{dx_3^2} \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \right.$$

$$\left. + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\operatorname{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] \right\} /$$

$$/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) \right]^2 dx_3 = \quad (4.97)$$

$$= 4,24 \cdot 10^{-11} \text{ Н/м.}$$

Встановимо частку зведеної жорсткості  $c_{3\delta 1i}$  лівої ділянки стержня (на діапазоні від 0 до  $L_1$ ) від зсуву в її шарах. Використовуючи праву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.62), отримаємо (додаток L, вираз (L.10)):

$$c_{3\delta 1i} = k_y \frac{(EJ_z)^2}{GF_n} \int_0^{L_1} \left\{ \frac{d^3}{dx_1^3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_1) + \cos(\xi x_1)) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_1) + \sin(\xi x_1)) \right] \right\}^2 dx_1 =$$

$$\left/ \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi X_{3\delta}) + \cos(\xi X_{3\delta})) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi X_{3\delta}) + \sin(\xi X_{3\delta})) \right] \right\}^2 dx_1 =$$

$$= 0,175 \text{ Н/м.} \quad (4.98)$$

Частка зведеної жорсткості  $c_{3\delta 2i}$  середньої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1$  до  $L_1 + L_2$ ) від зсуву в її шарах, використовуючи праву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.63), складе (додаток L, вираз (L.11)):

$$c_{3\delta 2i} = k_y \frac{(EJ_z)^2}{GF_n} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left\{ \frac{d^3}{dx_2^3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_2) + \cos(\xi x_2)) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_2) + \sin(\xi x_2)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))] \right] \right\}^2 dx_2 =$$

$$\left/ \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi X_{3\delta}) + \cos(\xi X_{3\delta})) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi X_{3\delta}) + \sin(\xi X_{3\delta})) \right] \right\}^2 dx_2 =$$

$$= 0,2 \text{ Н/м.} \quad (4.99)$$

Частка зведеної жорсткості  $c_{3\delta 3i}$  правої ділянки стержня (на діапазоні від  $L_1 + L_2$  до  $L$ ) від зсуву в її шарах, використовуючи праву частину виразу (2.87) та рівняння прогинів (4.64), становитиме (додаток L, вираз (L.12)):

$$c_{3\delta 3i} = k_y \frac{(EJ_z)^2}{GF_n} \int_{L_1+L_2}^L \left\{ \frac{d^3}{dx_3^3} \left[ \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi x_3) + \cos(\xi x_3)) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi x_3) + \sin(\xi x_3)) + \frac{R_1}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1))] + \frac{R_2}{2\xi^3 EJ_z} [\text{sh}(\xi(x_3 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_3 - L_1 - L_2))] \right] \right\}^2 dx_3 =$$

$$\left/ \left[ \frac{A}{2} (\operatorname{ch}(\xi X_{3\theta}) + \cos(\xi X_{3\theta})) + \frac{B}{2} (\operatorname{sh}(\xi X_{3\theta}) + \sin(\xi X_{3\theta})) \right] \right\}^2 dx_3 = \quad (4.100)$$

$$= 6,49 \cdot 10^{-15} \text{ Н/м.}$$

Отже, підставивши вирази (4.89) – (4.94) у (4.87), зведена маса стержня загалом становить (додаток L, вираз (L.13)):

$$m_{3\theta 1} = 0,178 - 3,27 \cdot 10^{-3} - 1,22 \cdot 10^{-8} + 0,055 - \quad (4.101)$$

$$- 2,02 \cdot 10^{-3} - 6,7 \cdot 10^{-14} = 0,228 \text{ кг,}$$

а підставивши вирази (4.95) – (4.100) у (4.88), зведена жорсткість стержня загалом складе (додаток L, вираз (L.14)):

$$c_{3\theta 1} = 974,61 + 1,027 \cdot 10^3 + 4,24 \cdot 10^{-11} + 0,175 + \quad (4.102)$$

$$+ 0,2 + 6,49 \cdot 10^{-15} = 2 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Так, як у системі використовуються два ідентичні стержні, то отримані результати зведеної маси та зведеної жорсткості потрібно також помножити на два. Тоді зведена маса та зведена жорсткість континуальної ділянки відповідно складе:

$$m_{3\theta} = 2 \cdot m_{3\theta 1} = 2 \cdot 0,228 = 0,456 \text{ кг;}$$

$$c_{3\theta} = 2 \cdot c_{3\theta 1} = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Тож можна стверджувати, що розміри та матеріал континуальної ділянки вибрані вірно, адже значення її зведених інерційно-жорсткісних параметрів ( $m_{3\theta} = 0,456 \text{ кг; } c_{3\theta} = 4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ) доволі точно збігаються з параметрами еталонної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи (див. значення, отримані в (3.9)). Континуальна ділянка забезпечує закладену ефективність функціонування міжрезонансної коливальної системи, що доведено на рис. 4.10.

Тепер частково можна пояснити деяку розбіжність розташування власних резонансних піків на частотній області амплітудно-частотної характеристики дискретно-континуальної системи (рис. 4.10) від закладених значень власних частот еталонної дискретної моделі (див. рис. 3.5). Похибку дає часткове

відхилення отриманої зведеної жорсткості  $c_{3\beta}$  від еталонного значення  $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3$  Н/м. Воно впливає на значення парціальної колової частоти  $\omega_n$  континуальної ділянки.

Так, згідно закладених технічних вимог, парціальна частота реактивної маси еталонної тримасової системи повинна становити  $\omega_n = 96,1$  рад/с (див. вираз (3.21)). Парціальна ж частота коливань континуальної ділянки  $\omega_{3\beta}$  має дещо менше значення (додаток L, вираз (L.15)):

$$\omega_{3\beta} = \sqrt{\frac{c_{3\beta}}{m_{3\beta}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3}{0,456}} = 93,7 \text{ рад/с}, \quad (4.103)$$

що власне і впливає на різницю амплітудно-частотних характеристик дискретної та дискретно-континуальної коливальних систем.

#### 4.10. Висновки до четвертого розділу

1. Як найбільш раціональною схемою для реалізації континуальної ділянки високоефективної тримасової міжрезонансної вібраційної машини вибрано тіло з розподіленими параметрами у вигляді стержня, який встановлений на двох шарнірних опорах, один з кінців якого консольно закріплений, а другий приводиться в рух від ексцентрика. Власне наявність консолі, коливальний рух якої не обмежується нічим, забезпечила можливість накопичення необхідних інерційних сил в реактивному вузлі (континуальній ділянці), так необхідних для приведення в рух усієї механічної коливальної системи.

2. Описавши модель вільних коливань стержня з використанням функцій Крилова, встановлено його першу власну частоту коливань ( $\omega_{\text{вс}} = 93,9$  рад/с), яка практично повністю узгодилась з парціальною частотою реактивної маси дискретної системи ( $\omega_n = 96,1$  рад/с). Це опосередковано дало підстави стверджувати про узгодженість інерційно-жорсткісних параметрів стержня з відповідними параметрами дискретної моделі.

3. Розглянуто вимушені згинальні коливання континуальної ділянки з використанням функцій Крилова, де було вкотре підтверджено значення першої власної частоти коливань стержня  $\omega_{ec} = 93,9$  рад/с. На основі системи рівнянь вимушених коливань континуальної ділянки встановлено постійні рівнянь та реакції в опорах. Власне реакції в опорах стали в'язуючими під час поєднання континуальної ділянки з дискретною частиною гібридної коливальної системи.

4. Сформовано математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної системи, амплітудно-частотні характеристики якої практично повністю узгодились з еталонною амплітудно-частотною характеристикою дискретної моделі. Так, її власні частоти спостерігаються при значеннях  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с,  $\Omega_{e2} = 101,8$  рад/с, а амплітуда коливань на робочому органі  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м. Це дало підстави стверджувати про високу ймовірність узгодження усіх параметрів дискретно-континуальної міжрезонансної системи з еталонною дискретною. Побудовано схему прогинів континуальної ділянки, розраховано її на міцність. Найбільші напруження спостерігаються в околі шарнірного кріплення першої опори. Дана точка є місцем перегину лівої та середньої ділянок стержня і напруження в ній становить  $\sigma_{max} = 352,2$  МПа. Допустиме ж нормальне напруження на згин для сталі 60С2А становить  $[\sigma_{-1}] = 392$  МПа, умова міцності витримується.

5. З метою чіткого встановлення закладених інерційно-жорсткісних значень в континуальній ділянці з використанням методу Релея-Рітца встановлено її зведену масу  $m_{3e} = 0,456$  кг та жорсткість  $c_{3e} = 4 \cdot 10^3$  Н/м, які узгодилися із дискретними значеннями ( $m_3 = 0,456$  кг,  $c_{23} = 4,208 \cdot 10^3$  Н/м). Цим було підтверджено адекватність математичної моделі дискретно-континуальної міжрезонансної вібромашини та методику проведених розрахунків. Знайдено власну частоту коливань континуальної ділянки методом Релея-Рітца ( $\omega_{pp} = 94,7$  рад/с (точне  $\omega_{3e} = 93,7$  рад/с)), що підтвердило можливість його застосування для знаходження зведених параметрів.

## РОЗДІЛ 5

### КОНСТРУКТИВНЕ РОЗРОБЛЕННЯ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ВИСОКОЕФЕКТИВНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТЕРА-СЕПАРАТОРА

*Розділ присвячений остаточному формуванню та дослідженню дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини. Аналітично описано керований кривошипно-шатунний механізм та отримано залежності, які однозначно пов'язують нелінійну зміну ексцентриситету від поздовжнього руху повзуна. Проведено чисельне та імітаційне моделювання механізму. Розкрито основні підходи розрахунку резонансного пружного вузла коливальної системи, здійснено підбір віброізоляторів та проведено їх комп'ютерне моделювання. На реальному експериментальному зразку вібраційного транспортера-сепаратора доведено переваги керованого кривошипно-шатунного приводу, знято часові залежності руху активної та проміжної коливальних мас, які повністю підтвердили методологію проведених досліджень.*

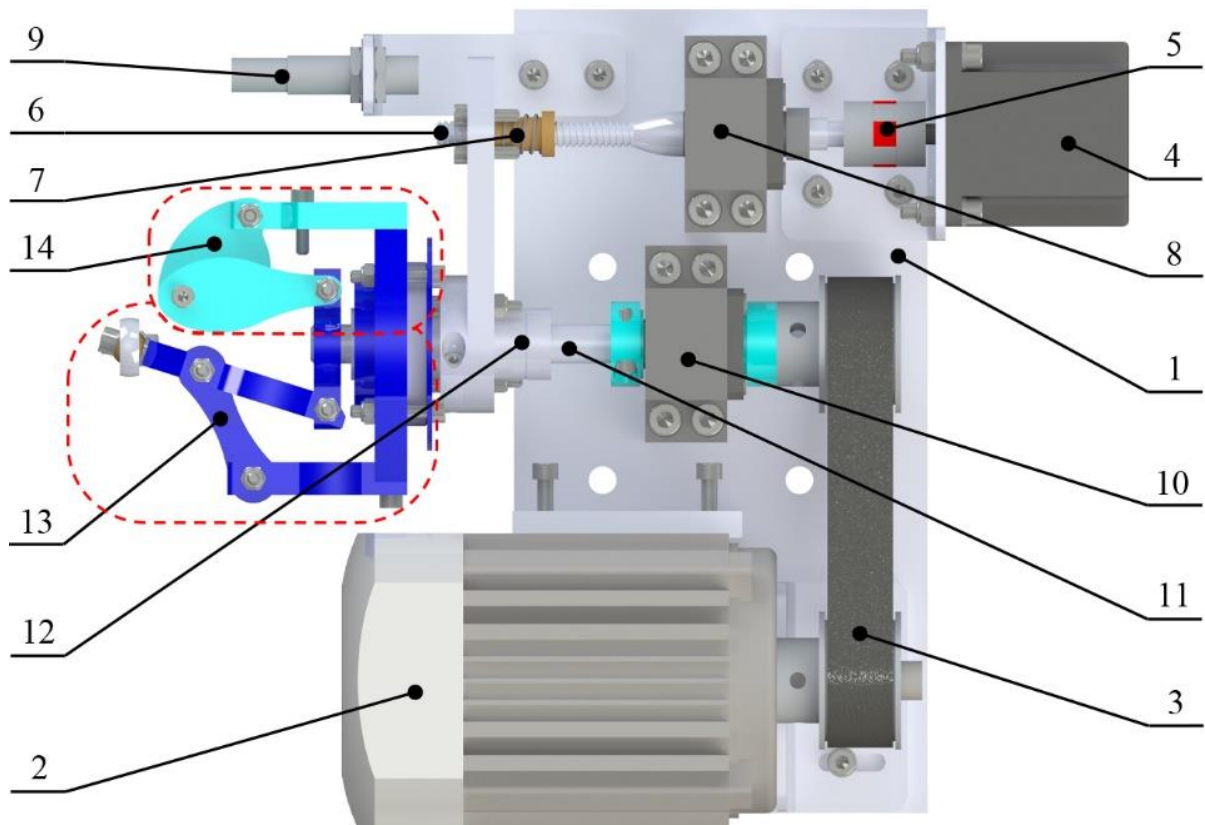
#### **5.1. Розроблення та моделювання керованого кривошипно-шатунного приводу**

Як було наведено вище (див. розділ 1) найбільш апробовані міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом, де третя (надлегка) маса перебуває у силовому збуренні й має в міжрезонансній зоні стрімкоподібну амплітудно-частотну характеристику, завдяки чому її амплітуда коливань може різко змінюватися на невеликій частотній ділянці. Беручи до уваги той факт, що повітряний проміжок між якорем й осердя з котушкою електромагнітного вібробудувача обмежений, існує складність у реалізації міжрезонансної зони, яка обумовлена можливістю биття якоря об осердя з котушками і тим самим унеможливорює стабільний режим роботи.

### 5.1.1. Розроблення та конструктивні особливості привода

Залишається відкритим питання створення привода, який здатний входити в міжрезонансну зону та приводити в рух надлегку масу, реалізуючи енергоощадні конструкції. Такими властивостями може володіти керований кривошипно-шатунний механізм [42] з приводним серводвигуном, регулювання частоти обертання якого забезпечуватиметься частотним перетворювачем, а регулювання амплітуди коливань в системі реалізуватиметься завдяки зміні ексцентриситету (довжини кривошипа) від 0 до певного (попередньо визначеного) значення. Це забезпечить безперешкодне входження обертів кривошипа у міжрезонансну зону, обходячи ефект Зоммерфельда.

Запропонована конструкція керованого кривошипно-шатунного привода, наділена даними властивостями, представлена на рис. 5.1 [167]. Привод складається з основи 1 на якій встановлено серводвигун 2, що приводить в рух кривошип. Частота обертання кривошипа варіюється в межах 100...6000 об/хв. Пасова передача 3 використовується для передавання крутного моменту від валу серводвигуна до валу кривошипа. Керована зміна ексцентриситету (довжини кривошипа) забезпечується кроковим двигуном 4, що характеризується кутом повороту, дискретизація якого 1,8 градуса (0,0314 рад). Зубчаста муфта 5 використовується для з'єднання валу крокового двигуна з ходовим гвинтом 6 з кроком трапецеїдальної різьби гвинта 2 мм. Для уникнення передачі навантаження на вал крокового двигуна використовується несуча підшипникова опора 8, яка забезпечує жорстке встановлення трапецеїдального валу. Пружна гайка 7 мінімізує люфт руху гвинта. Індуктивний давач 9 задає нульове положення ланок механізму. Одна ланка кривошипно-шатунного механізму 13 з'єднана з приводним валом 11, що опирається на підшипникову опору 10. Інша ланка механізму з'єднана з кронштейном, який у свою чергу встановлений на приводний вал за допомогою лінійного кулькового підшипника 12. Поздовжній рух кронштейна 12 вздовж валу 11 здійснюється гвинтовою передачею (див. позиції 6, 7 на рис. 5.1).



*Рис. 5.1. Твердотіла модель керованого кривошипно-шатунного привода вібраційної машини: 1 – основа; 2 – серводвигун; 3 – пасова передача; 4 – кроковий двигун; 5 – зубчаста муфта; 6 – ходовий гвинт; 7 – пружна гайка; 8, 10 – несуча підшипникова опора; 9 – індуктивний давач; 11 – приводний вал; 12 – лінійний кульковий підшипник; 13 – кривошипно-шатунний механізм; 14 – активний механізм балансування*

Якщо кривошипно-шатунний механізм буде незбалансований, великі динамічні (відцентрові) навантаження діятимуть на несучі опори та шарніри і знижуватимуть їх експлуатаційну довговічність. Саме тому запропонована конструкція вібробуджувача оснащена активним балансуєчим механізмом 14. Початкова позиція кривошипно-шатунного механізму задається положенням індуктивного давача 9. Максимальне переміщення гайки 7, що визначає кінцеве положення механізму, контролюється програмою і обмежується 15 мм.

Запропонований привод працює наступним чином (рис. 5.1). Крутний момент, створений серводвигуном 2, передається зубчастим пасом від валу двигуна



до приводного валу 11. Вал жорстко закріплений в підшипниковій опорі 10. Вал 11 забезпечує рух кривошипно-шатунного механізму 13, який у свою чергу приводить у рух коливальну систему. Для того, щоб змінити довжину кривошипа (ексцентриситету, тобто амплітуди вимушених коливань), повзун 12 рухається вздовж напрямної осі 11. Положення повзуна керується кроковим двигуном 4, що приводить в рух передачу гвинт-гайка 6, 7.

### 5.1.2. Кінематичний аналіз кривошипно-шатунного механізму

Структурна схема кривошипно-шатунного привода представлена на рис. 5.2 [167]. Двигун  $M_1$  з'єднаний з валом  $AL$  і ланкою кривошипа  $BF$  й приводить їх в обертальний рух. Кривошип  $BF$  з'єднаний з коромислом  $BE$ , положення шарніра  $E$  якого по відношенню до поздовжньої осі приводного валу визначає ексцентриситет вібраційного збурення (тобто амплітуду вимушених коливань).

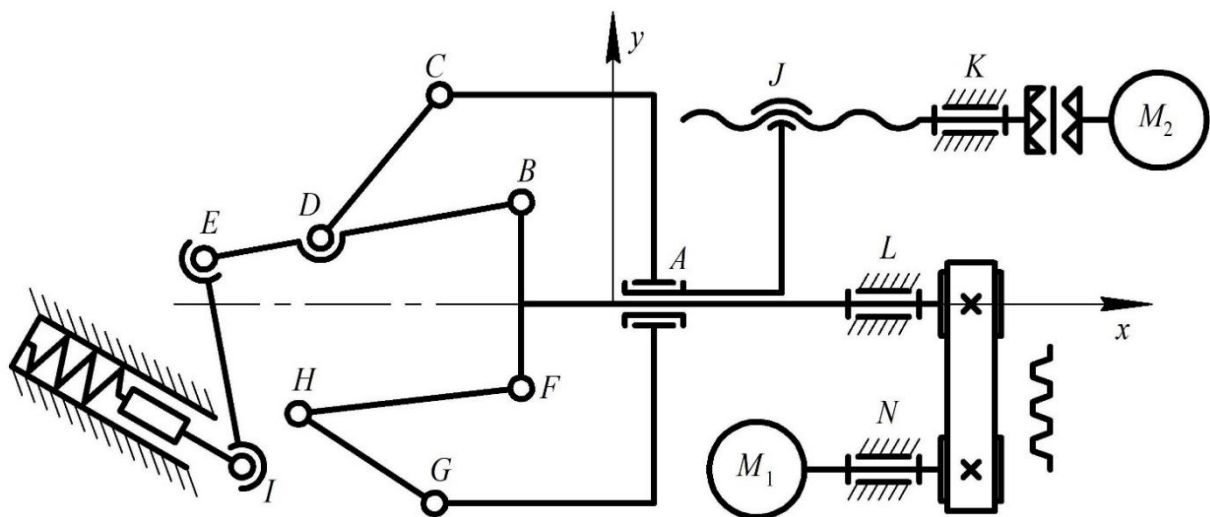
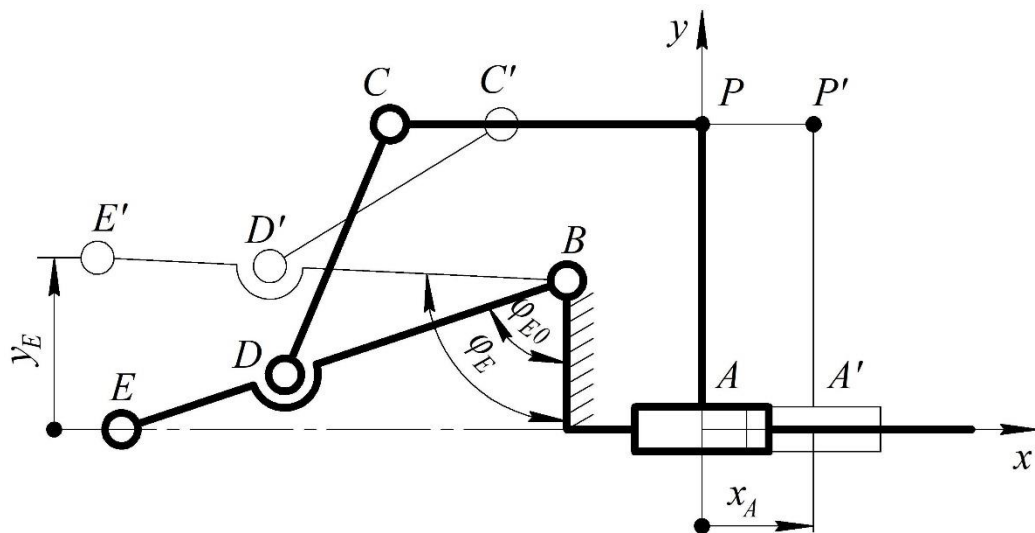


Рис. 5.2. Структурна схема керованого кривошипного-шатунного привода

Для того, щоб змінити кутове положення коромисла  $BE$ , використовуються з'єднувальний стержень  $CD$  і циліндричний повзун  $A$ . Повзун  $A$  може рухатися вздовж валу  $AL$ , де ланка  $AJ$  з'єднана з гайкою гвинтового механізму, що

приводиться в рух за допомогою крокового двигуна  $M_2$ . Кривошип  $BF$  з усіма з'єднаними ланками може обертатися навколо приводного валу  $AL$  і навколо циліндричного повзуна  $A$ . Повзун  $A$  та ланка  $AJ$  можуть рухатися поступально за рахунок обертання гвинта  $KJ$ . Вали кривошипа, регульовального гвинта і приводного електродвигуна пасової передачі підтримуються несучими опорами  $L, K, N$ , відповідно. Нижня частина механізму (ланки  $FH, HG$  і т. д.) призначена для балансування механізму відносно приводного валу.

Проаналізуємо рух механізму кривошипа, що складається з наступних ланок (рис. 5.3): повзун  $A$ , коромисло  $BE$ , з'єднувальний стрижень  $CD$ . Початкове положення механізму представлено за допомогою товстої лінії, а кінцеве положення – тонкою лінією. Центр плоскої Декартової системи координат розміщений у початковому положенні повзуна  $A$ . Вісь  $x$  спрямована вправо, а вісь  $y$  спрямована вгору. Положення шарніра  $B$  фіксується. Таким чином координати  $x_B, y_B$  є сталими. Координати всіх інших шарнірів залежать від положення повзуна  $A$  та визначаються узагальненою координатою  $x_A$ .



*Рис. 5.3. Кінематична схема механізму зміни ексцентриситету, представленого у двох фіксованих положеннях*

Основне завдання кінематичного аналізу полягає у визначенні аналітичних виразів, які описують закони руху всіх ланок та всіх шарнірів механізму. Ці

вирази слід подавати як функції  $x_A$ , наприклад  $x_D(x_A)$ ,  $y_E(x_A)$  тощо. Якщо відомий закон руху повзуна, тобто задана залежність  $x_A$  від часу  $t$ , можна визначити закони руху всіх інших ланок. І навпаки, якщо прописаний закон руху шарніра  $C$ , можна визначити залежність  $x_A$  від часу  $t$ .

За допомогою методу замкнених векторних контурів залежність координат шарніру  $D$  можна представити як функції від  $x_A$  наступним чином (Додаток N, вирази (N.2 – N.3)):

$$\begin{aligned}
 & l_{CD}^2(x_B - (x_A - l_{PC})) + l_{BD}^2(-x_B + (x_A - l_{PC})) + \\
 & + (x_B + (x_A - l_{PC})) \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) - \\
 & - \sqrt{ - \left( (l_{BD} - l_{CD})^2 - (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 - (y_B - y_C)^2 \right) \times } \\
 & - \sqrt{ \left( (l_{BD} + l_{CD})^2 - (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 - (y_B - y_C)^2 \right) (y_B - y_C)^2 } \\
 x_D(x_A) = & \frac{ }{ 2 \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) }; \tag{5.1} \\
 & y_D(x_A) = \frac{1}{ 2 \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) (y_B - y_C) } \times \\
 & \times \left( -l_{BD}^2 (y_B - y_C)^2 + x_B \times \right. \\
 & \times \sqrt{ - \left( l_{BD}^4 + \left( -l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right)^2 - \right. } \\
 & \left. \left. - 2l_{BD}^2 \left( l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) \right) (y_B - y_C)^2 - \right. \\
 & \left. - (x_A - l_{PC}) \sqrt{ - \left( l_{BD}^4 + \left( -l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + \right. \right. \right. } \\
 & \left. \left. \left. + (y_B - y_C)^2 \right)^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2l_{BD}^2 \left( l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (y_B - y_C)^2 \right) \right) (y_B - y_C)^2 + \right. \\
 & \left. + (y_B - y_C) \left( l_{CD}^2 (y_B - y_C) + \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) (y_B + y_C) \right) \right). \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Беручи до уваги той факт, що координати шарніра  $B$  відомі, а координати шарніра  $D$  виведені як функції  $x_A$ , напишемо залежності  $x_E$  та  $y_E$  від  $x_A$  (Додаток N, вирази (N.5 – N.6):

$$x_E(x_A) = \frac{x_B(l_{BD} - l_{BE}) + l_{BE} \cdot x_D(x_A)}{l_{BD}}; \quad (5.3)$$

$$y_E(x_A) = \frac{y_B(l_{BD} - l_{BE}) + l_{BE} \cdot y_D(x_A)}{l_{BD}}. \quad (5.4)$$

Підставивши вирази (5.1), (5.2) у рівняння (5.3), (5.4), можна отримати закони руху шарніра  $E$  (Додаток N).

### 5.1.3. Чисельне та комп'ютерне моделювання руху кривошипно-шатунного механізму

Для проведення повноцінного кінематичного аналізу запропонованого керованого кривошипно-шатунного механізму проведемо чисельне та комп'ютерне моделювання його руху. Введемо розміри ланок та координати реперних точок механізму (рис. 5.4):  $l_{PC} = 42$  мм,  $l_{CD} = 36,5$  мм,  $l_{BD} = 40$  мм,  $l_{BE} = 63,2$  мм,  $x_B = -18,176$  мм,  $y_B = 20$  мм,  $y_C = 41$  мм [167].

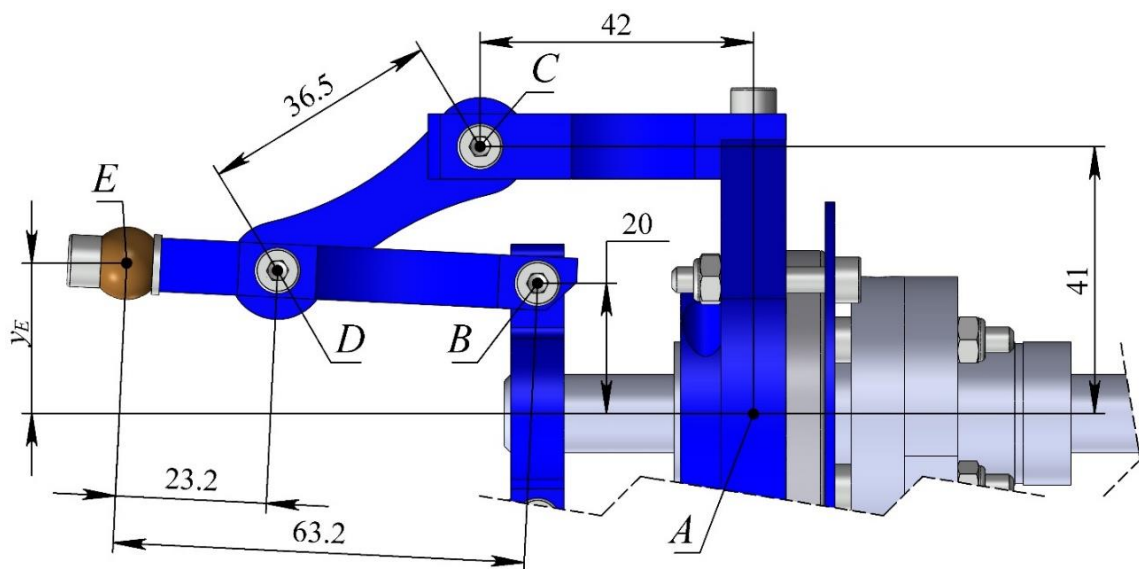
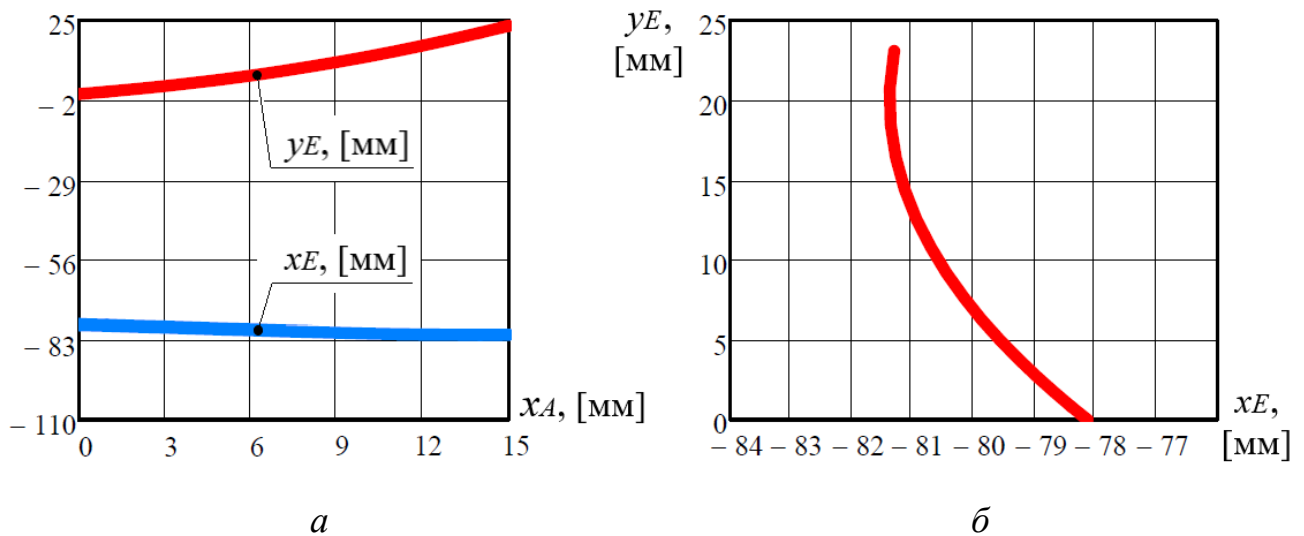


Рис. 5.4. Розміри ланок та координати точок кривошипно-шатунного механізму

Виходячи із запропонованої конструкції керованого кривошипно-шатунного механізму змодельовано рух шарніра  $E$ , розв'язуючи рівняння (5.1) – (5.4) у програмному продукті MathCAD. Залежності  $x_E(x_A)$ ,  $y_E(x_A)$  руху шарніра  $E$  в площині від переміщення повзуна  $A$  за координатою  $x_A$  та траєкторія руху шарніра  $E$  в координатах  $x_E$ ,  $y_E$  представлені на рис. 5.5 (Додаток N, рис. N.6, N.7):

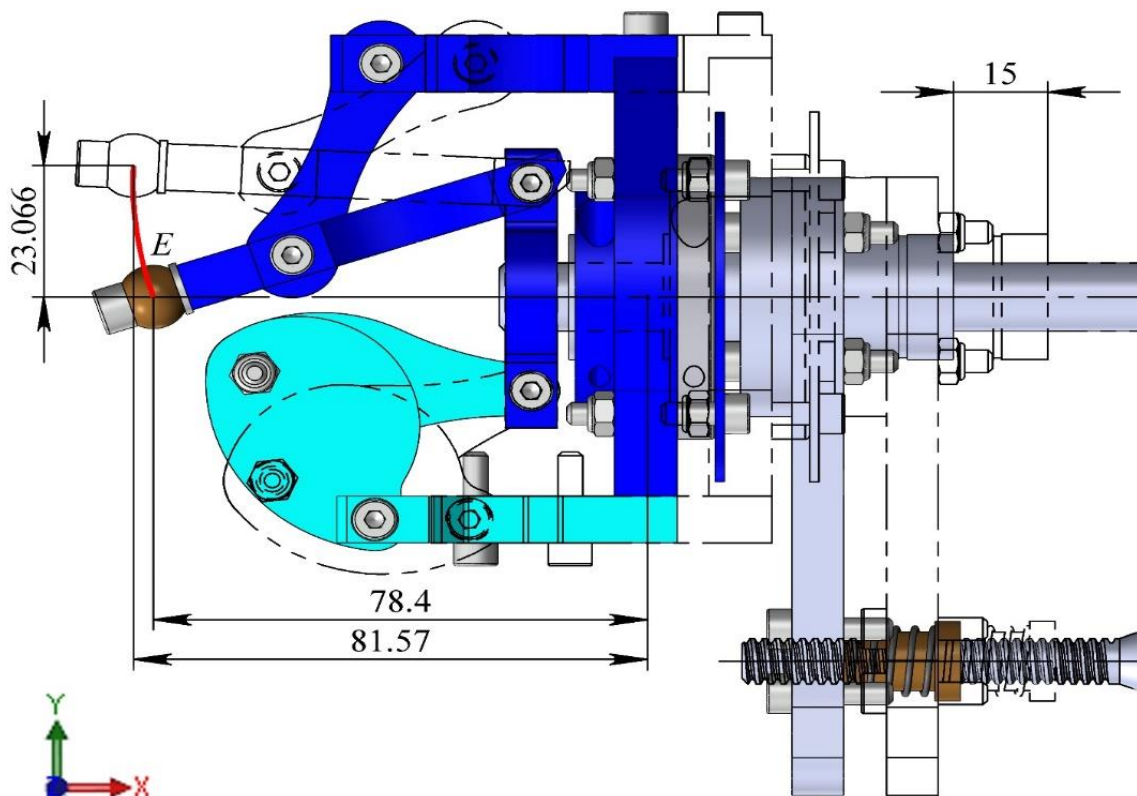


**Рис. 5.5.** Залежності переміщень  $x_E(x_A)$ ,  $y_E(x_A)$  (а)  
та траєкторія руху шарніра  $E$  в координатах  $x_E$ ,  $y_E$  (б)

Максимальне переміщення повзуна  $A$ , що задає координату  $x_A$ , обмежено величиною 15 мм. Шарнір  $E$  описує колову траєкторію, де його максимальна висота (зміщення вздовж вертикальної осі) становить близько 23 мм, а найбільше переміщення вздовж горизонтальної осі дорівнює 3 мм. Це означає, що ексцентриситет вібробудувача та амплітуда вимушених коливань можуть знаходитися в діапазоні 0...23 мм. Даний діапазон відповідає вимогам більшості технологічного обладнання даного класу.

Для того, щоб обґрунтувати правильність отриманих аналітичних виразів, що описують закони руху механізму, проведемо комп'ютерне моделювання з використанням його тривимірної конструкції, побудованої в програмному продукті SOLIDWORKS.

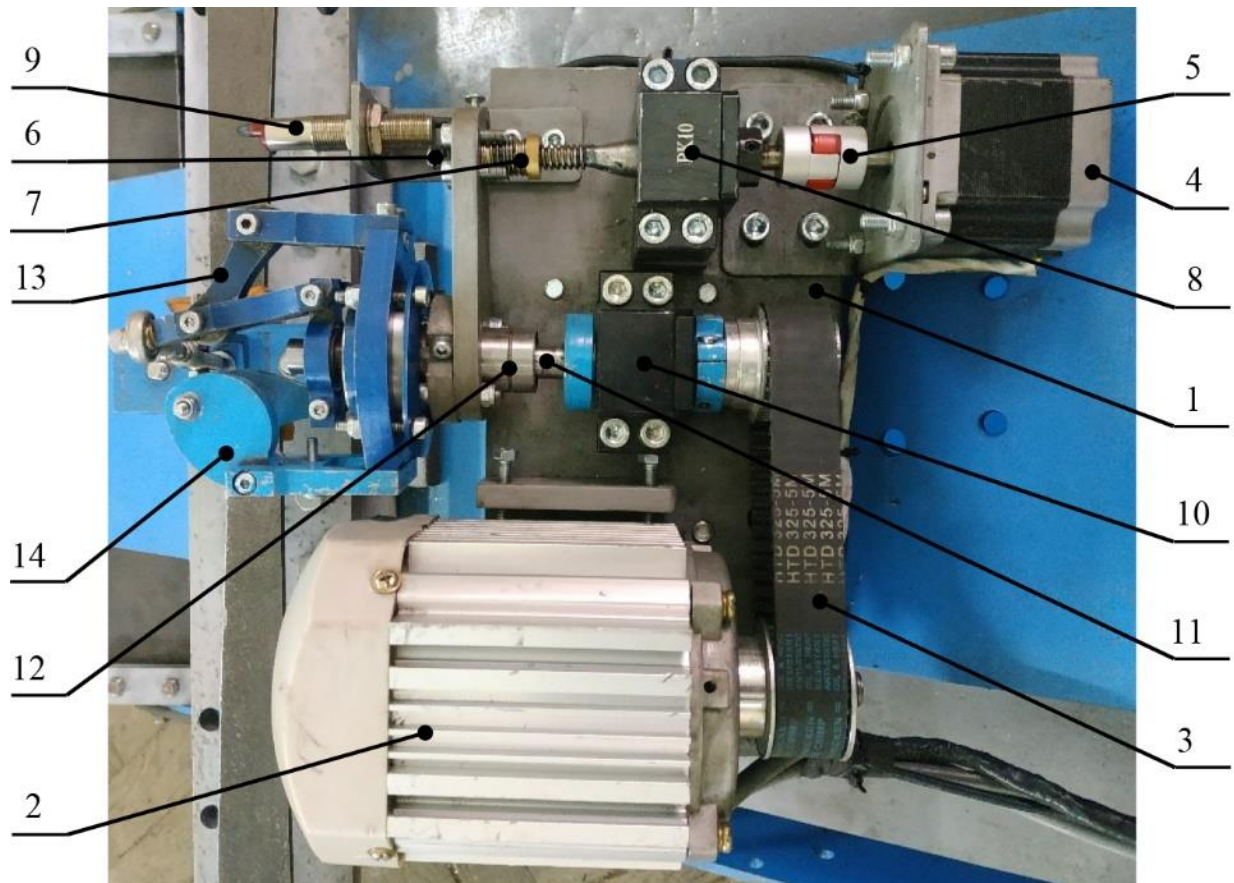
Результати моделювання, що представляють траєкторію руху шарніра  $E$  в координатах  $x_E$ ,  $y_E$  від переміщення повзуна  $A$  по координаті  $x_A$  наведені на рис. 5.6. Максимальне переміщення повзуна регулюється програмно та обмежується 15 мм. Власне це переміщення і зумовлює коловий рух шарніра  $E$ , що наглядно відображено на рисунку. Максимальне вертикальне переміщення шарніра  $E$  дорівнює 23,066 мм, тоді як максимальне горизонтальне переміщення можна розрахувати наступним чином:  $81,57 - 78,4 = 3,17$  мм (див. рис. 5.6) [167].



*Рис. 5.6. Результати комп'ютерного моделювання руху механізму*

Аналізуючи отримані результати чисельного та комп'ютерного моделювання можна зробити висновок, що отримані аналітичні вирази (5.1) – (5.4) адекватно описують кривошипно-шатунний механізм. Тож їх було використано для внесення даних про взаємне переміщення вузлів механізму в програмний продукт, що забезпечило чітке позиціонування ексцентриситету. Отримані результати можуть бути використані при розробленні віброзбуджувачів для різних типів технологічного обладнання.

Опираючись на адекватність розрахунку та проведений аналіз механізму, описаний керований кривошипно-шатунний привод було реалізовано й впроваджено у вібраційному транспортері-сепараторі (рис. 5.7).



*Рис. 5.7. Керований кривошипно-шатунний привод  
(позиції відповідають рис. 5.1)*

## **5.2. Розрахунок пружних вузлів міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора**

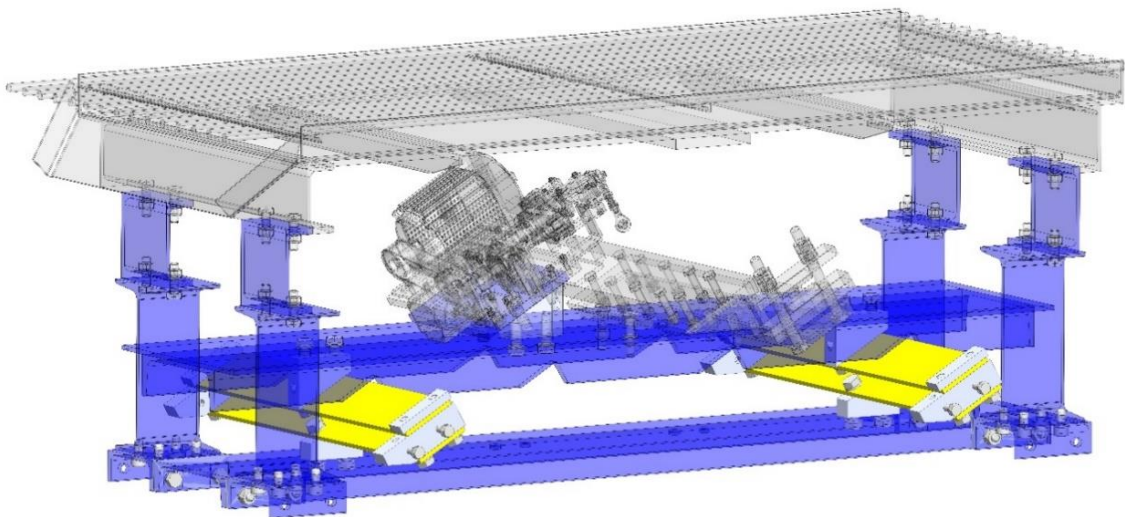
### **5.2.1. Обґрунтування параметрів резонансних пружних елементів, що пов'язують активну та проміжну маси**

Розглянемо резонансний пружний вузол жорсткістю  $c_{12}$ , який зв'язує активну та проміжну маси (рис. 5.8). З наведеного рисунку можна зауважити, що дві

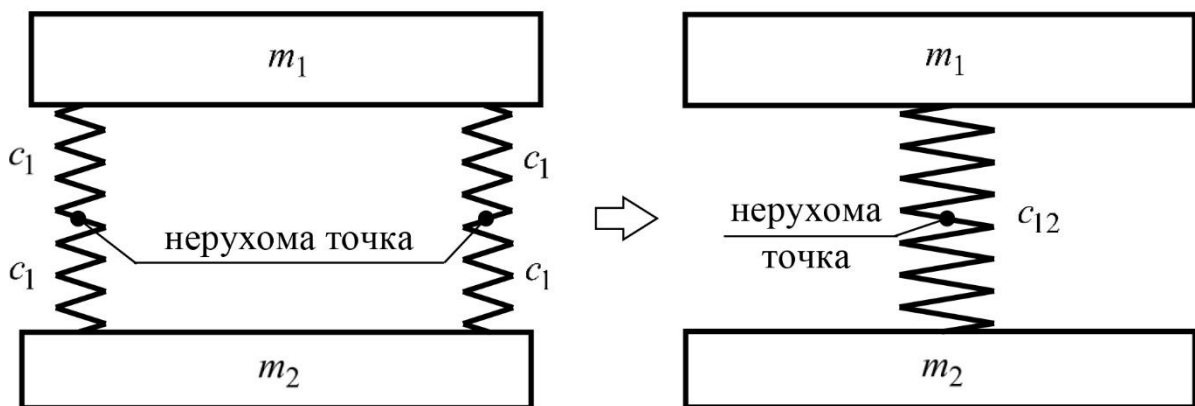
пари пружних елементів з'єднані паралельно. У кожній парі пружні елементи з'єднані послідовно і є однаковими. Схема кріплення плоских пружних елементів наведена на рис. 5.9. Якщо жорсткість одного пружного елемента позначити  $c_1$ , то жорсткість пружного вузла  $c_{12}$  через жорсткість  $c_1$  можна записати так:

$$c_{12} = \frac{(c_1 + c_1) \cdot (c_1 + c_1)}{(c_1 + c_1) + (c_1 + c_1)} = c_1 = 3,76 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad (5.5)$$

тобто жорсткість  $c_1$  одного пружного елемента за такої схеми рівна жорсткості  $c_{12}$  резонансного пружного вузла загалом (див. вираз (3.10)).



*Рис. 5.8. Резонансний пружний вузол жорсткістю  $c_{12}$  дискретно-континуального транспортера-сепаратора*



*Рис. 5.9. Розрахункова схема кріплення пружних елементів*



Мінімальна довжина  $l_c$  (див. рис. 5.10) робочої ділянки пружного елемента жорсткістю  $c_1$  визначається за виразом [88]:

$$l_c = 3\delta_y k_{\text{кон}} \sqrt[3]{\frac{c_1 E^2}{h_c i k [\sigma_{-1}]^3}}, \quad (5.6)$$

де

$$\delta_y = \frac{|Y_1| + |Y_2|}{2} \quad (5.7)$$

– відносне зміщення кінців пружного елемента;

$k_{\text{кон}}$  – коефіцієнт, що враховує концентрацію напружень ( $k_{\text{кон}} = 1$ );

$h_c = 0,068$  м – робоча ширина пружного елемента;

$E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па – значення модуля пружності I роду;

$k = 0,75$  – коефіцієнт защемлення пружного елемента;

$i = 2$  – кількість робочих ділянок в пружному елементі;

$[\sigma_{-1}] = 392$  МПа – допустиме напруження на згин для сталі 60С2А [115].

Знайдемо відносне зміщення кінців пружних елементів  $\delta_y$  з виразу (5.7), використавши отримані значення амплітуд коливань активної та проміжної мас (див. п. 4.4), які відповідно рівні  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $Y_2 = -3 \cdot 10^{-3}$  м. Тож:

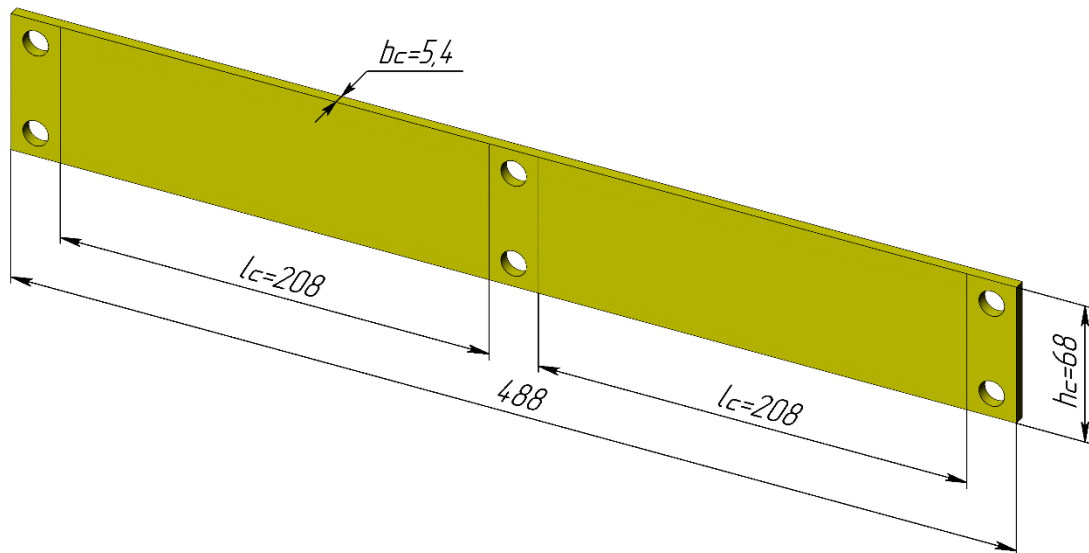
$$\delta_y = (2,5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}) / 2 = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (5.8)$$

Тоді мінімальна довжина  $l_c$  робочої ділянки пружного елемента з умов забезпечення міцності, використовуючи вираз (5.6), становитиме (рис. 5.10):

$$l_c = 3 \cdot 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{3,76 \cdot 10^5 \cdot (2,1 \cdot 10^{11})^2}{0,068 \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot (392 \cdot 10^6)^3}} = 0,114 \text{ м.} \quad (5.9)$$

Конструктивно приймемо довжини робочої ділянки рівною  $l_c = 0,208$  м, товщина робочої ділянки пружного елемента жорсткістю  $c_1$  буде [88] (рис. 5.10):

$$b_c = \sqrt[3]{\frac{c_1 l_c^3}{E h_c i k}} = \sqrt[3]{\frac{3,76 \cdot 10^5 \cdot 0,208^3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,068 \cdot 2 \cdot 0,75}} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (5.10)$$



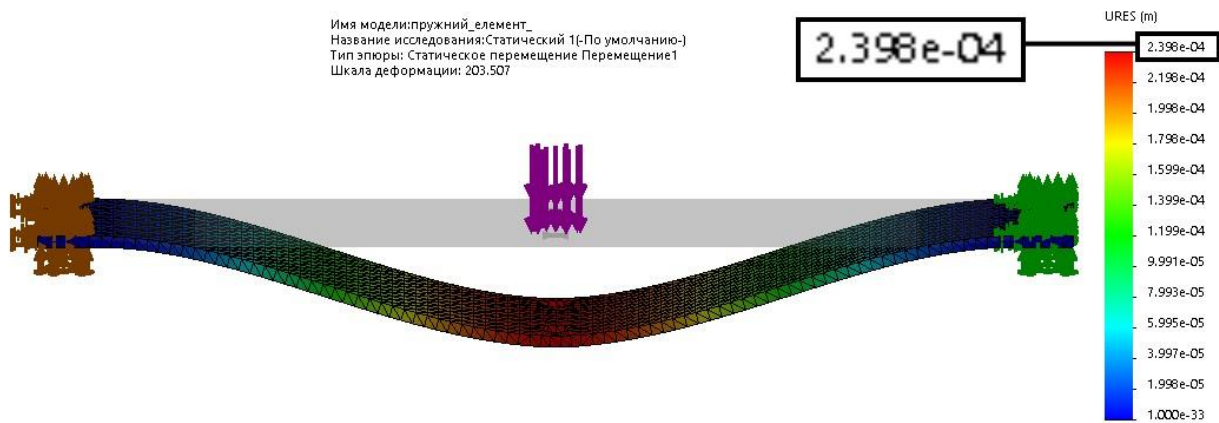
**Рис. 5.10.** Геометричні розміри пружного елемента

Оскільки нами прийнято довжину робочої ділянки пружного елемента рівною розрахунковій  $l_c = 0,208$  м, то максимальні напруження, які виникатимуть у пружному елементі, будуть рівні [88]:

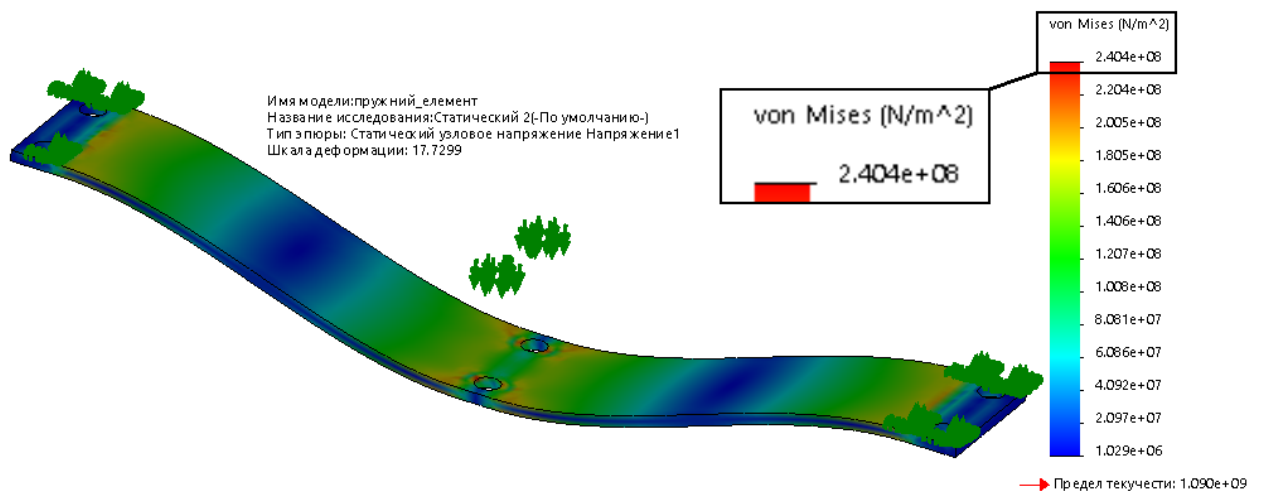
$$\sigma_n = \frac{3Eb_c \delta_y}{l_c^2} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2,75 \cdot 10^{-3}}{0,208^2} = 214,6 \text{ МПа} , \quad (5.11)$$

Здійснимо перевірочний розрахунок жорсткості одного пружного елемента методом скінченних елементів. Приклавши тестове зусилля  $P_m = 100$  Н (рис. 5.11), отримуємо величину прогину  $\delta = 2,398 \cdot 10^{-4}$  м. Отже, жорсткість одного пружного елемента рівна  $c_1 = 100 / 2,398 \cdot 10^{-4} = 4,171 \cdot 10^5$  Н/м і є більшою від необхідного значення (див. вираз (5.5)). Це пов'язано з тим, що моделювання проводилось за ідеального защемлення кінців. В дійсності ж результат буде меншим і відповідатиме розрахованим вище значенням.

Проведемо перевірочний розрахунок на міцність пружного елемента вібраційного транспортера-сепаратора методом скінченних елементів, жорстко защебивши його кінці та змістивши місце кріплення коливальних мас на величину  $\delta_y = 2,75 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 5.12).



*Рис. 5.11. Вікно програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображено результат розрахунку прогину пружного елемента під навантаженням у 100Н в модулі Simulation*



*Рис. 5.12. Вікно програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображено розподіл напружень під час розрахунку пружного елемента на міцність при зміщенні кінців робочої ділянки на величину  $\delta_y = 2,75 \cdot 10^{-3}$  м в модулі Simulation*

Максимальні напруження, які виникають, становлять  $\sigma = 240$  МПа і є допустимими. Отже, результати даного аналізу та результат аналітичного розрахунку на міцність (вираз (5.11)) вказують на те, що вибрана марка сталі 60С2А для пружних елементів та їх форма є конструктивно аргументовані. Тож такі елементи обґрунтовано можуть бути застосовані у транспортері-сепараторі.

### 5.2.2. Підбір та розрахунок віброізоляторів

Конструкція транспортера-сепаратора передбачає використання чотирьох ( $n_{gn} = 4$ ) витих пружин, які несуть функцію віброізоляторів. На віброізолятори діє маса вібраційної машини (рис. 5.13), яка рівна  $m = 162,33$  кг [68].

Розглядаємо одномасову механічну коливну систему, в якій маса вібраційної машини  $m$  встановлена на віброізоляторах жорсткістю  $c_{i3}$ . Як було обумовлено у розділі 1, власна частота коливань такої системи повинна бути у 3...7 разів менша за вимушену частоту. Тож резонансне налагодження системи  $z_{i3} = 3...7$ . Дана умова є достатньою для забезпечення віброізоляції, за якої передача динамічних навантажень на фундамент буде знижена в 9...49 разів.

Жорсткість віброізоляторів для одномасової системи встановлюється згідно залежності:

$$c_{i3} = m \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2 = m (2 \cdot \pi \cdot \nu_{i3})^2, \quad (5.12)$$

де  $\nu_{i3}$  – власна частота коливань одномасної системи на віброізоляторах.

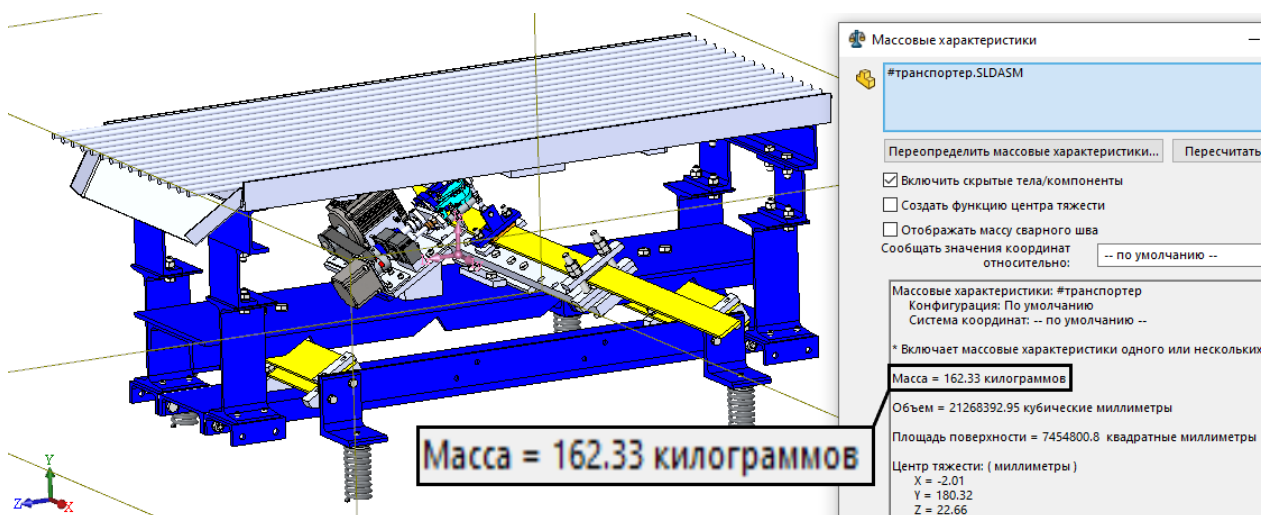


Рис. 5.13. Фрагмент вікна програмного продукту SOLIDWORKS 2018, де відображені інерційні параметри транспортера-сепаратора

Використовуючи (5.12), власна циклічна частота коливальної системи на віброізоляторах визначатись згідно залежності:

$$v_{i3} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{i3}}{m}}. \quad (5.13)$$

Використовуємо у якості віброізоляторів готові виті пружні елементи (рис. 5.14). Проведемо відповідні розрахунки, які підтвердять можливість застосування даних елементів у якості віброізоляторів.

Жорсткість однієї виті пружини рівна:

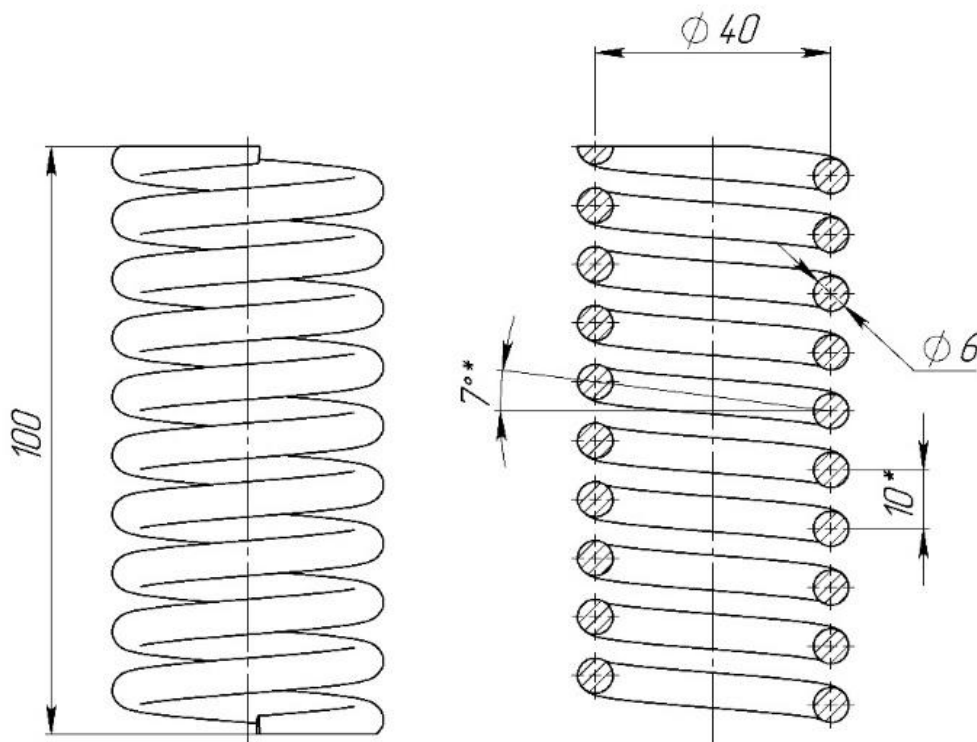
$$c_{i31} = \frac{G \cdot d_{\delta}}{8 \cdot D_{нв}^3 \cdot i_{\delta}} = \frac{8,4 \cdot 10^{10} \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 0,04^3 \cdot 10} = 2,126 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, \quad (5.14)$$

де  $G = 8,4 \cdot 10^{10}$  Па – модуль пружності при крученні для сталі 65Г;

$d_{\delta} = 6 \cdot 10^{-3}$  м – діаметр дроту виті пружини;

$D_{нв} = 0,04$  м – середній діаметр навивки витків;

$i_{\delta} = 10$  – кількість витків виті пружини.



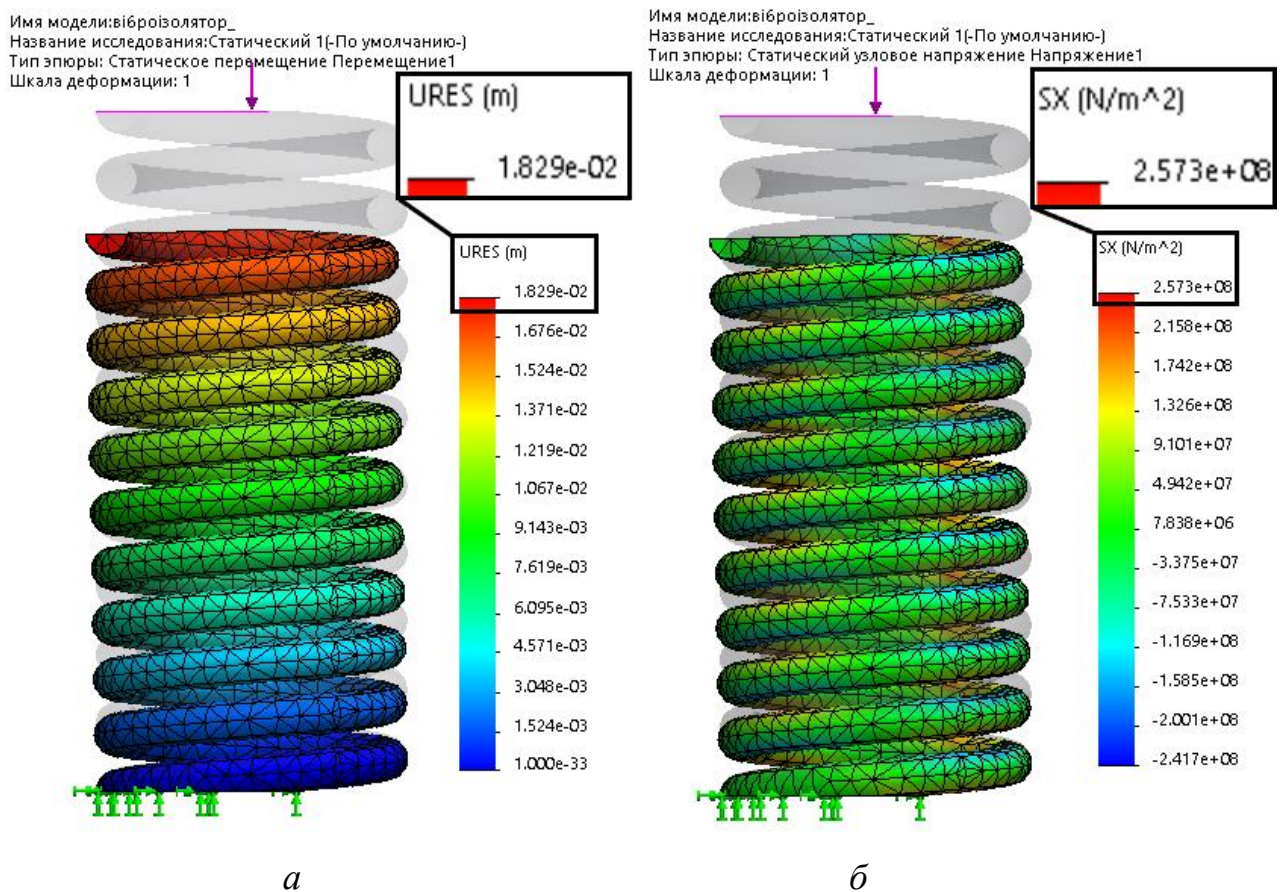
**Рис. 5.14.** Геометричні розміри виті пружини

Одна вита пружина навантажена силою  $Q_{i31}$ :

$$Q_{i31} = \left( \frac{m}{n_{bn}} \right) g = \left( \frac{162,33}{4} \right) \cdot 9,807 = 398 \text{ Н.} \quad (5.15)$$

Навантаживши комп'ютерну модель витої пружини (рис. 5.15, а) отриманим зусиллям  $Q_{i31} = 398 \text{ Н}$ , визначено, що її прогин складає  $\delta_{i3} = 1,829 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , звідси коефіцієнт жорсткості витої пружини в осьовому напрямку рівний:

$$c_{i31} = \frac{Q_{i31}}{\delta_{i3}} = \frac{398}{1,829 \cdot 10^{-2}} = 21759 \text{ Н/м.} \quad (5.16)$$



**Рис. 5.15.** Величина прогину (а) та напружень витої пружини (б)

Як бачимо, результат чисельного розрахунку жорсткості витої пружини збігся з аналітичним розрахунком (5.14). Власна циклічна частота коливань одномасної системи на чотирьох віброізоляторах складе:

$$v_{i3} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{en} \cdot c_{i31}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot 21759}{162,33}} = 3,69 \text{ Гц.} \quad (5.17)$$

Використовуючи формулу (5.12), резонансне налагодження одномасової коливальної системи на віброізоляторах становитиме:

$$z_{i3} = \Omega \sqrt{\frac{m}{n_{en} \cdot c_{i31}}} = 99,5 \cdot \sqrt{\frac{162,33}{4 \cdot 21759}} = 4,3, \quad (5.18)$$

що є достатнім для виконання умов віброізоляції.

Зусилля ж реакцій в опорах, спричинені коливанням конструкції вібраційної машини на віброізоляторах, будуть в  $z_{i3}^2$  разів менші за зусилля, які б розвивались у віброізоляторах з резонансним налагодженням  $z = 1$  (відсутня віброізоляція). Оскільки у віброізоляторах реалізовано значення  $z_{i3} = 4,3$ , передавання вібрації на фундамент порівняно з найгіршим випадком зменшиться у  $4,3^2 = 18,5$  разів [68]. Отже, підібраний віброізолятор зводить до мінімуму передавання вібрації на фундамент і виключає необхідності застосування додаткових віброізоляційних засобів.

Перевіримо виті пружини на міцність. Напруження, які виникають у витій пружині (віброізоляторі), рівні [65]:

$$\tau = \frac{8 \cdot Q_{i31} \cdot D_{нв}}{\pi \cdot d_{\partial}^3} \cdot k_{\epsilon} = \frac{8 \cdot 398 \cdot 0,04}{3,14 \cdot 0,006^3} \cdot 1,23 = 231 \text{ МПа,} \quad (5.19)$$

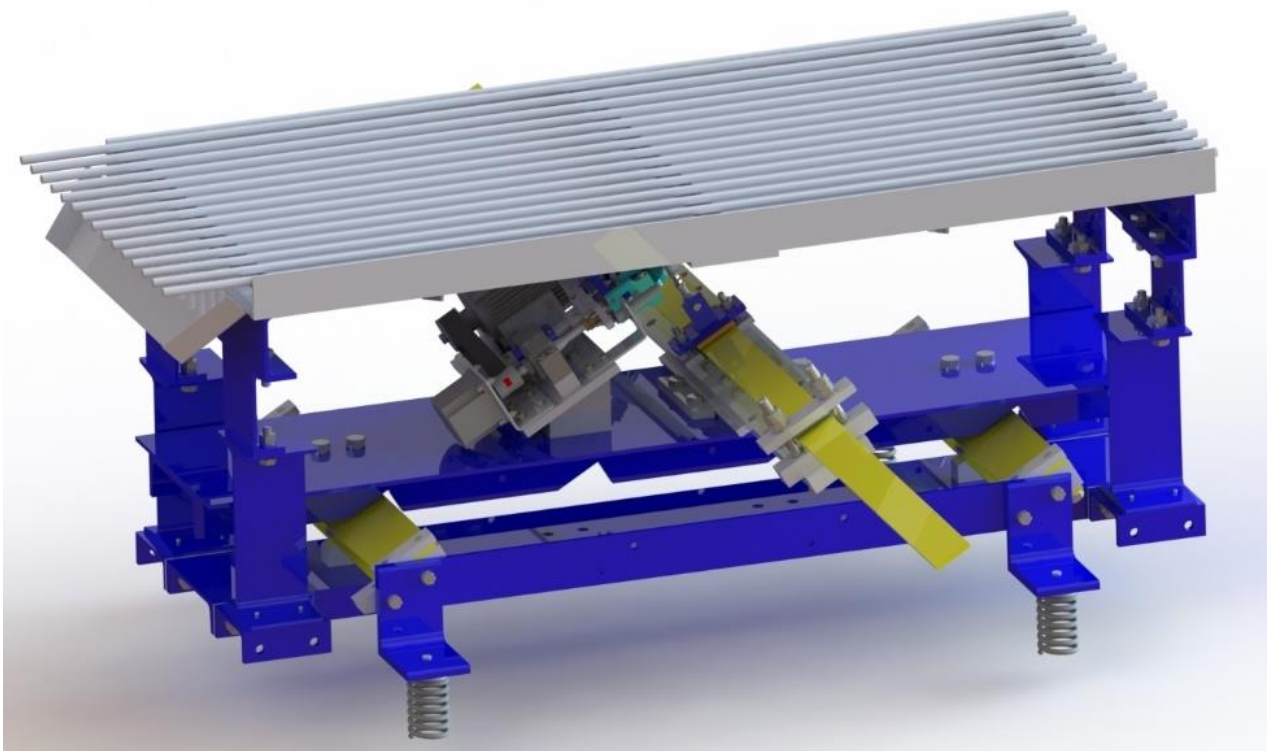
де  $k_{\epsilon}$  – коефіцієнт кривизни витків, який рівний:

$$\begin{aligned} k_{\epsilon} &= \frac{4 \cdot (D_{нв} / d_{\partial}) - 1}{4 \cdot (D_{нв} / d_{\partial}) - 4} + \frac{0,65}{(D_{нв} / d_{\partial})} = \\ &= \frac{4 \cdot (0,04 / 6 \cdot 10^{-3}) - 1}{4 \cdot (0,04 / 6 \cdot 10^{-3}) - 4} + \frac{0,65}{(0,04 / 6 \cdot 10^{-3})} = 1,23. \end{aligned}$$

Отримане напруження є допустимим для статичного навантаження. Результат перевірений імітаційним розрахунком (рис. 5.15, б), де напруження лежать в допустимих межах і становлять  $\tau = 257 \text{ МПа}$ .

### 5.3. Загальний вигляд міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора

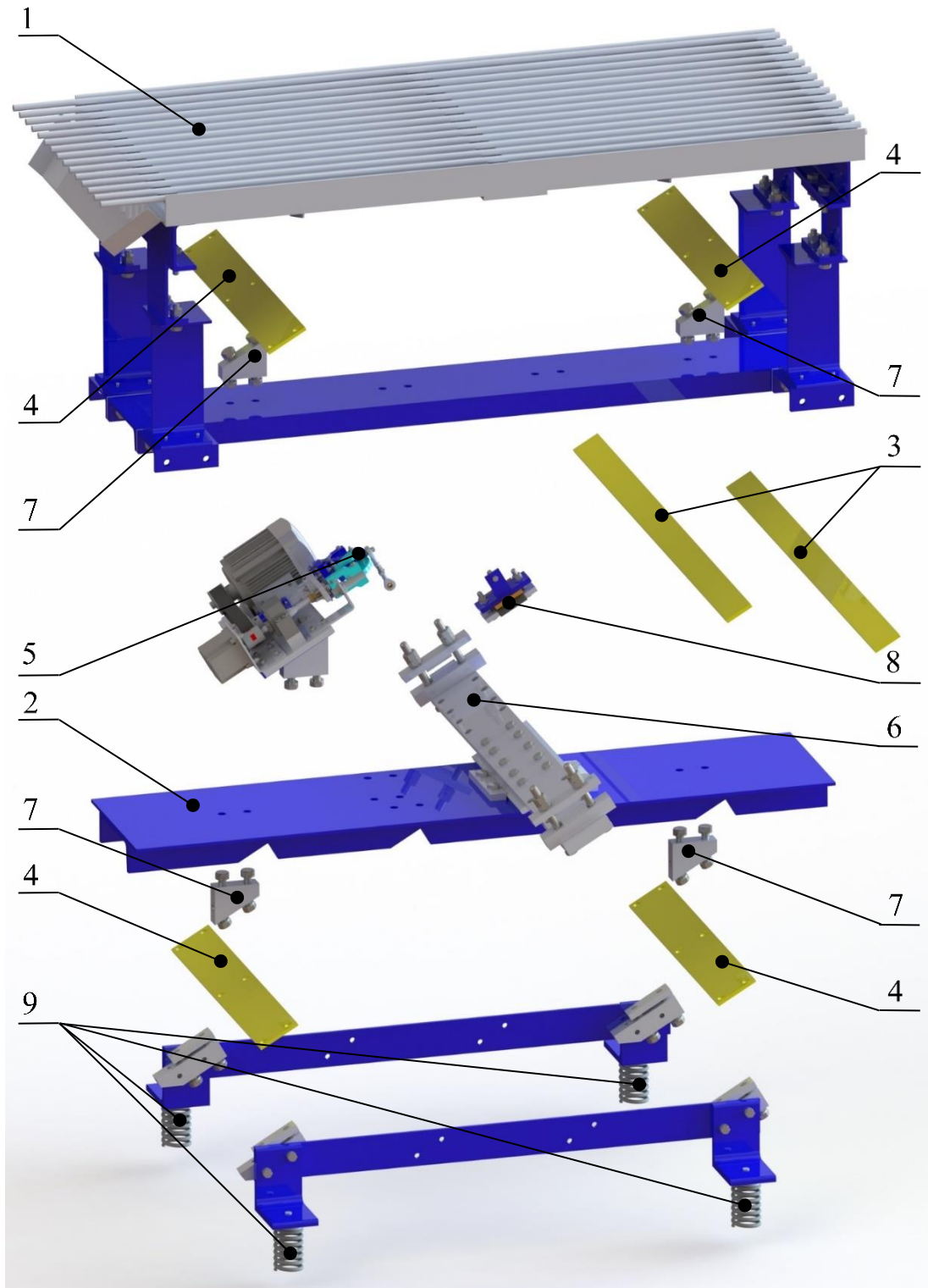
Просторова модель дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора, що відповідає проведеним розрахункам в дисертаційній роботі, представлено на рис. 5.16, робочий орган (активна маса) якого здійснює простий прямолінійний рух.



*Рис. 5.16. Просторова твердотіла модель міжрезонансного транспортера-сепаратора*

Даний транспортер-сепаратор призначений для сепарування та одночасного транспортування відносно легких полімерних матеріалів. Він складається з таких основних вузлів (рис. 5.17): активної маси 1, яка відіграє роль робочого органу, та проміжної маси 2, які з'єднані між собою чотирма резонансними пружними елементами 4. Крім того транспортер-сепаратор містить реактивну масу (континуальну ділянку) 3, яка виконана з двох стержнів.



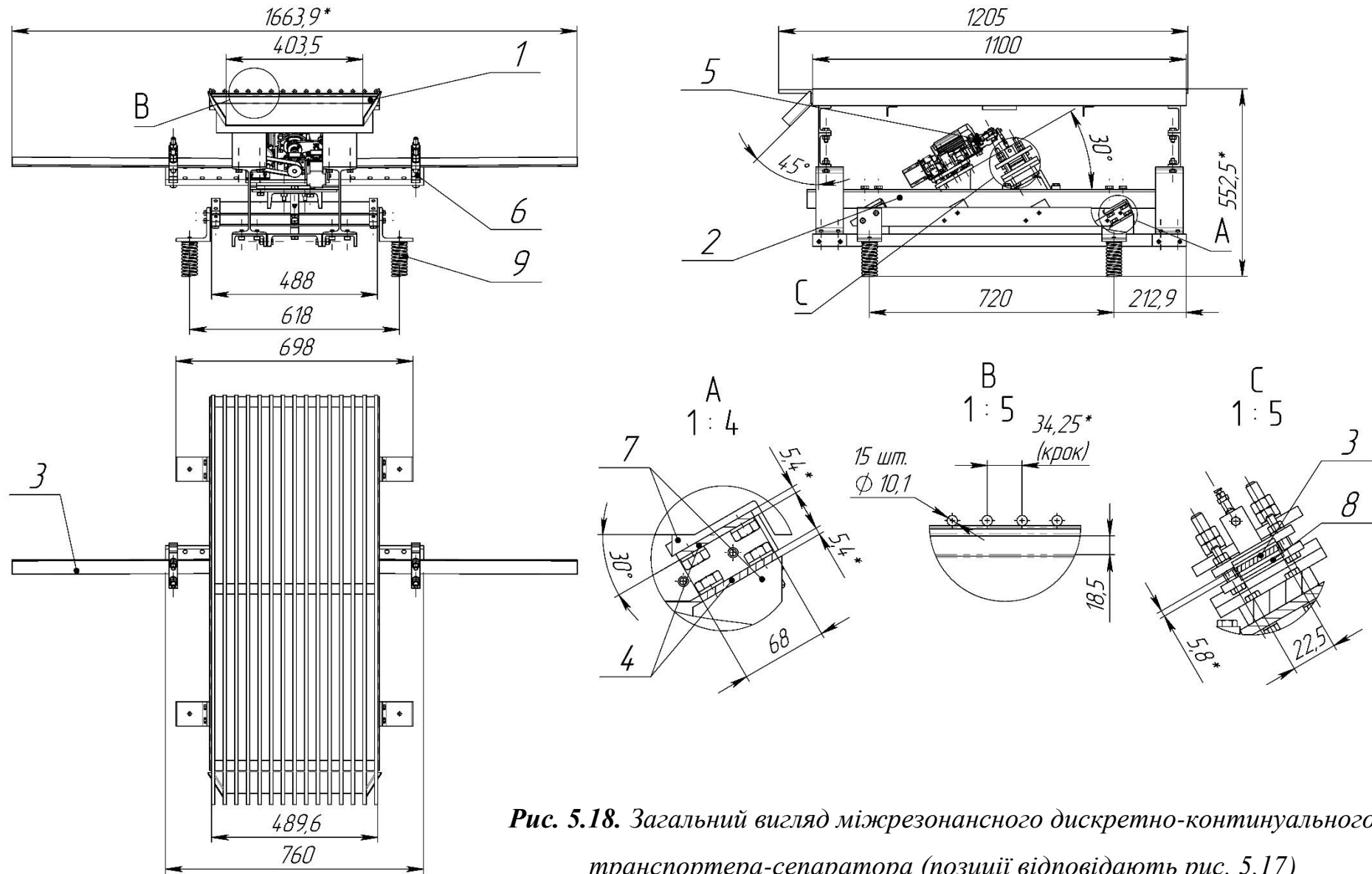


*Рис. 5.17. Просторова твердотіла модель міжрезонансного транспортера-сепаратора з рознесеними вузлами:*

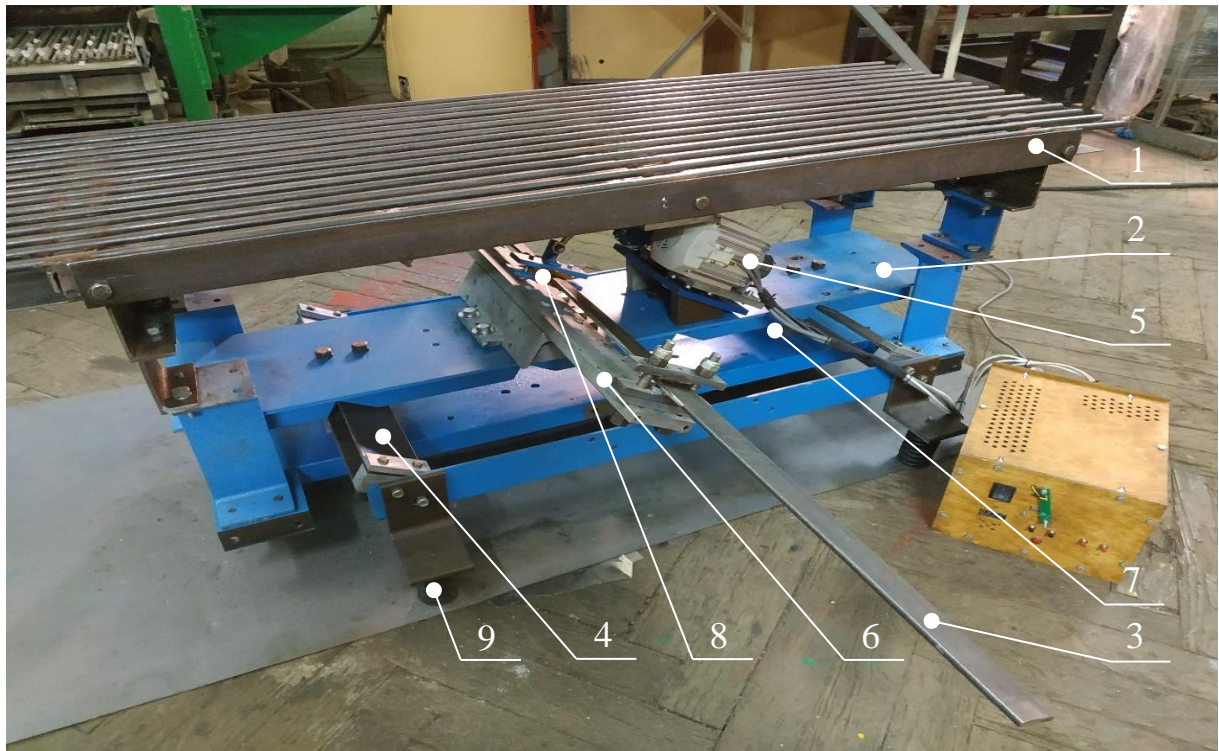
*1 – активна маса; 2 – поміжна маса; 3 – континуальна ділянка; 4 – пружні елементи; 5 – керований кривошипно-шатунний механізм; 6 – опора призм; 7 – башмаки; 8 – гумова втулка; 9 – віброізолятори*

На проміжній масі перпендикулярно до пружних елементів встановлено керований кривошипно-шатунний привод 5 та опора кріплення 6 континуальної ділянки. На опорі 6 змонтовані дві пари призм. Безпосереднє з'єднання континуальної ділянки з керованим кривошипно-шатунним приводом реалізовано через гумові втулки 8. Кут нахилу пружних елементів здійснюється завдяки башмакам 7, які жорстко вмонтовані відповідно на активній та поміжній масах. Це значно спрощує спосіб регулювання заданого кута кидання, а також унеможливорює його зміну в процесі роботи й забезпечує достатню жорсткість кріплення. Коливальні маси, які кріпляться до пружних елементів (пружин) працюють у протифазі, динаміно зрівноважуючи систему. Даний спосіб дозволяє зменшити динамічні навантаження під час роботи вібростанини, які передаються на фундамент. Вібраційний транспортер-сепаратор встановлюється на фундамент через віброізолятори 9, які закріплені до пружних вузлів в умовно нерухомих точках.

Принцип роботи вібраційного транспортера-сепаратора такий. Силове збурення від керованого кривошипно-шатунного механізму прикладається до проміжної маси 2 інертністю  $m_2$  (на якій власне і встановлено привод) та до кінців двох континуальних ділянок 3 (до яких через шарніри з гумовими втулками 8 кріпиться шатун), які дзеркально розташовані в конструкції і наділені кожна зведеною інертністю  $m_{3в}$  та зведеною жорсткістю  $c_{3в}$ . Континуальні ділянки додатково кріпляться до проміжної маси 2 через шарнірні опори з призматичними прижимами, які встановлені на опорі 6. Активна маса 1 інертністю  $m_1$  кінематично збурюється від проміжної маси 2 через пружний вузол 4 жорсткістю  $c_{12}$ . Кут кидання під час транспортування задається башмаками 7. Конструкція встановлена на фундамент через віброізолятори 9, які кріпляться в умовно нерухомих точках на пружних вузлах 4. Частота обертання кривошипа та зміна його ексцентриситету здійснюється від розробленого привода (див. п. 5.1), керованого блоком керування (рис. 5.20).



*Рис. 5.18. Загальний вигляд міжрезонансного дискретно-континуального транспортера-сепаратора (позиції відповідають рис. 5.17)*



*Рис. 5.19. Експериментальний зразок міжрезонансного дискретно-континуального транспортера-сепаратора (позиції відповідають рис. 5.17)*



*Рис. 5.20. Блок управління керованим кривошипно-шатунним приводом, розроблений на базі Arduino Mega 2650*

#### 5.4. Експериментальні дослідження дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора

Метою проведення експериментальних досліджень дискретно-континуальної вібраційної машини (рис. 5.22) є виявлення її реальних характеристик та властивостей, що дозволить підтвердити розвинену в дисертаційній роботі методологію створення даного типу машин. В першу чергу нас цікавить достовірність обґрунтованих інерційно-жорсткісних параметрів від яких повністю залежать властивості, характеристики системи та адекватність розроблених математичних моделей, за якими подалі можна буде моделювати технологічне обладнання даного типу.



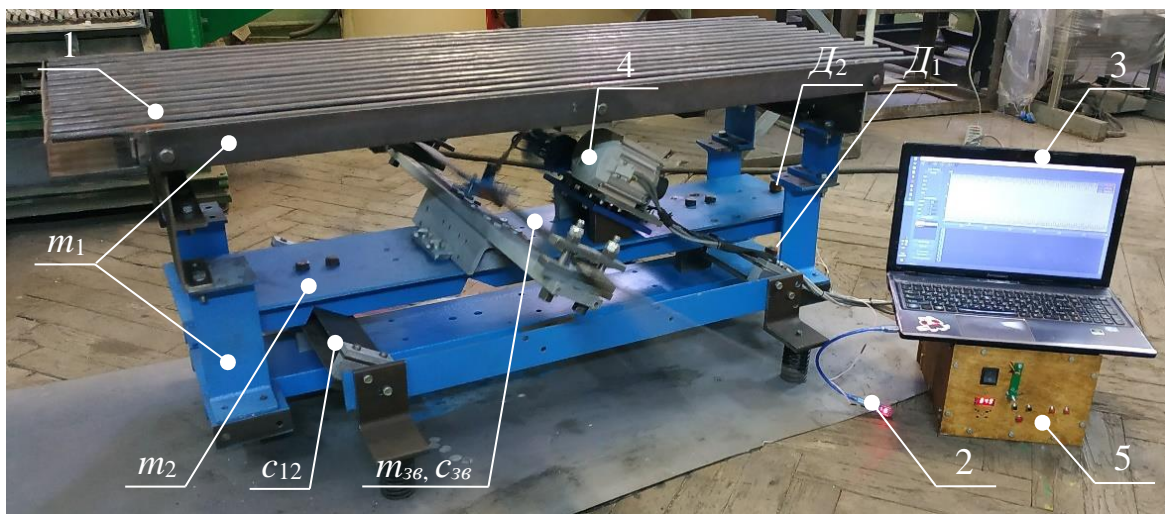
*Рис. 5.21. Експериментальний зразок транспортера-сепаратора з під'єднаним лабораторним вимірювальним обладнанням:*

*1 – експериментальний зразок; 2 – двоканальний USB-осцилограф;  
3 – комп'ютер; 4 – керований кривошипно-шатунний привод; 5 – блок керування*

Експеримент був проведений з використанням лабораторного обладнання наступним чином (рис. 5.22). Зняття механічних характеристик з експериментального зразка 1 дискретно-континуальної вібраційної машини відбувалось за допомогою двоканального USB-осцилографа 2 підключеного до комп'ютера 3. Збурення коливань та зміна ексцентриситету здійснювалося керованим кривошипно-шатунним приводом 4. Для попереднього встановлення власних частот

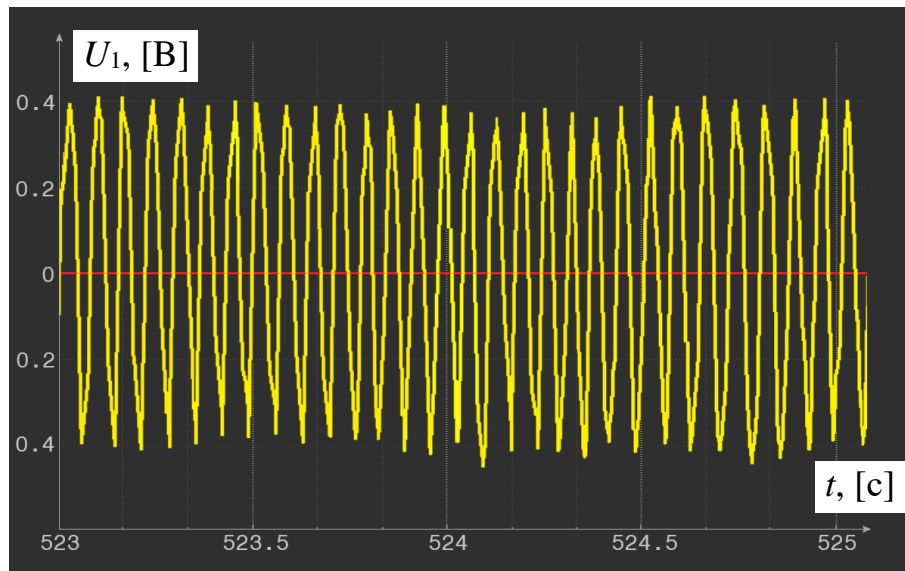
системи використовувався блок керування 5 з цифровою індикацією обертів серводвигуна та пультом керування.

**Перевірка значення власної частоти континуальної ділянки** здійснювалась шляхом знімання часових залежностей коливань активної та проміжної мас, збуджуючи систему через континуальну ділянку від кривошипно-шатунного привода 4 (рис. 5.22). Зміна частоти обертання серводвигуна та величини ексцентриситету виконувалася з блоку керування 5. В даному випадку частота визначатиметься через період коливань мас системи.

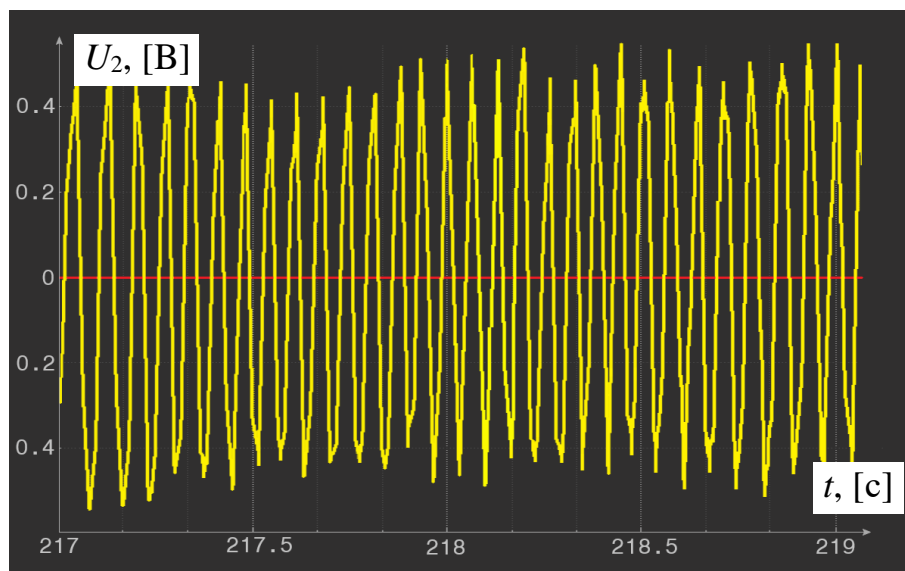


*Рис. 5.22. Робота транспортера-сепаратора на частоті власних коливань континуальної ділянки (позиції відповідають рис. 5.21)*

Експериментально знято часові залежності руху активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас (рис. 5.23). Для цього було використано двоканальний USB-осцилограф, сигнали на який подавались від датчиків віброприскорень  $D_1$  та  $D_2$ , які були приєднані відповідно до активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас (рис. 5.24) (схема кріплення обумовлена тим, що інерційне значення континуальної ділянки  $m_{36}$  надто мале й інерційний параметр датчика створить похибку у результатах вимірювання). Суттєву частку енергії для приведення в коливальний рух мас надає континуальна ділянка, яка вібує на своїй власній (парціальній) частоті.

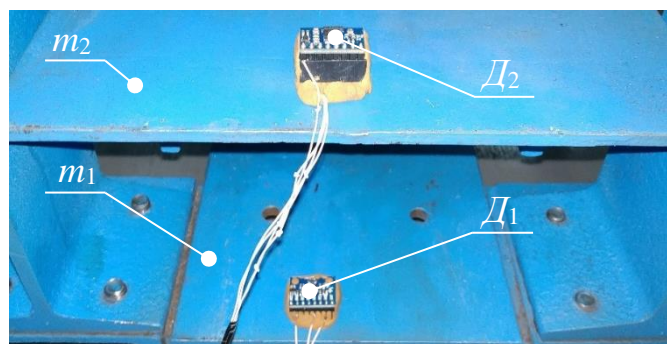


а



б

**Рис. 5.23.** Часові залежності руху активної (а) та проміжної (б) мас, відображені у вольтах, на парціальній частоті коливань континуальної ділянки



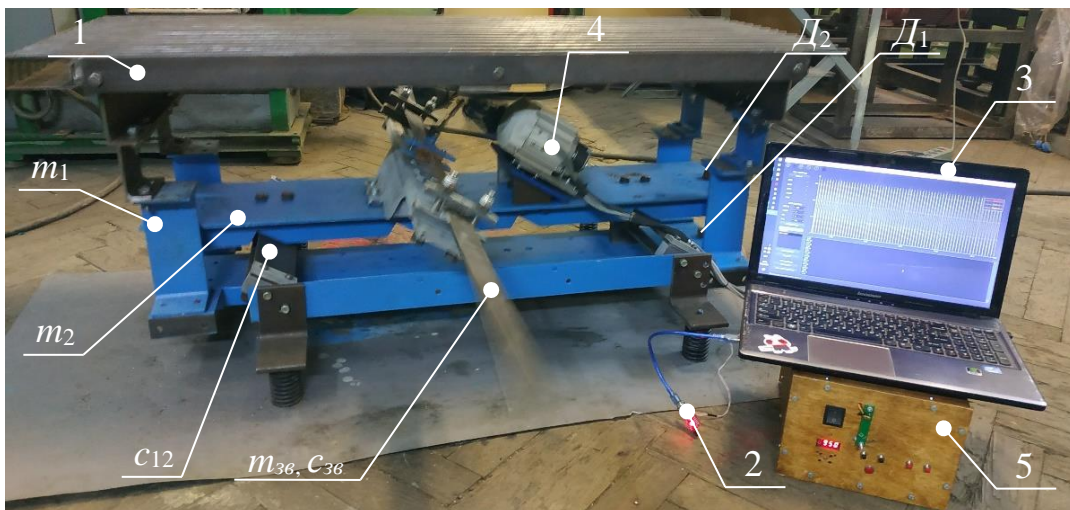
**Рис. 5.24.** Під'єднані датчики до активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас

Значення першої власної циклічної частоти коливань континуальної ділянки визначаємо із співвідношення кількості піків до часового проміжку (для відліку приймемо часову залежність руху проміжної маси). Тож:

$$v_n^* = \frac{\text{кількість піків}}{\text{частотний проміжок}} \approx \frac{29,4}{219 - 217} \approx 14,7 \text{ Гц}. \quad (5.20)$$

Отже, перша власна колова частота континуальної ділянки, використовуючи (5.20), становитиме  $\omega_n^* \approx 92,4$  рад/с. Отримане значення практично повністю узгоджується з теоретичними результатами (див. вирази (4.18) та (4.49)).

**Перевірка амплітуд коливальних мас на частоті вимушених коливань системи** відбувалася аналогічно до перевірки значення власної частоти континуальної ділянки (рис. 5.25).



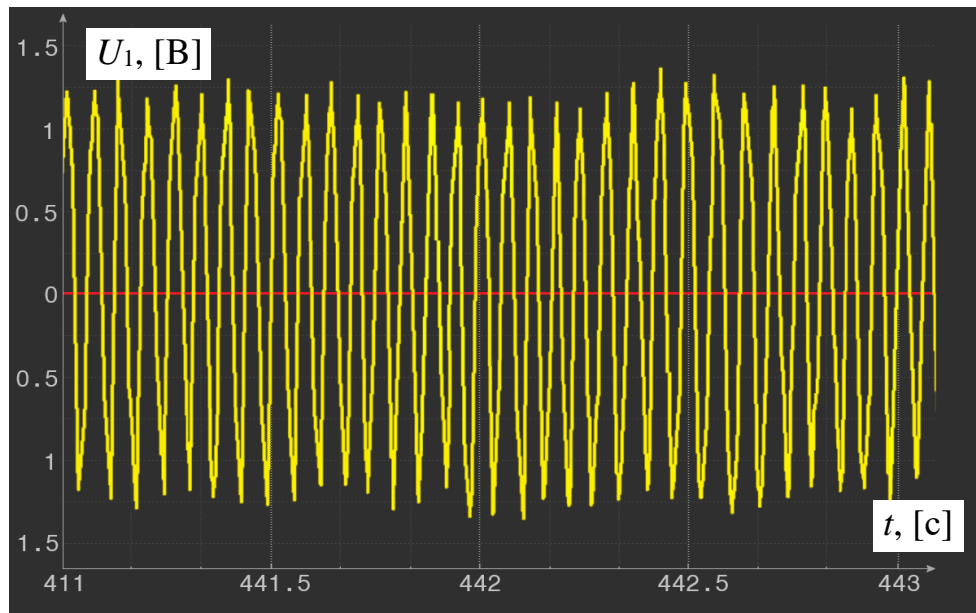
**Рис. 5.25.** *Транспортер-сепаратор під час встановлення амплітуди коливань активної та проміжної мас на частоті вимушених коливань системи (позиції відповідають рис. 5.21)*

Підтвердження значення вимушеної циклічної частоти коливань системи визначаємо із часових залежностей руху активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас (рис. 5.26) за співвідношенням кількості піків до часового проміжку на якому вони діють. Для аналізу приймемо часову залежність руху проміжної маси. Тож:

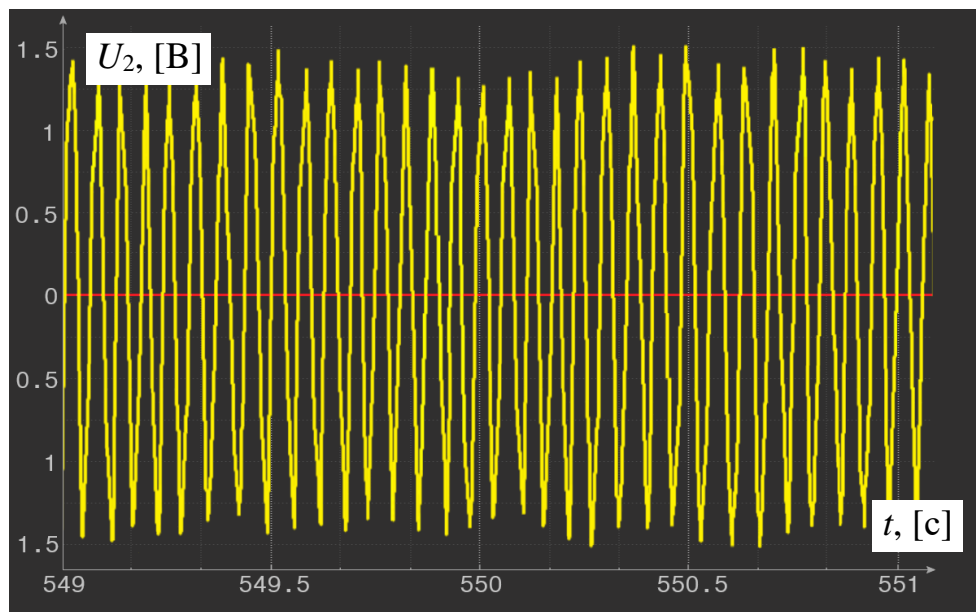


$$\nu^* = \frac{\text{кількість піків}}{\text{частотий проміжок}} \approx \frac{31,7}{551 - 549} \approx 15,9 \text{ Гц.} \quad (5.21)$$

Отже, вимушена колова частота коливань системи, використовуючи вираз (5.21), становитиме  $\Omega^* = 2 \cdot \pi \cdot \nu^* \approx 99,6 \text{ рад/с}$ . Отримане значення повністю узгоджується із закладеними ( $\Omega = 99,5 \text{ рад/с}$ ).



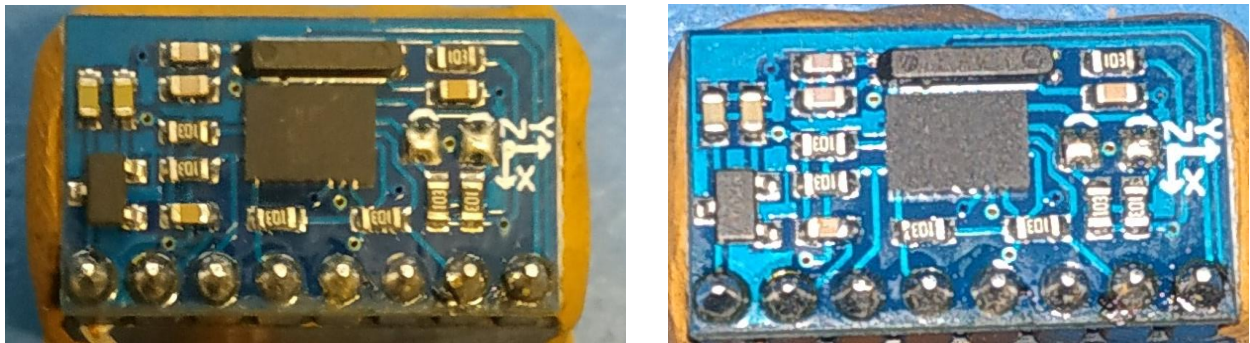
a



б

**Рис. 5.26.** Часові залежності руху активної (а) та проміжної (б) мас, відображені у вольтах, на частоті вимушених коливань системи

**Встановимо амплітуди коливань** активної та проміжної мас. Враховуючи, що давачі (рис. 5.27) жорстко закріплені до відповідних мас (рис. 5.24) і є таровані  $U_{на1g} = 500 \text{ мВ/г}$ , амплітудне значення на першому давачі становить  $U_1 = 1,25 \text{ В}$ , а на другому відповідно  $U_2 = 1,47 \text{ В}$  (рис. 5.26).



а

б

**Рис. 5.27.** Давачі, що приєднані до активної (а) та проміжної (б) мас

Перевідний коефіцієнт  $\zeta$ , він же показник перевантаження, для активної маси розраховуємо з наступних умов:

$$\begin{cases} 0,5 \equiv g; \\ 1,25 \equiv \zeta_1 \cdot g, \end{cases} \quad (5.22)$$

для проміжної маси, відповідно:

$$\begin{cases} 0,5 \equiv g; \\ 1,47 \equiv \zeta_2 \cdot g. \end{cases} \quad (5.23)$$

Отже, користуючись виразом (5.22), перевантаження на активній масі:

$$\zeta_1 = \frac{U_1}{U_{на1g}} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5, \quad (5.24)$$

а перевантаження на проміжній масі згідно виразу (5.23):

$$\zeta_2 = \frac{U_2}{U_{на1g}} = \frac{1,47}{0,5} = 2,94. \quad (5.25)$$

Відомо, що коли коливання гармонійні, перевантаження  $\zeta$  визначається з наступної залежності:

$$\zeta = \frac{Y \cdot \Omega^2}{g}, \quad (5.26)$$

де  $Y$  – амплітуда коливань маси;

$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$  – колова частота вимушених коливань.

Враховуючи вираз (5.26) та значення циклічної частоти отримане в (5.21), амплітуда коливань активної маси буде становити (рис. 5.23):

$$Y_1^* = \frac{\zeta_1 \cdot g}{\Omega^2} = \frac{2,5 \cdot 9,807}{(2 \cdot \pi \cdot 15,85)^2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad (5.27)$$

а амплітуда коливань проміжної маси, з використанням виразу (5.25), буде:

$$Y_2^* = \frac{\zeta_2 \cdot g}{\Omega^2} = \frac{2,94 \cdot 9,807}{(2 \cdot \pi \cdot 15,85)^2} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (5.28)$$

Тож експериментально підтверджено адекватність математичної моделі дискретно-континуальної вібраційної машини з кривошипно-шатунним приводом й методику встановлення зведеної жорсткості та зведеної маси стержня з розподіленими параметрами. Це демонструє отримана величина парціальної частоти континуальної ділянки  $\omega_n^* \approx 92,4$  рад/с та амплітуди коливань активної  $Y_1^* = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м і проміжної  $Y_2^* = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м мас на колівій частоті вимушених коливань  $\Omega = 99,5$  рад/с, що практично повністю збіглися з розрахунковими значеннями, які відповідно рівні  $\omega_{зв} = 93,7$  рад/с,  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $Y_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  м та  $\Omega = 99,6$  рад/с.

### 5.5. Узагальнення методології розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора

Створення ескізу (бажано твердотілого) проектованого вібраційного технологічного обладнання (попереднє конструктивне виконання).  
Встановлення інерційних значень активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас

Задання вимушеною  $\Omega$ , першою  $\Omega_{\epsilon 1}$  та другою  $\Omega_{\epsilon 2}$  власними частотами коливальної системи (не враховуючи піка, сформованого віброізоляторами)

Встановлення діапазону можливого значення інерційного параметра

$$\text{реактивної маси } m_3: 0 < m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)\left(1 - (\Omega_{\epsilon 1} / \Omega_{\epsilon 2})^2\right)^2}{m_2\left(1 - (\Omega_{\epsilon 1} / \Omega_{\epsilon 2})^2\right)^2 - 4m_1(\Omega_{\epsilon 1} / \Omega_{\epsilon 2})^2}$$

Встановлення чисельним методом чіткого значення параметрів реактивної маси  $m_3$  та жорсткостей  $c_{12}$  і  $c_{23}$ , попередньо заклавши ефективність системи  $D$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{c_{12}m_3\Omega^2\left(c - (m_1m_2\Omega^2)/(m_1 + m_2)\right)(m_1 + m_2)}{m_2\left[ c_{23}^2(c_{12} - m_1\Omega^2) + c_{12}^2(c_{23} - m_3\Omega^2) - (c_{12} - m_1\Omega^2) \times \right. \\ \left. \times (c_{23} - m_3\Omega^2)(c_{12} - m_2\Omega^2 + c_{23}) \right]}; \\ c_{12} = \frac{(m_2 + m_3)m_1\Omega_{\epsilon 2}^2\left[(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{\epsilon 2}^2(\Lambda^2 - 1) - H\right]}{(m_1 + m_2 + m_3)\left[(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{\epsilon 2}^2(\Lambda^2 - 1) + (-H - 2m_1m_3\Omega_{\epsilon 2}^2)\right]}; \\ c_{23} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{\epsilon 2}^2(\Lambda^2 - 1) - H}{2 \cdot (m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3, \end{array} \right.$$

де  $c = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\Omega_{\epsilon 2}^2$  – жорсткість резонансного пружного вузла двомасової

коливальної системи;  $\Lambda = \frac{\Omega_{\epsilon 1}}{\Omega_{\epsilon 2}}$ ;

$$H = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{\epsilon 2}^4\left[(m_1 + m_2 + m_3)m_2(\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1m_3\Lambda^2\right]}$$

Визначення парціальної частоти  $\omega_n$  реактивної маси як реперного параметру

$$\text{континуальної ділянки: } \omega_n = \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}}$$

Встановлення першої власної частоти континуальної ділянки:

$$\omega_{ec} = (\xi L)^2 \sqrt{\frac{Eh b_n^3}{12 m_{nm} L^4}},$$

де  $\xi L$  – значення при якому визначник частотної матриці  $\Delta(\xi L)$  рівний нулю;

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) = & U(\xi L) \cdot T(\xi L_1) \cdot S(\xi(L - (L_1 + L_2))) \cdot V(\xi L_2) - T(\xi L) \times \\ & \times T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))) \cdot V(\xi L_2) - S(\xi L_1) \cdot V(\xi L) \times \\ & \times S(\xi(L - (L_1 + L_2))) \cdot V(\xi L_2) + S(\xi L_1) \cdot U(\xi L) \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))) \times \\ & \times V(\xi L_2) + S(\xi L_1) \cdot T(\xi(L_1 + L_2)) \cdot T(\xi(L - L_1)) \cdot S(\xi(L - (L_1 + L_2))) - \\ & - S(\xi L_1) \cdot T(\xi(L_1 + L_2)) \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))) \cdot S(\xi(L - L_1)) - \\ & - S(\xi(L_1 + L_2)) \cdot T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L - L_1)) \cdot S(\xi(L - (L_1 + L_2))) + \\ & + S(\xi(L_1 + L_2)) \cdot T(\xi L_1) \cdot T(\xi(L - (L_1 + L_2))) \cdot S(\xi(L - L_1)) \end{aligned}$$

– частотна матриця згинальних коливань континуальної ділянки з використанням функцій Крилова;  $E$  – модуль пружності I-го роду;  $m_{nm} = \rho h b_n$  – маса погонного метру;  $\rho$  – питома маса (густина) сталі;  $h$  – ширина пружного стержня;  $b_n$  – товщина пружного стержня,  $L$  – загальна довжина стержня

Або ж встановлення першої власної частоти континуальної ділянки, використовуючи метод Релея-Рітца:

$$\omega_{pp} = \sqrt{\frac{EJ_z \int_0^L \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx}{m_{nm} \int_0^L w(x)^2 dx + \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx}},$$

де –  $J_z = h \cdot b_n^3 / 12$  – момент інерції поперечного перерізу стержня прямокутного перерізу відносно нейтральної осі  $z - z$ ;

$J_{cn}$  – погонний момент інерції стержня;

$G$  – модуль пружності II-го роду;

$F_c$  – площа поперечного перерізу стержня (постійна по довжині стержня);

$Q(x)$  – розподіл поперечних сил по довжині стержня;

$k_y$  – коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу

Задання амплітудою коливань  $Y_1$  робочого органу, розрахунок величини ексцентриситету  $\varepsilon$  кривошипно-шатунного механізму

(додаток G, вираз (G.9)), встановлення величини амплітуди коливань  $Y_2$  проміжної маси (додаток G, вираз (G.10)), встановлення величин

$A$ ,  $B$ ,  $R_1$  та  $R_2$  (додаток G, вирази (G.2) – (G.5))

Встановлення прогину окремих ділянок стержня (континуальної ділянки):

$$w_{лів}(x_1) = A \cdot S(\xi x_1) + B \cdot T(\xi x_1);$$

$$w_{сеп}(x_2) = A \cdot S(\xi x_2) + B \cdot T(\xi x_2) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V(\xi x_2);$$

$$w_{пр}(x_3) = A \cdot S(\xi x_3) + B \cdot T(\xi x_3) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V(\xi x_3) + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot V_2(\xi x_3),$$

де  $R_1$ ,  $R_2$  – реакції сил відповідно в лівій та правій (першій та другій) опорах континуальної ділянки

Перевірка на міцність континуальної ділянки:

$$\sigma(x) = \frac{E b_n}{2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2},$$

де  $w(x)$  – функція зміщення поперечного перерізу стержня у вертикальному напрямку по його довжині

Встановлення по осі  $x$  координати точки зведення  $X_{36}$  інерційної маси  $m_{36}$  та жорсткості  $c_{36}$  континуальної ділянки:

$$X_{36} = \frac{\int_0^{L_1} x w(x) dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} x w(x) dx + \int_{L_1+L_2}^L x w(x) dx}{\omega \int_0^{L_1} w(x) dx + \omega \int_{L_1}^{L_1+L_2} w(x) dx + \omega \int_{L_1+L_2}^L w(x) dx}$$

Встановлення зведеної маси  $m_{36}$  та зведеної жорсткості  $c_{36}$  континуальної ділянки загалом:

$$m_{36} = \frac{m_{nm}}{w(X_{36})^2} \int_0^L w(x)^2 dx + \frac{1}{w(X_{36})^2} \int_0^L J_{cn}(x) \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx;$$

$$c_{36} = \frac{EJ_z}{w(X_{36})^2} \int_0^L \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_y (EJ_z)^2}{w(X_{36})^2 GF_c} \int_0^L \left( \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right)^2 dx,$$

$$\text{де } w(X_{36}) = \frac{A}{2} (\text{ch}(\xi X_{36}) + \cos(\xi X_{36})) + \frac{B}{2} (\text{sh}(\xi X_{36}) + \sin(\xi X_{36})) -$$

прогин континуальної ділянки в точці зведення  $X_{36}$

Встановлення парціальної частоти коливань континуальної ділянки  $\omega_{36}$ :

$$\omega_{36} = \sqrt{\frac{c_{36}}{m_{36}}}$$

Встановлення жорсткості віброізоляторів:

$$c_{i3} = (m_1 + m_2 + 2m_{nm}L) \left( \frac{\Omega}{z_{i3}} \right)^2, \text{ де } z_{i3} = 3...7$$

## 5.6. Висновки до п'ятого розділу

1. В конструкторській частині дисертаційної роботи обґрунтовано конструктивні параметри запропонованого керованого кривошипно-шатунного механізму, який дозволяє плавно змінювати частоту збурення та амплітуду вимушених коливань. Запропоновано структуру та кінематичні схеми привода, проаналізовано кінематику кривошипно-шатунного механізму та встановлено відповідні рівняння руху методом замкнених векторних контурів. На основі отриманих результатів одержано аналітичні вирази, які описують залежність ексцентриситету кривошипно-шатунного механізму від зміщення керованого повзуна. Проведено чисельне моделювання руху механізму згідно з яким при максимальному переміщенні повзуна на 15 мм, шарнір, який задає ексцентриситет віброзбудувача, описує колову траєкторію, де її максимальна висота (зміщення вздовж вертикальної осі) становить близько 23 мм, а найбільше переміщення вздовж горизонтальної осі дорівнює 3 мм. Правильність отриманих рівнянь та результати чисельного моделювання було підтверджено імітаційним моделювання руху механізму.

2. Встановлено геометричні параметри пружних елементів, що з'єднують між собою активну та проміжну маси вібраційного транспортера-сепаратора, які узгоджені з дискретною математичною моделлю. Проведено комп'ютерне моделювання пружного елемента методом скінченних елементів, що дозволило перевірити результати обчислення жорсткості та максимальних напружень, які виникають у ньому. Проведено розрахунок віброізоляторів, результати якого підтверджено комп'ютерним моделюванням методом скінченних елементів. Проаналізовано конструкцію та принцип роботи міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора.

3. Експериментально встановлено парціальну частоту коливань континуальної ділянки ( $\omega_{ec}^* \approx 92,4$  рад/с), що дозволило опосередковано підтвердити наявність в ній інерційно-жорсткісних параметрів закладених під час розрахунку. На



основі знятих часових залежностей руху активної та проміжної мас експериментально підтверджено наявність закладених розрахункових амплітуд ( $Y_1^* = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $Y_2^* = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ), що загалом вказало на правильність розробленої методології дисертаційних досліджень. Експериментально підтверджено безперешкодний вхід у міжрезонансну зону керованого кривошипно-шатунного привода, що дозволило стверджувати про обґрунтованість використання запропонованих структур під час створення високоефективних вібраційних машин.

4. Наведено алгоритм розрахунку дискретно-континуальної високоефективної міжрезонансної вібраційної машини, який дозволив узагальнити методологію проектування даного типу обладнання.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язана актуальна науково-прикладна задача машинобудування, яка полягає у пошуку нових структур і підходів у розрахунку міжрезонансних вібраційних машин, приводи яких здатні безперешкодно входити в міжрезонансну зону та приводити в рух надлегкі реактивні маси, реалізуючи дієві високоефективні конструкції. Для цього була розвинена методологія створення високоефективних міжрезонансних вібраційних машин, результатом якої є поява нового класу дискретно-континуальних вібр машин, яких вперше застосовано гібридні структури коливальних систем, відмінністю яких є введення в якості третьої (реактивної) маси континуальної ділянки, наділеної на першій власній частоті певною зведеною жорсткістю та зведеною масою. Це дозволило ефективно забезпечувати енергоощадні міжрезонансні режими роботи, розкривши прихований потенціал синтезованих систем, обумовлений синергією дискретної коливальної системи та континуальної ділянки. Основними здобутками роботи є:

1. У результаті проведеного аналізу існуючих коливальних систем вібраційних машин вкотре було доведено, що одно- та двомасові коливальні системи не здатні реалізовувати високоефективні режими роботи, притаманні міжрезонансним. Незважаючи на вагомні переваги міжрезонансних коливальних систем, їх широке поширення обмежене низкою чинників, основний з яких є те, що реактивна маса та жорсткість відповідного пружного вузла повинні бути надлегкими та надмалими (більш ніж в 10 разів меншими порівняно з рештою відповідних параметрів системи). Це утруднює забезпечення усталених режимів роботи в коливальних системах з такими параметрами, незалежно від типу їх збурення.

На основі літературного огляду висунута ідея, яка забезпечує подальший якісний розвиток міжрезонансних вібраційних машин. Він можливий лише у поєднанні дискретних та континуальних коливальних систем, синергія яких в гібридних структурах надасть вібраційним машинам нових властивостей по

ефективності функціонування. Гіпотеза ж, здатна задовільнити висунуту ідею, звелась до введення в дискретну коливальну систему тіла з розподіленими параметрами (континуальної ділянки у вигляді стержня, пластини тощо), яке одночасно наділене надлегкими інерційними та надмалими жорсткісними параметрами, що дасть змогу ефективно забезпечувати високоефективні режими роботи вібраційних машин, реалізуючи вузьку міжрезонансну зону з надвисокими коефіцієнтами динамічності.

Обґрунтовано, що реалізація ідеї та гіпотези можлива лише застосовуючи кривошипно-шатунний механізм у якості приводу. Запропоновано структурну схему механічної коливальної системи вібраційної машини з континуальною ділянкою (стержнем). Уточнено науково-прикладні завдання, на основі яких викладено методику їх досліджень.

2. Як початковий етап у синтезі дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини обґрунтовано параметри високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи – як еталонної моделі, параметри якої приймаються визначальними для формування дискретно-континуальної системи і повинні бути реалізовані в ній. З метою реалізації вібраційної технологічної машини для транспортування та сепарування легкого полімерного матеріалу з технологічної точки зору встановлено, що раціональним режимом роботи механічної коливальної системи з кривошипно-шатунним механізмом, приведеним в обертальний рух від серводвигуна, є низькочастотний ( $n = 950$  об/хв,  $\nu = 15,8$  Гц,  $\Omega = 99,5$  рад/с) з перевантаженням на робочому органі (маса  $m_1$ )  $\zeta = 2,5g$ , яке відповідає амплітуді коливань  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м.

Конструктивно встановлено інерційні параметри активної ( $m_1 = 83,7$  кг) та проміжної коливальних мас ( $m_2 = 62,1$  кг) вібраційної машини. Заклавши розташування власних резонансних піків тримасової міжрезонансної коливальної системи ( $\Omega_{e1} = 95$  рад/с,  $\Omega_{e2} = 104$  рад/с) та додаткове динамічне підсилення коливань  $D = 6,9$  порівняно з класичною двомасовою, розраховано інерційне значення реактивної маси ( $m_3 = 0,456$  кг) та жорсткості резонансних пружних

вузлів ( $c_{12} = 3,76 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ,  $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ) еталонної високоефективної тримасової дискретної моделі.

Побудовано амплітудно-частотну характеристику еталонної дискретної тримасової коливальної системи, де спостерігаються два резонансних піки, сформованих на закладених частотах  $\Omega_{e1} = 95 \text{ рад/с}$  та  $\Omega_{e2} = 104 \text{ рад/с}$ , які знаходяться відповідно зліва та справа від передбачуваної частоти вимушених коливань  $\Omega = 99,5 \text{ рад/с}$ . Активна та проміжна маси в міжрезонансній зоні мають сідлоподібну характеристику. Проте, амплітудно-частотна характеристика реактивної маси стрімкоподібна і її амплітуда коливань вимірюється сантиметрами. Тож використання електромагнітного збурення для такої коливальної системи є нереальним, оскільки повітряний проміжок між якорем та осердям з котушками повинен вимірюватися також сантиметрами. Саме, введення континуальної ділянки, приведеної в рух від кривошипно-шатунного механізму, що замінить реактивну масу  $m_3 = 0,456 \text{ кг}$  з відповідним їй пружним вузлом жорсткістю  $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ , є обґрунтованим кроком.

Проведено чисельне та імітаційного моделювання руху активної маси еталонної дискретної тримасової коливальної системи. Результати повністю узгодилися, що опосередковано підтвердило достовірність отриманих даних.

Оскільки параметри створюваної дискретно-континуальної коливальної системи повинні забезпечувати отримані інерційні та жорсткісні параметри дискретної ( $m_3, c_{23}$ ), які поєднуються в стержні, комплексним параметром, який відобразить їх в континуальній ділянці вибрано парціальну частоту коливань реактивної маси дискретної системи  $\omega_n = \sqrt{c_{23} / m_3} = 96,1 \text{ рад/с}$ .

3. Як найбільш раціональною схемою для реалізації континуальної ділянки високоефективної міжрезонансної вібраційної машини вибрано тіло з розподіленими параметрами у вигляді стержня, який встановлений на двох шарнірних опорах, один з кінців якого консольно закріплений, а другий приводиться в рух від ексцентрика. Власне наявність консолі, коливальний рух якої необмежується нічим, забезпечив можливість накопичення необхідних інерційних сил в

реактивному вузлі (континуальній ділянці), так необхідних для приведення в рух усієї механічної коливальної системи.

Описавши модель вільних коливань стержня з використанням функцій Крилова, встановлено його першу власну частоту коливань ( $\omega_{ec} = 93,9$  рад/с), яка практично повністю узгодилась з парціальною частотою реактивної маси дискретної системи ( $\omega_n = 96,1$  рад/с). Це опосередковано дало підстави стверджувати про узгодженість інерційно-жорсткісних параметрів стержня з відповідними параметрами дискретної моделі.

Розглянуто вимушені згинальні коливання континуальної ділянки з використанням функцій Крилова, де було вкотре підтверджено значення першої власної частоти коливань стержня  $\omega_{ec} = 93,9$  рад/с. На основі системи рівнянь вимушених коливань континуальної ділянки встановлено постійні рівняння та реакції в опорах. Власне реакції в опорах стали в'язуючими під час поєднання континуальної ділянки з дискретною частиною гібридної коливальної системи.

Математично поєднавши дискретну частину коливальної системи з континуальною ділянкою, сформовано модель гібридної міжрезонансної системи, амплітудно-частотна характеристика якої практично повністю узгодились з еталонною амплітудно-частотною характеристикою дискретної моделі. Так, її власні частоти спостерігаються на таких  $\Omega_{e1} = 95$  рад/с,  $\Omega_{e2} = 101,8$  рад/с, а амплітуда коливань на робочому органі  $Y_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м. Це дало підстави стверджувати про високу ймовірність узгодження усіх параметрів дискретно-континуальної міжрезонансної системи з еталонною дискретною. Побудовано схему прогинів континуальної ділянки, розраховано її на міцність. Напруження в ній становлять  $\sigma_{max} = 352,3$  МПа, за умови, що максимальна амплітуда коливань на її кінці сягає значення  $w_{лив}(0) = 0,065$  м. Це стало черговим доказом переваг застосування континуальних ділянок під час створення енергоощадних міжрезонансних вібраційних машин.

Знайдено власну частоту коливань континуальної ділянки методом Релея-Рітца ( $\omega_{pp} = 94,7$  рад/с), що підтвердило можливість його застосування для

знаходження зведених параметрів системи. З метою чіткого встановлення закладених інерційно-жорсткісних значень в континуальній ділянці з використанням методу Релея-Рітца встановлено її зведену масу  $m_{3\beta} = 0,456$  кг та жорсткість  $c_{3\beta} = 4 \cdot 10^3$  Н/м, які практично повністю узгодилися із дискретними значеннями ( $m_3 = 0,456$  кг,  $c_{23} = 4,21 \cdot 10^3$  Н/м). Парціальна ж частота, встановлена через параметри  $m_{3\beta}$  та  $c_{3\beta}$  становить  $\omega_{3\beta} = 93,7$  рад/с. Цим було підтверджено адекватність математичної моделі дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини та методикау проведених розрахунків.

4. В конструкторській частині дисертаційної роботи обґрунтовано конструктивні та експлуатаційні параметри запропонованого керованого кривошипно-шатунного приводу, який дозволяє плавно змінювати частоту збудження та амплітуду вимушених коливань. Запропоновано структуру та кінематичні схеми приводу, проаналізовано його та встановлено відповідні рівняння руху методом замкнених векторних контурів. На основі отриманих результатів одержано аналітичні вирази, які описують залежність ексцентриситету кривошипно-шатунного механізму від зміщення керованого повзуна. Проведено чисельне моделювання руху механізму, згідно з яким, при максимальному переміщенні повзуна на 15 мм шарнір, який задає ексцентриситет віброзбуджувача описує колову траєкторію, де його максимальна висота (зміщення вздовж вертикальної осі) становить близько 23 мм, а найбільше переміщення вздовж горизонтальної осі дорівнює 3 мм. Правильність отриманих рівнянь та результати чисельного моделювання було підтверджено імітаційним моделювання руху механізму.

Встановлено геометричні параметри пружних елементів, які з'єднують між собою активну та проміжну маси вібраційного транспортера-сепаратора. Проведено комп'ютерне моделювання пружного елемента методом скінченних елементів, що дозволило перевірити результати обрахунку жорсткості та максимальних напружень, які виникають у ньому. Проведено розрахунок віброізоляторів, результати якого підтверджено комп'ютерним моделюванням методом

скінченних елементів. Проаналізовано конструкцію та принцип роботи міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного транспортера-сепаратора.

5. Експериментально встановлено парціальну частоту коливань континуальної ділянки ( $\omega_{ec}^* \approx 92,4$  рад/с), що дозволило опосередковано підтвердити наявність в ній інерційно-жорсткісних параметрів, закладених під час розрахунку. На основі знятих часових залежностей руху активної та проміжної мас, експериментально підтверджено наявність закладених розрахункових амплітуд коливань мас ( $Y_1^* = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $Y_2^* = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м), що загалом вказало на правильність розробленої методології дисертаційних досліджень. Експериментально підтверджено безперешкодний вхід у міжрезонансну зону керованого кривошипно-шатунного приводу, що дозволило стверджувати про обґрунтованість використання запропонованих структур під час створення високоефективних вібраційних машин.

6. На основі конструкторської частини була сформована методологія побудови дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора, де вперше застосовано гібридні (дискретно-континуальні) структури коливальних систем, відмінністю яких є введення у якості третьої (реактивної) маси континуальної ділянки, наділеної на першій власній частоті певною зведеною жорсткістю та зведеною масою. Це дозволило ефективно забезпечувати енергоощадні міжрезонансні режими роботи, розкривши прихований потенціал синтезованих систем, обумовлений синергією дискретно-континуальної коливальної системи.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Академічна пошукова система Google Scholar: <https://scholar.google.com.ua/>
2. *Афтаназів І. С.* Підвищення надійності деталей машин поверхневим пластичним деформуванням: навч. посібник / *І. С. Афтаназів, А. П. Гавриш, П. О. Киричок та ін.* – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 516 с.
3. *Афтаназив И. С.* Вибрационно-центробежная упрочняющая обработка деталей машин. Монография / *И. С. Афтаназив, П. С. Берник, Р. И. Сивак, А. Д. Клименко.* Винница: ВДАУ, 2002 – 235 с.
4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний / *И. М. Бабаков.* – Л.: Наука, 1968. – 650 с.
5. *Бабичев А. П.* Конструирование и эксплуатация вибрационных станков для обработки деталей / *А. П. Бабичев, Л. К. Зеленцов, Ю. М. Самодумский.* – Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1981. – 160 с.
6. *Бабичев А. П.* Вибрационные станки для обработки деталей / *А. П. Бабичев, В. Б. Трунин, Ю. М. Самодумский, В. П. Устинов.* – М.: Машиностроение, 1984. – 168 с.
7. *Бабичев А. П.* Основы вибрационной технологии / *А. П. Бабичев, И. А. Бабичев.* – Ростов н/Д.: Издательский центр ДГТУ, 2008. – 694 с.
8. *Баженов В. А.* Численные методы в механике: монография/ *В. А. Баженов, А. Ф. Дащенко, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов.* – Одесса: Драфт, 2004. – 564 с.
9. *Бауман В. А.* Вибрационные машины и процессы в строительстве / *В. А. Бауман, И. И. Быховский.* – М.: Высшая школа, 1977. – 255 с.
10. *Беляев Н. М.* Соппротивление материалов / *Н. М. Беляев.* – 12-е изд., стереот. – М.: Физматгиз, 1959. – 856 с.
11. *Берник П. С.* Вибрационные технологические машины с пространственными колебаниями рабочих органов / *П. С. Берник, Л. В. Ярошенко;* под ред. *П. С. Берника.* – Винница, 1998. – 116 с.



12. *Беспалов А. Л.* Оптимізація приводу віброживильників. / *А. Л. Беспалов*// Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2005. – Вип. 39 – С. 35–38.
13. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. Учебник для вузов. / *В. Л. Бидерман.* – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
14. *Биргера И. А.* Прочность, устойчивость, колебания: справ.: [в 3 т.] / *Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко.* – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1-3.
15. *Биргер И. А.* Расчет на прочность деталей машин: справочник / *И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, А. А. Иосилевич.* – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
16. *Биргер И. А.* Соппротивление материалов / *И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов.* – М.: Наука, 1986. – 560 с.
17. *Блехман И. И.* Вибрационное перемещение / *И. И. Блехман, Г. Ю. Джанелидзе.* – М.: Наука, 1964. – 412 с.
18. *Борщевский А. А.* Авторское свидетельство 645910 СССР, Бигармонический электромагнитный вибровозбудитель / *А. А. Борщевский, О. Л. Санько (СССР).* – № 2101174/29–03, подано 03. 02. 1975, опуб. 05. 02. 1979.
19. *Букаты Г. Б.* Динамическая прочность вибрационных машин / *Г. Б. Букаты, Л. А. Вайсберг, А. Д. Рудин* // Обогащение руд, 1970. – № 1–2. – С. 74–80.
20. *Былинин Л. Б.* Авторское свидетельство 1661095 А1 СССР, Вибрационный питатель / *Л. Б. Былинин, В. Г. Елезов, К. М. Рагульскис и Б. Б. Стульпинас (СССР).* – № 4406903/03, подано 08. 04. 1988, опуб. 07. 07. 1991.
21. *Быховский И. И.* Основы теории вибрационной техники / *И. И. Быховский.* – М.: Машиностроение, 1969. – 364 с.
22. *Вайсберг Л. А.* Проектирование и расчет вибрационных грохотов / *Л. А. Вайсберг.* – М.: Недра, 1986. – 144 с.
23. *Варсановьев В. Д.* Вибрационная техника в химической промышленности / *В. Д. Варсановьев, Э. Э. Кольман-Иванов.* – М.: Химия, 1985. – 240 с.

24. *Василенко М. В.* Теорія коливань і стійкість руху: підручник / *М. В. Василенко, О. М. Алексейчук.* – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
25. *Вейц В. Л.* Динамика управляемых машинных агрегатов / *Вейц В. Л., Коловский М. З., Кочура А. Е.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
26. *Гаврильченко О. В.* Багатомасова вібраційна площадка з електромагнітним приводом для ущільнення бетоносумішей / *О. В. Гаврильченко, О. С. Ланець, В. М. Боровець* // *Вибрации в технике и технологиях*, 2004. – № 1 (33). – С. 66–72.
27. *Гаврильченко О. В.* Дослідження перехідного режиму роботи вібраційної машини з просторовим рухом робочого органу, створеної на основі теорії синфазних коливань / *О. В. Гаврильченко, О. С. Ланець, В. М. Гурський, Я. В. Шпак* // *Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*, 2006. – № 556. – С. 23–31.
28. *Гончаревич И. Ф.* Электровибрационная транспортная техника / *И. Ф. Гончаревич, Л. П. Стрельников.* – М.: Гостехиздат, 1959.– 262 с.
29. *Гончаревич И. Ф.* Вибрационные машины в строительстве / *И. Ф. Гончаревич, П. А. Сергеев.* – М.: Машгиз, 1963.– 311 с.
30. *Гончаревич И. Ф.* Вибрационная техника в пищевой промышленности / *И. Ф. Гончаревич, Н. Б. Урьев, М. А. Талейсник.* – М.: Пищевая промышленность, 1977.– 278 с.
31. *Гончаревич И. Ф.* Теория вибрационной техники и технологии / *И. Ф. Гончаревич, К. В. Фролов.* – М.: Наука, 1981. – 320 с.
32. *Гончаревич И. Ф.* Вибротехника – нетрадиционные решения / *И. Ф. Гончаревич.* – М.: Машгиз, 1986.– 160 с.
33. *Гурський В. М.* Вибір раціональних параметрів стержневої системи вібраційного оброблювального комплексу з електромагнітним приводом

- / В. М. Гурський, О. С. Ланець, Я. В. Шпак // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2009. – № 641. – С. 29–34.
34. Гурський В. М. Числовий параметричний синтез міжрезонансної віброударної системи / В. М. Гурський, О. С. Ланець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2014. – № 788. – С. 13–20
35. Gursky V. Optimal Synthesis and Implementation of Resonant Vibratory Systems / Gursky V., Kuzio I., Korendiy V. // Universal Journal of Mechanical Engineering, 2018. – Vol. 6, № 2. – pp. 38-46.
36. Гусев Б. В. Вибрационная технология бетона / Б. В. Гусев, В. Г. Зазимко . – К.: Будівельник, 1991. – 160 с.
37. Гутыря С. С. Частотный анализ колебаний планетарного колесного редуктора / С. С. Гутыря, В. П. Яглинский, А. Н. Чанчин // Вестник Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого. Научно-практический журнал. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2015. – № 2 (61). – С. 3–11.
38. Дедов О. П. Розповсюдження плоских хвиль напруження в пружно-пластичному середовищі під дією силового навантаження. / О. П. Дедов // Техніка будівництва, 2010. – № 25. – С. 69 – 73.
39. Дедов О. П. Визначення впливу середовища на динаміку машини на основі спектрального аналізу. / О. П. Дедов // Системи управління, навігації та зв'язку, 2018. – № 4 (50). – С. 69 – 72.
40. Європейська база даних патентів: <https://worldwide.espacenet.com/>
41. Зінковський А. П. Актуальні проблеми динаміки та міцності в сучасному авіаційному двигунобудуванні (стенограма наукової доповіді на засіданні Президії НАН України 15 березня 2017 р.) / А. П. Зінковський // Вісник Національної академії наук України, 2017. – № 6. – С. 23–30.

42. *Качур О. Ю.* Аналіз кривошипно-шатунного приводу міжрезонансної вібраційної машини / *О. Ю. Качур* // Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Експлуатаційна та сервісна інженерія» (м. Харків, 15 – 16 жовтня 2020 р.), Харків: ХНТУСГ, 2020. – С. 9 – 11.
43. *Качур О. Ю.* Встановлення центра швидкостей стержня, як тіла з розподіленими параметрами, що перебуває в коливальному русі / *О. Ю. Качур* // V Міжнародна наукова конференція з нових тенденцій у науці та освіті «Theoretical and scientific bases of development of scientific thought», (м. Рим, Італія, 16 – 19 лютого 2021 р.), Рим, 2021. – С. 642 – 644.
44. *Качур О. Ю.* Експериментальне встановлення частоти вимушених коливань дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної системи / *О. Ю. Качур* // XIX Всеукраїнська науково-технічна конференції «Потураївські читання», (м. Дніпро, 22 квітня 2021 р.), Дніпро, 2021. – С. 38.
45. *Кожевников С. Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах / *С. Н. Кожевников.* – К.: Наук, думка, 1986. – 288 с.
46. *Комаров М. С.* Динамика механизмов и машин / *М. С. Комаров.* – М.: Машиностроение, 1969. – 296 с.
47. *Корендій В. М.* Динаміка руху мобільного вібраційного робота з віброударним режимом функціонування / *В. М. Корендій, О. Ю. Качур* // Вібрації в техніці та технологіях: тези доповідей XVII Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 140-річчю випуску інженерів-механіків у Львівській політехніці (Львів, 11–12 жовтня 2018 р.), Львів. – С. 68 – 69.
48. *Корендій В. М.* Динаміка руху мобільного вібраційного робота з двома дебалансними віброзбудниками / *В. М. Корендій, В. І. Гурей, О. Ю. Качур* // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції (Львів, 25–26 жовтня 2018 р.), Львів: Кінпатрі ЛТД. – С. 123 – 125.
49. *Корендій В. М.* Моделювання роботи тримасового вібротранспортера з

- напрямленими коливаннями робочого органа / *В. М. Корендій, О. Ю. Качур, П. Р. Дмитерко, Ю. Я. Новицький* // XIV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (м. Львів, 23 – 24 травня 2019 р.): Матеріали симпозіуму, Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2019. – С. 136 – 138.
50. *Korendiy V. M.* Substantiation of parameters and modelling the operation of three-mass vibratory conveyer with directed oscillations of the working element / *V. M. Korendiy, O. Yu. Kachur, Yu. Ya. Novitskyi, V. A. Mazuryk, V. A. Sereda* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2019. – Вип 53. – С. 84 – 100.
51. *Korendiy V.* Determination of inertia-stiffness parameters and motion modelling of three-mass vibratory system with crank excitation mechanism / *V. Korendiy, O. Lanets, O. Kachur, P. Dmyterko, R. Kachmar* // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2021. – Vol. 36, pp. 7 – 12.
52. *Korendiy V.* Determination of inertia-stiffness parameters and motion modelling of three-mass vibratory system with crank excitation mechanism / *V. Korendiy, O. Lanets, O. Kachur* // 50th International JVE Conference (м. Дубаї, Об'єднані Арабські Емірати, 25 – 27 березня 2021 р.) (<https://www.jveconferences.com/conference/dubai-2021#watch>, <https://cdn.jvejournals.com/articles/21924/21924-GA.jpg>).
53. *Кузьо І. В.* Встановлення конструктивно-силових параметрів та дослідження руху коливальних мас у вібраційній машині з аероінерційним збуренням. / *І. В. Кузьо, О. В. Ланець, Я. В. Шпак* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2012. – Вип. 46. – С. 28 – 44.
54. *Кузьо І. В.* Синфазні вібраційні машини з електромагнітним приводом для ущільнення бетоносумішей / *І. В. Кузьо, О. С. Ланець, Ю. П. Шоловій, Я. В. Шпак* // Вібрації в техніці та технологіях, 2007. – № 4 (49) – С. 33–36.
55. *Кіндрацький Б. І.* Раціональне проектування машинобудівних конструкцій: монографія / *Б. І. Кіндрацький, Г. Т. Сулим.* – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2003. – 280 с.

56. *Лавендел Э. Э. Вибрации в технике: справочник: [в 6 т.] / под. ред. Э. Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4: Вибрационные процессы и машины. – 509 с.*
57. *Ланець О. С. Розрахунок тримасових механічних коливальних систем вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас / О. С. Ланець // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2005. – Вип. 39. – С. 76 – 82.*
58. *Ланець О. С. Обґрунтування високої ефективності тримасових вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас / О. С. Ланець // Вібрації в техніці та технологіях, 2006. – № 2 (44) – С. 34 – 40.*
59. *Ланець О. С. Порівняльний аналіз механічних коливальних систем міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом / О. С. Ланець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Серія: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні, 2007. – № 583. – С. 58–68.*
60. *Ланець О. С. Додаткове підсилення коливань у високоефективних міжрезонансних вібраційних машинах з електромагнітним приводом / О. С. Ланець, І. В. Кузьо, В. М. Гурський, Ю. П. Шоловій // Вібрації в техніці та технологіях, 2008. – № 2(51) – С. 12–18.*
61. *Ланець О. С. Високоефективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): монографія / О. С. Ланець. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2008. – 324 с.*
62. *Ланець О. С. Розвиток міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом / О. С. Ланець // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2008. – Вип. 42. – С. 3–18.*
63. *Ланець О. С. Практичне використання коефіцієнта додаткового динамічного підсилення коливань у розрахунку високоефективних міжрезонансних вібромашин / О. С. Ланець // Вісник Національного університету “Львівська*

- політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2009. – № 641. – С. 43–45.
64. *Ланець О. С.* Виявлення шляхів подальшого вдосконалення високоефективних міжрезонансних коливальних систем. / *О. С. Ланець, О. Ю. Качур* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2017. – Вип. 51. – С. 62–65.
65. *Ланець Олексій.* Основи розрахунку та конструювання вібраційних машин. Книга 1. Теорія та практика створення вібраційних машин з гармонійним рухом робочого органа: навч. посібник / *О. Ланець.* – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018.
66. *Ланець О. С., Качур О. Ю.* Тримасова коливальна система. Патент на корисну модель 126876 U Україна, подано 29. 01. 2018, опуб. 10. 07. 2018.
67. *Lanets O. S.* Classical approach to determining the natural frequency of continual subsystem of three-mass inter-resonant vibratory machine / *O. S. Lanets, O. Yu. Kachur, V. M. Korendiy* // *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science.* – 2019. – Vol. 5, no. 3 – 4. – pp. 77–87.
68. *Lanets O. S.* Derivation of analytical dependencies for determining stiffness parameters of vibration isolators of vibratory machine / *O. S. Lanets, O. Yu. Kachur, V. M. Korendiy* // *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science.* – 2020. – Vol. 6, no. 3 – 4. – pp. 1 – 8.
69. *Ланець О. С.* Встановлення власної частоти континуальної ділянки міжрезонансної вібромашини з використанням наближеного методу Релея-Рітца. / *О. С. Ланець, О. Ю. Качур, В. М. Боровець, П. Р. Дмитерко, І. А. Деревенько, А. Я. Зварич* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2020. – Вип. 54. – С. 5 – 15.
70. *Lanets O.* Determination of the first natural frequency of an elastic rod of a discrete-continuous vibratory system / *O. Lanets, O. Kachur, V. Korendiy, P. Dmyterko, S. Nikipchuk, I. Derevenko* // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2021. – Vol. 37, pp. 7 – 12.

71. *Lanets O.* Determination of the first natural frequency of an elastic rod of a discrete-continuous vibratory system / *O. Lanets, O. Kachur, V. Korendiy* // 51st International JVE Conference (м. Дублін, Ірландія, 7 – 8 травня 2021 р.) (<https://www.jveconferences.com/conference/dublin-2021#watch>, <https://cdn.jvejournals.com/articles/21981/21981-GA.jpg>).
72. *Левин Л. П.* Вопросы теории и расчета электровибрационных машин (конвейеров, грохотов и питателей) / *Л. П. Левин* // *Механика и расчет машин вибрационного типа.* – М.: Изд-во АН СССР, 1957. – С. 19–36.
73. *Левин Л. П.* Авторское свидетельство 86181 СРСР, Вибрационная машина / *Л. П. Левин* (СССР). – № 384677, подано 25. 09. 1948; опуб. 28.07. 1960.
74. *Левин Л. П.* Электромеханическая характеристика вибрационных машин Механобра / *Л. П. Левин* // *Обогащение руд*, 1957. – № 4.
75. *Ловейкін В. С.*, Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / *В. С. Ловейкін, А. В. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич* // *Вісник ТДТУ.* – 2010. – Том 15. – № 1. – С. 7 – 13. – (механіка та матеріалознавство).
76. *Макаров А. И.* Авторское свидетельство 400372 СРСР, Электромагнитный вибратор / *А. И. Макаров, А. Д. Рудин* (СССР). – № 1322753/22–3, подано 11. 09. 1969, опуб. 01. 10. 1973.
77. *Малащенко В. О.* Навантажувальна здатність великомасових систем. / *В. О. Малащенко, Г. П. Куновський* – Львов, Видав. Новий Світ-2000, 2016. – 150 с.
78. *Малащенко В. О.* Деталі машин. (2-е видання) / *В. О. Малащенко*, – Львів, Новий Світ – 2000, 2015. – 194 с.
79. *Медвидь М. В.* Динамика вибрационных автоматических грузочных устройств с винтовыми лотками / *М. В. Медвидь* // *Научн. записки Львовского политехнического ин-та: автоматизация в машиностроении*, 1961. – Вып. № 3 – С. 90–140 с.
80. *Надутый В. П.* Определение динамических параметров грохота с виброударным возбуждением просеивающей поверхности / *В. П. Надутый, Е. С.*



- Лапшин, В. П. Краснопер // Науч.-техн. журнал НГА Украины «Науковий вісник», 1998 – №3, – С.73–75*
81. *Надутый В. П. Исследование напряженного состояния рабочего органа вибрационной машины с защитным слоем при ударных нагрузках. / В. П. Надутый, В. В. Сухарев, Д. В. Белюшин // Вібрації в техніці та технологіях, 2012. – № 4, – С.71–74*
  82. *Назаренко И. И. Высокоэффективные виброформовочные машины / И. И. Назаренко. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 143 с.*
  83. *Назаренко И. И. Прикладные задачи теории вибрационных систем / И. И. Назаренко. – К.: ИСИО, 1993. –216с.*
  84. *Назаренко І. І. Машины для виробництва будівельних матеріалів: підручник / І. І. Назаренко. – К.: КУНБА, 1999. – 488 с.*
  85. *Назаренко І. Визначення напружень та деформацій у формувальній конструкції при просторовому навантаженні. / І. Назаренко, В. Гайдайчук, О. Дєдов, О. Дяченко // Восточно-європейський журнал передових технологій, 2018. – № 6 (7). – С. 13 – 18.*
  86. *Носко П. Л. Оптимальное проектирование машиностроительных конструкций / П. Л. Носко. – Луганск: Изд-во ВУГУ, 1999. – 392 с.*
  87. *Пановко Я. Г. Внутреннее трение при упругих колебаниях / Я. Г. Пановко. – М.: Физматгиз, 1960. –193 с.*
  88. *Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1976. – 320 с.*
  89. *Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, 4-е изд. – М.: Наука, 1987. –352 с.*
  90. *Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала / Г. С. Писаренко. – К.: Наукова думка, 1970. – 379 с.*
  91. *Писаренко Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном*

- напряженном состоянии / *Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев.* – К.: Наук, думка, 1976. – 416 с.
92. *Писаренко Г. С.* Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: [в 2 т.] / *Под ред. Г. С. Писаренко.* – К.: Наук, думка, 1980. – Т. 1–2.
93. *Писаренко Г. С.* Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии / *Г. С. Писаренко, О. Е. Богинич.* – К.: Наукова думка, 1981. – 220 с.
94. *Писаренко Г. С.* Справочник по сопротивлению материалов / *Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев.* – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
95. *Писаренко Г. С.* Опір матеріалів [2-ге вид.] / *За ред. Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка* – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
96. *Повидайло В. А.* Расчет и конструирование вибрационных питателей / *В. А. Повидайло.* – М.: Машгиз, 1962. – 152 с.
97. *Повидайло В. А.* Вибрационные устройства в машиностроении / *В. А. Повидайло, Р. И. Силин, В. А. Щигель.* – Москва – Киев: Машгиз, 1962. – 120 с.
98. *Повидайло В. А.* Исследование динамики трёхмассового вибробункерного питателя с эллиптическими колебаниями. / *В. А. Повидайло, А. Л. Беспалов, И. Й. Врублевский* // Автоматизация производственных процессов, 1984. – № 23. – 5 с.
99. *Повідайло В. О.* Вібраційні процеси та обладнання: навч. посібник / *В. О. Повідайло.* – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2004. – 248 с.
100. *Пономарев С. Д.* Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. / *С. Д. Пономарев и др.* – М.: Машгиз, 1959.
101. *Пономарев С. Д.* Расчет упругих элементов машин и приборов / *С. Д. Пономарев, Л. Е. Андреева.* – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.
102. *Потураев В. Н.* Вибрационные транспортирующие машины / *В. Н. Потураев,*

- В. П. Франчук, А. Г. Червоненко.* – М.: Машиностроение, 1964. – 328 с.
103. *Потураев В. Н.* Резиновые детали машин: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / *В. Н. Потураев, В. И. Дырда.* – М.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
104. *Потураев В. Н.* Динамика и прочность вибрационных транспортно-технологических машин / *В. Н. Потураев, А. Г. Червоненко, Ю. Я. Ободан;* под ред. *К. М. Рагульскиса.* – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 111 с.
105. *Потураев В. Н.* Вибрационная техника и технологии в энергоемких производствах: монография / *В. Н. Потураев, В. П. Франчук, В. П. Надутый.* – Днепропетровск, 2002. – 190 с.
106. *Рабинович А. Н.* Автоматические загрузочные устройства вибрационного типа / *А. Н. Рабинович, В. А. Яхимович, Б. Ю. Боечко.* – К.: Техника, 1965.
107. *Рабинович М. И.* Введение в теорию колебаний и волн / *М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков.* – М.: Наука, 1965.
108. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / *Ю. Н. Работнов.* – М.: Наука, 1979. – 744 с.
109. *Рудин А. Д.* К расчету трехмассных вибрационных грохотов / *А. Д. Рудин* // Обогащение руд, 1966. – № 4. – С. 28–32.
110. *Сергеев П. А.* Авторское свидетельство 119132 СРСР, Вибрационный транспортер / *П. А. Сергеев, В. А. Прохоров, А. С. Гридунов, Б. С. Зайковский, А. К. Карелин, А. Н. Чистяков (СССР).* – № 608557/27, подано 22. 09. 1958, опуб. 13. 04. 1959.
111. *Сілін Р. І.* Вібраційне обладнання на основі гідропульсатора / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв.* – Хмельницький: ХНУ, 2007. – 386 с.
112. *Сілін Р. І.* Вібраційне обладнання для гідрокавітаційного впливу на склад та властивості води / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв* // Зб.пр. VI міжн. н-т. конференції «Повышение качества, надежности и долговечности технических систем и технологических процессов». Хургада (Єгипет). – Хмельницький: ХНУ, 2007. – С. 33–35

113. *Сілін Р. І.* Пристрій для кавітаційно-магнітної обробки води з електромагнітним приводом / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв, Є. А. Урбанюк* // *Materialy IV mezinarodni vedecko – prakticka konference “Nastoleni moderni vedi – 2008”*. Dil 9: Technicke vedy. – Praha: Publishing House “Education and Science”, 2008. – С.12 – 15
114. *Сілін Р. І.* Науково-технічні основи розроблення вібротришків для впливу на властивості води / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв* // *Вібрації в техніці та технологіях*, 2009. – № 4 (56) – С. 141 – 148
115. *Спиваковский А. О.* Вибрационные конвейеры, питатели и вспомогательные устройства / *А. О. Спиваковский, И. Ф. Гончаревич*. – М.: Машиностроение, 1972. – 328 с.
116. *Струтинський В. Б.* Математичне моделювання процесів та систем механіки / *В. Б. Струтинський*. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612 с.
117. *Субач А. П.* Динамика процессов и машин объемной вибрационной и центробежной обработки насыпных деталей / *А. П. Субач*. – Рига: Зинатне, 1991. – 400 с.
118. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле / *С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер*; пер. с англ. *Л. Г. Корнейчука*. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
119. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем / *А. П. Филиппов*. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
120. *Филиппов А. П.* Колебания механических систем / *А. П. Филиппов*. – К.: Наукова думка, 1965.
121. *Харченко Е. В.* Динамические процессы буровых установок / *Е. В. Харченко*. – Львов: СВИТ, 1991. – 176 с.
122. *Kharchenko E. V.* Estimation of the in-service degradation of steel shapes for the boom of a clamp-forming machine / *E. V. Kharchenko, L. K. Polishchuk, O. I. Zvirko* // *Materials Science*, 2014. – Vol. 49. № 4. – pp. 501 –507.

123. Харченко Є. Аналіз динамічних процесів у прихопленій у свердловині колоні бурильних труб. / Є. Харченко, А. Гутий, В. Гайдук // Технічні вісті, 2019. – № 49, 50. – С. 22 – 27.
124. Хвингия М. В. Динамика и прочность вибрационных машин с электромагнитным возбуждением / М. В. Хвингия. – М.: Машиностроение, 1980. – 145 с.
125. Хвингия М. В. Низкочастотные электровибрационные машины / М. В. Хвингия, М. М. Тедошвили, И. А. Питимашвили и др.; под ред. К. М. Рагульскиса. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-е, 1989. – 95 с.
126. Хотулев Г. А. Авторское свидетельство 962133 СССР, Вибрационный питатель / Г. А. Хотулев, И. Ф. Гончаревич, Д. И. Жуковин (СССР). – №2942907/27–03, подано 13. 06. 1980, опуб. 30. 09. 1982.
127. Цуркан О. В. Особливості конструкції комбінованого змішувача для переробних і харчових виробництв. / О. В. Цуркан, Ю. А. Полевода, Є. О. Волинець, М. В. Походай // Вібрації в техніці та технологіях, 2016. – № 1. – С. 149 – 154.
128. Tsurkan O. V. Kinetic features of vibrating and filtration dewatering of fresh-peeled pumpkin seeds. / O. V. Tsurkan, O. O. Gerasimov, Y. A. Polyevoda, I. V. Tverdokhlib, T. I. Rimar, O. V. Stanislavchuk // INMATEH-Agricultural Engineering, 2017. – Vol. 52. № 2. – pp. 69 –76.
129. Цуркан О. В. Планування багатofакторного експерименту для визначення раціональних параметрів роботи вібраційної машини. / О. В. Цуркан, Р. М. Горбатюк, Д. В. Присяжнюк // Вібрації в техніці та технологіях, 2020. – № 2 (97). С. 5 – 14.
130. Чубук Ю. Ф. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей / Ю. Ф. Чубук, И. И. Назаренко, В. Н. Гарнец. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1985. – 168 с.
131. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: монография / В. М. Шатохин // Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”. – Харьков, 2008. – 456 с.

132. *Яковенко В. Б.* Моделирование и расчет вибрационных систем / *В. Б. Яковенко.* – К.: УМК ВО, 1988. – 232 с.
133. *Яковенко В. Б.* Элементы прикладной теории вибрационных систем / *В. Б. Яковенко.* – К.: Наук. думка, 1992. – 219 с.
134. *Ярошевич М. П.* Дослідження пускових режимів вібраційної машини з дебалансними збудниками, що самосинхронізуються / *М. П. Ярошевич, І. П. Забронець, А. В. Силвонюк* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2013. – Вип. 47. – С. 50 – 55.
135. *Yaroshevych N. P.* Dynamics start vibrating machines with unbalanced drive in case of flat vibrations of bearing body. / *N. P. Yaroshevych, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevych* // Науковий вісник Національного гірничого ун-ту. Наук. Техн.. журнал, 2015. – № 3. – С. 39 – 45.
136. *Yaroshevych N. P.* Dynamics of Starting of Vibrating Machines with Unbalanced Vibroexciters on Solid Body with Flat Vibrations. / *N. P. Yaroshevich, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevich* // Applied Mechanics and Materials, 2016. – Vol. 849, pp. 36 – 45.
137. *Yaroshevich N.* Slow oscillations in systems with inertial vibration exciters / *N Yaroshevich, V Puts, T Yaroshevich, O Herasymchuk* // Vibroengineering PROCEDIA, 2020. – Vol. 32, pp. 20 – 25.
138. *Albert R. Probert,* Linear vibratory conveyor, GB Patent 2,238,841A, February 06, 1991.
139. *Arthur W. Forman,* Improvements in Vibratory Feeders, GB Patent 1,256,225, July 12, 1971.
140. *Franklin C. Pereny,* Vibrator, US Patent 4,117,381, September 26, 1978.
141. *Gulertan Vural, Albert Linz,* Vibratory Compacting Machine, US Patent 3909148A, Sep. 30, 1975.
142. *Jakhin B. Popper, Kyriat Motzkin,* Vibrating surface apparatus, US Patent 4,315,817A Feb. 16, 1982.

143. *John C. O'Connor*, Vibration Producing Mechanism, US Patent 2,353,492, November 07, 1944.
144. *John M. Morris*, Vibratory drive mechanism, US Patent 3,180,158 April 27, 1965.
145. *Joseph W. Sherwen* (The General Electric Company Limited), Improvements in or relating to electro-magnetic vibrating equipment, GB Patent 664720 A, January 09, 1952.
146. *Joseph W. Sherwen* (The General Electric Company Limited), Improvements in or relating to Electro-Magnetic Vibrating Equipment, GB Patent 745518 A, February 29, 1956.
147. *Josef Wölz, firm Westfalia - Cinnendahl - Gröppel A.-G.* (Bochum, Germany), Sifter or conveyer device, US Patent 2,179,442 A November 07, 1939.
148. *Jr. Robert, M Carrier, John M Morris*, Resonant vibration exciter, US Patent 2,958,228 A November 01, 1960.
149. *Li He, Zhao Qingrong, Zhang Hailongwen, Bang Chun*, Three-mass electromagnetic vibration feeder and adjustment method for electromagnetic vibration phase angle thereof, CN Patent 102502193 A September 30, 2015.
150. *Mikata Yoshitaka, Higuchi Sunao*, Electromagnetic Vibration Conveyance Feeder for Combination Balance or the Like, JP Patent S63282615 A, November 18, 1988.
151. *Mikata Yoshitaka, Higuchi Tadashi, Harada Shogo*, Two trough, electromagnetically vibratory feeder, EP Patent 0349693 A3, September 26, 1990.
152. *Moulsdale Timothy, John Blackwall, Wright Machinery Limited* (GB), *Mendelewicz Ran* (IL), Vibratory Conveyor, WO Patent 2006/125998A1, November 30, 2006.
153. *Peter T. Jones, Kennewick*, Conveying Apparatus, US Patent 6,868,960 B2, March 22, 2005.
154. *Ralph A. Stearns, Bozrah, Conn*, Vibratory feeder, US Patent 5285890 A February 29, 1994.

155. *Richard B. Kraus*, Linear Drive for Vibratory Apparatus, CA Patent 2,518,736C, September 01, 2009.
156. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Vibrating Apparatus for Sound Signalling, GB Patent 144,664, September 08, 1921.
157. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Subaqueous Sound Producers or Receivers, GB Patent 147,941, September 15, 1921.
158. *Signal Gesellschaft*, Improvements in and relating to Sound Transmitting and Receiving Apparatus, GB Patent 147,940, October 10, 1921.
159. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Sound Producing or Receiving Devices containing Two or More Vibratory Structures, GB Patent 148,412, October 10, 1921.
160. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Sound Producing or Receiving Devices containing Two or More Vibratory Structures”, GB Patent 148,414, October 10, 1921.
161. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Vibratory Devices for Subaqueous Sound Signalling Apparatus, GB Patent 155,569, February 28, 1922.
162. *Thomas H. Falconer* (Eriez Manufacturing Company), Three Mass Vibratory Feeder, US Patent 4,961,491, October 09, 1990.
163. *Wang Yun*, Three-mass asymmetric vibrating mill, CN Patent 104941764 A, September 30, 2015.
164. *William R. Brown*, Three Mass Electromagnetic Feeder, US Patent 4,378,064, March 29, 1983.
165. *William W. Triggs* (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials, GB Patent 494,206A, October 21, 1938.
166. *William W. Triggs* (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials, GB Patent 504,782A, April 24, 1939.



167. *Lanets O. Controllable Crank Mechanism for Exciting Oscillations of Vibratory Equipment / O. Lanets, O. Kachur, V. Korendiy, V. Lozynskyu // Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV, – 2021. – Vol. 2 pp. 43 – 52.*
168. *Ланець О. С. Розрахунок на міцність континуальної ділянки вібромашини / О. С. Ланець, О. Ю. Качур, В. М. Корендій // XV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: матеріали симпозіуму (м. Львів, 20 – 21 травня 2021 р.) – 2021. – С. 8–10.*
169. *Корендій В. М. Вібраційний бункерний живильник одномасової структури / В. М. Корендій, О. Ю. Качур, Ю. Я. Новицький, П. Р. Дмитерко // XV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: матеріали симпозіуму (м. Львів, 20 – 21 травня 2021 р.) – 2021. – С. 153–155.*

## ДОДАТКИ

## **ДОДАТОК А**

**Акти впровадження дисертаційних досліджень  
у навчальний процес та виробництво**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”



### АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи  
на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD)

Качура Олександра Юрійовича

“Синтез енергоощадних дискретно-континуальних міжрезонансних  
вібраційних машин з керованим кривошипно-шатунним приводом”

у вигляді впровадженої інженерної методології зі створення дискретно-  
континуального міжрезонансного вібраційного технологічного обладнання

ФОП Струк М. І. підтверджує впровадження на виробництво бетонних  
виробів науково-прикладних результатів дисертаційних досліджень здобувача  
освітнього-науково ступеня доктора філософії (PhD) Качура О. Ю. і констатує  
наступне:

1. У результаті ознайомлення з експериментальною дискретно-континуаль-  
ною міжрезонансною вібраційною установкою в лабораторії кафедри робото-  
техніки та інтегрованих технологій машинобудування встановлено, що дана  
конструкція може бути прототипом промислового зразка вібраційного техноло-  
гічного обладнання для виготовлення бруківки, стоків, облицювальної плитки  
тощо.

2. Запропонована методологія побудови дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного обладнання, де вперше застосовано гібридні (дискретно-континуальні) структури коливальних систем, відмінністю яких є введення у якості третьої (реактивної) маси континуальної ділянки, наділеної на першій власній частоті певною зведеною жорсткістю та зведеною масою, дійсно дозволяє ефективно забезпечувати енергоощадні міжрезонансні режими роботи.

3. Розроблена концепція побудови та інженерна методика розрахунку дискретно-континуальних міжрезонансних коливальних систем придатна для створення різноманітного технологічного обладнання.

4. Рекомендувати принципи створення дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного технологічного обладнання на підприємстві під час розроблення вібраційних столів для ущільнення бетоносумішей.



Струк М. І.



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор

з науково-педагогічної роботи  
Національного університету  
“Львівська політехніка”

О. Р. Давидчак

## АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи  
на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD)

**Качура Олександра Юрійовича**

“Синтез енергоощадних дискретно-континуальних міжрезонансних  
вібраційних машин з керованим кривошипно-шатунним приводом”

у навчальному процесі кафедри “Робототехніка та інтегровані технології  
машинобудування” (РІТМ) Національного університету “Львівська політехніка”

**Комісія в складі:** голови – директора Інституту механічної інженерії та транспорту Національного університету “Львівська політехніка”, д. т. н., професора Ланця О. С. та членів – виконуючого обов’язки завідувача кафедрою РІТМ, д. т. н., доцента Ступницького В. В., заступника завідувача кафедрою РІТМ, завідувача НДЦІ-40, к. т. н., доцента Боровця В. М. підтверджує впровадження науково-прикладних результатів за дисертаційною роботою на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD) аспіранта Качура О. Ю. “Синтез енергоощадних дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин з керованим кривошипно-шатунним приводом” у навчальний процес кафедри РІТМ і констатує:

– аспірантом Качуром О. Ю. впроваджено в курс дисципліни “Вібраційні процеси та обладнання виробництв” для студентів освітнього рівня магістр за спеціалізацією 131.01 – “Роботомеханічні системи та комплекси” спеціальності 131 – “Прикладна механіка” наступне: лабораторну установку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора та 2 методичні вказівки до неї на теми: “Вивчення конструкції та встановлення власних частот дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора”; “Розрахунок континуальної ділянки міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора з гібридною структурою”.

– студенти на лабораторних заняттях ознайомлюються з принципом роботи та особливостями побудови міжрезонансної дискретно-континуальної вібраційної машини для транспортування та сепарування легких полімерних матеріалів, освоюють її структурні особливості. Вчать експериментально визначати власні частоти системи, розраховувати континуальні ділянки. Запропоновані для засвоєння методи розрахунку обладнання дають можливість студентам у подальшій їхній інженерній та науковій роботах створювати високоефективне вібраційне технологічне обладнання незалежно від галузі використання.

**Голова комісії:**

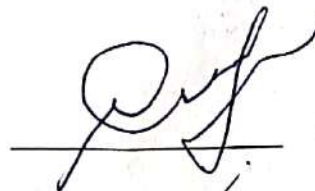
Директор Інституту механічної інженерії та транспорту, д. т. н., професор



Ланець О. С.

**Члени комісії:**

Виконуючий обов'язки завідувача кафедри РІТМ, д. т. н., доцент



Ступницький В. В.

Заступник завідувача кафедри РІТМ, завідувач НДЛ-40, к. т. н., доцент



Боровець В. М.

## Додаток В

## Дискретна модель двомасової коливної системи

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг]:	$m1 := 83.7$
Проміжна маса, [кг]:	$m2 := 62.1$
Кількість обертів, [об/хв]:	$n := 950$
Циклічна частота вимушених коливань, [Гц]:	$\nu := \frac{n}{60} = 15.833$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с]:	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot \nu = 99.484$
Перша власна частота коливної системи, [рад/с]:	$\Omega_{B1} := 95$
Друга власна частота коливної системи, [рад/с]:	$\Omega_{B2} := 104$
Перевантаження на робочому органі, [-]:	$\zeta := 2.5$
Пришвидшення вільного падіння, [м/с <sup>2</sup> ]:	$\frac{g}{g_A} := 9.807$
Амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань, [м]:	

$$Y1 := \frac{\zeta \cdot g}{\omega^2} = 2.477 \times 10^{-3} \quad (B.1)$$

Жорсткість двомасової коливної системи, [Н/м]:

$$c := \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot (\Omega_{B2})^2 = 3.856 \times 10^5 \quad (B.2)$$

Амплітудне значення гармонійної сили збурення двомасової коливної системи, [Н]:

$$F02 := \left| \frac{Y1 \cdot (m1 + m2) \cdot \left( c - \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot \omega^2 \right)}{m2} \right| = 190.548 \quad (B.3)$$

Ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму двомасової коливної системи, [м]:

$$\epsilon2 := \frac{F02}{c - \omega^2 \cdot \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2}} = 5.8162 \times 10^{-3} \quad (B.4)$$

Амплітуда коливань реактивної маси на частоті вимушених коливань, [м]:

$$Y2 := \frac{-F02 \cdot m1}{\left( c - \omega^2 \cdot \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \right) \cdot (m1 + m2)} = -3.339 \times 10^{-3} \quad (B.5)$$



Амплітудні значення коливань активної та реактивної мас в залежності від колової частоти :

$$\omega := 0, 0.1 \dots 120$$

$$Y1(\omega) := \frac{F02 \cdot m2}{\left( c - \omega^2 \cdot \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \right) \cdot (m1 + m2)}$$

$$Y2(\omega) := \frac{-F02 \cdot m1}{\left[ c - (\omega)^2 \cdot \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \right] \cdot (m1 + m2)}$$

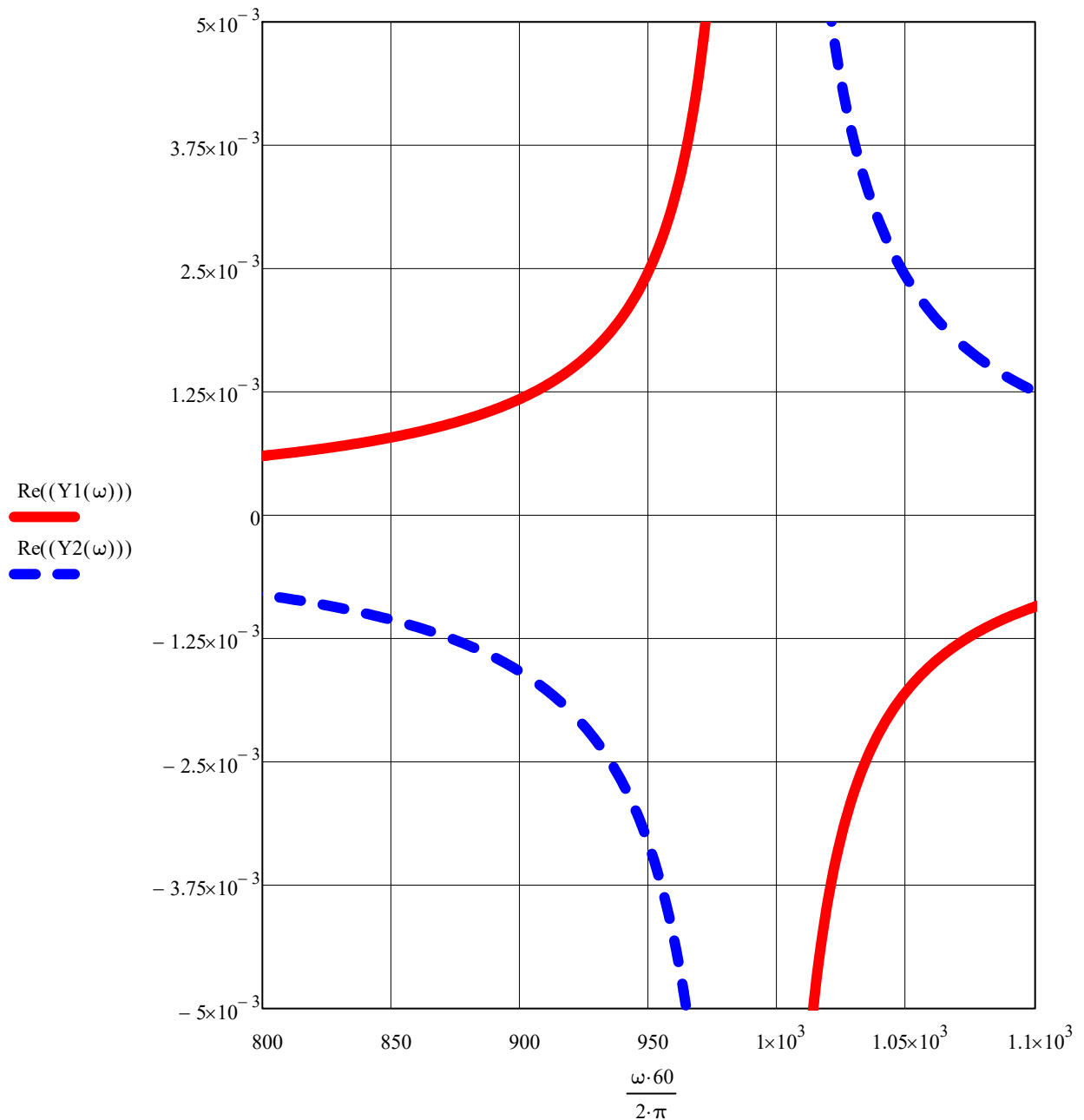


Рис. В.1. Амплітудно-частотна характеристика двомасової коливальної системи

## Додаток С

## Дискретна модель тримасової коливальної системи

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг] (додаток В):	$m_1 := 83.7$
Проміжна маса, [кг] (додаток В):	$m_2 := 62.1$
Кількість обертів, [об/хв] (додаток В):	$n := 950$
Циклічна частота вимушених коливань, [Гц] (додаток В):	$\nu := \frac{n}{60} = 15.833$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток В):	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot \nu = 99.484$
Перша власна частота коливальної системи, [рад/с] (додаток В):	$\Omega_{B1} := 95$
Друга власна частота коливальної системи, [рад/с] (додаток В):	$\Omega_{B2} := 104$
Перевантаження на робочому органі, [-] (додаток В):	$\zeta := 2.5$
Пришвидшення вільного падіння, [м/с <sup>2</sup> ]:	$\frac{g}{g_n} := 9.807$
Амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань, [м] (додаток В):	$\frac{Y_1}{m_m} := 2.477 \times 10^{-3}$
Амплітудне значення гармонійного збурювального зусилля двомасової коливальної системи, [Н] (додаток В):	$F_{02} := 190.548$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну з реактивною масами двомасової коливальної системи, [Н/м] (додаток В):	$\frac{c}{m_m} := 3.856 \times 10^5$
Ефективність тримасової коливальної системи в порівнянні з двомасовою коливальною системою:	$D := 6.9425$
Амплітудне значення гармонійної сили збурення тримасової коливальної системи з умови ефективності складає, [Н]:	

$$F_{03} := \frac{F_{02}}{D} = 27.447 \quad (C.1)$$

Інерційний параметр реактивної маси тримасової коливальної системи складає не більше, [кг]:

$$m_{3m} := \frac{-(m_1 + m_2) \cdot m_2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\Omega_{B1}}{\Omega_{B2}} \right)^2 \right]^2}{m_2 \cdot \left[ \left( \frac{\Omega_{B1}}{\Omega_{B2}} \right)^2 - 1 \right]^2 - 4 \cdot m_1 \cdot \left( \frac{\Omega_{B1}}{\Omega_{B2}} \right)^2} = 0.894 \quad (C.2)$$

Встановимо точне значення реактивної маси відповідно до заданого значення ефективності системи

Проведемо присвоєння значень заміним:

$$\Lambda := \frac{\Omega_{B1}}{\Omega_{B2}} = 0.913$$

$$H := \sqrt{m_2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \Omega_{B2}^4 \cdot \left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot (\Lambda^2 - 1)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Lambda^2 \right]}$$

Розв'яжемо систему трьох рівнянь:

Given

$$D = - \frac{\omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_3 \cdot \left( c - \frac{\omega^2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot (m_1 + m_2)}{m_2 \cdot \left[ c_{23}^2 \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) + c_{12}^2 \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \dots \right. \\ \left. + (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega^2 + c_{23}) \right]}$$

$$c_{12} = \Omega_{B2}^2 \cdot m_1 \cdot \frac{\left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{B2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) - H \right] \cdot (m_2 + m_3)}{\left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{B2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) \dots \right] \cdot (m_1 + m_2 + m_3) + (-H - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Omega_{B2}^2)} \quad (C.2.1)$$

$$c_{23} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left[ \frac{\Omega_{B2}^2 \cdot m_2 \cdot (\Lambda^2 + 1) \cdot (m_1 + m_2 + m_3) - H}{(m_2 + m_3) \cdot (m_1 + m_2 + m_3)} \right]$$

$$\text{Find}(m_3, c_{12}, c_{23}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -62.1 & -145.8 & 0.456 \\ 0 & 3.856 \times 10^5 & 3.556 \times 10^5 & 3.556 \times 10^5 & 3.76 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.208 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad (C.2.2)$$

Вибираємо значення реактивної маси, [кг]:

$$m_3 := 0.456$$

Тоді,

$$H_{\omega} := \sqrt{m_2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \Omega_{B2}^4 \cdot \left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot (\Lambda^2 - 1)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Lambda^2 \right]} = 1.137 \times 10^7 \quad [\text{кг}^2/\text{с}^2]$$

Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну з проміжною масами, [Н/м]:

$$c_{12} := \Omega_{B2}^2 \cdot m_1 \cdot \frac{\left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{B2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) - H \right] \cdot (m_2 + m_3)}{\left[ (m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{B2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) \dots \right] \cdot (m_1 + m_2 + m_3) + (-H - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Omega_{B2}^2)} = 3.7598 \times 10^5 \quad (C.3)$$

Жорсткість пружного вузла, що з'єднує проміжну з реактивною масами, [Н/м]:

$$c_{23} := \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left[ \frac{\Omega_{в2}^2 \cdot m_2 \cdot (\Lambda^2 + 1) \cdot (m_1 + m_2 + m_3) - H}{(m_2 + m_3) \cdot (m_1 + m_2 + m_3)} \right] = 4.2075 \times 10^3 \quad (C.4)$$

Дійсне значення гармонійної сили збурення тримасової коливальної системи, [Н]:

$$F_{03} := \frac{\zeta \cdot g \cdot \left( \begin{array}{l} c_{12} \cdot c_{23} \cdot m_1 + c_{12} \cdot c_{23} \cdot m_2 + c_{12} \cdot c_{23} \cdot m_3 - \omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_1 \cdot m_3 \dots \\ + -\omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_2 \cdot m_3 - \omega^2 \cdot c_{23} \cdot m_1 \cdot m_2 - \omega^2 \cdot c_{23} \cdot m_1 \cdot m_3 \dots \\ + \omega^4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \end{array} \right)}{\omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_3} = 27.445 \quad (C.5)$$

Ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму тримасової коливальної системи, [м]:

$$\epsilon_3 := \frac{F_{03}}{c_{23}} = 6.5229 \times 10^{-3} \quad (C.6)$$

Амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань, [м]:

$$Y_{13} := \frac{F_{03} \cdot \omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_3}{c_{23}^2 \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) + c_{12}^2 \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \dots + -(c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega^2 + c_{23})} = 2.477 \times 10^{-3} \quad (C.7)$$

Амплітуда коливань проміжної маси на частоті вимушених коливань, [м]:

$$Y_2 := \frac{F_{03} \cdot \omega^2 \cdot m_3 \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1)}{c_{23}^2 \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) + c_{12}^2 \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \dots + -(c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega^2 + c_{23})} = -2.981 \times 10^{-3} \quad (C.8)$$

Амплітуда коливань реактивної маси на частоті вимушених коливань, [м]:

$$Y_3 := \frac{F_{03} \cdot [c_{12}^2 - (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega^2 + c_{23}) + c_{23} \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1)]}{c_{23}^2 \cdot (c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) + c_{12}^2 \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \dots + -(c_{12} - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (c_{23} - \omega^2 \cdot m_3) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega^2 + c_{23})} = 0.049 \quad (C.9)$$

Парціальні частоти системи:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} = 96.057 \quad (C.10)$$

$$\nu_n := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} = 15.288$$

Амплітудні значення коливань активної, проміжної та реактивної мас в залежності від колової частоти:

$$\omega := 0, 0.1 \dots 120$$

$$Y1(\omega) := \frac{F03 \cdot \omega^2 \cdot c12 \cdot m3}{c23^2 \cdot (c12 - \omega^2 \cdot m1) + c12^2 \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \dots - (c12 - \omega^2 \cdot m1) \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \cdot (c12 - m2 \cdot \omega^2 + c23)}$$

$$Y2(\omega) := \frac{F03 \cdot \omega^2 \cdot m3 \cdot (c12 - \omega^2 \cdot m1)}{c23^2 \cdot (c12 - \omega^2 \cdot m1) + c12^2 \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \dots - (c12 - \omega^2 \cdot m1) \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \cdot (c12 - m2 \cdot \omega^2 + c23)}$$

$$Y3(\omega) := \frac{F03 \cdot [c12^2 - (c12 - \omega^2 \cdot m1) \cdot (c12 - m2 \cdot \omega^2 + c23) + c23 \cdot (c12 - \omega^2 \cdot m1)]}{c23^2 \cdot (c12 - \omega^2 \cdot m1) + c12^2 \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \dots - (c12 - \omega^2 \cdot m1) \cdot (c23 - \omega^2 \cdot m3) \cdot (c12 - m2 \cdot \omega^2 + c23)}$$

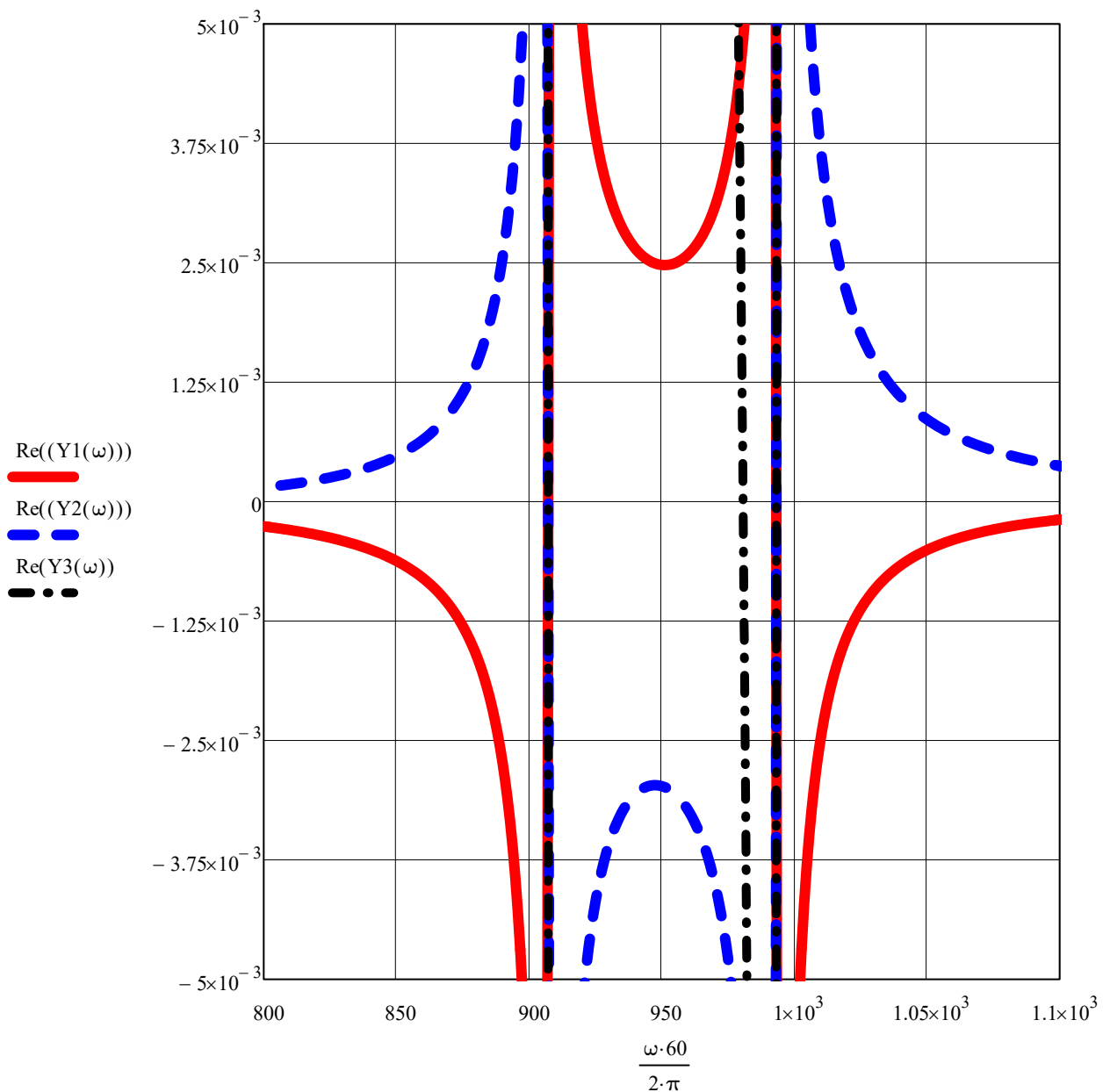


Рис. С.1. Амплітудно-частотна характеристика тримасової коливальної системи транспортера-сепаратора

## Додаток D

*Математична модель вільних коливань стержня з вільним кінцем у початку відліку.  
Його перша власна частота*

За початок відліку беремо лівий кінець, який перебуває у вільному стані (рис. D.1).

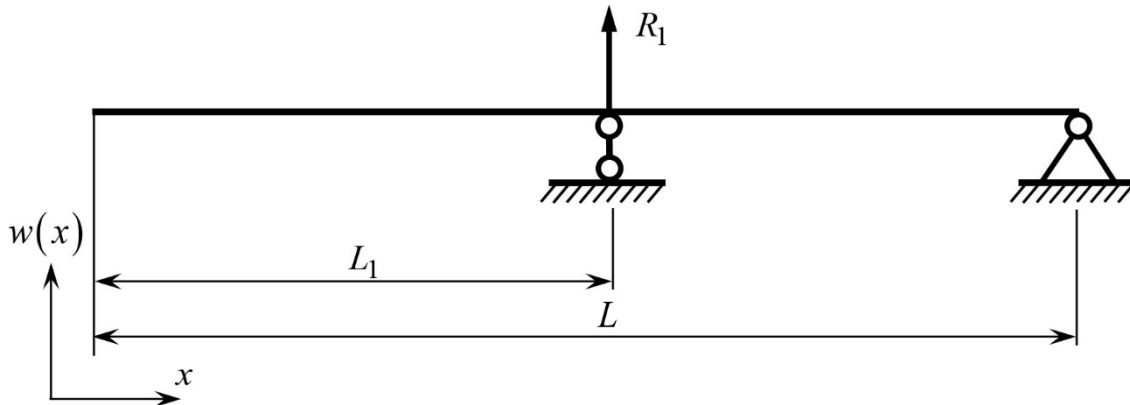


Рис. D.1. Розрахункова схема стержня з вільним кінцем у початку координат

Частотна матриця для розрахункової схеми (рис. D.1) набуває наступного вигляду:

$$\Delta := \begin{pmatrix} \mathbf{S11} & T11 & V31 \\ U11 & V11 & T31 \\ S21 & T21 & 0 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

$$|\Delta| \rightarrow S21 \cdot T11 \cdot T31 - S11 \cdot T21 \cdot T31 - S21 \cdot V11 \cdot V31 + T21 \cdot U11 \cdot V31 \quad (D.2)$$

Функції Кривола для вільного кінця набудуть вигляду:

$$S11 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot L) + \cos(\xi \cdot L))$$

$$T11 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L) + \sin(\xi \cdot L))$$

$$V31 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (L - L1)] - \sin[\xi \cdot (L - L1)]]$$

$$U11 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot L) - \cos(\xi \cdot L))$$

$$V11 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L) - \sin(\xi \cdot L))$$

$$T31 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (L - L1)] + \sin[\xi \cdot (L - L1)]]$$

$$S21 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot L1) + \cos(\xi \cdot L1))$$

$$T21 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L1) + \sin(\xi \cdot L1))$$

Знаходимо визначник частотної матриці (D.1):

$$\Delta := \begin{pmatrix} \mathbf{S11} & T11 & V31 \\ U11 & V11 & T31 \\ S21 & T21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\cosh(L \cdot \xi)}{2} + \frac{\cos(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh(L \cdot \xi)}{2} + \frac{\sin(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh[\xi \cdot (L - L1)]}{2} - \frac{\sin[\xi \cdot (L - L1)]}{2} \\ \frac{\cosh(L \cdot \xi)}{2} - \frac{\cos(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh(L \cdot \xi)}{2} - \frac{\sin(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh[\xi \cdot (L - L1)]}{2} + \frac{\sin[\xi \cdot (L - L1)]}{2} \\ \frac{\cosh(L1 \cdot \xi)}{2} + \frac{\cos(L1 \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh(L1 \cdot \xi)}{2} + \frac{\sin(L1 \cdot \xi)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Здійснимо заміну  $L1 \cdot \xi$  на  $\xi L$ , тоді частотна матриця набуде вигляду:

$$\Delta := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi L) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi L \cdot (1 - \beta)] - \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi L \cdot (1 - \beta)] \\ \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi L) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L) - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi L \cdot (1 - \beta)] + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi L \cdot (1 - \beta)] \\ \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi L \cdot \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi L \cdot \beta) & \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L \cdot \beta) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L \cdot \beta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| \rightarrow \frac{\sin(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sinh(\beta \cdot \xi L) \cdot \cosh(\xi L)}{4} - \frac{\sin(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cosh(\beta \cdot \xi L) \cdot \sinh(\xi L)}{4} \dots$$

$$+ \frac{\cosh(\beta \cdot \xi L) \cdot \sinh(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\sinh(\beta \cdot \xi L) \cdot \sinh(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sin(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cosh(\xi L) \cdot \sin(\beta \cdot \xi L)}{4} - \frac{\sin(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sinh(\xi L) \cdot \cos(\beta \cdot \xi L)}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sinh(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cos(\beta \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\sinh(\beta \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sin(\beta \cdot \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4}$$

Спростивши отриманий визначник частотної матриці, отримаємо:

$$|\Delta| \rightarrow \frac{\sinh(\xi L - 2 \cdot \beta \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} + \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} + \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)]}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sinh(\beta \cdot \xi L) \cdot \sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cos(\xi L)}{4} + \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cosh(\xi L) \cdot \sin(\beta \cdot \xi L)}{4} \dots \quad (D.3)$$

$$+ \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sinh(\xi L) \cdot \cos(\beta \cdot \xi L)}{4} - \frac{\sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cos(\beta \cdot \xi L) \cdot \sin \xi L}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sin(\beta \cdot \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4}$$

Довжина лівої ділянки стержня, [м]:

$$L1 := 0.475$$

Довжина стержня, [м]:

$$L := 0.83$$

Проведемо графічну інтерпретацію результатів розрахунку визначника частотної матриці (рис. D.2)

$$\beta := \frac{L1}{L}$$

$$\xi L := 0, 0.001 \dots 3$$

$$\Delta_0(\xi L) := 0$$

$$\Delta(\xi L) := \frac{\sinh(\xi L - 2 \cdot \beta \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} + \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} + \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)]}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sinh(\beta \cdot \xi L) \cdot \sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cos(\xi L)}{4} + \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cosh(\xi L) \cdot \sin(\beta \cdot \xi L)}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sin[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sinh(\xi L) \cdot \cos(\beta \cdot \xi L)}{4} - \frac{\sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \cos(\beta \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} \dots$$

$$+ \frac{\sinh[\xi L \cdot (\beta - 1)] \cdot \sin(\beta \cdot \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4}$$

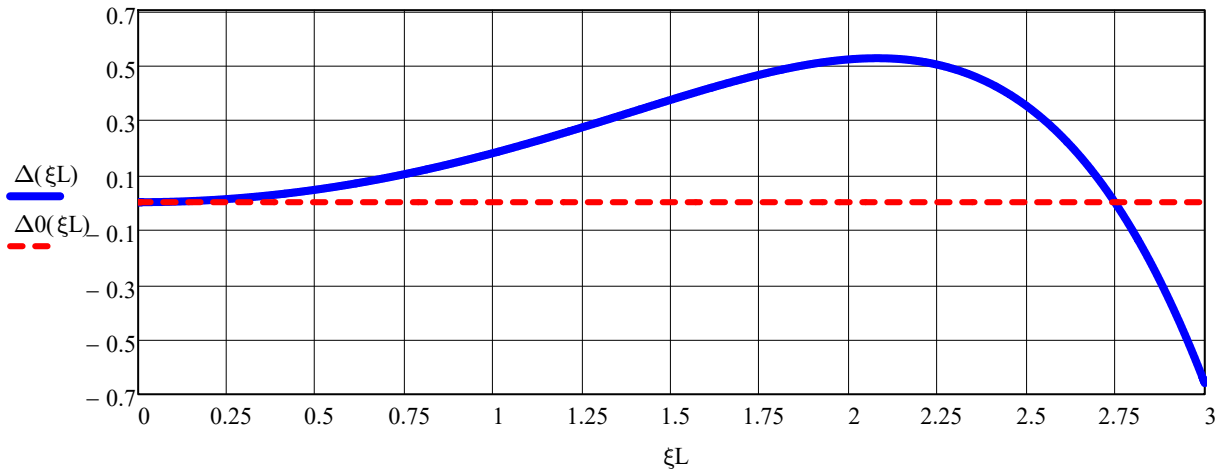


Рис. D.2. Графічна інтерпретація визначника частотної матриці

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Шрина стержня, [м]:	$h := 0.045$
Товщина стержня, [м]:	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па]:	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ]:	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м]:	$m_{пм} := h \cdot bn \cdot \rho = 2.028$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ]:	$J_w := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 7.092 \times 10^{-10}$

Прийнявши перше наближення  $\xi L := 2.75$ , визначник буде рівний нулю при (рис. D.2):

$$\xi L_w := \text{root}(\Delta(\xi L), \xi L) = 2.7469 \quad (D.4)$$

Колова частота власних коливань стержня, [рад/с]:

$$\omega := \xi L_w^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{m_{пм} \cdot L^4}} = 93.867 \quad (D.5)$$



## Додаток Е

## Математична модель вільних коливань стержня з шарнірно опертим кінцем у початку відліку. Його перша власна частота

За початок відліку беремо лівий кінець, який шарнірно опертий (рис. Е.1).

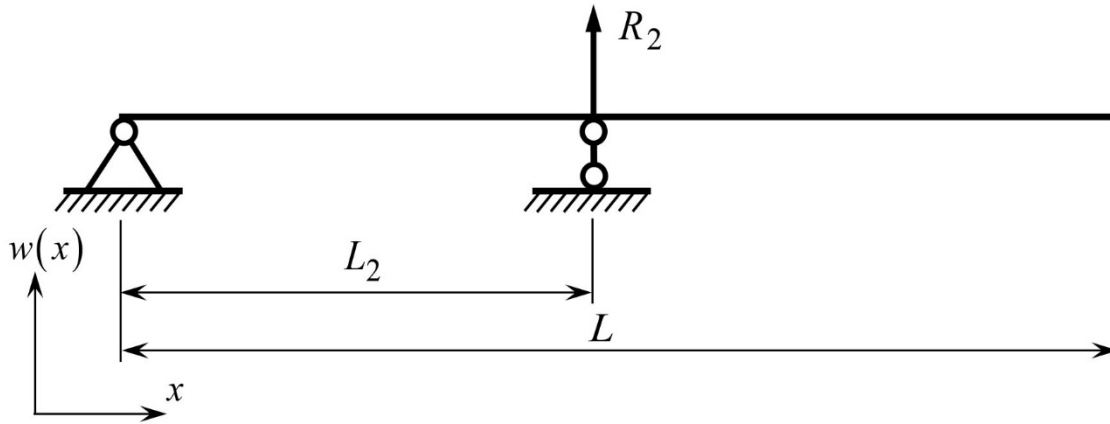


Рис. Е.1. Розрахункова схема стержня з шарнірно опертим кінцем у початку координат

Частотна матриця для розрахункової схеми (рис. Е.1) набуває наступного вигляду:

$$\Delta := \begin{pmatrix} \mathbf{S11} & T11 & V31 \\ U11 & V11 & T31 \\ S21 & T21 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$|\Delta| \rightarrow S21 \cdot T11 \cdot T31 - S11 \cdot T21 \cdot T31 - S21 \cdot V11 \cdot V31 + T21 \cdot U11 \cdot V31 \quad (\text{E.2})$$

Функції Кривола для шарнірно опертого кінця набудуть вигляду:

$$V := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L) - \sin(\xi \cdot L))$$

$$T := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L) + \sin(\xi \cdot L))$$

$$T1 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (L - L2)] + \sin[\xi \cdot (L - L2)]]$$

$$U := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot L) - \cos(\xi \cdot L))$$

$$S := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot L) + \cos(\xi \cdot L))$$

$$S1 := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi \cdot (L - L2)] + \cos[\xi \cdot (L - L2)]]$$

$$T2 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L2) + \sin(\xi \cdot L2))$$

$$V2 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot L2) - \sin(\xi \cdot L2))$$

Знаходимо визначник частотної матриці (Е.1):

$$\Delta := \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{T} & \mathbf{T1} \\ \mathbf{U} & \mathbf{S} & \mathbf{S1} \\ \mathbf{T2} & \mathbf{V2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sinh(L \cdot \xi)}{2} - \frac{\sin(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh(L \cdot \xi)}{2} + \frac{\sin(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh[\xi \cdot (L - L2)]}{2} + \frac{\sin[\xi \cdot (L - L2)]}{2} \\ \frac{\cosh(L \cdot \xi)}{2} - \frac{\cos(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\cosh(L \cdot \xi)}{2} + \frac{\cos(L \cdot \xi)}{2} & \frac{\cosh[\xi \cdot (L - L2)]}{2} + \frac{\cos[\xi \cdot (L - L2)]}{2} \\ \frac{\sinh(L2 \cdot \xi)}{2} + \frac{\sin(L2 \cdot \xi)}{2} & \frac{\sinh(L2 \cdot \xi)}{2} - \frac{\sin(L2 \cdot \xi)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Здійснимо заміну  $L1 \cdot \xi$  на  $\xi L$ , тоді частотна матриця набуде вигляду:

$$\Delta := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L) - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi L \cdot (1 - \gamma)] + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi L \cdot (1 - \gamma)] \\ \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi L) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi L) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi L) & \frac{1}{2} \cdot \cosh[\xi L \cdot (1 - \gamma)] + \frac{1}{2} \cdot \cos[\xi L \cdot (1 - \gamma)] \\ \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L \cdot \gamma) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L \cdot \gamma) & \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi L \cdot \gamma) - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi L \cdot \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| \rightarrow \begin{aligned} & \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \cosh(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sinh(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4} \dots \\ & + \frac{\cosh(\xi L) \cdot \sinh(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{4} + \frac{\sinh(\xi L) \cdot \cosh(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{4} \dots \\ & + \frac{\cos(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\cos(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sinh(\xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{4} \dots \\ & + \frac{\sin(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \cos(\xi L)}{4} + \frac{\sin(\gamma \cdot \xi L - \xi L) \cdot \cosh(\xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{4} \end{aligned}$$

Спростивши отриманий визначник частотної матриці, отримаємо:

$$|\Delta| \rightarrow \begin{aligned} & \frac{\cosh(\xi L) \cdot \cos(\xi L)}{8} - \frac{\sinh(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} - \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L)}{8} \dots \\ & + \frac{\cosh(\xi L) \cdot \cos(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L)}{8} + \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{2} \dots \\ & + \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sinh[\xi L \cdot (\gamma - 1)] \cdot \cos(\xi L)}{4} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Довжина лівої ділянки стержня, [м]:

$$L2 := 0.355$$

Довжина стержня, [м]:

$$L := 0.83$$

Проведемо графічну інтерпретацію результатів розрахунку визначника частотної матриці (рис. Е.2)

$$\gamma := \frac{L2}{L} \quad \xi L := 0, 0.001 \dots 3 \quad \Delta_0(\xi L) := 0$$

$$\Delta(\xi L) := \frac{\cosh(\xi L) \cdot \cos(\xi L)}{8} - \frac{\sinh(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L) \cdot \sin(\xi L)}{8} - \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L)}{8} \dots$$

$$+ \frac{\cosh(\xi L) \cdot \cos(\xi L - 2 \cdot \gamma \cdot \xi L)}{8} + \frac{\sinh(\xi L) \cdot \sin(\xi L)}{4} + \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi L)}{2} \dots$$

$$+ \frac{\sinh(\gamma \cdot \xi L) \cdot \sinh[\xi L \cdot (\gamma - 1)] \cdot \cos(\xi L)}{4}$$

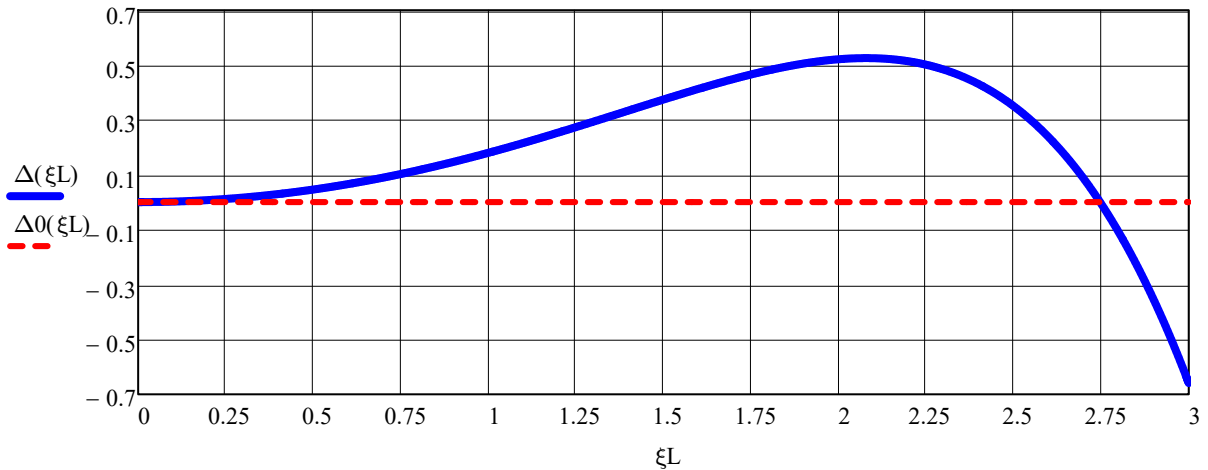


Рис. Е.2. Графічна інтерпретація визначника частотної матриці

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Шрина стержня, [м] (додаток D):	$h := 0.045$
Товщина стержня, [м] (додаток D):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток D):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток D):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток D):	$m_{\text{пм}} := h \cdot bn \cdot \rho = 2.028$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток D):	$J := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 7.092 \times 10^{-10}$

Прийнявши перше наближення  $\xi L := 2.75$ , визначник буде рівний нулю при (рис. Е.2):

$$\xi L := \text{root}(\Delta(\xi L), \xi L) = 2.7469 \quad (\text{E.4})$$

Колова частота власних коливань стержня, [рад/с]:

$$\omega_f := \xi L^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{m_{\text{пм}} \cdot L^4}} = 93.867 \quad (\text{E.5})$$

**Додаток F**  
**Математична модель вільних коливань континуальної ділянки.**  
**Її перша власна частота**

За початок відліку беремо лівий кінець, який знаходиться у вільному стані (рис. F.1)

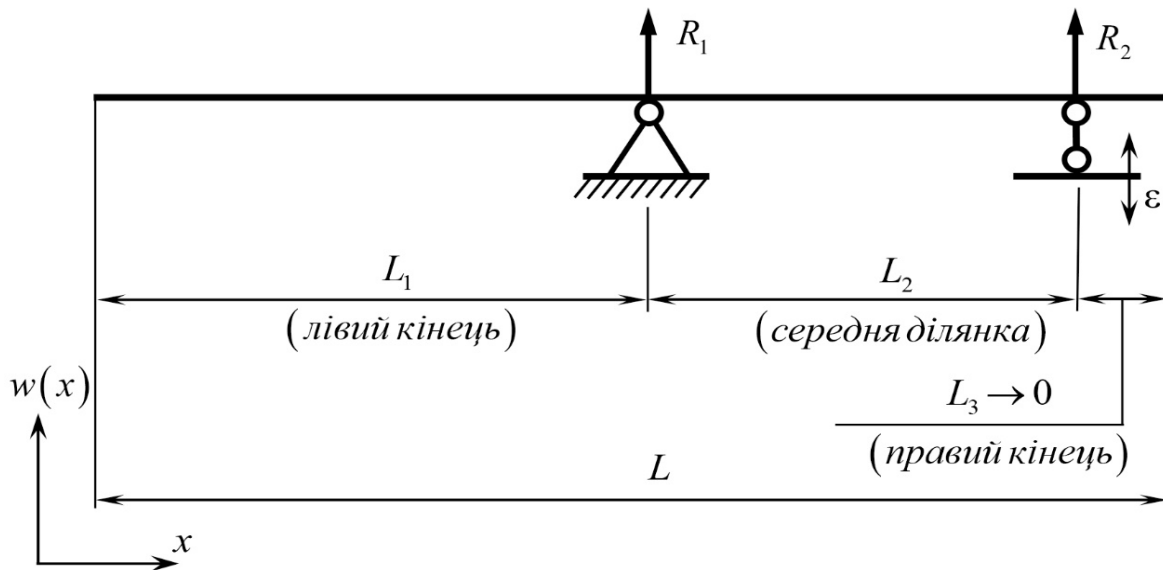


Рис. F.1. Розрахункова схема континуальної ділянки

Частотна матриця для розрахункової схеми (рис. F.1) набуває наступного вигляду:

$$\Delta := \begin{pmatrix} \mathbf{U1}(\xi L) & V1(\xi L) & T2(\xi L) & T3(\xi L) \\ T1(\xi L) & U1(\xi L) & S2(\xi L) & S3(\xi L) \\ S4(\xi L) & T4(\xi L) & 0 & 0 \\ S5(\xi L) & T5(\xi L) & V5(\xi L) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

$$|\Delta| \rightarrow \begin{aligned} & S2(\xi L) \cdot S5(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T4(\xi L) - S2(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T5(\xi L) \dots \\ & + S3(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot T2(\xi L) \cdot T5(\xi L) - S3(\xi L) \cdot S5(\xi L) \cdot T2(\xi L) \cdot T4(\xi L) \dots \\ & + -S3(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot V1(\xi L) \cdot V5(\xi L) + S3(\xi L) \cdot T4(\xi L) \cdot U1(\xi L) \cdot V5(\xi L) \dots \\ & + S4(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot U1(\xi L) \cdot V5(\xi L) - T1(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T4(\xi L) \cdot V5(\xi L) \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток D):

$$L1 := 0.475$$

Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток E):

$$L2 := 0.355$$

Довжина правої ділянки стержня, [м]:

$$L3 := 0.0001$$

Загальна довжина стержня, [м]:

$$L := L1 + L2 + L3 = 0.8301$$

Здійнемо підстановку, що дозволяє отримати функції Крилова наступного вигляду

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L}$$

$$U1(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi L) - \cos(\xi L))$$

$$V1(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L) - \sin(\xi L))$$

$$T2(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L) + \sin(\xi L))$$

$$U1(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi L) - \cos(\xi L))$$

$$S2(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (\beta)] + \cos(\xi L \cdot \beta)]$$

$$T4(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L \cdot \beta) + \sin(\xi L \cdot \beta))$$

$$S5(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (\gamma + \beta)] + \cos[\xi L \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$T5(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (\gamma + \beta)] + \sin[\xi L \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$V5(\xi L) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (\gamma)] - \sin[\xi L \cdot (\gamma)]]$$

Проведемо інтерпретацію результатів розрахунку визначника частотної матриці (рис. F.2)

$$\xi L := 0, 0.001 \dots 3$$

$$\Delta 0(\xi L) := 0$$

$$\begin{aligned} \Delta(\xi L) := & S2(\xi L) \cdot S5(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T4(\xi L) - S2(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T5(\xi L) \dots \\ & + S3(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot T2(\xi L) \cdot T5(\xi L) - S3(\xi L) \cdot S5(\xi L) \cdot T2(\xi L) \cdot T4(\xi L) \dots \\ & + -S3(\xi L) \cdot S4(\xi L) \cdot V1(\xi L) \cdot V5(\xi L) + S3(\xi L) \cdot T4(\xi L) \cdot U1(\xi L) \cdot V5(\xi L) \dots \\ & + S4(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot U1(\xi L) \cdot V5(\xi L) - T1(\xi L) \cdot T3(\xi L) \cdot T4(\xi L) \cdot V5(\xi L) \end{aligned}$$

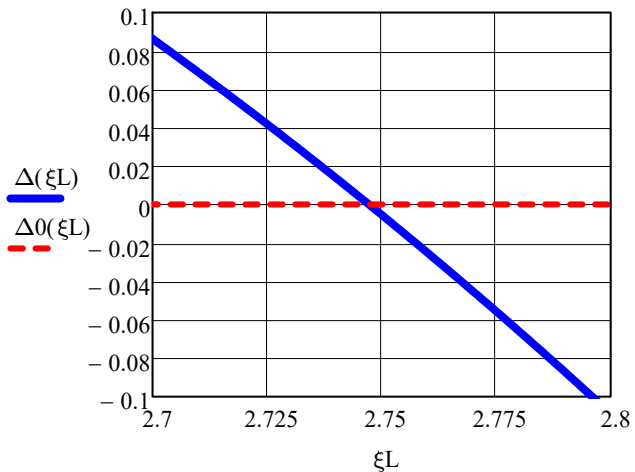
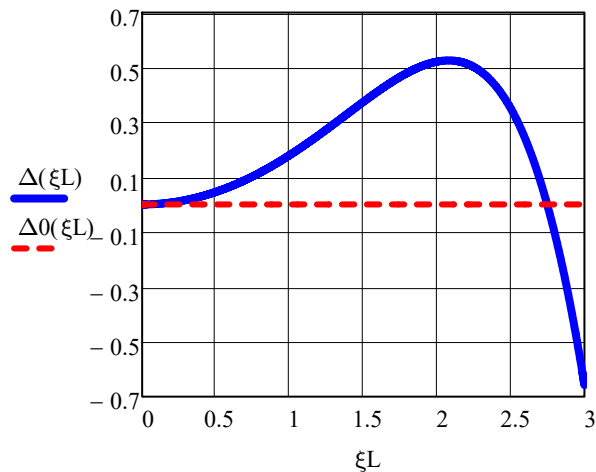


Рис. F.2. Графічна інтерпретація визначника частотної матриці

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Шрина стержня, [м] (додаток D):	$h := 0.045$
Товщина стержня, [м] (додаток D):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток D):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток D):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток D):	$m_{\text{пм}} := h \cdot bn \cdot \rho = 2.028$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток D):	$J := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 7.092 \times 10^{-10}$

Прийнявши перше наближення  $\xi_L := 2.7$ , визначник буде рівний нулю при (рис. F.2):

$$\xi_L := \text{root}(\Delta(\xi_L), \xi_L) = 2.7472 \quad (\text{F.3})$$

Колова частота власних коливань стержня, [рад/с]:

$$\omega := \xi_L^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{m_{\text{пм}} \cdot L^4}} = 93.867 \quad (\text{F.4})$$

Підставивши вирази моменту інерції та погонного метра та скоротивши його, отримаємо, [рад/с]:

$$\omega := \frac{\xi_L^2 \cdot bn \cdot \sqrt{3 \cdot E \cdot \rho}}{6 \cdot \rho \cdot L^2} = 93.867 \quad (\text{F.5})$$

Отриманий вираз демонструє те, що ми нехтуємо шириною стержня при встановленні його власної частоти коливань.

Циклічна частота власних коливань стержня, [Гц]:

$$\nu := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 14.939 \quad (\text{F.6})$$

Кількість обертів, [об/хв]:

$$n := \nu \cdot 60 = 896.369 \quad (\text{F.7})$$

## Додаток G

## Математична модель вимушених коливань континуальної ділянки

Вимушені коливання континуальні ділянки здійснюємо аналогічно розрахунку за смехою, що наведена на рис. F.1 додатку F. Знайдемо постійні A, B, й реакції в опорах  $R_1$  та  $R_2$  (рис. G.1).

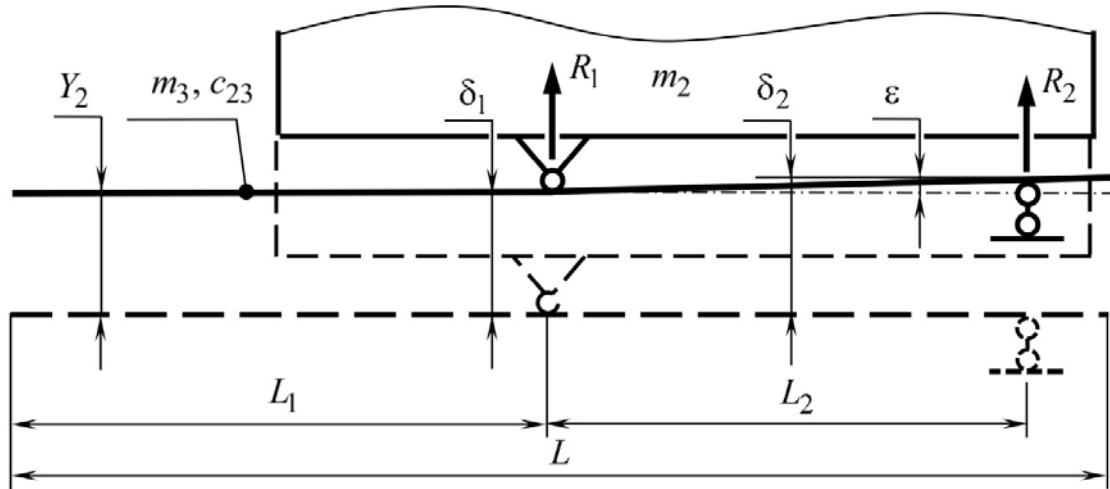


Рис. G.1. Схема руху проміжної маси з континуальною ділянкою

Зміщення на ділянці стержня  $L_1$ :

$$\delta_1 := Y_2$$

Зміщення на ділянці стержня  $L_1+L_2$ :

$$\delta_2 := Y_2 + \epsilon$$

З системи чотирьох рівнянь вимушених коливань стержня знаходимо аналітичні вирази для чотирьох невідомих A, B,  $R_1$ ,  $R_2$ :

Given

$$A \cdot U_1(\omega) + B \cdot V_1(\omega) + \frac{R_1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T_2(\omega) + \frac{R_2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T_3(\omega) = 0$$

$$A \cdot T_1(\omega) + B \cdot U_1(\omega) + \frac{R_1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S_2(\omega) + \frac{R_2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S_3(\omega) = 0$$

(G.1)

$$A \cdot S_4(\omega) + B \cdot T_4(\omega) = \delta_1$$

$$A \cdot S_5(\omega) + B \cdot T_5(\omega) + \frac{R_1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot V_5(\omega) = \delta_2$$

Find(A, B, R1, R2) → ■

$$A := \frac{(S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot [(\epsilon + Y2) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \dots + Y2 \cdot (S3(\omega) \cdot V1(\omega) - T3(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 (G.2)

$$B := \frac{[(Y2 + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots + Y2 \cdot (S3(\omega) \cdot U1(\omega) - T1(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 (G.3)

$$R1 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot [(Y2 + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -[(Y2 + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot T3(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} [(Y2 + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot V1(\omega) \dots \\ + -[(Y2 + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \cdot U1(\omega) \end{array} \right] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 (G.4)

$$R2 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} Y2 \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega)^2 - Y2 \cdot S5(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + Y2 \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) + [(\epsilon \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) - Y2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot U1(\omega))] \dots \\ + Y2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot V1(\omega) + (Y2 + \epsilon) \cdot S4(\omega) \cdot (T2(\omega) \cdot U1(\omega) - S2(\omega) \cdot V1(\omega)) \dots \\ + T1(\omega) \cdot [-T2(\omega) \cdot [(Y2 + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] - Y2 \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega)] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 (G.5)

Для знаходження амплітудних значень активної та проміжної мас достатньо використати математичну модель механічної коливальної системи, яка прийме наступний вигляд:

Given

$$-m1 \cdot Y1 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (Y1 - Y2) = 0$$
 (G.6)

$$-m2 \cdot Y2 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (Y2 - Y1) = R2 + R1$$

Find(Y1, Y2) → ■



Амплітудні значення активної маси:

$$\begin{aligned}
 & T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
 & + -S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \\
 Y1 := & \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \epsilon \cdot c12 \cdot \frac{\dots}{\dots} \tag{G.7} \\
 & (-m2) \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$

Амплітудні значення проміжної маси:

$$\begin{aligned}
 Y_2 := & \left(-\xi(\omega)^3\right) \cdot E \cdot J \cdot \epsilon \cdot \frac{
 \begin{aligned}
 & T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) - S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \dots \\
 & + S_4(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) + T_2(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \dots \\
 & + -T_2(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) - V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \dots \\
 & + -S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) + U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \dots
 \end{aligned}
 }{
 \begin{aligned}
 & (-m_2) \cdot \omega^2 \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + -c_{12} \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -c_{12} \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^2 \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega)^2 \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_4(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_4(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot c_{12} \dots
 \end{aligned}
 }{
 \left(m_1 \cdot \omega^2 - c_{12}\right)
 } \quad (G.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг] (додаток С):	$m1 := 83.7$
Проміжна маса, [кг] (додаток С):	$m2 := 62.1$
Кількість обертів, [об/хв] (додаток С):	$n := 950$
Циклічна частота вимушених коливань, [Гц] (додаток С):	$\nu := \frac{n}{60} = 15.833$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot \nu = 99.484$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну з проміжною масами, [Н/м] (додаток С):	$c12 := 3.75978 \times 10^5$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$L_{\text{ww}} := L1 + L2 + L3 = 0.8301$

Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.045$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток F):	$m_{\text{пм}} := h \cdot bn \cdot \rho$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$J_w := \frac{h \cdot bn^3}{12}$

Використавши функції Крилова (додатку F) та записавши їх як функцію від колової частоти, отримаємо наступні вирази:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{m_{\text{пм}} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) - \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) + \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$\underline{U1}(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \cos(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma) - \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma))$$

Амплітуда коливань активної маси для забезпечення перевантаження  $\zeta=2,5$ , на частоті вимушених коливань рівна (додаток В):

$$Y1 := 2.477 \cdot 10^{-3} \quad [\text{М}]$$

Ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму, використовуючи вираз G.7:

$$\varepsilon := \frac{Y1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \cdot \frac{T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots + -S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega)}{(-m2) \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots}} = 2.372 \times 10^{-3} \quad [\text{М}] \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned}
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$

Побудуємо амплітудно-частотну характеристику коливань дискретно-континуальної системи (рис. G.2):

$$\omega := 0, 0.1 \dots 120$$

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{m_{\text{пнм}} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) - \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) + \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \cos(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma) - \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma))$$



$$\begin{aligned}
& T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
& + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
& + -S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \\
\text{Y1}(\omega) := & \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot c12 \cdot \frac{
\begin{aligned}
& (-m2) \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + (-\xi(\omega))^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots
\end{aligned}
}{
}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-\xi(\omega))^5 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
& + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\
& + -T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
& + -S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
Y2(\omega) := & \left(-\xi(\omega)^3\right) \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\dots}{(m1 \cdot \omega^2 - c12)} \\
& (-m2) \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$

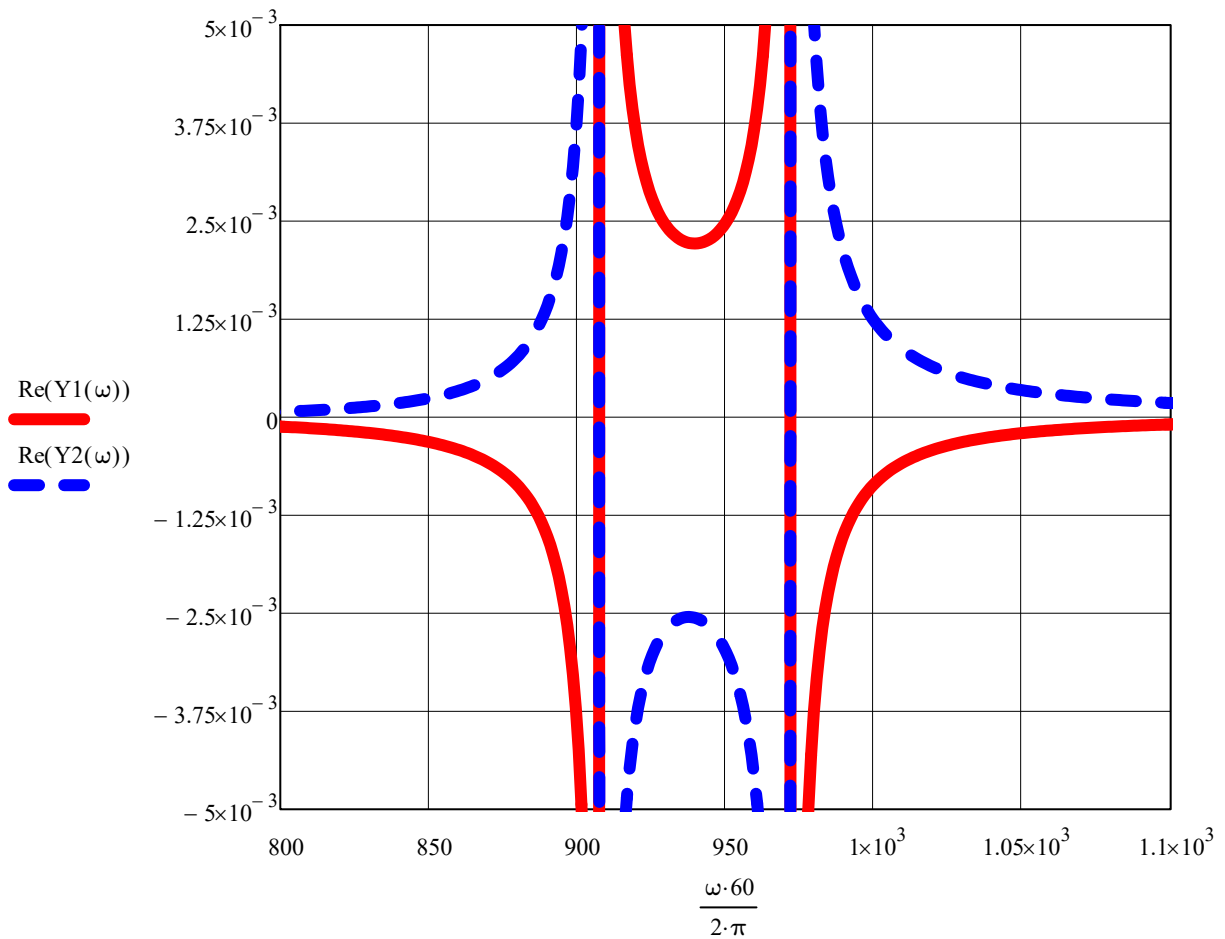


Рис. G.2. Амплітудно-частотна характеристика коливань дискретно-континуальної системи

Амплітуди коливань активної та проміжної мас.

Повтороно задамося коловою частотою вимушених коливань:

$$\omega := 99.484 \quad [\text{рад/с}]$$

Тож амплітуди коливань активної та проміжної мас відповідно становитимуть:

$$Y1(\omega) = 2.477 \times 10^{-3} \quad [\text{м}]$$

$$Y2(\omega) = -2.981 \times 10^{-3} \quad [\text{м}] \tag{G.10}$$

Перепозначимо амплітуду коливань проміжної маси:  $\overset{\text{www}}{Y2} := Y2(\omega)$

Використовуючи вирази G.1-G.4 встановимо чотири невідомі A, B, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>:

$$\overset{\text{www}}{A} := \frac{(S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot [(\epsilon + Y2) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \dots + Y2 \cdot (S3(\omega) \cdot V1(\omega) - T3(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

$$B := \frac{[(Y2 + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots + Y2 \cdot (S3(\omega) \cdot U1(\omega) - T1(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

$$R1 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot [(Y2 + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -[(Y2 + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot T3(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} [(Y2 + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2 \cdot S5(\omega)] \cdot V1(\omega) \dots \\ + -[(Y2 + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \cdot U1(\omega) \end{array} \right] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 [H]

$$R2 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} Y2 \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega)^2 - Y2 \cdot S5(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + Y2 \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) + \left( \begin{array}{l} \varepsilon \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + -Y2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot U1(\omega) \end{array} \right) \dots \\ + Y2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\ + (Y2 + \varepsilon) \cdot S4(\omega) \cdot (T2(\omega) \cdot U1(\omega) - S2(\omega) \cdot V1(\omega)) \dots \\ + T1(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} -T2(\omega) \cdot [(Y2 + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2 \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -Y2 \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$
 [H]

Математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної механічної коливальної системи в амплітудних значеннях з двома континуальними ділянками набуває вигляд:

Given

$$-m1 \cdot Y1 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (Y1 - Y2) = 0$$

$$-m2 \cdot Y2 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (Y2 - Y1) = 2 \cdot R2 + 2 \cdot R1$$

(G.11)

Find(Y1, Y2) → ■

Амплітудні значення активної маси:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y1} := & (-2) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot c12 \cdot \\
 & T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + -V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
 & + -S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 & 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + -c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots
 \end{aligned}
 \tag{G.12}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12
\end{aligned}$$



Амплітудні значення проміжної маси:

$$\begin{aligned}
 \underset{\text{www}}{Y_2} := & (-2) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot \frac{T_2(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) + S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \dots \\
 & + -U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) - T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \dots \\
 & + U_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot T_3(\omega) - S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \dots \\
 & + V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot S_2(\omega) - T_2(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot U_1(\omega)}{(m_1 \cdot \omega^2 - c_{12})} \quad (G.13) \\
 & 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^2 \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -c_{12} \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + c_{12} \cdot S_2(\omega) \cdot T_5(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^2 \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^2 \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + c_{12} \cdot S_3(\omega) \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -c_{12} \cdot S_3(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^4 \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^2 \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + c_{12} \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^4 \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^2 \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + c_{12} \cdot T_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -m_2 \cdot \omega^2 \cdot U_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -c_{12} \cdot U_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m_2 \cdot \omega^4 \cdot U_1(\omega) \cdot S_4(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_4(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot S_3(\omega) \cdot V_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot T_3(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T_2(\omega) \cdot S_5(\omega) \cdot U_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V_1(\omega) \cdot V_5(\omega) \cdot T_1(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega)^2 \cdot V_5(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega)^2 \cdot V_5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot c_{12} \dots \\
 & + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U_1(\omega) \cdot T_4(\omega) \cdot S_2(\omega) \cdot m_1 \cdot \omega^2 \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

Введемо в систему з двома континуальними ділянками стержень з товщиною відповідно в два рази меншою від системи з однією континуальною ділянкою.

Шрина стержня, [м]:

$$h := 0.0225$$

Площа поперечного перерізу стержня, [м<sup>2</sup>]:

$$F_n := b_n \cdot h$$

Погонна маса стержня, [кг/м]:

$$m_{ppm} := h \cdot b_n \cdot \rho$$

Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м<sup>4</sup>]:

$$J := \frac{h \cdot b_n^3}{12}$$

Прийемо як і вище амплітуду коливань активної маси на частоті вимушених коливань рівною:

$$Y_1 := 2.477 \cdot 10^{-3} \quad [\text{м}]$$

Тоді ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму згідно виразу G.9:

$$\varepsilon := \frac{Y_1}{(-2) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c_{12}} = 2.372 \times 10^{-3} \quad [\text{м}] \quad (\text{G.14})$$

$$\begin{aligned} & T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\ & + T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\ & + -V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\ & + -S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) + S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\ & 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + c_{12} \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + -c_{12} \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + -c_{12} \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + c_{12} \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + -c_{12} \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + c_{12} \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c_{12} \dots \\ & + c_{12} \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c_{12} \dots \end{aligned}$$



Побудуємо амплітудно-частотну характеристику коливань дискретно-континуальної системи з двома континуальними ділянками:

$$\omega := 0, 0.1 \dots 15000$$

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{m_{\text{пм}} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) - \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) + \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \cos(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma) - \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma))$$

$$\begin{aligned}
& T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \dots \\
& + -T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) - T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \\
\text{Y1}(\omega) := & \frac{2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot c12 \cdot}{\dots} \\
& 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
& + -U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) - T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
& + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) - T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\
\text{Y2}(\omega) := & (-2) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon \cdot \frac{\dots}{2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots} \cdot (m1 \cdot \omega^2 - c12) \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + -2 \cdot \xi(\omega)^2 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot [(\varepsilon + Y2(\omega)) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots \\
& + Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot V1(\omega) - T3(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \\
\mathbb{A}(\omega) := & \frac{\dots}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots} \\
& + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
& + Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot U1(\omega) - T1(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot V5(\omega) \\
\mathbb{B}(\omega) := & \frac{\dots}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots} \\
& + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Прогин лівої ділянки:

$$x1 := 0$$

$$SS(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x1) + \cos(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$TT(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x1) + \sin(\xi(\omega) \cdot x1))$$

Рівняння прогину лівої ділянки:

$$w1(\omega) := A(\omega) \cdot SS(\omega) + B(\omega) \cdot TT(\omega)$$

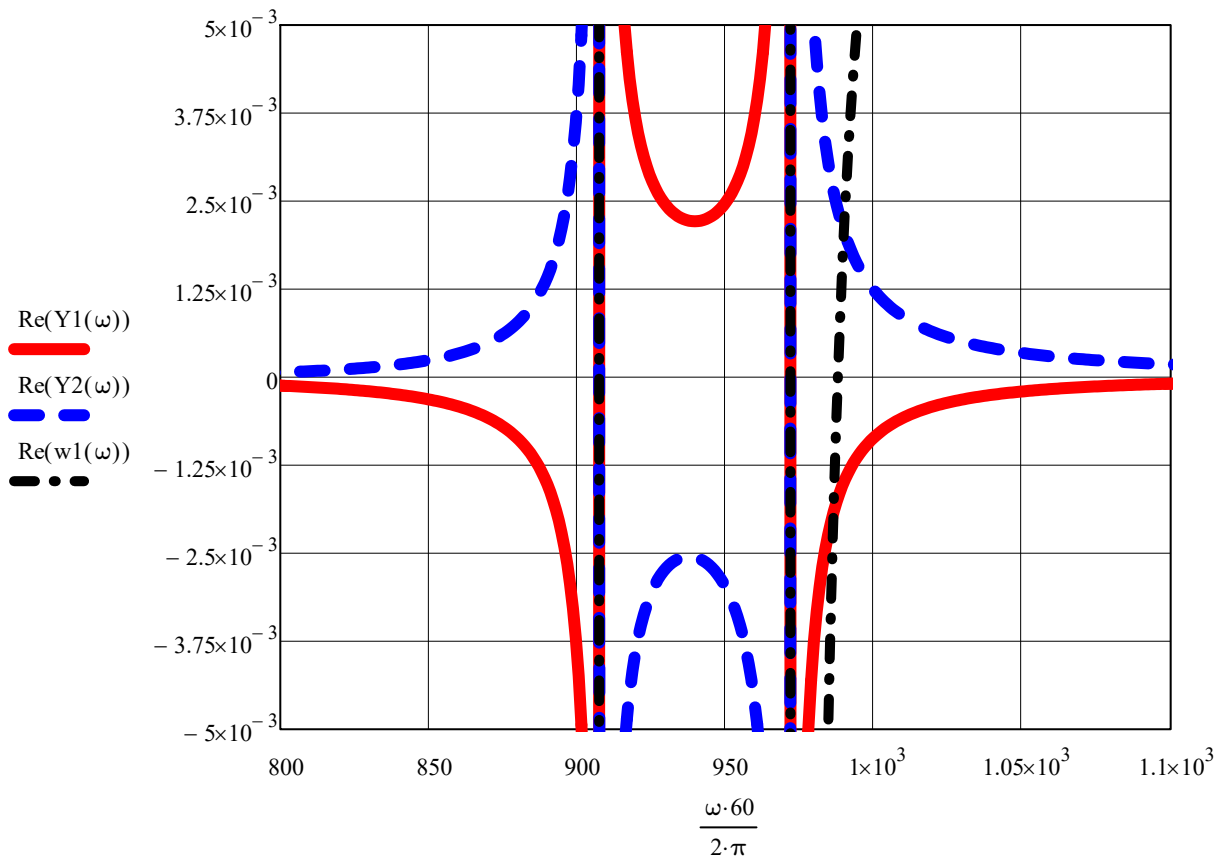


Рис. G.3. Амплітудно-частотна характеристика коливань дискретно-континуальної системи з двома континуальними ділянками

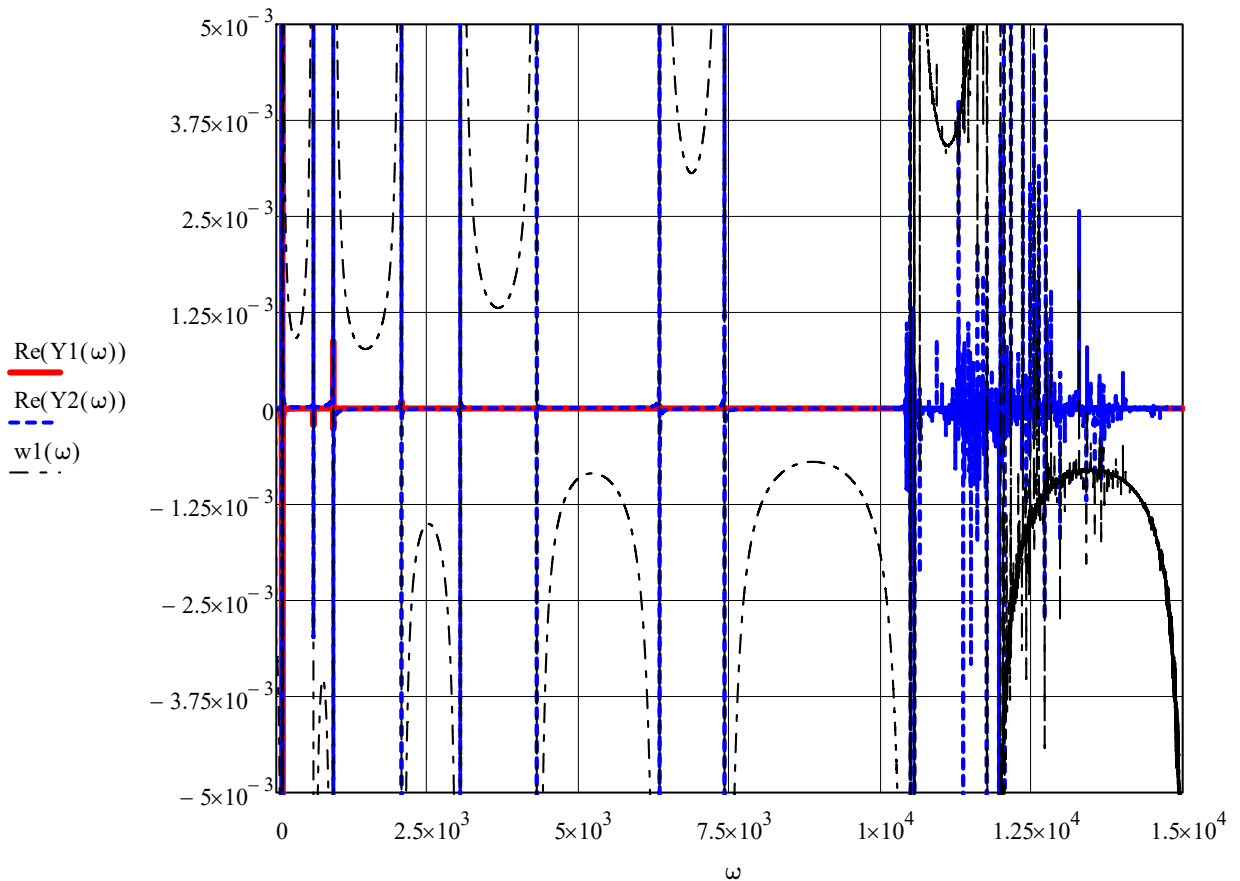


Рис. G.4. Полічастотний відгук гібридної системи від впливу континуальної ділянки

Амплітуди коливань активної та проміжної мас.

Повтороно задамося коловою частотою вимушених коливань:

$$\omega := 99.48377 \quad [\text{рад/с}]$$

Тож амплітуди коливань активної та проміжної мас відповідно становитимуть:

$$\begin{aligned} Y1(\omega) &= 2.477 \times 10^{-3} \quad [\text{М}] \\ Y2(\omega) &= -2.98 \times 10^{-3} \quad [\text{М}] \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Використовуючи вирази G.1-G.4 встановимо чотири невідомі A, B, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>:

$$A := \frac{(S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot [(\epsilon + Y2(\omega)) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots + Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot V1(\omega) - T3(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

$$B := \frac{[(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots + Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot U1(\omega) - T1(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot V5(\omega)}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

$$R1 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot [(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -[(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot T3(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + S3(\omega) \cdot [(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot V1(\omega) \dots \\ + -[(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \cdot U1(\omega) \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

$$R2 := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} Y2(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega)^2 - Y2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) + \left( \begin{array}{l} \epsilon \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + -Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot U1(\omega) \end{array} \right) \dots \\ + Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\ + (Y2(\omega) + \epsilon) \cdot S4(\omega) \cdot (T2(\omega) \cdot U1(\omega) - S2(\omega) \cdot V1(\omega)) \dots \\ + T1(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} -T2(\omega) \cdot [(Y2(\omega) + \epsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -Y2(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}$$

**Додаток Н**  
**Прогин континуальної ділянки на частоті вимушених коливань**

Вихідні числові значення параметрів для однієї континуальної ділянки приймаємо наступні:

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$L := L1 + L2 + L3 = 0.8301$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.045$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$J := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 7.092 \times 10^{-10}$
Постійні, [-] (додаток G.1):	$A := 0.0645999$ $B := -0.0503308$
Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R1 := -480.8790847$
Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R2 := 260.8118096$

$$\xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{h \cdot bn \cdot \rho \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

*Прогин лівої ділянки:*

$$x1 := 0, 0.001 .. 0.475$$

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x1) + \cos(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x1) + \sin(\xi(\omega) \cdot x1))$$

Рівняння прогину лівої ділянки:

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1) \tag{H.1}$$

*Прогин середньої ділянки:*

$$x2 := 0.475, 0.4751 .. 0.83$$

$$\underline{SS}(x_2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x_2) + \cos(\xi(\omega) \cdot x_2))$$

$$\underline{TT}(x_2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x_2) + \sin(\xi(\omega) \cdot x_2))$$

$$\underline{VV}(x_2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x_2 - L_1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x_2 - L_1)]]$$

Рівняння прогину середньої ділянки:

$$w_2(x_2) := A \cdot \underline{SS}(x_2) + B \cdot \underline{TT}(x_2) + \frac{R_1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot \underline{VV}(x_2) \quad (\text{H.2})$$

Прогин правої ділянки:

$$x_3 := 0.83, 0.83001 \dots 0.8301$$

$$\underline{SS}(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x_3) + \cos(\xi(\omega) \cdot x_3))$$

$$\underline{TT}(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x_3) + \sin(\xi(\omega) \cdot x_3))$$

$$\underline{VV}(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x_3 - L_1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x_3 - L_1)]]$$

$$\underline{VV}_2(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x_3 - L_1 - L_2)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x_3 - L_1 - L_2)]]$$

Рівняння прогину правої ділянки:

$$w_3(x_3) := A \cdot \underline{SS}(x_3) + B \cdot \underline{TT}(x_3) + \frac{R_1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot \underline{VV}(x_3) + \frac{R_2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot \underline{VV}_2(x_3) \quad (\text{H.3})$$

Використовуючи вирази Н.1, Н.2 та Н.3, прогин стержня набуде вигляду як на рис. Н.1

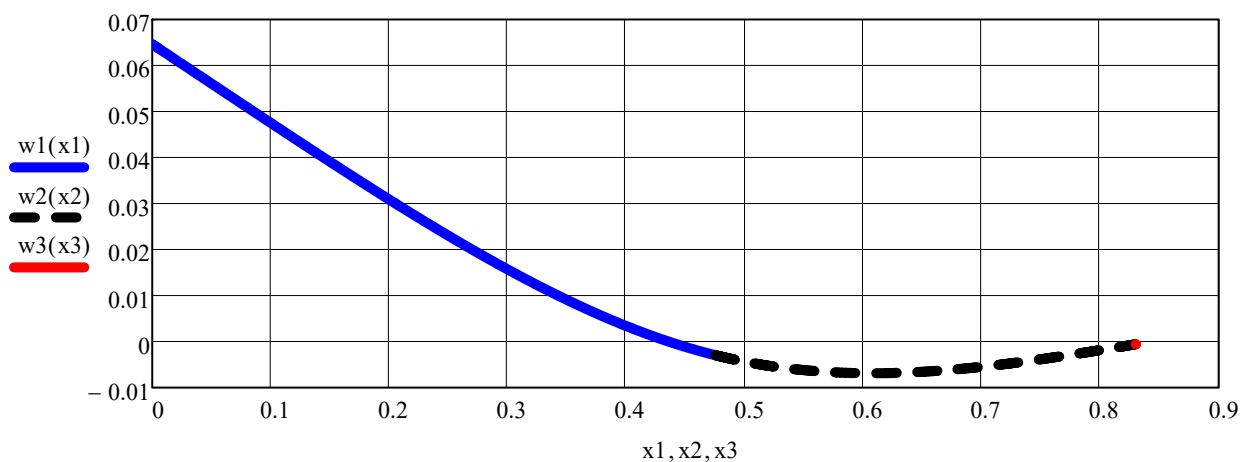


Рис. Н.1. Схема прогинів однієї континуальної ділянки

Максимальний прогин в лівому кінці стержня, коли  $x_1 := 0$ , рівний:

$$w_1(x_1) = 0.065 \quad (\text{H.4})$$

Вихідні числові значення параметрів для двох континуальних ділянок приймаємо наступні:

Шрина стержня, [м] (додаток G.1):

$$\underline{h} := 0.0225$$

Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м<sup>4</sup>] (додаток G.1):

$$\underline{J} := \frac{h \cdot b n^3}{12} = 3.546 \times 10^{-10}$$

Постійні, [-] (додаток G.1):

$$\underline{A} := 0.0645972$$

$$\underline{B} := -0.0503285$$

Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):

$$\underline{R1} := -240.4293893$$

Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):

$$\underline{R2} := 130.3996648$$

$$\underline{\xi}(\omega) := \sqrt[4]{\frac{h \cdot b n \cdot \rho \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

Прогин лівої ділянки:

$$\underline{x1} := 0, 0.001 .. 0.475$$

$$\underline{SS}(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x1) + \cos(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$\underline{TT}(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x1) + \sin(\xi(\omega) \cdot x1))$$

Рівняння прогину лівої ділянки:

$$\underline{w1}(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

Прогин середньої ділянки:

$$\underline{x2} := 0.475, 0.4751 .. 0.83$$

$$\underline{SS}(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x2) + \cos(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$\underline{TT}(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x2) + \sin(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$\underline{VV}(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)]]$$

Рівняння прогину середньої ділянки:

$$\underline{w2}(x2) := A \cdot SS(x2) + B \cdot TT(x2) + \frac{R1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2)$$

Прогин правої ділянки:

$$\underline{x3} := 0.83, 0.83001 .. 0.8301$$

$$\underline{SS}(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x3) + \cos(\xi(\omega) \cdot x3))$$

$$\underline{TT}(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x3) + \sin(\xi(\omega) \cdot x3))$$

$$VV(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1)]]$$

$$VV2(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1 - L2)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1 - L2)]]$$

Рівняння прогину правої ділянки:

$$w3(x3) := A \cdot SS(x3) + B \cdot TT(x3) + \frac{R1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x3) + \frac{R2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x3)$$

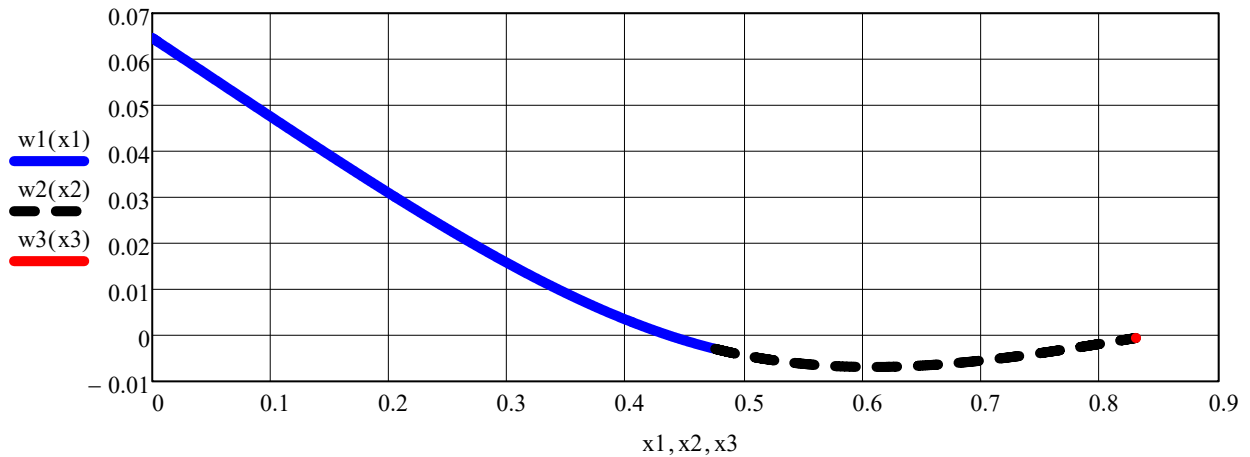


Рис. Н.1.2. Схема прогинів для двох континуальних ділянок

Максимальний прогин в лівому кінці стержня, коли  $x1 := 0$ , рівний:

$$w1(x1) = 0.065 \quad (H.5)$$

Зміщення лівої опори:

$$\begin{aligned} x1 &:= 0.475 \\ w1(x1) &= -2.98 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (H.6)$$

Зміщення правої опори:

$$\begin{aligned} x2 &:= 0.83 \\ w2(x2) &= -6.077 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (H.7)$$

### **Прогин континуальної ділянки залежно від частоти їзбурення**

*Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:*

Активна маса, [кг] (додаток С):

$$m1 := 83.7$$

Проміжна маса, [кг] (додаток С):

$$m2 := 62.1$$

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):

$$\omega := 99.4838$$

Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну з проміжною масами, [Н/м] (додаток С):

$$c12 := 3.75978 \times 10^5$$

Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):

$$L1 := 0.475$$

Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$L := L1 + L2 + L3$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.0225$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$J := \frac{h \cdot bn^3}{12}$
Ексцентриситет, [м] (додаток G.1):	$\varepsilon := 2.372 \times 10^{-3}$

$$\omega := 0 .. 1000$$

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{h \cdot bn \cdot \rho \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) - \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) + \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \cos(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma) - \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma))$$



$$\begin{aligned}
& T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
& + -U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) - T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
& + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \dots \\
Y2(\omega) := & -2 \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot \epsilon \cdot \frac{+ V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) - T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega)}{(m1 \cdot \omega^2 - c12)} \dots \\
& 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega)^2 \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T2(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ -m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
 &+ -c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(\omega) := & \frac{(S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot [(\varepsilon + Y2(\omega)) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots}{+ Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot V1(\omega) - T3(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega)} \\
 & \frac{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots}{+ S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(\omega) := & \frac{[(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot (S3(\omega) \cdot T2(\omega) - S2(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots}{+ Y2(\omega) \cdot (S3(\omega) \cdot U1(\omega) - T1(\omega) \cdot T3(\omega)) \cdot V5(\omega)} \\
 & \frac{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots}{+ S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R1(\omega) := & \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} T1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot [(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots \\ + -[(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot T3(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} [(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot S4(\omega) - Y2(\omega) \cdot S5(\omega)] \cdot V1(\omega) \dots \\ + -[(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \cdot U1(\omega) \end{array} \right] \end{array} \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots} \\
 & \frac{+ S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}{+ S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]}
 \end{aligned}$$

$$R2(\omega) := \frac{E \cdot J \cdot \xi(\omega)^3 \cdot \left[ \begin{array}{l} Y2(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega)^2 - Y2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ + Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) + \left( \varepsilon \cdot S2(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \right. \\ \left. + -Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot U1(\omega) \right) \dots \\ + Y2(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\ + (Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot S4(\omega) \cdot (T2(\omega) \cdot U1(\omega) - S2(\omega) \cdot V1(\omega)) \dots \\ + T1(\omega) \cdot \left[ -T2(\omega) \cdot [(Y2(\omega) + \varepsilon) \cdot T4(\omega) - Y2(\omega) \cdot T5(\omega)] \dots \right] \\ \left. + -Y2(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega) \right]}{T3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} S2(\omega) \cdot (S4(\omega) \cdot T5(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\ + (T1(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right] \dots} \\ + S3(\omega) \cdot \left[ \begin{array}{l} T2(\omega) \cdot (S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S4(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\ + (S4(\omega) \cdot V1(\omega) - T4(\omega) \cdot U1(\omega)) \cdot V5(\omega) \end{array} \right]$$

Прогин лівої ділянки:

$$x1 := 0, 0.001 \dots 0.475$$

$$SS(x1, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x1) + \cos(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$TT(x1, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x1) + \sin(\xi(\omega) \cdot x1))$$

Рівняння прогину лівої ділянки:

$$w1(x1, \omega) := A(\omega) \cdot SS(x1, \omega) + B(\omega) \cdot TT(x1, \omega) \quad (H.8)$$

Прогин середньої ділянки:

$$x2 := 0.475, 0.4751 \dots 0.83$$

$$SS(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x2) + \cos(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$TT(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x2) + \sin(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$VV(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)]]$$

Рівняння прогину середньої ділянки:

$$w2(x2, \omega) := A(\omega) \cdot SS(x2, \omega) + B(\omega) \cdot TT(x2, \omega) + \frac{R1(\omega)}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2, \omega) \quad (H.9)$$

Прогин правої ділянки:

$$x3 := 0.83, 0.83001 \dots 0.8301$$

$$SS(x3, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x3) + \cos(\xi(\omega) \cdot x3))$$

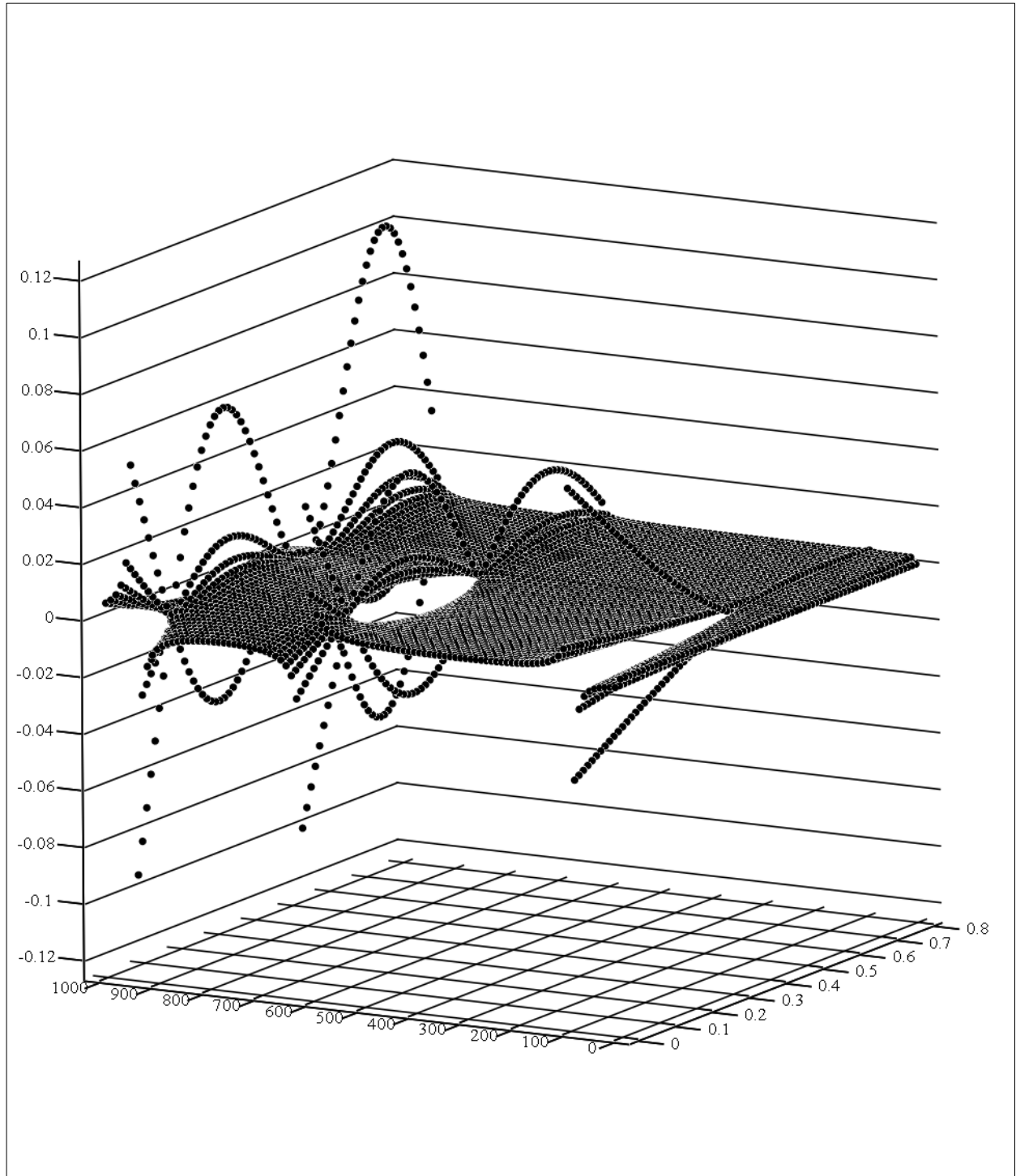
$$TT(x3, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x3) + \sin(\xi(\omega) \cdot x3))$$

$$VV(x3, \omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1)]]$$

$$VV2(x3, \omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1 - L2)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x3 - L1 - L2)]]$$

Рівняння прогину правої ділянки:

$$w3(x3, \omega) := A(\omega) \cdot SS(x3, \omega) + B(\omega) \cdot TT(x3, \omega) + \frac{R1(\omega)}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x3, \omega) + \frac{R2(\omega)}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x3, \omega) \quad (H.10)$$



w1, w2

Рис. Н.3. Прогин континуальної ділянки на широкому діапазоні частот

## Додаток І

**Напруження, що виникають у континуальній ділянці на частоті вимушених коливань**

Запишемо рівняння напружень на окремих ділянках.

Напруження лівої ділянки визначаються за наступними виразами:

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

Прогин лівої ділянки (Н.1):

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

$$\frac{d^2}{dx1^2} w1(x1) \rightarrow -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x1)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x1)}{2} \right)$$

Напруження лівої ділянки:

$$\sigma1(x1) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x1)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x1)}{2} \right) \right] \quad (I.1)$$

Напруження середньої ділянки визначаються за наступними виразами:

$$SS(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$TT(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

Прогин середньої ділянки (Н.2):

$$w2(x2) := A \cdot SS(x2) + B \cdot TT(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2)$$

$$\frac{d^2}{dx2^2} w2(x2) \rightarrow -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x2)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x2)}{2} \right) \dots$$

$$+ \frac{R1}{E \cdot J \cdot \xi^3} \cdot \left[ \frac{\xi^2 \cdot \sin[\xi \cdot (L1 - x2)]}{2} + \frac{\xi^2 \cdot \sinh[\xi \cdot (L1 - x2)]}{2} \right]$$

Напруження середньої ділянки:

$$\sigma_2(x_2) := \frac{E \cdot b n}{2} \cdot \left[ -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x_2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x_2)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x_2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x_2)}{2} \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{R1 \cdot \left[ \frac{\xi^2 \cdot \sin[\xi \cdot (L1 - x_2)]}{2} + \frac{\xi^2 \cdot \sinh[\xi \cdot (L1 - x_2)]}{2} \right]}{E \cdot J \cdot \xi^3} \right] \quad (I.2)$$

Напруження правої ділянки визначаються за наступними виразами:

$$SS(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x_3) + \cos(\xi \cdot x_3))$$

$$TT(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x_3) + \sin(\xi \cdot x_3))$$

$$VV(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x_3 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x_3 - L1)]]$$

$$VV2(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] - \sin[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)]]$$

Прогин правої ділянки (H.3):

$$w_3(x_3) := A \cdot SS(x_3) + B \cdot TT(x_3) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x_3) + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x_3)$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2} w_3(x_3) \rightarrow A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \dots \\ + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 \right]$$

Напруження правої ділянки:

$$\sigma_3(x_3) := \frac{E \cdot b n}{2} \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \dots \\ \left. + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 \right] \right] \quad (I.3)$$

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$\underline{L} := L1 + L2 + L3 = 0.8301$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.0225$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$\underline{J} := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 3.546 \times 10^{-10}$
Постійні, [-] (додаток G.1):	$\underline{A} := 0.0645972$ $B := -0.0503285$
Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R1 := -240.4293893$
Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R2 := 130.3996648$

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{h \cdot bn \cdot \rho \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

Напруження лівої ділянки (I.1):

$$x1 := 0, 0.001 .. 0.475$$

$$\sigma_1(x1) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x1)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x1)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x1)}{2} \right) \right]$$

Напруження середньої ділянки (I.2):

$$x2 := 0.475, 0.4751 .. 0.83$$

$$\sigma_2(x2) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ -A \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \cos(\xi \cdot x2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \cosh(\xi \cdot x2)}{2} \right) - B \cdot \left( \frac{\xi^2 \cdot \sin(\xi \cdot x2)}{2} - \frac{\xi^2 \cdot \sinh(\xi \cdot x2)}{2} \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{R1 \cdot \left[ \frac{\xi^2 \cdot \sin[\xi \cdot (L1 - x2)]}{2} + \frac{\xi^2 \cdot \sinh[\xi \cdot (L1 - x2)]}{2} \right]}{E \cdot J \cdot \xi^3} \right]$$

Напруження правої ділянки (І.3):

$$x_3 := 0.83, 0.83001 \dots 0.8301$$

$$\sigma_3(x_3) := \frac{E \cdot b n}{2} \cdot \left[ \begin{aligned} & A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ & + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x_3) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ & + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \dots \\ & + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_3 - L1 - L2)] \cdot \xi^2 \right] \end{aligned} \right]$$

Використовуючи вирази І.1, І.2 та І.3, еюра напружень в стержні набуде вигляду як на рис. І.1

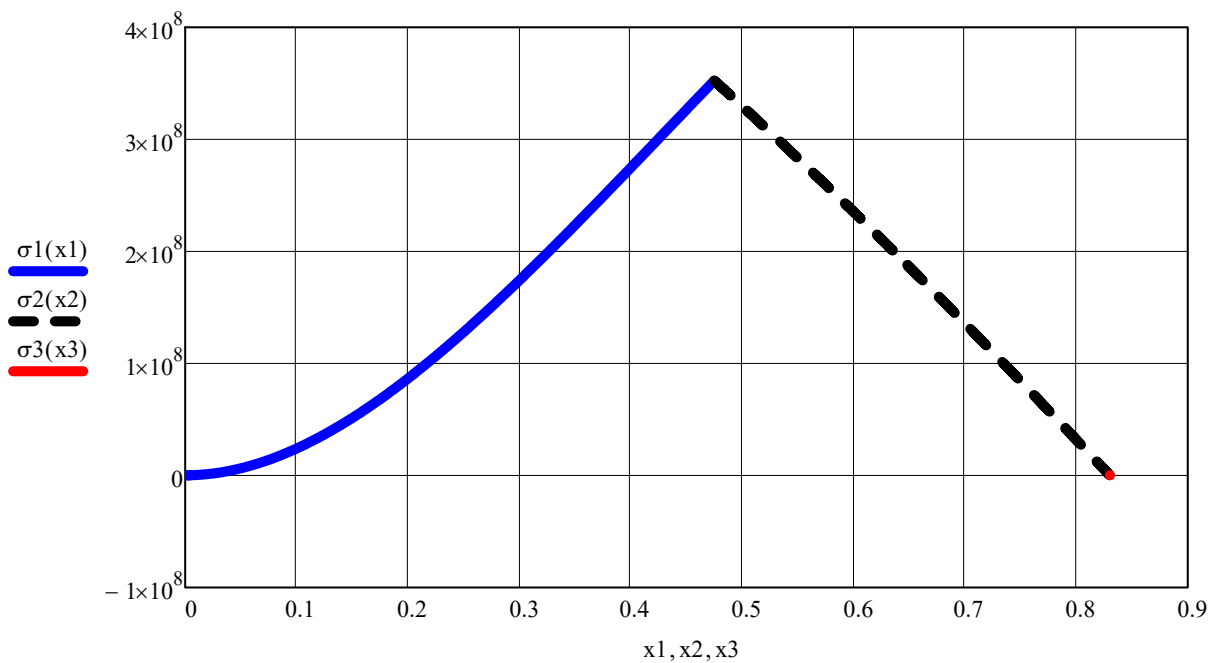


Рис. І.1. Еюра напружень в стержні

Максимальне поперечне напруження стержня є в місці кріплення першої опори (рис. І.1).  
Встановимо його значення:

$$x_1 := 0.475 \quad [\text{М}]$$

$$\sigma_1(x_1) = 3.523 \times 10^8 \quad [\text{Па}] \quad (\text{I.4})$$



## Додаток J

## Встановлення власної частоти коливань континуальної ділянки з використанням наближеного методу Релея-Рітца

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$\underline{L} := L1 + L2 + L3 = 0.8301$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.0225$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток F):	$m_{пм} := h \cdot bn \cdot \rho = 1.014$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$\underline{J} := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 3.546 \times 10^{-10}$
Постійні, [-] (додаток G.1):	$\underline{A} := 0.0645972$ $B := -0.0503285$
Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R1 := -240.4293893$
Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R2 := 130.3996648$
Коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу, [-]:	$ky := 1.2$
Площа поперечного перерізу стержня, [м <sup>2</sup> ]:	$F_n := bn \cdot h = 1.291 \times 10^{-4}$
Модуль пружності II-го роду, [Па]:	$\underline{G} := 8.1 \cdot 10^{10}$

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{m_{пм} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

Рівняння прогинів на окремих ділянках, згідно з додатком Н.  
Прогин лівої ділянки (Н.1):

$$SS(x_1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x_1) + \cos(\xi \cdot x_1))$$

$$TT(x_1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x_1) + \sin(\xi \cdot x_1))$$

$$w_1(x_1) := A \cdot SS(x_1) + B \cdot TT(x_1)$$

Прогин середньої ділянки (H.2):

$$SS(x_2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x_2) + \cos(\xi \cdot x_2))$$

$$TT(x_2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x_2) + \sin(\xi \cdot x_2))$$

$$VV(x_2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x_2 - L_1)] - \sin[\xi \cdot (x_2 - L_1)]]$$

$$w_2(x_2) := A \cdot SS(x_2) + B \cdot TT(x_2) + \frac{R_1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x_2)$$

Прогин правої ділянки (H.3):

$$SS(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x_3) + \cos(\xi \cdot x_3))$$

$$TT(x_3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x_3) + \sin(\xi \cdot x_3))$$

$$VV(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x_3 - L_1)] - \sin[\xi \cdot (x_3 - L_1)]]$$

$$VV_2(x_3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x_3 - L_1 - L_2)] - \sin[\xi \cdot (x_3 - L_1 - L_2)]]$$

$$w_3(x_3) := A \cdot SS(x_3) + B \cdot TT(x_3) + \frac{R_1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x_3) + \frac{R_2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV_2(x_3)$$

***Кінетична енергія від лінійного переміщення стержня поділена на квадрат колової частоти***

*Кінетична енергія від лінійного переміщення лівої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{en1\omega} := \text{мм} \cdot \int_0^{L_1} w_1(x_1)^2 dx_1 = 5.438 \times 10^{-4} \quad (J.1)$$

*Кінетична енергія від лінійного переміщення середньої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{cn2\omega} := m_{пм} \cdot \int_{L_1}^{L_1+L_2} w_2(x_2)^2 dx_2 = 1.001 \times 10^{-5} \quad (J.2)$$

*Кінетична енергія від лінійного переміщення правої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{cn3\omega} := m_{пм} \cdot \int_{L_1+L_2}^L w_3(x_3)^2 dx_3 = 3.718 \times 10^{-11} \quad (J.3)$$

### **Кінетична енергія від провертання стержня поділена на квадрат колової частоти**

*Кінетична енергія від провертання лівої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{co1\omega} := \int_0^{L_1} \left( \frac{m_{пм}}{3} \cdot x_1^2 \right) \cdot \left( \frac{d}{dx_1} w_1(x_1) \right)^2 dx_1 = 1.694 \times 10^{-4} \quad (J.4)$$

*Кінетична енергія від провертання середньої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{co2\omega} := \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[ \frac{m_{пм}}{3} \cdot [(x_2 - L_1)^2] \right] \cdot \left( \frac{d}{dx_2} w_2(x_2) \right)^2 dx_2 = 6.174 \times 10^{-6} \quad (J.5)$$

*Кінетична енергія від провертання правої ділянки стержня поділена на квадрат колової частоти:*

$$K_{co3\omega} := \int_{L_1+L_2}^L \left[ \frac{m_{пм}}{3} \cdot [x_3 - (L_1 + L_2)]^2 \right] \cdot \left( \frac{d}{dx_3} w_3(x_3) \right)^2 dx_3 \rightarrow 2.0485496212351738503e-16 \quad (J.6)$$

### **Потенціальна енергія від згину стержня**

*Потенціальна енергія від згину лівої ділянки стержня:*

$$P_{cz1} := E \cdot J \cdot \int_0^{L_1} \left[ \frac{d^2}{dx_1^2} (w_1(x_1)) \right]^2 dx_1 = 2.98 \quad (J.7)$$

*Потенціальна енергія від згину середньої ділянки стержня:*

$$\Pi_{cz2} := E \cdot J \cdot \int_{L1}^{L1+L1} \left[ \frac{d^2}{dx2^2}(w2(x2)) \right]^2 dx2 = 3.27 \quad (J.8)$$

Потенціальна енергія від згину правої ділянки стержня:

$$\Pi_{cz3} := E \cdot J \cdot \int_{L1+L2}^L \left[ \frac{d^2}{dx3^2}(w3(x3)) \right]^2 dx3 = 1.298 \times 10^{-13} \quad (J.9)$$

### Потенціальна енергія від зсуву у шарах стержня

Потенціальна енергія від зсуву у шарах лівої ділянки стержня:

$$\Pi_{cd1} := k_y \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot F_n} \cdot \int_0^{L1} \left[ \frac{d^3}{dx1^3}(w1(x1)) \right]^2 dx1 = 5.362 \times 10^{-4} \quad (J.10)$$

Потенціальна енергія від зсуву у шарах середньої ділянки стержня:

$$\Pi_{cd2} := k_y \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot F_n} \cdot \int_{L1}^{L1+L2} \left[ \frac{d^3}{dx2^3}(w2(x2)) \right]^2 dx2 = 6.137 \times 10^{-4} \quad (J.11)$$

Потенціальна енергія від зсуву у шарах правої ділянки стержня:

$$\Pi_{cd3} := k_y \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot F_n} \cdot \int_{L1+L2}^L \left[ \frac{d^3}{dx3^3}(w3(x3)) \right]^2 dx3 \rightarrow 1.9836302561591232995e-17 \quad (J.12)$$

Перша власна колова частота коливань стержня становить, [рад/с]:

$$\omega_v := \sqrt{\frac{\Pi_{cz1} + \Pi_{cz2} + \Pi_{cz3} + \Pi_{cd1} + \Pi_{cd2} + \Pi_{cd3}}{K_{cn1}\omega - K_{cn2}\omega - K_{cn3}\omega + K_{co1}\omega - K_{co2}\omega - K_{co3}\omega}} = 94.697 \quad (J.13)$$

**Додаток К**  
**Встановлення точки зведення інерційно-жорсткісних параметрів**  
**континуальної ділянки**

*Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:*

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 0.0001$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$\underline{L} := L1 + L2 + L3 = 0.8301$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.0225$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 0.00574$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток F):	$m_{пм} := h \cdot bn \cdot \rho = 1.014$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$\underline{J} := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 3.546 \times 10^{-10}$
Постійні, [-] (додаток G.1):	$\underline{A} := 0.0645972$ $B := -0.0503285$
Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R1 := -240.4293893$
Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R2 := 130.3996648$
Коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу, [-] (додаток J):	$k_y := 1.2$
Площа поперечного перерізу стержня, [м <sup>2</sup> ] (додаток J):	$F_n := bn \cdot h = 1.291 \times 10^{-4}$
Модуль пружності II-го роду, [Па] (додаток J):	$\underline{G} := 8.1 \cdot 10^{10}$
$\xi := \sqrt[4]{\frac{m_{пм} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$	

Рівняння прогинів на окремих ділянках, згідно з додатком Н.  
Прогин лівої ділянки (Н.1):

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

Прогин середньої ділянки (Н.2):

$$SS(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$TT(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$w2(x2) := A \cdot SS(x2) + B \cdot TT(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2)$$

Прогин правої ділянки (Н.3):

$$SS(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x3) + \cos(\xi \cdot x3))$$

$$TT(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x3) + \sin(\xi \cdot x3))$$

$$VV(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x3 - L1)]]$$

$$VV2(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - L1 - L2)] - \sin[\xi \cdot (x3 - L1 - L2)]]$$

$$w3(x3) := A \cdot SS(x3) + B \cdot TT(x3) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x3) + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x3)$$

**Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки**

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів лівої ділянки, [м]:

$$X_{zv01} := \frac{\int_0^{L1} x \cdot w1(x) dx}{\int_0^{L1} w1(x) dx} = 0.134 \quad (K.1)$$

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів середньої ділянки, [м]:

$$X_{zv02} := \frac{\int_{L1}^{L1+L2} x \cdot w2(x) dx}{\int_{L1}^{L1+L2} w2(x) dx} = 0.631 \quad (\text{K.2})$$

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів правої ділянки, [м]:

$$X_{zv03} := \frac{\int_{L1+L2}^L x \cdot w3(x) dx}{\int_{L1+L2}^L w3(x) dx} = 0.83 \quad (\text{K.3})$$

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки, [м]:

$$X_{zv} := \frac{X_{zv01} \cdot \int_0^{L1} w1(x) dx + X_{zv02} \cdot \int_{L1}^{L1+L2} w2(x) dx + X_{zv03} \cdot \int_{L1+L2}^L w3(x) dx}{\int_0^{L1} w1(x) dx + \int_{L1}^{L1+L2} w2(x) dx + \int_{L1+L2}^L w3(x) dx} = 0.054 \quad (\text{K.4})$$

або ж:

$$X_{zv} := \frac{\int_0^{L1} x \cdot w1(x) dx + \int_{L1}^{L1+L2} x \cdot w2(x) dx + \int_{L1+L2}^L x \cdot w3(x) dx}{\int_0^{L1} w1(x) dx + \int_{L1}^{L1+L2} w2(x) dx + \int_{L1+L2}^L w3(x) dx} = 0.054 \quad (\text{K.5})$$

## Додаток L

**Встановлення зведеної маси та зведеної жорсткості континуальної ділянки з використанням методу Релея-Рітца**

*Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:*

Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Довжина лівої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L1 := 0.475$
Довжина середньої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L2 := 0.355$
Довжина правої ділянки стержня, [м] (додаток F):	$L3 := 1 \cdot 10^{-4}$
Загальна довжина стержня, [м] (додаток F):	$\underline{L} := L1 + L2 + L3 = 0.8301$
Шрина стержня, [м] (додаток F):	$h := 0.0225$
Товщина стержня, [м] (додаток F):	$bn := 5.74 \cdot 10^{-3}$
Модуль пружності I-го роду, [Па] (додаток F):	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Питома маса сталі, [кг/м <sup>3</sup> ] (додаток F):	$\rho := 7850$
Погонна маса стержня, [кг/м] (додаток F):	$m_{пм} := h \cdot bn \cdot \rho = 1.014$
Момент інерції стержня прямокутного перерізу, [м <sup>4</sup> ] (додаток F):	$\underline{J} := \frac{h \cdot bn^3}{12} = 3.546 \times 10^{-10}$
Постійні, [-] (додаток G.1):	$\underline{A} := 0.0645972$
	$B := -0.0503285$
Реакція в лівій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R1 := -240.4293893$
Реакція в правій опорі, [Н] (додаток G.1):	$R2 := 130.3996648$
Коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу, [-] (додаток J):	$k_y := 1.2$
Площа поперечного перерізу стержня, [м <sup>2</sup> ] (додаток J):	$F_n := bn \cdot h = 1.291 \times 10^{-4}$
Модуль пружності II-го роду, [Па] (додаток J):	$\underline{G} := 8.1 \cdot 10^{10}$
Точка зведення стержня, [м] (додаток K):	$X_{zv} := 0.05428$

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{m_{пм} \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$



Рівняння прогинів на окремих ділянках, згідно з додатком Н.

Прогин лівої ділянки (Н.1):

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

Прогин середньої ділянки (Н.2):

$$\underline{SS}(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$\underline{TT}(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$w2(x2) := A \cdot \underline{SS}(x2) + B \cdot \underline{TT}(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2)$$

Прогин правої ділянки (Н.3):

$$\underline{SS}(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x3) + \cos(\xi \cdot x3))$$

$$\underline{TT}(x3) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x3) + \sin(\xi \cdot x3))$$

$$\underline{VV}(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x3 - L1)]]$$

$$VV2(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - L1 - L2)] - \sin[\xi \cdot (x3 - L1 - L2)]]$$

$$w3(x3) := A \cdot \underline{SS}(x3) + B \cdot \underline{TT}(x3) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \underline{VV}(x3) + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x3)$$

Амплітуда коливань зведеної маси:

$$SS0 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot Xzv) + \cos(\xi \cdot Xzv))$$

$$TT0 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot Xzv) + \sin(\xi \cdot Xzv))$$

$$wzv := A \cdot SS0 + B \cdot TT0$$

**Частка зведеної маси від лінійного переміщення**

Частка зведеної маси від лінійного переміщення лівої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv1} := m_{\text{пм}} \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{w1(x1)}{w_{zv}} \right)^2 dx1 = 0.178 \quad (\text{L.1})$$

Частка зведеної маси від лінійного переміщення середньої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv2} := m_{\text{пм}} \cdot \int_{L1}^{L2+L1} \left( \frac{w2(x2)}{w_{zv}} \right)^2 dx2 = 3.273 \times 10^{-3} \quad (\text{L.2})$$

Частка зведеної маси від лінійного переміщення правої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv3} := m_{\text{пм}} \cdot \left[ \int_{L1+L2}^L \left( \frac{w3(x3)}{w_{zv}} \right)^2 dx3 \right] = 1.216 \times 10^{-8} \quad (\text{L.3})$$

**Частка зведеної маси від провертання**

Частка зведеної маси від провертання лівої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv1i} := \int_0^{L1} \left( \frac{m_{\text{пм}}}{3} \cdot x1^2 \right) \cdot \left[ \frac{\frac{d}{dx1}(w1(x1))}{w_{zv}} \right]^2 dx1 = 0.055 \quad (\text{L.4})$$

Частка зведеної маси від провертання середньої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv2i} := \int_{L1}^{L1+L2} \left[ \frac{m_{\text{пм}}}{3} \cdot [(x2 - L1)^2] \right] \cdot \left[ \frac{\frac{d}{dx2}(w2(x2))}{w_{zv}} \right]^2 dx2 = 2.019 \times 10^{-3} \quad (\text{L.5})$$

Частка зведеної маси від провертання правої ділянки стержня, [кг]:

$$m_{zv3i} := \int_{L1+L2}^L \left[ \frac{m_{\text{пм}}}{3} \cdot [x3 - (L1 + L2)]^2 \right] \cdot \left( \frac{\frac{d}{dx3} w3(x3)}{w_{zv}} \right)^2 dx3 = 6.701 \times 10^{-14} \quad (\text{L.6})$$

**Частка зведеної жорсткості від згину**

Частка зведеної жорсткості від згину лівої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv1 := E \cdot J \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{d^2}{dx1^2} \frac{w1(x1)}{wzv} \right)^2 dx1 = 974.611 \quad (L.7)$$

Частка зведеної жорсткості від згину середньої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv2 := E \cdot J \cdot \int_{L1}^{L2+L1} \left( \frac{d^2}{dx2^2} \frac{w2(x2)}{wzv} \right)^2 dx2 = 1.027 \times 10^3 \quad (L.8)$$

Частка зведеної жорсткості від згину правої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv3 := E \cdot J \cdot \int_{L1+L2}^L \left[ \frac{d^2}{dx3^2} \left( \frac{w3(x3)}{wzv} \right) \right]^2 dx3 = 4.244 \times 10^{-11} \quad (L.9)$$

**Частка зведеної жорсткості від дотичних сил**

Частка зведеної жорсткості від дотичних сил лівої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv1i := ky \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot Fn} \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{d^3}{dx1^3} \frac{w1(x1)}{wzv} \right)^2 dx1 = 0.175 \quad (L.10)$$

Частка зведеної жорсткості від дотичних сил середньої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv2i := ky \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot Fn} \cdot \int_{L1}^{L1+L2} \left( \frac{d^3}{dx2^3} \frac{w2(x2)}{wzv} \right)^2 dx2 = 0.201 \quad (L.11)$$

Частка зведеної жорсткості від дотичних сил правої ділянки стержня, [Н/м]:

$$czv3i := ky \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot Fn} \cdot \int_{L1+L2}^L \left( \frac{d^3}{dx3^3} \frac{w3(x3)}{wzv} \right)^2 dx3 = 6.488 \times 10^{-15} \quad (L.12)$$

Зведена маса та зведена жорсткість відповідно рівні:

$$mzv := mzv1 - mzv2 - mzv3 + mzv1i - mzv2i - mzv3i = 0.228 \quad [\text{кг}] \quad (L.13)$$

$$czv := czv1 + czv2 + czv3 + czv1i + czv2i + czv3i = 2.002 \times 10^3 \quad [\text{Н/м}] \quad (L.14)$$

Перша власна колова частота коливань стержня складе, [рад/с]:

$$\omega_{zv} := \sqrt{\frac{czv}{mzv}} = 93.701 \quad (L.15)$$

## Додаток М

## Перехідні процеси еталонної дискретної тримасової коливальної системи

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг] (додаток С):	$m1 := 83.7$
Проміжна маса, [кг] (додаток С):	$m2 := 62.1$
Рекативна маса, [кг] (додаток С):	$m3 := 0.456$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с] (додаток С):	$\omega := 99.4838$
Ексцентриситет кривошипно-шатунного механізму, [М] (додаток С):	$\varepsilon := 6.5229 \times 10^{-3}$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну з проміжною масами, [Н/м] (додаток С):	$c12 := 3.7598 \times 10^5$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує проміжну з реактивною масами, [Н/м] (додаток С):	$c23 := 4.2075 \times 10^3$
Амплітудне значення сили збурення тримасової коливальної системи, [Н] (додаток С):	$F03 := \varepsilon \cdot c23 = 27.445$
Коефіцієнт демпферування, [Н/м/с]:	$\mu1 := 3.2 \quad \mu2 := 2$

Математична модель дискретної тримасової коливальної системи:

Given

$$\begin{aligned}
 m1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y1(t) + c12 \cdot (y1(t) - y2(t)) + \mu1 \cdot \left( \frac{d}{dt} y1(t) - \frac{d}{dt} y2(t) \right) &= 0 \\
 m2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y2(t) + c12 \cdot (y2(t) - y1(t)) + c23 \cdot (y2(t) - y3(t)) \dots &= F03 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
 + \mu1 \cdot \left( \frac{d}{dt} y2(t) - \frac{d}{dt} y1(t) \right) + \mu2 \cdot \left( \frac{d}{dt} y2(t) - \frac{d}{dt} y3(t) \right) & \\
 m3 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y3(t) + c23 \cdot (y3(t) - y2(t)) + \mu2 \cdot \left( \frac{d}{dt} y3(t) - \frac{d}{dt} y2(t) \right) &= -F03 \cdot \sin(\omega \cdot t)
 \end{aligned}
 \tag{M.1}$$

$$y1(0) = 0 \quad y2(0) = 0 \quad y3(0) = 0$$

$$y1'(0) = 0 \quad y2'(0) = 0 \quad y3'(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}, t, 100, 100000 \right]$$

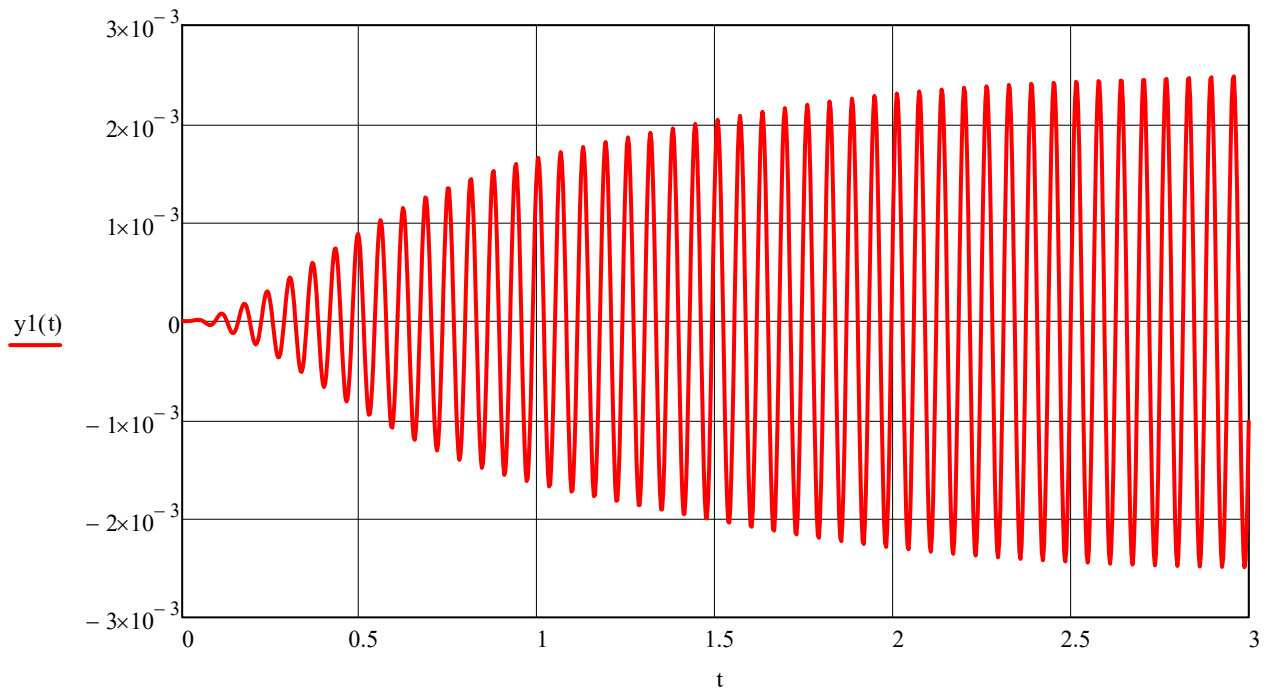


Рис. М.1. Часова залежність коливального руху активної маси в перші 3 с після запуску на частоті вимушених коливань

Додаток N  
Кінематичний аналіз керованого кривошипно-шатунного механізму

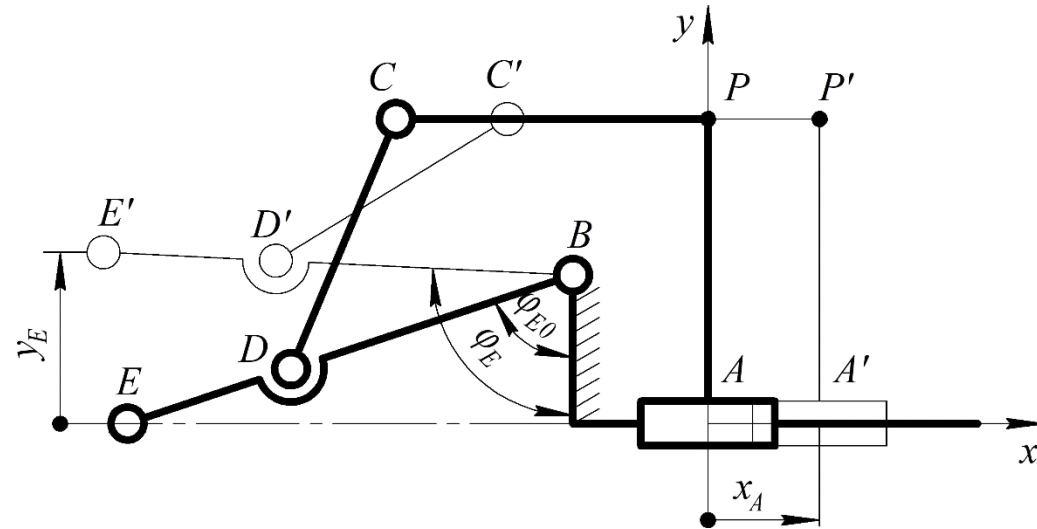


Рис. N.1. Розрахункова кінематична схема керованого кривошипно-шатунного механізму у двох фіксованих положеннях

Знайдемо координати шарніра  $D$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз вісі  $x$

Given ■

$$LBD^2 = (XB - XD)^2 + (YB - YD)^2$$

$$LCD^2 = [(XA - LPC) - XD]^2 + (YC - YD)^2$$

(N.1)

Find( $XD, YD$ ) simplify → ■

$$XD(XA) := \frac{\text{LCD}^2 \cdot [XB - (XA - LPC)] + \text{LBD}^2 \cdot [-XB + (XA - LPC)] + [XB + (XA - LPC)] \cdot \left[ [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right] \dots}{2 \cdot \left[ [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]} + \frac{-\sqrt{\left[ (\text{LBD} - \text{LCD})^2 - [XB - (XA - LPC)]^2 - (YB - YC)^2 \right] \cdot \left[ (\text{LBD} + \text{LCD})^2 - [XB - (XA - LPC)]^2 - (YB - YC)^2 \right]} \cdot (YB - YC)^2}{2 \cdot \left[ [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]} \quad (\text{N.2})$$

$$YD(XA) := \frac{1}{2 \cdot \left[ [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right] \cdot (YB - YC)} \cdot \left[ \begin{aligned} & -\text{LBD}^2 \cdot (YB - YC)^2 \dots \\ & + \text{XB} \cdot \sqrt{\frac{\text{LBD}^4 + \left[ -\text{LCD}^2 + [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]^2}{+2 \cdot \text{LBD}^2 \cdot \left[ \text{LCD}^2 + [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]}} \cdot (YB - YC)^2 \dots \\ & + -(XA - LPC) \cdot \sqrt{\frac{\text{LBD}^4 + \left[ -\text{LCD}^2 + [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]^2}{+2 \cdot \text{LBD}^2 \cdot \left[ \text{LCD}^2 + [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right]}} \cdot (YB - YC)^2 \dots \\ & + (YB - YC) \cdot \left[ \text{LCD}^2 \cdot (YB - YC) + \left[ [XB - (XA - LPC)]^2 + (YB - YC)^2 \right] \cdot (YB + YC) \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{N.3})$$

Встановимо координати шарніра  $E$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовж осі  $x$

Given

$$\frac{XB1 - XD11}{\text{LBD1}} = \frac{XB1 - XE1}{\text{LBE1}}$$

$$\frac{YB1 - YD1}{\text{LBD1}} = \frac{YB1 - YE1}{\text{LBE1}}$$

(N.4)

$$\text{Find}(XE1, YE1) \rightarrow \left( \begin{array}{c} \frac{\text{LBD1} \cdot \text{XB1} - \text{LBE1} \cdot \text{XB1} + \text{LBE1} \cdot \text{XD11}}{\text{LBD1}} \\ \frac{\text{LBD1} \cdot \text{YB1} - \text{LBE1} \cdot \text{YB1} + \text{LBE1} \cdot \text{YD1}}{\text{LBD1}} \end{array} \right)$$

$$X_E(X_A) := \frac{LBD \cdot X_B - LBE \cdot X_B + LBE \cdot X_{D1}(X_A)}{LBD} \quad (N.5)$$

$$Y_E(X_A) := \frac{LBD \cdot Y_B - LBE \cdot Y_B + LBE \cdot Y_D(X_A)}{LBD} \quad (N.6)$$

Вихідні числові значення довжин ланок та координати шарнірів в міліметрах:

$$LPC := 42 \quad LCD := 36.5 \quad LBD := 40 \quad LBE := 63.2 \quad X_B := -18.176 \quad Y_B := 20 \quad Y_C := 41$$

$$X_A := 0..15$$

$$X_D(X_A) := \frac{LCD^2 \cdot [X_B - (X_A - LPC)] + LBD^2 \cdot [-X_B + (X_A - LPC)] + [X_B + (X_A - LPC)] \cdot \left[ [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2 \right] \dots}{2 \cdot \left[ [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2 \right]} + \frac{-\sqrt{-(LBD - LCD)^2 - [X_B - (X_A - LPC)]^2 - (Y_B - Y_C)^2} \cdot \left[ (LBD + LCD)^2 - [X_B - (X_A - LPC)]^2 - (Y_B - Y_C)^2 \right] \cdot (Y_B - Y_C)^2}{2 \cdot \left[ [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2 \right]}$$

$$Y_D(X_A) := \frac{1}{2 \cdot \left[ [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2 \right] \cdot (Y_B - Y_C)} \cdot \left[ \begin{aligned} & -LBD^2 \cdot (Y_B - Y_C)^2 \dots \\ & + X_B \cdot \sqrt{\frac{LBD^4 + [-LCD^2 + [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2]^2 \dots}{+ -2 \cdot LBD^2 \cdot [LCD^2 + [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2]}} \cdot (Y_B - Y_C)^2 \dots \\ & + -(X_A - LPC) \cdot \sqrt{\frac{LBD^4 + [-LCD^2 + [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2]^2 \dots}{+ -2 \cdot LBD^2 \cdot [LCD^2 + [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2]}} \cdot (Y_B - Y_C)^2 \dots \\ & + (Y_B - Y_C) \cdot [LCD^2 \cdot (Y_B - Y_C) + [X_B - (X_A - LPC)]^2 + (Y_B - Y_C)^2] \cdot (Y_B + Y_C) \end{aligned} \right]$$

$$X_E(X_A) := \frac{LBD \cdot X_B - LBE \cdot X_B + LBE \cdot X_D(X_A)}{LBD}$$

$$Y_E(X_A) := \frac{LBD \cdot Y_B - LBE \cdot Y_B + LBE \cdot Y_D(X_A)}{LBD}$$



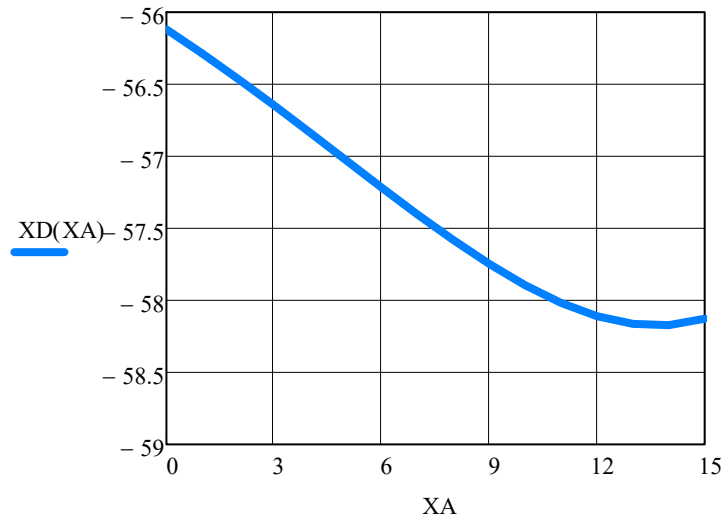


Рис. N. 2. Координата шарніра  $D$  по осі  $x$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$

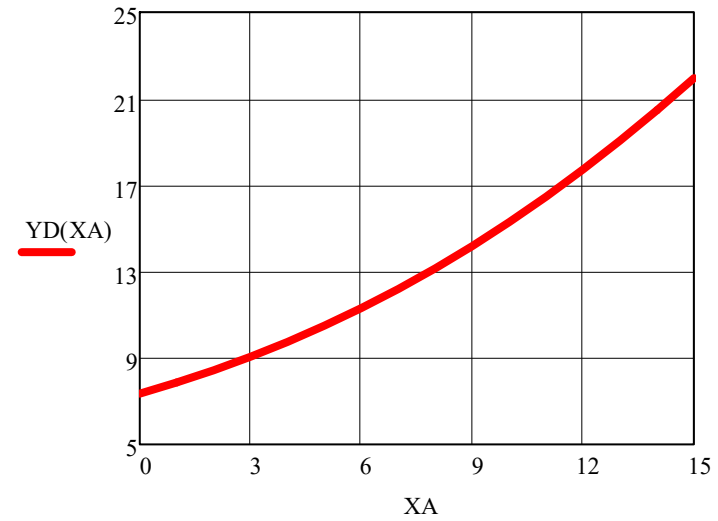


Рис. N. 3. Координата шарніра  $D$  по осі  $y$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$

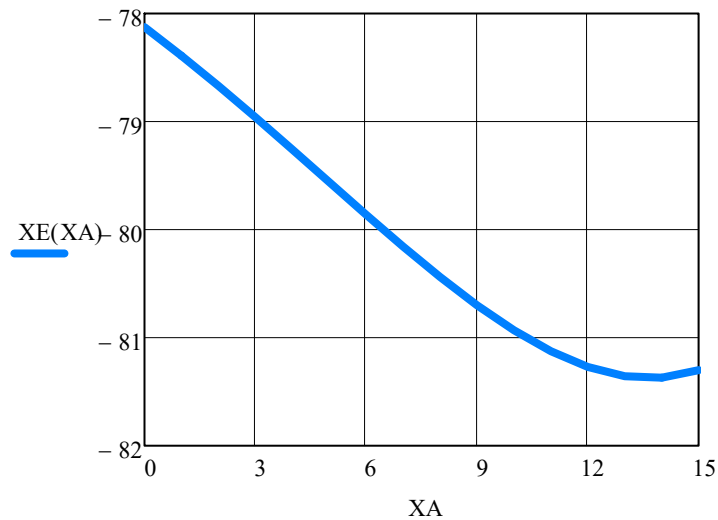


Рис. N. 4. Координата шарніра  $E$  по осі  $x$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$

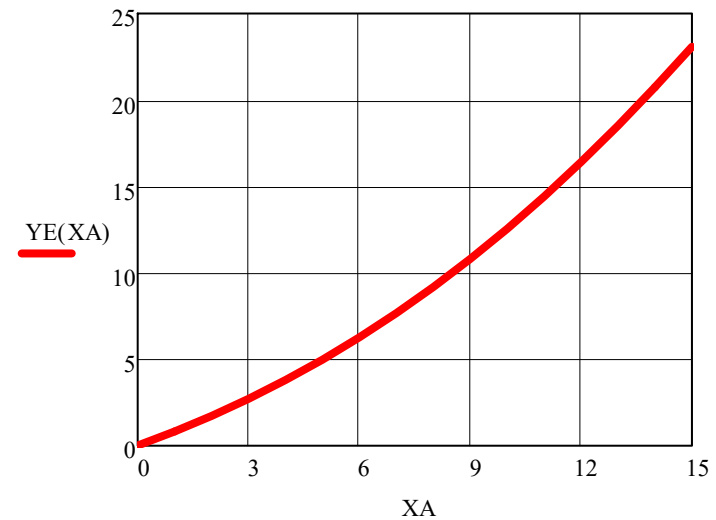


Рис. N. 5. Координата шарніра  $E$  по осі  $y$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$

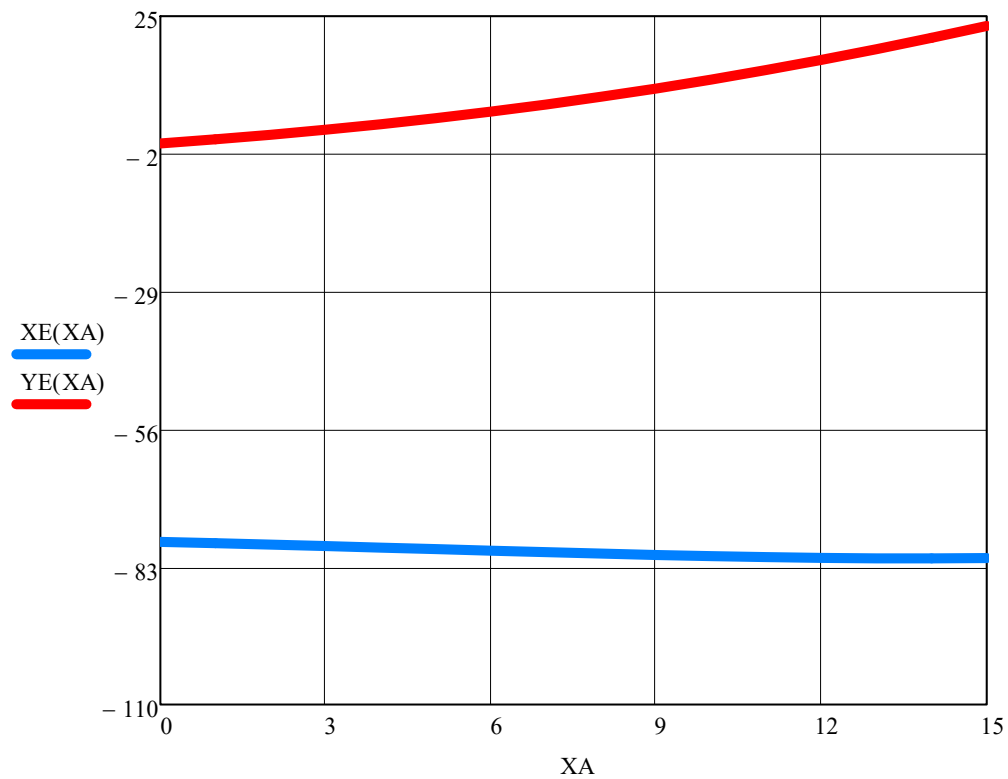


Рис. N. 6. Залежність переміщення шарніра  $E$  по осях  $x$  та  $y$  від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$

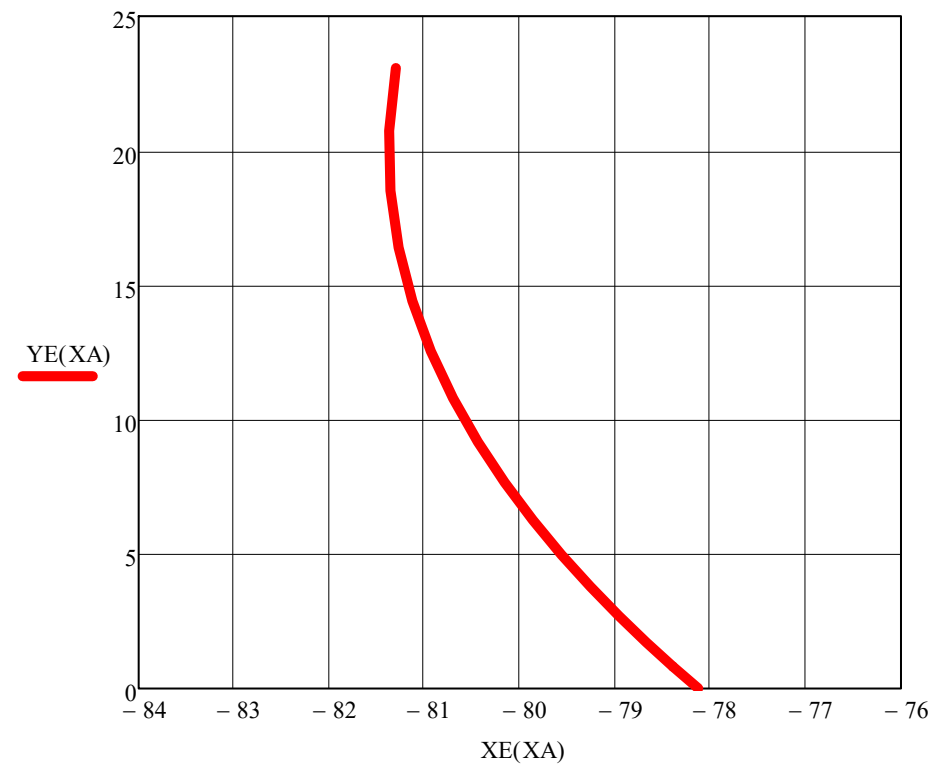


Рис. N. 7. Траєкторія руху шарніра  $E$  по осях  $x$  та  $y$  залежно від переміщення повзуна  $A$  вздовз осі  $x$