

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С.ПІДСТРИГАЧА НАН УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СЕНИК Юлія Андріївна

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗМІРНИХ ЕФЕКТІВ
У ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛАХ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

05 – технічні науки

Подається на здобуття наукового степеня кандидата технічних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 Ю.А.Сеник

Науковий керівник

Маркович Богдан Михайлович
Доктор фіз.-мат. наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради

 /Р.А.Бунь/


ЛЬВІВ – 2023

АНОТАЦІЯ

Сеник Ю.А. Моделювання та дослідження розмірних ефектів у електропровідних тілах. – На правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи (технічні науки). - Національний університет «Львівська політехніка», Міністерство освіти і науки України, Львів, 2023.

Дисертація присвячена математичному моделюванню та дослідженню виникаючих в електропровідних неферомагнітних тілах розмірних ефектів і пов'язаних з цим питань міцності.

Тонкі металеві та напівпровідникові плівки за своєю природою є об'єктами з дуже різноманітними фізичними властивостями; причому фізичні характеристики речовини у вигляді плівки можуть істотно відрізнитися від властивостей цих матеріалів у масивному стані. Це створює додаткові проблеми при використанні плівок як технічних матеріалів та елементів апаратури, але водночас різноманіття та мінливість властивостей тонких плівок істотно розширюють можливості їх практичного застосування. Знання основних закономірностей зміни властивостей тонких плівок необхідно при створенні плівкових матеріалів із заданими властивостями.

Останнім часом актуальність дослідження закономірностей зміни фізичних властивостей речовини під час переходу до плівкового стану істотно зростає. Це пов'язано з роботами зі створення активних матеріалів та пристроїв на основі наноструктур. Зміна фізичних властивостей речовини у плівковому стані відбувається під впливом кількох основних причин. Однією з таких причин є різноманітність структурних характеристик тонких плівок, які отримують методом конденсації молекулярних пучків у високому вакуумі.

При варіюванні умов конденсації структура плівок, що утворюються, може змінюватися від гранично неупорядкованого дрібнодисперсного стану (гранулярні шари) до структури досконалого монокристалічного шару (епітаксіальні плівки). Іншою причиною, що призводить до відмінності фізичних властивостей тонких плівок від властивостей масивної речовини, є вплив ірещини її товщини порівняно з різними параметрами, що визначають ті чи інші фізичні властивості. Це призводить до виникнення розмірних ефектів. Зокрема, в електропровідності, гальваномагнітних та інших властивостях проявляється класичний розмірний ефект, пов'язаний з обмеженням довжини вільного пробігу електронів товщиною плівки.

До обставин, що обґрунтовують значний сплеск досліджень у галузі наноматеріалів належить можливість реалізації високого рівня фізико-хімічних і механічних властивостей матеріалів у наностані і відповідно технологічне застосування таких властивостей та особливостей цього стану.

Оскільки наноструктура – це дуже маленький фрагмент твердого тіла, то моделювання твердотільних наноструктур утворює місток між властивостями окремих атомів та механікою суцільного середовища, в рамках які вивчають твердотілі речовини, кількість атомів у яких практично нескінченна. Але за таких малих розмірах властивості наноструктур дуже сильно відрізняються від властивостей об'ємних матеріалів. Завдання нанотехнології, якщо сформулювати її коротко, це створення низькорозмірних систем з розмірами структурних елементів від часток до кількох десятків нанометрів. При цьому маються на увазі як окремі частинки із зазначеним діаметром, так і двовимірні (наприклад плівки) та одновимірні (наприклад, квантові нитки) структури. Слід зазначити, що із зменшенням розміру частинок поняття фази виражено менш чітко: межі між гомогенною та гетерогенною фазами, між аморфними та кристалічними станами визначити важко. Відносна стабільність окремих частин наноструктури знаходиться в залежності від

кінетичних та термодинамічних факторів. Наносистеми мають багато особливостей фізико-хімічних властивостей, які не спостерігаються в твердих тілах. Виділяються два основних фактори, що впливають на формування властивостей наносистем - це зміна термодинамічного стану наносистем порівняно з класичним і поява квантово-розмірних ефектів із зменшенням характеристичних розмірів структурних елементів. Теоретичні дослідження термодинаміки малих частинок показують, що розмір часток є активним термодинамічною змінною, що визначає разом з іншими термодинамічними змінними стан системи, оскільки внаслідок мінімальних розмірів вони мають високу величину поверхні розділу і виявляють високу фізико-хімічну активність.

В дисертації побудовано математичні моделі твердого тіла, що враховують структурну неоднорідність матеріалу та геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла. Із застосуванням запропонованих математичних моделей досліджено ефекти, що викликані локальною неоднорідністю у пружних, електропровідних неферомагнітних твердих тілах простої геометричної конфігурації.

Методами необоротної термодинаміки сформульовано систему рівнянь, що описують стаціонарний стан електропровідного неферомагнітного термопружного твердого тіла. Модель враховує структуру матеріалу та неоднорідність приповерхневої густини. Введені джерела маси дозволяють враховувати «приповерхневий дефект маси», який властивий відомим моделям, створеним у межах локально градієнтного підходу. При цьому густина, заряд і розподіли напружень у вільному півпросторі є неоднорідними і мають три характерні розміри.

Із використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів сформульовано систему рівнянь, яка описує стаціонарний стан електропровідного неферомагнітного термопружного твердого тіла.

Виникнення структури матеріалу враховано шляхом постулювання необоротного складника вектора потоку маси. Врахування джерел маси дозволяють коректно врахувати «приповерхневий дефект маси», властивий відомим моделям, побудованим за локально градієнтного підходу у термомеханіці. Продемонстровано, що у разі нехтування впливом деформації та напружень на термодинамічний електричний потенціал, дослідження рівноважного стану електропровідного неферомагнітного пружного тіла зводиться до послідовного визначення густини та термодинамічного електричного потенціалу на основі взаємозв'язаної системи рівнянь і подальшого аналізу напружено-деформованого стану.

У рамках моделі локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного пружного тіла вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності у півпросторі. Показано, що ненульовий напружено-деформований стан зумовлений врахуванням у рамках моделі структурної неоднорідності матеріалу, джерел маси, а також сил кулонівської взаємодії, а значення термодинамічного електричного потенціалу, що встановлюється на поверхні тіла, однозначно визначається характеристиками матеріалу, у тому числі характерними розмірами структурної неоднорідності матеріалу, геометричній неоднорідності реальної поверхні тіла та сил кулонівської взаємодії. Відзначено, що подвійний електричний шар однозначно визначається приповерхневими неоднорідностями густини та термодинамічного електричного потенціалу.

Представлено результати дослідження за локально градієнтного підходу у термомеханіці рівноважного стану електропровідного неферомагнітного шару за врахування геометричній неоднорідності його поверхні. Показано, що поверхневим напруженням та міцності властивий багатоскальний розмірний ефект; характерні розміри приповерхневої неоднорідності пов'язані зі структурною неоднорідністю матеріалу, геометричною

неоднорідністю реальної поверхні тіла та силами кулонівської взаємодії. Значення термодинамічного електричного потенціалу та заряду, що встановлюються на поверхні, однозначно визначаються фізичними та геометричними характеристиками тіла. Проаналізовано вплив параметрів геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла на розмірні ефекти поверхневих напружень і міцності.

Встановлено, що електронна підсистема тіла не впливає на розмірний ефект міцності товстих плівок, однак впливає на значення силового навантаження, що призводить до їх крихкого руйнування.

Представлено ключову систему рівнянь моделі твердого тіла із врахуванням структурної неоднорідності матеріалу та шорсткості реальної поверхні, яку застосовано до вивчення взаємозв'язаних полів у необмеженому гетерогенному електропровідному шарі. Розглянуто вплив врахування залежностей від густини локальних модулів Юнга та коефіцієнта Пуассона на розмірні ефекти поверхневих напружень у шарі та межі його міцності.

Продемонстровано, що врахування нелінійності модуля Юнга суттєво змінює визначену величину межі міцності та впливає на її розмірний ефект, тоді як врахування впливу нелінійності коефіцієнта Пуассона впливає значно слабше.

Ключові слова: електропровідне тіло, напруження, модулі пружності, розмірні ефекти, міцність, математичне моделювання.

ABSTRACT

Senyk Yu.A. Modeling and research of size effects in electrically conductive bodies. - On the rights of the manuscript. Dissertation for obtaining the scientific degree of candidate of technical sciences in the specialty 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods (technical sciences). - Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2023.

The dissertation is devoted to mathematical modeling and research of size effects arising in electrically conductive non-ferromagnetic bodies and the related issue of strength.

Thin metal and semiconductor films are inherently objects with very diverse physical properties; moreover, the physical characteristics of the substance in the form of a film may differ significantly from the properties of these materials in a massive state. This creates additional problems when using films as technical materials and equipment elements, but at the same time, the diversity and variability of the properties of thin films significantly expands the possibilities of their practical application.

Knowledge of the basic laws of changing the properties of thin films is necessary when creating film materials with given properties. Recently, the relevance of studying the patterns of changes in the physical properties of matter during the transition to the film state has increased significantly. This is related to works on the creation of active materials and devices based on nanostructures. The change in the physical properties of the substance in the film state occurs under the influence of several main reasons.

One of these reasons is the variety of structural characteristics of thin films obtained by the method of condensation of molecular beams in a high vacuum. When the condensation conditions are varied, the structure of the formed films can

change from a highly disordered finely dispersed state (granular layers) to the structure of a perfect single crystal layer (epitaxial films).

Another reason that leads to the difference between the physical properties of thin films and the properties of a massive substance is the effect of a crack on its thickness in comparison with various parameters that determine certain physical properties. This leads to size effects. In particular, in electrical conductivity, galvanomagnetic, and other properties, the classic size effect associated with the limitation of the length of the free path of electrons by the thickness of the film is manifested.

The circumstances justifying a significant surge of research in the field of nanomaterials include the possibility of realizing a high level of physicochemical and mechanical properties of materials in the nanostate and, accordingly, the technological application of such properties and features of this state.

Since a nanostructure is a very small fragment of a solid body, the modeling of solid nanostructures forms a bridge between the properties of individual atoms and the mechanics of a continuous medium, within the framework of which solid substances with an almost infinite number of atoms are studied. But at such small sizes, the properties of nanostructures are very different from the properties of bulk materials.

The task of nanotechnology, to put it briefly, is the creation of low-size systems with the size of structural elements from particles to several tens of nanometers. This includes individual particles with the specified diameter, as well as two-size (for example, films) and one-size (for example, quantum threads) structures. It should be noted that with decreasing particle size, the concept of phase is expressed less clearly: the boundaries between homogeneous and heterogeneous phases, between amorphous and crystalline states are difficult to define.

The relative stability of individual parts of the nanostructure depends on kinetic and thermodynamic factors. Nanosystems have many specific physical and chemical properties that are not observed in solids. Two main factors influencing the formation of the properties of nanosystems are distinguished - this is a change in the thermodynamic state of nanosystems compared to the classical one and the appearance of quantum-size effects with a decrease in the characteristic sizes of structural elements.

Theoretical studies of the thermodynamics of small particles show that the size of the particles is an active thermodynamic variable that determines, together with others, the thermodynamic variable state of the system, because due to their minimal size, they have a high interface and exhibit high physicochemical activity.

In the dissertation, mathematical models of a solid body are built, taking into account the structural heterogeneity of the material and the geometric heterogeneity of the real surface of the body. Using the proposed mathematical models, the effects caused by local inhomogeneity in elastic, electrically conductive non-ferromagnetic solids of a simple geometric configuration were studied.

Using the methods of irreversible thermodynamics, a system of equations describing the stationary state of an electrically conductive nonferromagnetic thermoelastic solid was formulated. The model takes into account the structure of the material and the heterogeneity of the near-surface density. The introduced mass sources allow taking into account the "near-surface mass defect", which is characteristic of known models created within the limits of the locally gradient approach. At the same time, the density, charge, and stress distributions in the free half-space are heterogeneous and have three characteristic dimensions.

Using the methods of thermodynamics of non-equilibrium processes, a system of equations was formulated that describes the steady state of an electrically conductive non-ferromagnetic thermoelastic solid. The emergence of

the material structure is taken into account by postulating an irreversible component of the mass flow vector. Taking into account the sources of mass allows you to correctly take into account the "near-surface mass defect" characteristic of well-known models built according to the locally gradient approach in thermomechanics.

It has been demonstrated that in the case of neglecting the influence of deformation and stresses on the thermodynamic electric potential, the study of the equilibrium state of an electrically conductive non-ferromagnetic elastic body is reduced to the sequential determination of the density and thermodynamic electric potential based on an interconnected system of equations and further analysis of the stress-strain state.

Within the framework of the model of a locally inhomogeneous electrically conductive non-ferromagnetic elastic body, the patterns of near-surface inhomogeneity in the half-space were studied. It is shown that the non-zero stress-strain state is caused by taking into account the structural heterogeneity of the material, mass sources, and Coulomb interaction forces within the model, and the value of the thermodynamic electric potential established on the surface of the body is uniquely determined by the characteristics of the material, including the characteristic dimensions of the structural heterogeneity material, geometric inhomogeneity of the real body surface and Coulomb interaction forces.

It is noted that the electric double layer is uniquely determined by near-surface inhomogeneities of density and thermodynamic electric potential.

The results of the study using the locally gradient approach in the thermomechanics of the equilibrium state of an electrically conductive non-ferromagnetic layer, taking into account the geometric heterogeneity of its surface, are presented. It is shown that surface stresses and strength are characterized by a multiscale size effect; characteristic size of near-surface inhomogeneity are related

to the structural inhomogeneity of the material, the geometric inhomogeneity of the real surface of the body, and the Coulomb interaction forces.

The values of the thermodynamic electric potential and charge established on the surface are uniquely determined by the physical and geometric characteristics of the body. The influence of the parameters of the geometric heterogeneity of the real body surface on the size effects of surface stresses and strength is analyzed. It was established that the electronic subsystem of the body does not affect the size effect of the strength of thick films, but it affects the value of the force load, which leads to their brittle destruction.

The key system of equations of the solid body model is presented, taking into account the structural heterogeneity of the material and the roughness of the real surface, which is applied to the study of interconnected fields in an unbounded heterogeneous conductive layer. The effect of taking into account the dependences on the density of local Young's modulus and Poisson's ratio on the dimensional effects of surface stresses in the layer and its strength limit is considered.

It is demonstrated that taking into account the nonlinearity of the Young's modulus significantly changes the determined value of the strength limit and affects its dimensional effect, while taking into account the influence of the nonlinearity of the Poisson's ratio has a much weaker effect.

Key words: conductive body, stress, modulus of elasticity, size effects, strength, mathematical modeling.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Nahirnyj T., Senyk Y., Tchervinka K. Modeling local non-homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid. *Mathematical Modeling and Computing*. 2014. Vol.1, No.2, P. 214–223.
2. Nahirnyi T, Tchervinka K., Senyk Y. Strength of a conducting nonferromagnetic layer. Size effect. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. № 265. P. 489–497.
3. Markovych B., Senyk Y., Nodzhak L. Stress-deformed state and strength of a locally heterogeneous electrically conductive layer. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, No. 3. P. 750–756.
4. Нагірний Т., Червінка К., Сенік Ю. Моделювання стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного термопружного тіла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Вип. 19. С. 127-135.
5. Нагірний Т., Сенік Ю. Приповерхнева неоднорідність в електропровідному неферомагнітному півпросторі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. Вип. 22. С. 111-116.
6. Нагірний Т., Сенік Ю. Рівноважний стан електропровідної неферомагнітної тонкої плівки. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 66-72.
7. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сенік Ю.А. До опису рівноважного стану електропровідного неферомагнітного локально неоднорідного твердого тіла. *Матеріали 1-ої міжнародної 20-ї всеукраїнської конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”*. Тези доповідей. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 111-113.
8. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сенік Ю.А. Дослідження структурної та приповерхневої неоднорідностей у електропровідному півпросторі.

- Матеріали 9-ї міжнародної наукової конференції. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 78-80.
9. Сенік Ю.А. Рівноважний стан структурного неоднорідного електропровідного неферромагнітного півпростору. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2016»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2016. URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Senik.pdf>
 10. Нагірний Т., Сенік Ю. Рівноважний стан електропровідної неферромагнітної тонкої плівки. *«Сучасні проблеми термомеханіки» Збірник наукових праць*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2016. С. 105-106.
 11. Сенік Ю.А. Міцність електропровідного неферромагнітного шару. Розмірний ефект. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2017»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2017. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Senyk.pdf>
 12. Нагірний Т., Сенік Ю. Напружено-деформований стан електропровідного неферромагнітного шару із урахування геометричної неоднорідності його поверхні. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2018. С. 116.
 13. Сенік Ю.А. Моделювання напружено-деформованого стану локально неоднорідного електропровідного шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2019»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2019. URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Senyk.pdf>
 14. Сенік Ю.А. Напружено-деформований стан локально неоднорідного електропровідного півпростору. *Матеріали конференції молодих вчених*

- «Підстригачівські читання -2020». Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2020. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Senyk.pdf>.
15. Сенік Ю.А. Дослідження ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на прикладі неоднорідного електропровідного шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання - 2021»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021. URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Senyk.pdf>.
16. Сенік Ю.А. Вплив нелінійності модулів пружності на поверхневі напруження. *Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми термомеханіки - 2021"*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021. С. 23-24.
17. Сенік Ю.А. Дослідження впливу модулів пружності на розмірний ефект межі міцності шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2022»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача. URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Senyk.pdf>
18. Senyk A., Pabyrivskyi V., Ukhanska O., Futryk Y., Senyk Y., Stepanyuk O. Methodology of specification of parameters of strengthening of elements of bearing surfaces of aircraft. *2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2022)*. Lviv. 2022, P. 746-750.
19. Маркович Б., Сенік Ю. Рівноважний стан деформівного електропровідного неферомагнітного півпростору. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», присвячена 95-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С.Підстригача, 23–25 травня 2023 р.* Львів, 2023. С. 89-90. http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_37.pdf

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. Аналіз відомих підходів до математичного моделювання сучасних конструкційних матеріалів	27
1.1. Специфіка аналізу структури сучасних твердих матеріалів/тіл та їх механічної поведінки	27
1.2. Моделювання розмірних ефектів: наноструктури та наноматеріали конструкційного та функціонального призначення	29
1.3. Аналіз напружено-деформованого стану тонких плівок та оболонок	34
1.4. Врахування в математичних моделях неоднорідності конструкційних матеріалів та їх характеристик	36
1.5. Сучасні виклики при моделюванні електропровідних неферромагнітних тіл	40
1.6. Висновки до розділу 1	43
РОЗДІЛ 2. Математичні моделі термодинаміки нерівноважних процесів	45
2.1. Балансові співвідношення	45
2.1.1. Залежність параметрів локального стану від змінної густини тіла	46
2.1.2. Рівняння балансу внутрішньої енергії	49
2.2. Визначальні рівняння: рівняння стану та кінетичні рівняння ..	50
2.3. Ключова математична модель рівноважного стану	55
2.3.1. Рівняння моделі	55
2.3.2. Основні спрощення моделі	57
2.4. Висновки до розділу 2	64

РОЗДІЛ 3. Нелінійна математична модель приповерхневої	
 неоднорідності у гетерогенному півпросторі	65
3.1. Базова модель рівноважного стану електропровідного	
півпростору	65
3.2. Конкретизація моделі та постановка задачі	67
3.3. Аналітичний розв’язок відносно основних параметрів	68
3.4. Результати чисельного аналізу густини та параметрів	
електричної підсистеми	70
3.5. Результати чисельного аналізу напружень у електропровід-	
ному півпросторі	75
3.6. Висновки до розділу 3	82
Розділ 4. Моделювання розмірних ефектів модулів пружності	
 локально неоднорідних електропровідних тіл	84
4.1. Модель стану гетерогенного електропровідного деформівного	
твердого шару із залежними модулями пружності	84
4.2. Результати числового аналізу з використанням моделі	86
4.2.1. Розподіл густини у шарі	88
4.2.2. Розподіл електричного потенціалу та заряду у шарі	89
4.2.3. Розподіл напружень у шарі	94
4.3. Моделювання розмірного ефекту міцності шару	99
4.4. Розмірний ефект ефективних модулів пружності	102
4.5. Дослідження розподілу напружень при визначених характеристиках	
матеріалу	109
4.5. Висновки до розділу 4	111
ВИСНОВКИ	113
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	115
ДОДАТОК А. Акт про використання результатів дисертаційної	
 роботи	144

ДОДАТОК Б. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	147
--	-----

ВСТУП

Актуальність теми. Мікро та нанотехнології досить швидко увійшли в науковий світ і завдяки своїм унікальним властивостям набули застосування майже в усіх галузях виробництва і промисловості, починаючи від військових потреб (матеріали, що роблять літаки невидимими для радіолокації; бронжилети та ін.), електроніки (підвищення інтеграції електронних компонент; нові матеріали з підвищеними характеристиками стійкості до температури, збереження своїх структурних, діелектричних, електрофізичних і магнітних властивостей; розроблення нових датчиків: газу, тиску, випромінювання (з широким діапазоном хвиль) на основі мембран з атомарною товщиною), машинобудування (зносостійкі, антикорозійні, захисні матеріали), будівництва (полегшені конструкції будівель, покращені бетоносуміші), сонячної, космічної, медичної галузей та закінчуючи побутом (нанопокриття для збереження чистоти вікон, акваріумів; незабруднювальний та водонепроникний одяг).

Оскільки нанотехнології досить швидко завдяки своїм унікальним властивостям набули застосування майже в усіх галузях виробництва і промисловості, починаючи від військових потреб, електроніки, машинобудування, будівництва, сонячної, космічної, медичної галузей та закінчуючи побутом, тому залишається актуальним розрахунок та прогнозування експлуатаційних, міцнісних та деформаційних параметрів деталей. Науковою базою визначення цих параметрів є побудовані на основі механіки деформівного твердого тіла математичні моделі об'єктів дослідження, що в належній мірі враховують структуру та властивості матеріалу реальних твердих тіл, що зазвичай є локально неоднорідними. Особливо це стосується тонкоплівкових та тонковолокнистих систем, що мають широке застосування в нанотехнологіях. Як відомо, для таких систем вклад поверхневого та об'ємного факторів у розподілі внутрішньої енергії є

співвимірним. До особливостей поведінки близьких до поверхні областей належить розмірні або масштабні ефекти границь міцності та текучості, параметри довговічності, модулі пружності тощо. Тож побудова математичних моделей, що коректно, з врахуванням мікроструктури матеріалу і достатньою точністю описують приповерхневі та приконтактні явища набуває вагомого значення. Вони є актуальними науково-технічними завданнями, які потребують нагального вирішення. Отже, тема дисертаційної роботи є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у рамках планових науково-дослідних робіт Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, а саме:

- розробка та дослідження математичних моделей процесів деформування та переносу в неоднорідних середовищах з урахуванням локальної структури та зосереджених джерел і стоків в рамках цільової програми наукових досліджень Відділення математики НАН України «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій» (номер державної реєстрації 0111U009748, 2012-2016 рр.).
- розробка математичних моделей та методів дослідження зв'язаних полів у пористих середовищах, твердих тілах та нанoeлементax в рамках цільової програми наукових досліджень Відділення математики НАН України «Розробка та дослідження сучасних математичних моделей у галузі фізико-технічних та медико-біологічних наук» (номер державної реєстрації 0117U004156, 2017-2021 рр.).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є математичне моделювання механічних та фізичних процесів в пружному тілі, що враховують

структурну неоднорідність матеріалу та геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла.

Для досягнення поставленої мети передбачено вирішення таких задач:

- сформулювати математичну модель, що з врахуванням структури матеріалу та неоднорідності приповерхневої густини описує стаціонарний стан електропровідного неферромагнітного термопружного твердого тіла; при цьому густина, заряд і розподіли напружень у вільному півпросторі є неоднорідними і мають три характерні розміри;
- сформулювати систему рівнянь, яка описує стаціонарний стан неферромагнітного термопружного твердого тіла; врахувати джерел маси, що дозволяють коректно описати «приповерхневий дефект маси», властивий відомим моделям, побудованим за локально градієнтного підходу у термомеханіці;
- у межах моделі локально неоднорідного електропровідного неферромагнітного пружного тіла вивчити закономірності приповерхневої неоднорідності у півпросторі;
- продемонструвати, що ненульовий напружено-деформований стан зумовлений врахуванням у рамках моделі структурної неоднорідності матеріалу, джерел маси, а також сил кулонівської взаємодії, на значення термодинамічного електричного потенціалу, що встановлюється на поверхні тіла, однозначно визначається характеристиками матеріалу, у тому числі характерними розмірами структурної неоднорідності матеріалу, геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та сил кулонівської взаємодії;
- за локально градієнтного підходу у термомеханіці провести дослідження рівноважного стану електропровідного неферромагнітного шару з врахуванням геометричної неоднорідності його поверхні;
- провести аналіз впливу параметрів геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла на розмірні ефекти поверхневих напружень і міцності;

- дослідити вплив електронної підсистеми тіла на розмірний ефект міцності товстих плівок і їх вплив на значення силового навантаження;
- сформулювати ключову систему рівнянь моделі твердого тіла із врахуванням структурної неоднорідності матеріалу та шорсткості реальної поверхні, для вивчення взаємозв'язаних полів у необмеженому гетерогенному електропровідному шарі;
- проаналізувати вплив врахування залежностей від густини локальних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на розмірні ефекти поверхневих напружень у шарі та межу його міцності;
- дослідити вплив врахування нелінійності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на величину межі міцності та на її розмірний ефект.

Об'єктом дослідження є напружено-деформований стан півпростору та шару, що визначений із врахуванням структури матеріалу та неоднорідності приповерхневої густини.

Предметом дослідження є формування математичних моделей, що описують напружено-деформований стан тіл, із врахуванням структури матеріалу та неоднорідності приповерхневої густини, розв'язування крайових задач для півпростору та шару і дослідження ефектів, що пов'язані з приповерхневою неоднорідністю.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі для досягнення сформульованої мети використано методи та підходи термодинаміки нерівноважних процесів і механіки деформівного твердого тіла, а також аналітичні методи побудови розв'язку відповідних крайових задач.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому:

- вперше сформовано математичну модель для опису стаціонарного стану електропровідного неферромагнітного твердого тіла, яка враховує структуру матеріалу та неоднорідність приповерхневої густини;

- виходячи з нелінійної постановки задачі проаналізовано розподіли густини, термодинамічного електричного потенціалу, заряду та напружень з врахуванням степеневі залежності пружних властивостей матеріалу від густини;
- вперше досліджено вплив модулів пружності на розмірний ефект межі міцності шару і визначено, що врахування електронної підсистеми приводить до зміни отриманих розподілів механічних полів в усій області тіла та характеру їх значень у вузькій приповерхневій області;
- вперше обґрунтовано, що врахування залежності модулів пружності від густини є важливим з точки зору опису поведінки нанoeлементів, а густина та модулі пружності є рівнозначними характеристиками тіла;
- вперше продемонстровано, що в рамках моделі, яка враховує степеневі залежності локальних модулів пружності від густини, розмірні ефекти модулів пружності відрізняються від результатів, отриманих при лінійній постановці задачі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати математичного моделювання, виконаного в цій роботі, мають вагоме практичне значення. Із застосуванням побудованої в роботі математичної моделі стаціонарного стану електропровідного неферомагнітного необмеженого гетерогенного електропровідного шару створено алгоритм і проведено чисельні дослідження та візуалізовано розподіли густини, термодинамічного електричного потенціалу та напруженого стану в тілі.

Одержані в дисертаційній роботі результати дали можливість:

- продемонструвати, що значення термодинамічного електричного потенціалу, яке встановлюється на поверхні тіла, однозначно визначається характеристиками матеріалу, у тому числі характерними розмірами структурної неоднорідності матеріалу, геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та сил кулонівської взаємодії;

- встановити, що електронна підсистема тіла не впливає на розмірний ефект міцності товстих плівок, однак впливає на значення силового навантаження, що призводить до їх крихкого руйнування;
- дослідити, що, врахування нелінійності модуля Юнга суттєво змінює визначену величину межі міцності та впливає на її розмірний ефект, тоді як врахування впливу нелінійності коефіцієнта Пуассона впливає значно слабше.

До дисертації додано акти про те, що використання отриманих результатів досліджень та алгоритмів розрахунку дало можливість удосконалити деякі складові технологічного процесу виробництва конструктивних елементів «чистих приміщень».

Особистий внесок здобувача. Особистий внесок здобувача в роботах, виконаних у співавторстві, може бути визначений так: побудова розв’язку задачі математичної фізики, що описує локальні неоднорідності в електропровідному неферромагнітному термопружному твердому тілі [1,4,5]; визначення та дослідження напруженого стану і міцності в електропровідному неферромагнітному шарі з врахуванням розмірного ефекту [2]; побудова математичної моделі для дослідження напружено-деформованого стану і міцності локально неоднорідного електропровідного шару [3,6]; побудова розв’язку задач, що використовуються для дослідження напружено-деформованого стану локально неоднорідних електропровідних півпростору [7,8,18] і шару [10,12]. У всіх опублікованих у співавторстві працях автор брала участь у постановці задач.

Апробація результатів дисертації. Ключові результати досліджень доповідались на таких наукових конференціях: 1-а міжнародна конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2014; 9-а міжнародна наукова конференція. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”, Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2014; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2016», Львів,

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2016; «Сучасні проблеми термомеханіки», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2016; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2017», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2017; Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2018; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2019», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2019; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2020», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2020; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2021», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2021; Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки - 2021", Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2021; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2022», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2022; IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2022), Lviv, 2022.

Публікації. Результати проведених наукових досліджень відображені у 18 наукових працях, з них 3 статті опубліковано у періодичних виданнях, індексованих міжнародною наукометричною базою даних Scopus кuartиллю Q3, три статті у фахових наукових виданнях України, а також опубліковано 12 тез доповідей та матеріалів конференцій, одна з яких індексована міжнародною наукометричною базою даних Scopus.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота загальним обсягом 148 сторінки складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 280 найменувань та двох додатків. Основний текст викладено на 110 сторінках.

У першому розділі проведено критичний аналіз відомих підходів у області математичного моделювання електропровідних неферромагнітних тіл.

Показано, що побудова математичних моделей, які коректно, з врахуванням мікроструктури матеріалу і достатньою точністю описували б приповерхневі та приконтактні явища у електропровідних неферомагнітних тілах є актуальною науковою задачею.

У *другому розділі* наведено основні співвідношення термодинаміки локально неоднорідного твердого тіла. Використано базові співвідношення термодинаміки нерівноважних процесів. Прийнято, що довільний, малий у порівнянні з розміром тіла його елемент, розглядається як відкрита термодинамічна система, густина якої за рахунок потоку маси є змінна величина. За ключові функції вибрано: вектор переміщення (тензор напружень) і густину або вектор переміщення (тензор напружень) і вектор збурення маси. Записані крайові умови, що відповідають властивостям поверхонь досліджуваних твердих тіл. Сформульовано постановку задач, що описує напружено-деформований стан з врахуванням геометричної неоднорідності поверхні, а також залежності локальних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від густини матеріалу тіла. Визначено, що для прийнятих крайових умов система рівнянь записана відносно вектора переміщення (тензора напружень) і вектора збурення маси є найбільш прийнятна

У *третьому розділі* в рамках моделі локально неоднорідного електропровідного твердого тіла вивчено закономірності приповерхневої неоднорідності у гетерогенному півпросторі. При цьому прийнято суттєву залежність пружних властивостей від характеру неоднорідності і відображено її шляхом врахування залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від густини у точці тіла.

У *четвертому розділі* в рамках попередньої моделі досліджено закономірності приповерхневої неоднорідності у безмежному гетерогенному шарі. модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від відносної зміни густини у точці тіла.

Розділ 1. Аналіз відомих підходів до математичного моделювання сучасних конструкційних матеріалів

Дисертація присвячена формулюванню крайових задач та математичному моделюванню напружено-деформованого стану структурно неоднорідного електропровідного неферромагнітного твердого тіла з врахуванням геометричної неоднорідності його поверхні, проведенню на цій основі дослідження розподілу густини, термодинамічного електричного потенціалу, величини заряду та напружень, вивченню впливів розмірних ефектів на зони міцності з врахуванням залежності модулів пружності від густини. Тому в цьому розділі здійснено аналіз відомих підходів до моделювання напружено-деформованого стану структурно неоднорідних тіл та у суміжних областях.

1.1. Специфіка аналізу структури сучасних твердих матеріалів/тіл та їх механічної поведінки

Сучасний технологічний рівень промисловості, тенденції розвитку до створення мініатюрних технічних засобів вимагають дослідження впливу структури матеріалів на їхню механічну поведінку. Структура матеріалів істотно впливає на розвиток процесів пружного деформування та міцності матеріалів, тож пружні та міцнісні властивості дуже чутливі до її зміни. Вивчення проявів та внутрішніх механізмів механічного впливу на зміну механічних властивостей відноситься до проблем міцності. У механіці деформівного твердого тіла для опису вказаних процесів застосовують зміну значень меж текучості чи міцності. Проте вкрай важливим є завдання побудови відповідних математичних моделей середовищ і запис визначальних співвідношень для опису зміни механічної поведінки, що викликана неоднорідністю структури матеріалів. Хоча механіка залишається

феноменологічної наукою, актуальною є побудова конститутивних моделей і визначальних співвідношень, отриманих на розумінні та при врахуванні фізичних механізмів, що викликані зміною механічних характеристик матеріалів.

Для опису приповерхневої неоднорідності при побудові моделей в механіці деформівного твердого тіла застосовуються нелокальні, гібридні та градієнтні теорії пружності. Особливо нелокальні моделі суцільних середовищ є привабливими при моделюванні властивостей різних мікро/наноструктур, пружних властивостей композиційних матеріалів та структурованих матеріалів із субмікронними та нанорозмірними внутрішніми структурами, у яких ефективні властивості значною мірою визначаються розмірними ефектами (ефектами ближньої взаємодії когезії та адгезії). Узагальнені теорії пружності навіть для ізотропних матеріалів включають багато додаткових фізичних сталих, експериментальне визначення яких утруднене або неможливе. У зв'язку з цим значний інтерес становлять прикладні теорії з малою кількістю додаткових фізичних параметрів. Однак процес редукції нелокальних теорій, що має на меті зменшити кількість додаткових параметрів, є не цілком тривіальним і може призводити до некоректних результатів.

Відомо, що класична механіка суцільного середовища заснована на аксіомах, які дозволяють застосовувати її для опису масштабнезалежних процесів деформування [1].

Однак нові ефекти, які привернули значну увагу останнім часом, такі як вплив масштабних факторів, нелокальних ефектів та розміро-залежність механічних явищ, наприклад, при деформуванні тонких плівок, нанодротів, нанотрубок та композитів з мікронановключеннями, не можуть бути легко пояснені з використанням класичної механіки суцільних середовищ. У роботі [2] досить чітко та повно сформульовано фізичні причини та об'єкти, що

вказують на неможливість застосування до них класичної механіки середовищ: поверхневі ефекти для гетерогенних середовищ з мікроструктурою (роль яких надзвичайно важлива), фізико-механічні ефекти, поширені на одну чи кілька елементарних осередків мікронаноструктури, наявність полів дефектів, розширений спектр узагальнених змінних у мезо- та наноструктурах, таких як вільні повороти елементів структури, вільна формозміна та пористість. Для опису таких ефектів та пов'язаних з ними особливостей процесів деформування можуть використовуватися прямі дискретно-атомістичні методи дослідження, методи молекулярної динаміки, чисельні квантово-механічні методи.

Однак відомі і труднощі та обмеження, що виникають на шляху використання таких підходів. У зв'язку з цим останнім часом виник значний інтерес до нелокальних градієнтних континуальних теорій, що містять масштабні параметри та найбільш підходять для моделювання масштабних ефектів. У роботі [3] показано, що градієнтні теорії пружності можуть бути ефективно використані для моделювання масштабних ефектів у композитах, адгезійних ефектів у гетерогенних структурах, середовищ з полями дефектів, масштабних ефектів у задачах механіки тощо. Більше того, градієнтні континуальні моделі середовищ у ряді випадків дозволяють отримувати аналітичні оцінки, що становлять значний інтерес у прикладних задачах. Тому проблема визначення додаткових фізичних параметрів, що характеризують масштабні ефекти в градієнтних теоріях пружності, дуже актуальна.

Опису загальних положень, що стосуються структурних перетворень та змін фазового стану матеріалу та їх впливу на механічні властивості та геометричні параметри присвячені роботи [4-8].

1.2. Моделювання розмірних ефектів: наноструктури та наноматеріали конструкційного та функціонального призначення

Останнім часом актуальність дослідження закономірностей зміни фізичних властивостей речовини під час переходу до плівкового стану істотно зростає. Це пов'язано з роботами зі створення активних матеріалів та пристроїв на основі наноструктур [9-11]. Зміна фізичних властивостей речовини у плівковому стані відбувається під впливом таких причин, як: різноманітність структурних характеристик тонких плівок, що може змінюватися від гранично неупорядкованого дрібнодисперсного стану (гранулярні шари) до структури досконалого монокристалічного шару (епітаксіальні плівки); вплив неоднорідності і шорхуватості її поверхні в порівнянні з різними параметрами, що визначають ті чи інші фізичні властивості. Це призводить до виникнення нових специфічних ефектів, що не спостерігаються в об'ємних зразках. Розмірний ефект - це зміна фізичних властивостей із зміною розміру зразка внаслідок зростання внеску поверхневих властивостей порівняно з об'ємними і пов'язаний з обмеженням довжини вільного пробігу електронів товщиною плівки [9, 11]. У випадку дослідження кінетичних електронних властивостей тонких металевих та напівпровідникових плівок суттєвим є визначення взаємодії носіїв заряду з межами зразка з врахуванням механічних деформацій, які при цьому виникають. Тому створення адекватних математичних моделей фізичних процесів у тонких плівках є важливим напрямком.

Математичному моделюванню та дослідженню нерівноважних процесів в електропровідних неферромагнітних термопружних тілах та твердих розчинах з врахуванням приповерхневих неоднорідностей присвячені роботи Я.Й. Бурака, П.П. Костробія, Б.М. Марковича, М.В. Токарчука, І.І. Григорчака, Є.Я. Чаплі, Т.С. Нагірного, Б.П. Галапаца, Б.М. Гнідця, К.А. Червінка [12-16].

Основні положення квантової механіки є основою створення нанорозмірних квантових структур. У наносистемах має місце так званий розмірний ефект, тобто залежність властивостей наносистем від розміру наночастинок. Розмірний ефект Г. Глейтер визначив, як поведінку матеріалу, що спостерігається у випадку збігу розміру блоку мікроструктури та деякої критичної довжини, що характеризує явище (довжина вільного пробігу електронів та фотонів, розмір магнітних доменів, критичний радіус дислокаційної петлі та ін.) [17]. До наноматеріалів відносяться речовини не тільки тому, що вони мають малий характеристичний розмір структурного елемента, який відповідає за прояв тієї чи іншої властивості, а й тому, що характеристики цієї властивості суттєво залежать від розміру структурного елемента.

Як перший крок до нанотехнологій, Richard Feynman у своїй роботі [18] науково довів, що згідно фундаментальних законів фізики немає жодних перешкод для того, щоб створювати матеріальні об'єкти прямо з атомів. Було припущено, що можна переміщати атоми механічно і передбачено один з основних способів нанотехнології, що називається «знизу-вгору» (bottom-up). У 1974 році Norio Taniguchi вперше визначив, що нанотехнологія в основному складається з обробки поділу, консолідації та деформації матеріалів одним атомом або однією молекулою [19].

Утворення наночастинок з атомів супроводжується двома процесами: формуванням металевих ядер різного розміру та взаємодією між частинками, що сприяє створенню з них ансамблів, які становлять наноструктуру. Надмірна енергія таких об'єктів визначається у першу чергу некомпенсованістю зв'язків поверхневих та приповерхневих атомів. Під терміном "поверхня" або "міжфазна межа" зазвичай розуміють шар речовини кінцевої товщини, що розділяє об'ємні фази. Його товщина зазвичай становить кілька атомних шарів. Якщо кількості речовини на поверхні та всередині стають співмірними, то роль поверхні, як активнішої складової,

істотно зростає [20]. Зі зміною розмірів частинок пов'язаний ще ряд термодинамічних властивостей наночастинок. Розмір частинок можна розглядати як своєрідний еквівалент температури, і в цьому випадку значення потенціалу Гіббса відрізнятиметься від стандартних значень масивної фази [21].

Розмірна залежність найбільш значущих для даного матеріалу властивостей дає можливість відповісти на такі фундаментальні питання: чи відноситься аналізований матеріал до класу наноматеріалів і за яких розмірів структурних елементів досягається максимальний вигравш властивостей наноматеріалів. Слід зазначити, що властивості наноматеріалів визначаються не тільки розмірністю структурного елемента, а й оточенням, у якому поміщений такий елемент (структура межі, міжфазний натяг тощо).

Прояв розмірного ефекту є характерною особливістю наноматеріалів та є предметом систематичних досліджень [22-26].

Розмірно-залежні характеристики виявляються у діелектриках та магнетиках. Вивчення магнітних характеристик стимулюється значними прикладними успіхами у створенні магнітних матеріалів у наностані, цьому питанню присвячено ряд робіт [22, 23, 26, 27]. Розмірна залежність властивостей проявляється на таких характеристиках як коерцитивна сила, залишкова намагніченість, магнітоопір. За певних розмірів нанокластерів (1...10 нм) проявляється явище супермагнетизму.

Один з важливих напрямів у дослідженні наноматеріалів - вивчення розмірної залежності механічних характеристик наноматеріалів (твердості, міцності, пластичності, пружності та ін.) Експериментальні дослідження механічних властивостей наноматеріалів показали, що межа міцності та твердість багатьох металів (Pd, Си, Ag, Ni та ін.) є значно вищою, ніж у відповідних крупнозернистих аналогах [23, 26, 28-31].

Збільшення твердості та міцності із зменшенням розміру зерна до деякого критичного розміру практично характерне для всіх кристалів. Це

впливає з відомого рівняння Холла-Петча, у відповідності з яким межа текучості залежить обернено пропорційно від середнього розміру зерна [29].

Комп'ютерне моделювання емісії з меж зерен джерел дислокацій у наноматеріалах описано в [31]. Так, з модельного експерименту випливає, що в нанокристалічній міді ($L \sim 5,2$ нм) після 10% деформації спостерігається розширення міжзеренних меж і поява часткових дислокацій Шоклі. Особливо велика роль зернограничних дислокацій та дислокацій невідповідності у наноматеріалах, отриманих методами інтенсивної пластичної деформації. Можна вважати, що роль дислокацій у пластичній деформації наноматеріалів є вкрай мала і нею можна нехтувати. При цьому вони часто є нерухомими конфігураціями, що, мабуть, є однією з причин того, що наноматеріали при випробуванні на розтягнення виявляють дуже низьку пластичність. Визначальну роль в аномаліях механічних властивостей наноматеріалів відіграють, ймовірно, межі зерен [22, 24].

Докладніше структура міжзеренних меж вивчена на наноматеріалах, отриманих методом інтенсивної пластичної деформації [29]. У цьому випадку межзеренні границі характеризуються такими особливостями, як висока концентрація вільного обсягу та зернограничних дислокацій, підвищена дифузійна проникність та схильністю до утворення сегрегацій.

При зниженні розміру зерен нанокристалічних матеріалів класична дислокація переходить до зернограничного мікропроникнення, яке краще реалізується при зменшенні розміру зерна. Це є основною причиною аномальної поведінки рівняння Холла-Петча, яке базується на різних дислокаційних моделях, коли величина зерна досягає критичних розмірів та відбуваються кардинальні зміни механізмів деформації, пов'язані з межами зерен [33].

Важливим фактором, що визначає механічну поведінку наноматеріалів, є внутрішні напруження. Вони завжди є в наноматеріалах через велику кількість близько розташованих зерен і їх стиків. Крім того, внутрішні

напруження можуть виникати внаслідок особливостей методів одержання наноматеріалів. Наявність великих внутрішніх напружень у нанокристалах призводить також до зміни атомної структури наноматеріалів. Зокрема, виявлено зміну міжатомних відстаней у кристалічній решітці, зниження координаційного числа із зменшенням розміру зерен наноматеріалів [24, 34].

Методи дослідження нанооб'єктів спрямовані, насамперед, на визначення розміру та структури наночастинок, встановлення впливу розмірних ефектів на властивості наноматеріалів. На теперішній час існує багато різноманітних методів діагностики, методик дослідження фізико-хімічних характеристик твердотільних наноструктур [9, 22, 27, 34, 35].

Наноматеріали можна класифікувати за хімічним складом, формою кристалітів та розташуванням границь розділу. Один із варіантів подібної класифікації запропоновано Глейтером [17]. У цій роботі запропоновано чотири різновиди матеріалів з хімічного складу та розподілу структурних особливостей (однофазні, багатофазні з ідентичними та неідентичними поверхнями розділу та матричні композиції) та три категорії форм структури (шарувата, волокниста та ін.).

Наноматеріали конструкційного та функціонального призначення на сьогоднішній день є однією з найбільш затребуваних напрямків нанотехнологій для різних технічних рішень [36-38]. Застосування певного матеріалу визначається комплексом властивостей, що визначають міцність, пластичність і в'язкість. Значний інтерес до наноматеріалів обумовлений тим, що їх конструкційні та функціональні властивості суттєво відрізняються від властивостей крупнозернистих аналогів. Як представлено в [36] міцність нанокристалічних матеріалів при розтягуванні істотно перевищує міцність крупнокристалічних аналогів і при цьому зберігається найкраще співвідношення між міцністю і пластичністю.

Останнім часом спостерігається збільшення досліджень, спрямованих на з'ясування фізико-хімічних характеристик наноматеріалів [39-43], що

пов'язано з їх аномально високими механічними характеристиками і, відповідно, високою міцністю на розрив. Крім того, деформація деяких класів наноматеріалів призводить до зміни їх електронної структури, що сприяє появі нових властивостей та нових фізичних ефектів. Зокрема, під впливом механічних напружень змінюються електромеханічні властивості цих матеріалів.

1.3. Аналіз напружено-деформованого стану тонких плівок та оболонок

Наявність напружень у тонких плівках і функціональних покриттях є серйозною проблемою в багатьох технологічних застосуваннях оскільки надмірний рівень залишкового напруження може різко вплинути на продуктивність, надійність і довговічність компонентів матеріалу і пристроїв. Найгірший сценарій призведе до розриву плівки шару, що піддається розтягуванню [44, 45] або відшаровуванню, вигинанню чи утворенню деформацій внаслідок виникаючих при стисканні напружень [46-49].

Розподіл залишкових напружень може значно впливати на адгезію, в'язкість, пластичність та термомеханічну поведінку тонких плівок [49-52] і спричинити появу горбків та інших неоднорідностей на з'єднаннях, що приводить до відмов у роботі та короткого замикання [53-57]. З іншого боку, напружений стан може мати сприятливий вплив на фізичні властивості тонких шарів і наноструктур, наприклад, на провідність [58], діелектричну проникність [59], п'єзоелектричні характеристики, магнітну анізотропію та магніто-пружні зв'язки [60, 61], або посилення в рухливості носіїв заряду в напівпровіднику на основі кремнієвих технологій [62]. Тому існує значна мотивація для розуміння походження напружень у тонких плівках, оскільки

воно може безпосередньо впливати на проектування, обробку та термін служби сучасних матеріалів і компонентів.

Незалежно від технології виготовлення, тонкі плівки можуть піддаватись великим внутрішнім напруженням у процесі їх експлуатації. Для багатьох матеріалів, величина напруження в тонкошарових формах і наноструктурах, як правило, перевищують міцність на розрив відповідних їм масивних аналогів [63, 64].

При моделюванні напружено-деформованого стану поверхневого шару використовують розмірні ефекти координатних залежностей модулів пружності [65-69], границь міцності [70-74], текучості [75-77], параметрів довговічності [79, 80] тощо. Для їх опису застосовуються емпіричні дослідження [81-83], статистичні методи [84, 85], електронні теорії [86, 87] та методи, що враховують дискретну структуру тіла [88-90]. Як приклад в теорії пружності може служити енергетичний підхід до явищ крихкого руйнування матеріалів, запропонований Гріффітсом [91], що дозволяє з використанням апарату класичної теорії пружності застосувати поняття поверхневої енергії до опису процесів руйнування твердих тіл.

Для дослідження стану приповерхневих областей тіл, характеристики матеріалу яких є відмінними від характеристик внутрішніх областей, застосовують моделювання тонкими оболонками [92, 93]. З врахуванням того, що у порівнянні з розмірами тіла товщина приповерхневої області значно менша, його фізико-механічні характеристики враховуються в умовах спряження тіл [94-97]. Таке представлення вперше було запропоновано в роботі Дж. Гіббса [98]. Застосування такого представлення та його впровадження при моделюванні механічних процесів з врахуванням приповерхневих неоднорідностей посвячені роботи Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно, Я.Й.Бурака, Ю.З.Повстенка, П.Р.Шевчука, Р.М.Кушніра та ін. Необхідно відзначити, що згаданий підхід накладає обмеження на область його застосування, оскільки вимагає, щоб розмір тіла був значно більший за

розмір приповерхневої області. Крім цього, такі моделі обмежують врахування впливу процесів, що відбуваються у тілах на приповерхневих неоднорідностях.

Для моделювання напружено-деформованого стану і відповідної дифузії домішок у півпросторі, що викликані локальною поверхневою неоднорідністю, в [93] використано метод спряження континуумів, що мають різну розмірність. Для цього використовується ненульова міра Лебега, а межа тіла описується як система тіло-поверхня з розмірністю, меншою на одиницю, ніж розмірність тіла.

1.4. Врахування в математичних моделях неоднорідності конструкційних матеріалів та їх характеристик

Для тривимірної постановки з врахуванням приповерхневих неоднорідностей розглянуто моделі електропровідного неферомагнітного тіла в роботах Я.Й.Бурака та його учнів [99-101]. Такі моделі формують на основі електронної будови тіла та з урахуванням наявності подвійного електричного шару. Зокрема в [100] неоднорідність електричного потенціалу застосовано для представлення приповерхневої неоднорідності полів, що мають іншу фізичну природу. В роботах [102-105, 158, 161, 163] розглянуто нелокальну залежність між компонентами тензорів напружень та деформацій, що базується на фундаментальних положеннях термодинаміки нерівноважних процесів [106-109, 158, 167] і нелінійної механіки [110-112]. Такий підхід, у порівнянні з класичною моделлю, розширює простір параметрів стану хімічним потенціалом, густиною матеріалу та вектором збурення маси. Також у монографії [105] продемонстровано, що моделі побудовані з врахуванням локально градієнтного підходу, можуть бути застосовані для опису неоднорідностей приповерхневих областей твердих тіл з врахуванням структури матеріалу.

Із застосуванням вказаного підходу, з метою вивчення закономірностей, характерних для взаємозв'язаних полів в електротермопружних однокомпонентних та багатокомпонентних тілах та твердих розчинах, а також із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності, проведений широкий ряд досліджень [113-143, 168, 176]. Встановлено, що запропоновані локально градієнтні моделі механіки дозволяють проводити дослідження виникаючих розмірних ефектів, визначати межі міцності тіл, а також вплив на неї неоднорідностей матеріалу.

Модель локально градієнтного пружного тіла для опису інерційності механічного поступального руху і збурень маси, що враховує акустичну емісію при утворенні у тілі вільних поверхонь, запропоновано у працях [124, 144].

У працях [138, 140] представлено методіку дослідження хвильових процесів у тілах із врахуванням неоднорідностей їх поверхневих ділянок. Шуканий розв'язок пропонується у вигляді суми усередненої, тобто пов'язаної із приповерхневою неоднорідністю, та коливної складових досліджуваних полів. Така методіка дозволяє вивчити вплив приповерхневих неоднорідностей тіла та наявних у матеріалі домішок на власні коливання шару.

В роботах [135, 141, 145] побудовано модель термопружного твердого тіла для дослідження впливу розподілу температурного поля і хімічного потенціалу на ефекти зумовлені приповерхневою неоднорідністю. Досліджено вплив зміни температури на власні коливання, що виникають у шарі з урахуванням впливу закріплення поверхні; розглянуто закономірності енергії взаємодії при хвильових процесах в тілі; запропоновано схему дослідження рівноважного стану середовища з порожниною еліптичної форми [145].

Дослідження механодифузійних процесів у твердих розчинах з врахуванням ефектів локальної градієнтності на основі побудованих

відповідних математичних моделей проведено в [129]. Продемонстровано, що односортні частинки можуть бути присутні у зв'язаному (підсистема «скелет») та вільному (підсистема «домішки») станах і ці підсистеми здатні обмінюватися масою. Окремо в роботі представлено опис самодифузійних процесів.

Питанням гетеродифузії, що враховують шляхи міграції домішок у матеріалі тіла та мікроструктуру речовини при моделюванні дифузії присвячено роботи [104, 146, 147].

Варіаційний підхід при побудові розв'язків крайових задач математичної фізики та узагальнену схему їх чисельної реалізації із застосуванням методу апроксимацій найменших квадратів розглянуто в [148-150].

Визначальні співвідношення для опису інерційних локально-нерівноважних процесів у термомеханіці наведено в роботах [114, 151]. Із застосуванням як параметричної величини імпульсу вектора напружень вдалося записати рівняння стану для компонент тензора напружень як лінійну залежність від компонент тензора деформацій та вектора прискорення.

У роботі [122] з використанням підходу Лагранжа наведено визначальні співвідношення для термодинамічного формувального оцінювання приповерхневих явищ, що виникають у термопружних тілах. При цьому приповерхневі явища розглядалися як складена система, що об'єднує термопружне тіло і зовнішнє середовище в квазістатичне утворення.

Математичне моделювання процесів, що відбуваються у електропровідних неферомагнітних твердих тілах та відповідні чисельні дослідження наведено в роботах [115, 136, 143, 151, 159, 176]. З врахуванням локальної градієнтності процесів та сил кулонівської взаємодії записано визначальні співвідношення, що враховують вплив приповерхневих неоднорідностей у електропровідних неферомагнітних твердих тілах.

Розвиток цього підходу на неферомагнітні діелектричні тіла проведено в роботах [152-155], в яких показано вплив на приповерхневі неоднорідності розподілу поля хімічного потенціалу.

Визначення деформаційних та міцністних параметрів твердих тіл ґрунтується на задачах механіки суцільного середовища, що описують взаємопов'язані фізичні процеси в досліджуваних тілах [156, 157]. Основою таких досліджень є використання відповідних моделей фізико-механічних процесів у тілах, які враховують локальні варіації густини і пружні властивості матеріалу [158, 195].

Методику, що передбачає застосування джерел маси для моделювання шорсткості поверхні запропоновано у [159, 162, 181]. У роботі [196] сформульовано ключові системи рівнянь математичної моделі локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного твердого тіла із врахуванням розмірного ефекту, а відповідні крайові умови щодо розподілу густини маси обґрунтовано у [167, 175]. Оскільки всі механічні властивості (густина, пружність та інші) визначаються станом просторової структури матеріалу тіла [280], тому природним розширенням моделі є врахування неоднорідності модулів пружності [158].

У роботі [161] запропоновано підхід, що описує гетерогенні пружні тіла, модулі пружності яких залежать від локальної густини маси, проте без врахування електропровідності тіла. Згідно [176] врахування електричного поля є суттєвим при описі деформівних електропровідних тіл, а локальні варіації густини можуть бути причиною його нерівномірного розподілу.

Модель ізотропного деформівного електропровідного неферомагнітного електронейтрального твердого шару, що займає область $-\ell \leq x \leq \ell$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$ є предметом досліджень як у квантовій фізиці [197-199], так і у класичній [158], оскільки є моделлю різноманітних підкладів, плівок, які широко використовуються у

нанотехнологіях, та для якої є характерним розмірний ефект, що виражається як залежність деяких характеристик шару від його товщини.

1.5. Сучасні виклики при моделюванні електропровідних неферромагнітних тіл

Розвиток сучасної техніки та технологій ставлять завдання отримати матеріали з передбаченням їх властивостей, побудови пристроїв, суттєвими рисами яких є сильна просторова неоднорідність та макроскопічний прояв квантових ефектів. Незважаючи на значні досягнення фізики конденсованого стану речовини, фактично на початковому етапі свого розвитку залишається мікроскопічна теорія неоднорідних систем. Причиною цього є надзвичайна складність теоретичного дослідження рівноважних та нерівноважних властивостей просторово обмежених металів внаслідок відсутності трансляційної інваріантності. Ця обставина суттєво ускладнює послідовне врахування багаточасткових ефектів в електронній підсистемі. Найбільші успіхи у дослідженні електронних властивостей просторово обмежених металів досягнуто в теорії функціоналу густини (DFT) [200–204]. Однак дослідження властивостей просторово обмежених металів з врахуванням дискретності іонної підсистеми є проблематичним у цій теорії, оскільки не існує однозначної методики побудови необхідних функціоналів енергії.

Бурхливий розвиток нанотехнологій за участю процесів осадження металів на різних підкладах потребує теоретичного аналізу та розуміння електронних ефектів у нанокластерних та наноплівкових структурах. Якщо розмір наноструктури співмірний із відповідною довжиною хвилі Фермі електронів у ній, то різні фізичні властивості можуть сильно залежати від розміру цієї наноструктури. Таке явище називається «квантово-розмірний ефект» [205–207] і є характерним для багатьох фізичних характеристик металевих наноплівочок, наприклад, термодинамічної стійкості, електричного опору, роботи виходу, поверхневої енергії і т.д. Внаслідок суттєвих

відмінностей властивостей металевої наноструктури від об'ємних властивостей макроскопічного зразка цього ж матеріалу, їх дослідження становлять значний теоретичний та експериментальний інтерес.

Тоді як методи опису дифузійних процесів у конденсованих системах у межах статистики Гіббса на даний час добре розроблені, то опис суб- та супер-дифузійних процесів у різних середовищах виходить за межі статистики Гіббса та розглядається в узагальнених статистиках Тсалліса [208–226], Рені [227–240], Шарма–Мітал [241, 242], суперстатистиці [243–248], які також інтенсивно застосовуються для дослідження самоорганізаційних і фрактальних структур, субдифузії, турбулентності, хімічних реакцій, а також різних економічних, соціальних і біологічних систем. Ентропію Тсалліса широко використовують у різних напрямках неекстенсивної статистичної механіки [218–220], зокрема у дослідженнях явищ субдифузії [249–252], турбулентності [253–260], дослідженнях коефіцієнтів переносу у газах і плазмі [261, 262], а також для опису квантових дисипативних систем у статистичній механіці [263]. Ентропія Рені, яка залежить від параметра q ($0 < q \leq 1$) та у разі $q = 1$ співпадає з ентропією Гіббса–Шеннона, знаходить усе більше застосування [264]. Використовуючи її, у праці [236] встановлено зв'язок між параметром q та теплоємністю системи. У праці [265] застосовано метод нерівноважного статистичного оператора та ентропію Рені для опису дуже далеких від рівноваги систем.

Актуальними також залишаються дослідження нерівноважних процесів електронної підсистеми просторово обмежених металів, які є важливими у каталітичних процесах, для формування наноструктур у нанотехнологіях. Для опису нерівноважних процесів (дифузії, адсорбції, десорбції) для просторово неоднорідних електрон–атомних систем існують та розвиваються різні теоретичні підходи, зокрема широко використовується часовозалежна теорія функціоналу густини (TDDFT) [266–273], яка за роки свого розвитку

продемонструвала значні досягнення та продовжує розширювати свої межі застосувань [274].

Для аналізу нелокальних ефектів Гаріс та Джонс [275, 276], Вікборг та Інглсфілд [277], а також Джонсон і Срінівасан [278] отримали вирази для обміннокореляційної енергії обмеженого електронного газу. Для електронів у потенціальній ямі з безмежно високими стінками обчислено обмінну частину поверхневої енергії [275, 276], а також у наближенні хаотичних фаз обмінно кореляційна та обмінна частини [277]. Порівняння цих величин з розрахованими у наближенні локальної густини показало, що обмінно-кореляційні частини відрізняються приблизно на 10%, обмінні — на 50%, а кореляційні — у 6 разів. Тобто, наближення локальної густини значно краще працює для суми обмінної та кореляційної частин енергії, ніж для кожної зокрема [279].

В задачах механіки деформівного твердого тіла поняття поверхні тіла зазвичай ідеалізують і як правило моделюють кусково-гладкою поверхнею. Наприклад для випадку півпростору поверхню моделюють площиною. Але врахування геометричної неоднорідності при моделюванні реальної поверхні тіла (рис. 1.1), є актуальним у випадку мікро та наноелементів, оскільки характерний розмір неоднорідності може бути співвимірним з розміром тіла

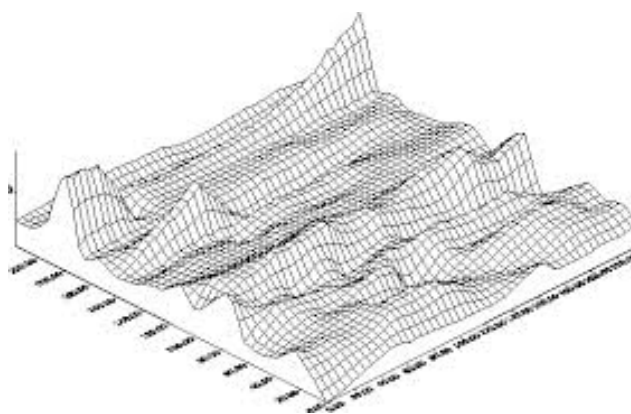


Рис. 1.1. Схематичне представлення геометричної неоднорідності поверхні.

Зокрема це проілюстровано на рис. 1.2., на якому зображено тонку (13 нм) золоту плівку, отриману шляхом напилення [158].

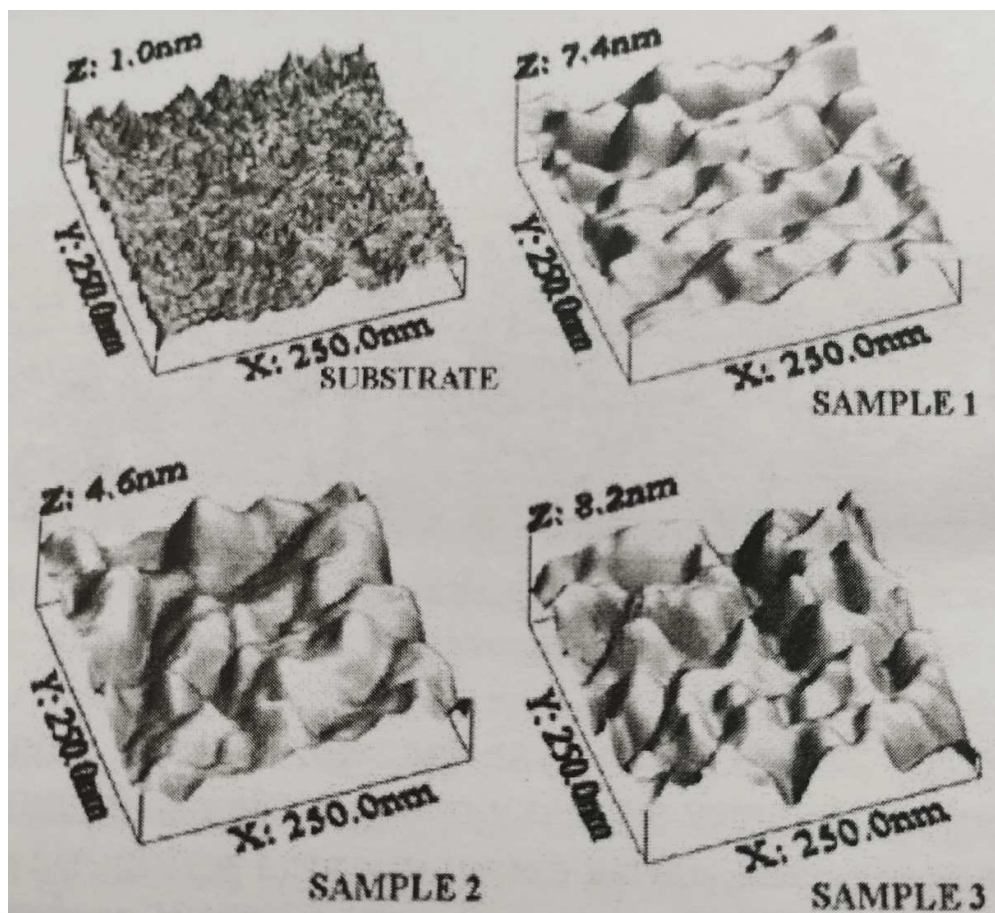


Рис. 1.2. Зображення тонкої золотої плівки, напиленої на SiO_2 основу на різних швидкостях

1.6. Висновки до розділу 1

Здійснений аналіз відомих підходів до математичного моделювання різноманітних ефектів в електропровідних неферомагнітних тілах показав, що залишається актуальною науковою задачею створення адекватних математичних моделей, що коректно, з врахуванням мікроструктури матеріалу і з достатньою точністю, описують приповерхневі та приконтактні явища, зокрема розмірні ефекти.

Такі моделі повинні враховувати структуру матеріалу та неоднорідність приповерхневої густини у стаціонарному стані електропровідного

неферромагнітного термом'якого тв'єрдого тїла. При цьому необхідно аналізувати також джерела маси для коректного врахування «приповерхневого дефекту маси», властивого відомим моделям, які побудовані за локально градієнтним підходом у термомеханіці.

Потребують подальшого вивчення закономірності приповерхневої неоднорідності у півпросторі для локально неоднорідного електропровідного ферромагнітного пружного тїла. Необхідно провести дослідження рівноважного стану електропровідного ферромагнітного шару з врахуванням геометричної неоднорідності його поверхні, зокрема проаналізувати вплив параметрів геометричної неоднорідності реальної поверхні тїла на розмірні ефекти поверхневих напружень і міцності.

У математичних моделях електропровідних ферромагнітних тїл необхідно враховувати структурну неоднорідність матеріалу та шорсткість реальної поверхні для аналізу взаємозв'язаних полів у необмеженому гетерогенному електропровідному шарі. Необхідно проаналізувати вплив врахування залежностей від густини локальних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на розмірні ефекти поверхневих напружень у шарі та межі його міцності, дослідити вплив врахування нелінійності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на величину межі міцності та на її розмірний ефект.

Вказані неоднорідності локальних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона далі у цій роботі записано використовуючи нелінійні представлення модулів пружності, що значно ускладнює побудову розв'язків поставлених задач, але підвищує точність отриманих результатів.

Розділ 2. Математичні моделі термодинаміки нерівноважних процесів

У цьому розділі виведено основні співвідношення термодинаміки аналізованого локально неоднорідного твердого тіла. При цьому використано базові співвідношення термодинаміки нерівноважних процесів та прийнято, що довільний, малий порівняно з розміром тіла, його елемент розглядається як відкрита термодинамічна система, густина якої за рахунок потоку маси є змінною величиною. За ключові функції вибрано: вектор переміщення (тензор напружень) і густину або вектор переміщення (тензор напружень) і вектор збурення маси. Записано крайові умови, що відповідають властивостям поверхонь досліджуваних твердих тіл. Сформовано математичну модель, що описує напружено-деформований стан з врахуванням геометричної неоднорідності поверхні, а також залежності локальних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від густини матеріалу тіла. Показано, що для прийнятих крайових умов система рівнянь, записана відносно вектора переміщення (тензора напружень) і вектора збурення маси є найбільш прийнятною.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [169, 172, 173, 181-194].

2.1. Балансові співвідношення

Розглядаємо деформівне електропровідне неферомагнітне тверде тіло, у якому визначальними немеханічними процесами є процеси: теплопровідності та перерозподілу електричної системи (електропровідності). При цьому, за аналогією до [157] поляризацією та намагнічуванням нехтуємо. Для макроскопічного опису цих нерівноважних процесів та процесу деформації у відповідності з положеннями лінійної термодинаміки необоротних процесів [106-109] й використовуючи методи

нелінійної механіки [110] застосуємо гіпотезу локального рівноважного стану. Врахування впливу структури тіла, зокрема його поверхні, на процеси в тілі проведемо із застосуванням підходу, розкритого у [158]. Адитивним та інтенсивним параметрами, що уможливають опис такої структури, є, відповідно, густина маси тіла ρ та спряжений параметр – хімічний потенціал H .

У ролі базових адитивних параметрів моделі приймаємо тензор деформацій, а також ентропію S та густину маси ρ , віднесені до одиниці об'єму. При описі електричних явищ виходимо із міркувань, наведених у роботі [157], а спряженим до інтенсивного параметру термодинамічного електричного потенціалу Φ (роботи, яку необхідно затратити, щоб перенести мисленний одиничний позитивний заряд із безмежності у задану точку аналізованого тіла) є у такому випадку розподілений електричний заряд ω одиниці об'єму тіла.

2.1.1. Залежність параметрів локального стану від змінної густини тіла

Вагомою особливістю опису неоднорідних тіл є потреба врахування залежності параметрів локального стану від змінної густини тіла. У межах класичної лінійної теорії, коли густина матеріалу тіла ρ у заданій точці визначається густиною розподілу мас у початковому стані ρ_* та кульовою складовою тензора деформації e приймають $\rho = \rho_* (1 - e)$, що тотожно задовольняє балансове рівняння для густини. У роботах Я.Й.Бурака та Т.С.Нагірного показано, що розширення принципу локальної термодинамічної рівноваги на локально неоднорідні системи може бути виконано шляхом введення до простору незалежних параметрів стану хімічного потенціалу (густини) та його градієнту [108, 156, 160]. У роботі [161] запропоновано підхід до опису пружних тіл із мікроструктурою, що базується на введенні джерел маси у рівняння для густини та розглянуто

нелінійні задачі, які отримано шляхом врахування залежності модулів пружності від густини. На основі моделі гетерогенних електропровідних неферромагнітних твердих тіл у [158] вивчено приповерхневу неоднорідність у півпросторі, а також на прикладі шару та циліндру проаналізовано розмірний ефект межі міцності та зроблено висновки, що за лінійного наближення електрична підсистема не впливає на міцнісні характеристики тіл. При цьому залишається відкритим питання впливу електричної підсистеми на напружений стан та експлуатаційні параметри у випадку нелінійної постановки моделі.

До балансових співвідношень входить:

рівняння для повної енергії

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T \vec{j}_s - H \vec{j}_m - \Phi \vec{j}_\omega - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) + \sigma_E,$$

рівняння балансу імпульсу поступального руху

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_e,$$

рівняння балансу ентропії

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \sigma_s,$$

рівняння балансу заряду

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega,$$

та рівняння балансу маси

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m + \sigma_m. \quad (2.1)$$

Тут: $\vec{\nabla}$ – вектор-оператор Гамільтона,

τ – час,

$\vec{F}_e = (\vec{j}_\omega + \omega \vec{v}) \times \vec{B} + \omega \vec{E}$ – пондеромоторна сила,

\vec{B} – вектор індукції магнітного поля,

\vec{E} – вектор напруженості електричного поля;

\vec{k}_v – імпульс механічного поступального руху,

$\hat{\sigma}$ – тензор напруження Коші,

S – густина ентропії,

ω – густина електричного заряду,

ρ – густина маси,

\vec{j}_s – вектор потоку ентропії,

\vec{j}_ω – вектор потоку заряду,

\vec{j}_m – вектор потоку маси,

σ_s – виробництво ентропії,

σ_m – джерела маси;

μ_0 – магнітна стала,

T – термодинамічна температура,

H – хімічний потенціал (робота, яку необхідно затратити, щоб перенести уявно виділену частинку із безмежності у задану точку тіла; інакше

кажучи змінити густину матеріалу тіла у точці на одиницю; збурення цієї величини можна ототожнити із збуренням енергії зв'язку [16]),

σ_E – джерела енергії, пов'язані з утворенням поверхні (приймаємо $\sigma_E = H\sigma_m$),

$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\tau}$ – вектор швидкості центра мас елемента тіла,

а крапкою "." відзначено скалярний добуток тензорів (векторів), символом "×" – векторний добуток.

Варто зазначити, що у відповідності із законом збереження маси джерела маси можуть бути відмінними від нуля лише при розгляді відкритої термодинамічної системи. У моделях даного підходу наявність цього доданку обґрунтовують потребою опису структури матеріалу тіла. Приймається, що тіло у початковий момент часу є відкритою термодинамічною системою, а джерела маси пов'язують з переходом від початкового однорідного до актуального структурно неоднорідного континууму [158]. Як показано у роботі [162], введення такого доданку дає змогу описати "дефект маси", що виникає біля поверхні структурно неоднорідного тіла. Інтенсивність джерел маси пов'язано із геометричною неоднорідністю (шорсткістю) реальної поверхні тіла у [158].

2.1.2. Рівняння балансу внутрішньої енергії

Напруженості електричного \vec{E} та магнітного $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ полів у області тіла задовольняють рівнянням Максвела для повільно рухомих середовищ [14, 164]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \mu_0 (\vec{j}_\omega + \omega \vec{v}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \omega, \quad (2.2)$$

де ε_0 – діелектрична проникність.

Повна енергія E у цьому випадку є сумою внутрішньої U , кінетичної K та енергії електромагнітного поля U_e :

$$E = U + K + U_e.$$

Останню енергію, у відповідності з [158], прийнято у вигляді

$$U_e = (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) / 2. \quad (2.3)$$

На основі наведених вище співвідношень та приймаючи $dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v$ записуємо таке рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} = & \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \Phi \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \\ & - T \sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H - \vec{j}_\omega \cdot (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}'), \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$.

2.2. Визначальні рівняння: рівняння стану та кінетичні рівняння

Подальший розвиток моделі полягає у формулюванні визначальних співвідношень: кінетичних рівнянь та рівнянь стану. У [163] показано, що узагальнення лінійних кінетичних рівнянь до функціонального вигляду (функціонал по історії зміни термодинамічних сил) дає змогу описати широкий спектр реологічних явищ, а вибір функції впливу у кінетичному співвідношенні для потоку маси у вигляді дельта-функції різницевого аргументу призводить до опису незатухаючої пам'яті про деяку подію, що трактується як утворення поверхні (у загальному – структури) тіла. При

цьому потік маси є пропорційний до похідної за часом від градієнта хімічного потенціалу. Таким чином, за належного набору функцій впливу у функціональних співвідношеннях між термодинамічними силами, за які приймаємо $\vec{\nabla}T, \vec{\nabla}\Phi - \vec{E}', \vec{\nabla}H$, та потоками ентропії \vec{j}_s , заряду \vec{j}_ω і маси \vec{j}_m , лінійні кінетичні рівняння набувають вигляду [158]

$$\begin{aligned}\vec{j}_s &= -g_{ss}\vec{\nabla}T - g_{s\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'), \\ \vec{j}_\omega &= -g_{\omega s}\vec{\nabla}T - g_{\omega\omega}(\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}'),\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\vec{j}_m = -g_{mm} \frac{\partial \vec{\nabla}H}{\partial \tau}, \quad (2.6)$$

де $g_{ss}, g_{s\omega}, g_{\omega s}, g_{\omega\omega}, g_{mm}$ – коефіцієнти, що, взагалі кажучи, можуть залежати від значення параметрів рівноважного стану, на базі якого відбуваються процеси, описані кінетичними рівняннями (2.5) та (2.6).

Вимога невід'ємності виробництва ентропії накладає певні обмеження на коефіцієнти у співвідношеннях (2.6). Відповідно до загальних положень термодинаміки електропровідних тіл зручно прийняти

$$g_{ss} = \frac{\lambda_{ss}}{T}, \quad g_{s\omega} = \frac{\lambda_{sw}}{T}, \quad g_{\omega s} = \frac{\lambda_{ws}}{T}, \quad g_{\omega\omega} = \frac{\lambda_{ww}}{T}. \quad (2.7)$$

Для енергії розсіяння вибираємо типовий [165] вигляд білінійної форми термодинамічних потоків та сил

$$T\sigma_s = -\vec{j}_s \cdot \vec{\nabla}T - \vec{j}_\omega \cdot (\vec{\nabla}\Phi - \vec{E}') \quad (2.8)$$

і для енергії $Y = U - \frac{g_{mm}}{2} \vec{\nabla}H \cdot \vec{\nabla}H$ структурно неоднорідного електропровідного неферомагнітного матеріалу отримуємо наступне рівняння Гіббса

$$dY = \hat{\sigma} : d\hat{\epsilon} + TdS + Hd\rho + \Phi d\omega, \quad (2.9)$$

що співпадає із рівнянням, отриманим у моделі гетерогенного електропровідного неферомагнітного тіла у [158]. Зазначимо, що вперше таку енергію неявно введено у [162]. При цьому простір визначення енергії Y складається з таких екстенсивних параметрів стану, як тензор деформації, ентропія, густина та заряд

$$Y = Y(\hat{e}, S, \rho, \omega), \quad (2.10)$$

а спряженими до них є інтенсивні параметри напружень, температури, термодинамічних хімічного та електричного потенціалів.

Перейшовши за допомогою перетворення Лежандра $G = Y - TS - \Phi\omega$ до енергії G , яка означена у просторі деформацій, температури, густини й заряду, запишемо для останньої таке рівняння Гіббса

$$dG = \hat{\sigma} : d\hat{e} - SdT + Hd\rho - \omega d\Phi, \quad (2.11)$$

що дозволяє отримати наступні загальні рівняння стану

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad H = \frac{\partial G}{\partial \rho}, \quad \omega = -\frac{\partial G}{\partial \Phi}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\partial G}{\partial \hat{e}}. \quad (2.12)$$

Прийmemo, що енергія $G(\hat{e}, T, \rho, \Phi)$ є квадратичною функцією у просторі збурень базових параметрів стану

$$\hat{e} = \hat{e} - 0, \quad \theta = T - T_*, \quad \rho = \rho_*, \quad \phi = \Phi - \Phi_* \quad (2.13)$$

відносно відлікового стану. За відліковий стан прийmemo стан однорідного ізотропного електронейтрального середовища, вільного від зовнішнього силового навантаження, із такими параметрами

$$\hat{e} = 0, \quad \hat{\sigma} = 0, \quad T = T_*, \quad S = S_*, \quad \rho = \rho_*, \quad H = H_*, \quad \omega = 0, \quad \Phi = \Phi_*. \quad (2.14)$$

Якщо енергію прийmemo у вигляді

$$\begin{aligned}
G(\hat{e}, \theta, \rho - \rho_*, \phi) = & G_* - S_* \theta + H_*(\rho - \rho_*) + \mu \hat{e} : \hat{e} + \frac{1}{2} \lambda e^2 + \\
& + a_{et} e \theta + a_{em} e (\rho - \rho_*) + a_{e\omega} e \phi + a_{tm} \theta (\rho - \rho_*) + a_{t\omega} \theta \phi + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) \phi + \\
& + \frac{1}{2} a_{tt} \theta^2 + \frac{1}{2} a_{mm} (\rho - \rho_*)^2 + \frac{1}{2} a_{\omega\omega} \phi^2, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

де $\mu, \lambda, c_{ij} (i, j = e, t, m, \omega)$ – параметри матеріалу, то явний вигляд рівнянь стану (2.12) є такий

$$\begin{aligned}
s \equiv S - S_* &= -a_{et} e - a_{tt} \theta - a_{tm} (\rho - \rho_*) - a_{t\omega} \phi, \\
\eta \equiv H - H_* &= a_{em} e + a_{tm} \theta + a_{mm} (\rho - \rho_*) + a_{m\omega} \phi, \\
\omega &= -a_{e\omega} e - a_{t\omega} \theta - a_{m\omega} (\rho - \rho_*) - a_{\omega\omega} \phi, \\
\hat{\sigma} &= 2\mu \hat{e} + (\lambda e + a_{et} \theta + a_{em} (\rho - \rho_*) + a_{e\omega} \phi) \hat{I}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Тут \hat{I} – одиничний тензор, $e = \hat{e} : \hat{I}$.

Якщо доповнити наведені вище співвідношення співвідношеннями Коші, що пов'язують деформації із переміщеннями

$$\hat{e} = \text{def } \vec{u} \equiv \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right), \tag{2.17}$$

а також виразом для імпульсу руху, зазвичай

$$\vec{k}_v = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}, \tag{2.18}$$

то отримуємо повну систему рівнянь моделі.

Окремої уваги заслуговує рівняння балансу маси (останнє рівняння (2.1)), яке із врахуванням відповідного кінетичного співвідношення (останнє рівняння (2.6)), може бути записано у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - g_{mm} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla} H}{\partial \tau} = \sigma_m.$$

За умови сталості за часом кінетичного коефіцієнта g_{mm} та сталості за координатами хімічного потенціалу у відліковому стані H_* його можна записати таким чином

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho - g_{mm} \nabla^2 \eta) = \sigma_m.$$

Виконавши інтегрування за часом від початкового до актуального моменту, запишемо

$$\rho - \rho_* - g_{mm} \nabla^2 \eta = \int_0^\tau \sigma_m d\zeta \equiv d_{\sigma m}. \quad (2.19)$$

Функцію $d_{\sigma m}$, пов'язану із джерелами маси, приймають експоненційно зникаючою при відході від поверхні тіла (або структурної неоднорідності) та узгоджують із збуренням густини тіла на поверхні ∂V

$$d_{\sigma m}|_{\partial V} = \rho|_{\partial V} - \rho_*. \quad (2.20)$$

Повна система рівнянь моделі містить рівняння, отримані на основі балансових рівнянь (2.1), виразів для \vec{F}_e , σ_s , \vec{k}_v , \vec{E}' , \hat{e} й рівнянь Максвела (2.3), кінетичних рівнянь (2.6) та рівнянь стану (2.16).

Така система рівнянь є суттєво нелінійною завдяки присутності нелінійних доданків виду $\rho \frac{d\vec{u}}{d\tau}$, $\omega \vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{\nabla} T / T$ тощо. Крім того, є підстави вважати, що при описі структурно неоднорідних тіл коефіцієнти визначальних рівнянь можуть залежати від параметрів тіла, зокрема, густини [158]. Тому окремі коефіцієнти у рівняннях стану (2.16) можуть залежати від

параметрів стану. У подальшому широко використано методи лінеаризації при формулюванні ключової системи рівнянь.

На основі повної системи рівнянь моделі записують загальну систему для вибраного набору ключових функцій. У ролі таких функцій зазвичай вибирають по одній функції з кожної пари спряжених параметрів:

- збурення температури $\theta = T - T_*$ чи ентропії $s = S - S_*$;
- заряду ω чи збурення термодинамічного електричного потенціалу $\phi = \Phi - \Phi_*$;
- густини ρ чи збурення хімічного потенціалу $\eta = H - H_*$;
- механічні складові \vec{u} , \hat{e} або $\hat{\sigma}$.

Для деяких варіантів вибору розв'язуючих функцій може бути зручно обернути рівняння стану (2.16). У такому вигляді, як представлено вище, буде зручно прийняти за розв'язальні функції θ , ρ , ϕ та \vec{u} (при $e = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$).

2.3. Ключова математична модель рівноважного стану

При виборі розв'язальних функцій слід пам'ятати, що вимірювальність параметрів простору базових параметрів стану є однією з основних вимог термодинаміки нерівноважних процесів та важливою з точки зору практичного використання моделі.

2.3.1. Рівняння моделі

Якщо за розв'язуючі функції вибрати вектор переміщення \vec{u} , густину ρ , температуру T та термодинамічний електричний потенціал Φ , а також прийняти коефіцієнти λ_{ij} та a_{ij} сталими, то розв'язальна система рівнянь, що описує рівноважний стан тіла є такою

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) = \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} (\rho - \rho_*) + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{\lambda_{ws}}{T} \vec{\nabla} T - \frac{\lambda_{ww}}{T} (\vec{\nabla} \Phi - \vec{E}) - (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) \times \vec{B} - \\
& \quad - (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) \vec{E}, \\
& \quad a_{et} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{tt} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{tm} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{t\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \\
& \quad + \frac{\lambda_{ss}}{T} \nabla^2 T + \frac{\lambda_{sw}}{T} \left(\nabla^2 \Phi - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right) \right) + \\
& \quad + \frac{\lambda_{ws}}{T^2} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} \Phi - \vec{E} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right) + \frac{\lambda_{ww}}{T^2} \left(\vec{\nabla} \Phi - \vec{E} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right)^2 = 0, \\
& \frac{\lambda_{ww}}{T} \left(\nabla^2 \Phi - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right) \right) - \frac{\lambda_{ws}}{T^2} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T - \frac{\lambda_{ww}}{T^2} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} \Phi - \vec{E} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right) + \\
& \quad + a_{e\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{t\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{m\omega} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{\omega\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\lambda_{ws}}{T} \nabla^2 T = 0, \\
& \rho - \rho_* - g_{mm} \nabla^2 (a_{em} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{tm} \theta + a_{mm} (\rho - \rho_*) + a_{m\omega} \phi) = d_{\sigma m}, \\
& \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} - \mu_0 \left(\frac{\lambda_{ws}}{T} \vec{\nabla} T + \frac{\lambda_{ww}}{T} \left(\vec{\nabla} \Phi - \vec{E} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{B} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right), \\
& \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\
& \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi = 0. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $T = T_* + \theta$, $\Phi = \Phi_* + \phi$ і зауважимо, що $\vec{\nabla}T = \vec{\nabla}\theta$ і $\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\phi$ у випадку, якщо початковий розподіл температури і потенціалу є однорідний.

Перше рівняння системи є нелінійним завдяки нелінійності виразу для пондеромоторної сили \vec{F}_e та імпульсу механічного поступального руху $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$.

Врахування нелінійності останнього є суттєвим при моделюванні хвильових процесів у локально неоднорідних тілах. Методику останнього розвинено, зокрема у [16, 31].

Також система (2.21) містить рівняння Максвелла відносно векторних компонент електромагнітного поля. Використовуючи подання векторів розв'язку через потенціальну й вихрову складові, на основі цих рівнянь можна записати рівняння Даламбера, методи пошуку розв'язків якого відомі. Тому в подальшому зосередимо увагу на аналізі рівнянь, що відповідають першим чотирьом рівнянням (2.21), а саме модифікованим на випадок термопружного електропровідного тіла рівнянням руху, теплопровідності, балансу заряду та балансу маси.

2.3.2. Основні спрощення моделі

Якщо ж знехтувати нелінійними доданками, пов'язаними із електромагнітним полем та термодинамічними силами, система цих рівнянь набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) = \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} (\rho - \rho_*) + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi,$$

$$a_{et} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{tt} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{tm} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{t\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_{ss}}{T} \nabla^2 T + \frac{\lambda_{sw}}{T} \left(\nabla^2 \Phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\varepsilon_0} \right) = 0, \\
& \frac{\lambda_{ww}}{T} \left(\nabla^2 \Phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\varepsilon_0} \right) + \\
& + a_{e\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{t\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{m\omega} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{\omega\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\lambda_{ws}}{T} \nabla^2 T = 0, \\
& \rho - \rho_* - g_{mm} \nabla^2 (a_{em} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{tm} \theta + a_{mm} (\rho - \rho_*) + a_{m\omega} \phi) = d_{\sigma m}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

У теорії теплопровідності нерідко приймають наближення

$$\frac{T - T_*}{T_*} \ll 1,$$

за якого у знаменниках другого і третього рівнянь можна замінити T на T_* , лінеаризуючи їх. Використовуючи введене вище позначення $\theta = T - T_*$ та враховуючи однорідність вибраного відлікового стану, систему рівнянь моделі (2.22) можна записати таким чином

$$\begin{aligned}
& \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} \rho + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right), \\
& a_{et} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{tt} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{tm} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{t\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \\
& + \frac{\lambda_{ss}}{T_*} \nabla^2 \theta + \frac{\lambda_{sw}}{T_*} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\varepsilon_0} \right) = 0, \\
& \frac{\lambda_{ww}}{T_*} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\varepsilon_0} \right) + \\
& + a_{e\omega} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{t\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + a_{m\omega} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + a_{\omega\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\lambda_{ws}}{T_*} \nabla^2 \theta = 0,
\end{aligned}$$

$$\rho - \rho_* - g_{mm} \nabla^2 (a_{em} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{tm} \theta + a_{mm} \rho + a_{m\omega} \phi) = d_{\sigma m}.$$

Подальше спрощення розв'язуючої системи рівнянь є можливим у стаціонарному та квазістаціонарному випадках. Якщо функції $\vec{u}, \theta, \rho, \omega$ не залежать від часу τ , то остання система набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} \rho + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi &= 0, \\ \lambda_{ss} \nabla^2 \theta + \lambda_{sw} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\epsilon_0} \right) &= 0, \\ \lambda_{ww} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\epsilon_0} \right) + \lambda_{ws} \nabla^2 \theta &= 0 \\ \rho - \rho_* - g_{mm} \nabla^2 (a_{em} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{tm} \theta + a_{mm} \rho + a_{m\omega} \phi) &= d_{\sigma m} \end{aligned} \quad (2.23)$$

і допускає подальше спрощення. Подіявши оператором дивергенції ($\vec{\nabla} \cdot$) на перше із рівнянь системи, можна отримати вираз

$$\nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = - \frac{a_{et} \nabla^2 \theta + a_{em} \nabla^2 \rho + a_{e\omega} \nabla^2 \phi}{\lambda + \mu},$$

котрий дозволяє виключити кульову складову деформації $e \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ із наступних рівнянь, замінивши її вираз через температуру, густину та термодинамічний електричний потенціал, наслідком чого буде модифікація сталей, які позначатимемо штрихами. Тому система (2.23) є еквівалентною наступній

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} \rho + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi &= 0, \\ \lambda_{ss} \nabla^2 \theta + \lambda_{sw} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi}{\epsilon_0} \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_{ww} \left(\nabla^2 \phi + \frac{a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho^*) + a_{\omega\omega} \phi}{\varepsilon_0} \right) + \lambda_{ws} \nabla^2 \theta = 0,$$

$$\rho - \rho^* - g_{mm} \nabla^2 (a'_{tm} \theta + a'_{mm} \rho + a'_{m\omega} \phi) = d_{\sigma m} \quad (2.24)$$

Тут $a'_{tm} = a_{tm} - \frac{a_{em} a_{et}}{\lambda + \mu}$, $a'_{mm} = a_{mm} - \frac{a_{em}^2}{\lambda + \mu}$, $a'_{m\omega} = a_{m\omega} - \frac{a_{em} a_{e\omega}}{\lambda + \mu}$.

Записавши друге та третє рівняння цієї системи у вигляді

$$\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_{sw}} \nabla^2 \theta + \nabla^2 \phi + \frac{1}{\varepsilon_0} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho^*) + a_{\omega\omega} \phi) = 0,$$

$$\frac{\lambda_{ws}}{\lambda_{ww}} \nabla^2 \theta + \nabla^2 \phi + \frac{1}{\varepsilon_0} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho^*) + a_{\omega\omega} \phi) = 0,$$

отримуємо систему, наслідком якої є рівняння

$$\nabla^2 \theta = 0,$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\varepsilon_0} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho^*) + a_{\omega\omega} \phi) = 0, \quad (2.25)$$

використавши які у останньому рівнянні (2.24) перетворюємо його до вигляду

$$\rho - \rho^* - g_{mm} \nabla^2 (a'_{mm} \rho + a'_{m\omega} \phi) = d_{\sigma m}. \quad (2.26)$$

Враховуючи, що вплив електронної підсистеми (перерозподілу електричного заряду у електропровідному неферомагнітному тілі) на структуру тіла, опис якої здійснює густина ρ , є незначний або взагалі відсутній, останнім доданком у лівій частині рівняння (2.26) можна знехтувати і ввівши позначення

$$\xi^{-2} = g_{mm} \left(a_{mm} - \frac{a_{em}^2}{\lambda + \mu} \right)$$

систему (2.24) можна привести до вигляду

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{et} \vec{\nabla} \theta + a_{em} \vec{\nabla} \rho + a_{e\phi} \vec{\nabla} \phi = 0,$$

$$\nabla^2 \theta = 0,$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\epsilon_0} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) = 0,$$

$$\nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m}. \quad (2.27)$$

Така система рівнянь описує рівноважний стан деформівного електропровідного неферомагнітного тіла у термінах переміщень, збурення температури, електричного потенціалу та густини. Ця система має бути доповнена відповідними початковими й крайовими умовами. Як показує аналіз цієї системи, при нехтуванні впливом деформації на електричний потенціал на першому етапі розв'язання задачі можна визначити температурне поле θ і розподіл густини ρ , потім на основі третього рівняння визначити розподіл електричного потенціалу ϕ і на останньому етапі приступити до знаходження поля переміщення. При цьому відшукання механічних складових нічим не відрізняється від відомих методів теорії термопружності [167].

За ізотермічного наближення остання система рівнянь є такою

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + a_{em} \vec{\nabla} \rho + a_{e\omega} \vec{\nabla} \phi = 0,$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\epsilon_0} (a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) = 0,$$

$$\nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m}, \quad (2.28)$$

а у випадку, коли граничні умови на механічні складові задано у напруженнях, зручно користуватись системою вигляду

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\frac{\hat{\sigma}}{2\mu} - \left(\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{a_{em}\rho + a_{e\omega}\phi}{3\lambda + 2\mu} \right) \hat{I} \right] \right\} &= 0, \\ \nabla^2 \phi + \frac{1}{\epsilon_0} (a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega}\phi) &= 0, \\ \nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi^2 d_{\sigma m}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Крайові умови на механічні складові формулюють класичним чином, умови на густину маси обговорені у численних роботах, зокрема [158, 162], для визначення електричного заряду початково електронейтрального тіла природньою є умова електронейтральності

$$\int_{(V)} \omega dV = 0,$$

де (V) – область тіла. Із врахуванням рівняння стану (2.16) у загальному випадку ця умова набуває вигляду

$$\int_{(V)} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{t\omega} \theta + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) dV = 0, \quad (2.30)$$

або для ізотемпературного випадку

$$\int_{(V)} (a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + a_{m\omega} (\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega} \phi) dV = 0,$$

чи при нехтуванні впливом деформації

$$\int_{(V)} (a_{t\omega}\theta + a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega}\phi) dV = 0.$$

Враховуючи, що електричний потенціал задовольняє неоднорідне рівняння Гельмгольца, при постановці задач також ефективно можуть бути використані умови симетрії та обмеженості розв'язку.

Якщо за розв'язуючу функцію замість електричного заряду ω вибрати термодинамічний електричний потенціал ϕ , то, враховуючи третє рівняння рівняння стану (2.16) та вводячи відповідні позначення для сталих матеріалу, система (2.27) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + \lambda \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \alpha_{et} \vec{\nabla} \theta - \alpha_{em} \vec{\nabla} \rho - \alpha_{e\omega} \vec{\nabla} \phi &= 0, \\ \nabla^2 \theta &= 0, \\ \nabla^2 \phi - \xi_{\phi}^2 [\phi + a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{e\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}] &= 0, \\ \nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi^2 d_{\sigma m}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

система (2.29) буде такою

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\frac{\hat{\sigma}}{2\mu} - \left(\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{\alpha_{em}\rho + \alpha_{e\omega}\phi}{3\lambda + 2\mu} \right) \hat{I} \right] \right\} &= 0 \\ \nabla^2 \phi + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \phi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_*) &= 0, \\ \nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi^2 d_{\sigma m}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

а умова (2.30) матиме вигляд

$$\int_{(V)} \phi - a_{ew} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - a_{tw} \theta - a_{mw} (\rho - \rho_*) dV = 0, \quad (2.33)$$

або

$$\int_{(V)} \left(1 + \frac{3a_{ew}\alpha_{e\omega}}{3\lambda + 3\mu} \right) \phi - \left(a_{mw} - \frac{3a_{ew}\alpha_{e\omega}}{3\lambda + 3\mu} \right) (\rho - \rho_*) - \frac{a_{ew}}{3\lambda + 3\mu} \sigma dV = 0. \quad (2.34)$$

Системи рівнянь (2.27), (2.29), (2.31) та (2.32) мають бути доповнені відповідними крайовими умовами, а саме класичними умовами на напруження або переміщення, умовами першого роду на густину та умовою електронейтральності у наведених вище формулюваннях (2.33) та (2.34).

2.4. Висновки до розділу 2

Сформульовано основні співвідношення моделі неоднорідного електропровідного неферомагнітного твердого тіла із врахуванням геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та структурної неоднорідності його матеріалу за лінійних визначальних співвідношень.

Записано повну нелінійну систему рівнянь моделі для електропровідного термопружного тіла та її лінеаризацію, якщо знехтувати нелінійними доданками, пов'язаними із електромагнітним полем та термодинамічними силами. Для стаціонарного, квазістаціонарного й ізотемпературного випадків записано лінеаризовані ключові системи.

Розділ 3. Нелінійна математична модель приповерхневої неоднорідності у гетерогенному півпросторі

Розділ присвячено побудові та аналізу нелінійної математичної моделі приповерхневої неоднорідності у гетерогенному півпросторі. Наведено базову модель рівноважного стану електропровідного півпростору, конкретизовано її під аналізовану задачу та подано аналітичний розв'язок відносно основних параметрів. Представлено результати чисельного аналізу густини та параметрів електричної підсистеми, а також результати аналізу напружень у електропровідному півпросторі. У розділі також проаналізовано вплив параметрів нелінійності на напружено-деформований стан та поверхневі напруження.

3.1. Базова модель рівноважного стану електропровідного півпростору

У рамках моделі локально неоднорідного електропровідного твердого тіла проаналізуємо закономірності приповерхневої неоднорідності у гетерогенному півпросторі. Прийmemo суттєву залежність пружних властивостей від характеру неоднорідності і відобразимо їх шляхом врахування залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від густини у точці тіла. У сформульованих вище співвідношеннях моделі використано сталі Ляме λ, μ , які початково входять у розклад енергії (2.15) та рівняння стану для напружень

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{e} + (\lambda e + a_{et}\theta + a_{em}(\rho - \rho_*) + a_{ew}\omega)\hat{I}.$$

Разом із тим, експериментально вимірюваними величинами є модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν , для яких накопичено значний об'єм експериментальних досліджень, зокрема щодо їх залежності від розмірів тіла

та розмірних ефектів. Тому варто перейти від λ, μ до E, ν за допомогою співвідношень

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.1)$$

Унаслідок цього ключова система рівнянь (2.29) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma} - \left(\frac{\nu\sigma}{E} - \alpha_{em}\rho - \alpha_{e\omega}\phi \right) \hat{I} \right] \right\}^T &= 0, \\ \nabla^2 \phi + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \phi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_*) &= 0, \\ \nabla^2 \rho - \xi^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi^2 d_{\sigma m}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

При цьому надалі будемо враховувати залежність пружних модулів E, ν від густини, прийнявши

$$E(x) = E_0 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\beta_E}, \quad \nu(x) = \nu_0 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\beta_\nu}, \quad (3.3)$$

де E_0, ν_0 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла у відліковому стані, β_E, β_ν – сталі. Такого вигляду залежність пружних властивостей неоднорідного тіла від густини є характерною для пористих середовищ [171, 172].

Застосуємо таку систему нелінійних рівнянь до моделювання рівноважного стану електропровідного півпростору.

3.2. Конкретизація моделі та постановка задачі

Розглянемо електропровідний неферомагнітний півпростір, пружні властивості матеріалу якого залежні від густини. Вважаємо, що півпростір вільний від зовнішнього силового навантаження, а на його поверхнях задано постійне значення густини ρ_a , що відрізняється від відлікового значення ρ_* . Значення термодинамічного електричного потенціалу на поверхні тіла позначимо ϕ_a . Розташуємо декартову систему координат $\{x, y, z\}$ таким чином, щоб півпростір займав область $x \geq 0$. За наявної зовнішньої дії рівноважний стан півпростору залежить лише від координати x і описується такою ключовою системою рівнянь для визначення: густини ρ , термодинамічного електричного потенціалу ϕ та компонент тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m},$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0}\phi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0}(\rho - \rho_*) = 0,$$

$$\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} - \frac{\nu}{E} \sigma \right) = -\frac{d^2}{dx^2} \left(a_m(\rho - \rho_*) + a_0^\omega \phi \right), \quad \gamma = \{y, z\}. \quad (3.4)$$

Тут $a_m, a_0^\omega, a_{m\omega}, a_{\omega\omega}, \varepsilon_0, \xi, \zeta$ — сталі величини,

$$d_{\sigma m} = (\rho_a - \rho_*) \exp(-\zeta x).$$

Права частина першого рівняння системи (3.4) містить функцію $d_{\sigma m}$, пов'язану із джерелами маси. Як сказано у попередньому розділі, її приймають експоненційно зникаючою при відході від поверхні у глибину

тіла, тобто $d_{\sigma m}(x) \sim \exp(-\zeta x)$, $x \geq 0$. Параметр ζ пов'язаний із неоднорідністю поверхні [162], а коефіцієнт вибрано згідно умови (2.20) для узгодження із поверхневим значенням густини.

Систему рівнянь (3.4) доповнимо умовами на поверхні $x = 0$ півпростору

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \rho = \rho_a, \quad \phi = \phi_a, \quad (3.5)$$

умовами обмеженості розв'язку на безмежності

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \phi, \rho - \rho_*\} = 0, \quad (3.6)$$

а також умовою електронейтральності тіла

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Щоб отримати вираз для густини заряду розв'яжемо систему рівнянь стану (2.16) відносно ω . Якщо знехтувати впливом деформації на електричний заряд для ізотермічного випадку маємо

$$\omega(x) = a_{m\omega}(\rho - \rho_*) + a_{\omega\omega}\phi,$$

де $a_{\omega\omega} = a_{w\omega}^{-1}$,

$$a_{m\omega} = -a_{mw}a_{w\omega}^{-1}.$$

3.3. Аналітичний розв'язок відносно основних параметрів

Розв'язок задачі (3.4)–(3.7) має вигляд

$$\rho(x) - \rho_* = (\rho_a - \rho_*) \left[\frac{\xi^2}{\xi^2 - \zeta^2} e^{-\zeta x} - \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2} e^{-\xi x} \right], \quad (3.8)$$

$$\phi(x) = a \frac{\rho_a - \rho_*}{\xi^2 - \zeta^2} \left\{ M e^{-\chi x} + \frac{\xi^2}{\chi^2 - \zeta^2} e^{-\zeta x} - \frac{\zeta^2}{\chi^2 - \xi^2} e^{-\xi x} \right\}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x) = & \frac{E_0(\rho(x)/\rho_*)^{\beta_E}}{1 - \nu_0(\rho(x)/\rho_*)^{\beta_\nu}} (\rho_a - \rho_*) \left\{ a_m \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 - \zeta^2} e^{-\zeta x} - \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2} e^{-\xi x} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{b_1}{\xi^2 - \zeta^2} \left(M e^{-\chi x} + \frac{\xi^2}{\chi^2 - \zeta^2} e^{-\zeta x} - \frac{\zeta^2}{\chi^2 - \xi^2} e^{-\xi x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{де } a = \frac{a_m \omega}{\varepsilon_0},$$

$$\chi^2 = -\frac{a_m \omega}{\varepsilon_0},$$

$$M = \frac{\xi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \frac{\zeta}{\chi} - \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \chi^2} \frac{\xi}{\chi},$$

$$b_1 = a_0^0 a.$$

Значимо, що параметри $\xi^{-1}, \zeta^{-1}, \chi^{-1}$ мають сенс характерних розмірів структурної неоднорідності матеріалу, геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та кулонівської взаємодії, відповідно. Враховуючи, що структурну неоднорідність матеріалу пов'язують із такими параметрами, як розмір зерна, а геометрична неоднорідність реальної поверхні тіла (шорсткість поверхні) залежить від якості переважно механічної обробки поверхні, то можна стверджувати, що $\chi/\xi \gg 1$, $\chi/\zeta \gg 1$, тоді як параметри ξ^{-1} і ζ^{-1} є одного порядку.

За відомої густини маси та термодинамічного електричного потенціалу знаходимо вираз для густини електричного заряду

$$\omega(x) = -a_m \omega \frac{\rho_a - \rho_*}{\xi^2 - \zeta^2} \left[\chi^2 M \exp(-\chi x) + \xi^2 \zeta^2 \left(\frac{\exp(-\zeta x)}{\chi^2 - \zeta^2} - \frac{\exp(-\xi x)}{\chi^2 - \xi^2} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Проведемо чисельні дослідження отриманого розв'язку.

3.4. Результати чисельного аналізу густини та параметрів електричної підсистеми

Рис 3.1 ілюструє розподіл густини $\rho(x)/\rho_*$ для $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ (криві 1-3, відповідно) при $\rho_a/\rho_* = 0.5$ (це ж значення поверхневого збурення густини прийнято для подальших числових досліджень). Аналогічний розв'язок отримано у [158]. У рамках прийнятого наближення електронна підсистема не вносить змін у розподіл значень густини. Єдиним параметром, що впливає на зміну розподілу, є відношення характерних розмірів структурної неоднорідності та геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла: при зростанні цього відношення збурення густини носить більш приповерхневий характер.

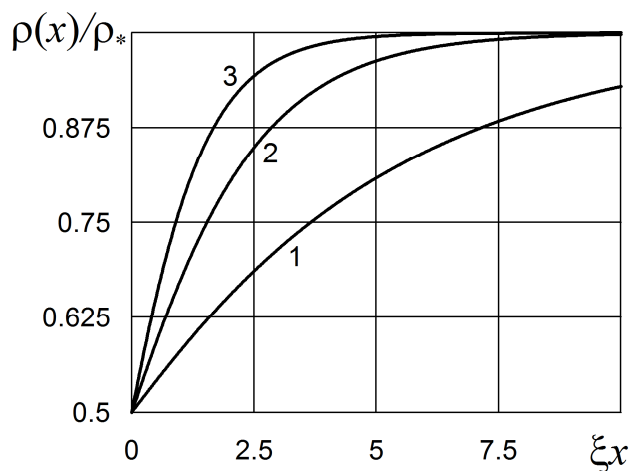


Рис.3.1. Розподіл густини у півпросторі

Як видно із (3.9), для отримання безрозмірного значення зручно віднести $\phi(x)$ до параметра $\phi_0 = a(\rho_a - \rho_*)/\chi^2$. Розподіл $\phi(x)/\phi_0$ для $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$

(криві 1-3 відповідно), $\chi/\xi = 5$ показано на рис.3.2. Розподіл $\phi(x)/\phi_0$ для $\chi/\xi = 5,30$ (криві 1-2 відповідно), $\zeta/\xi = 0.6$ показано на рис.3.3.

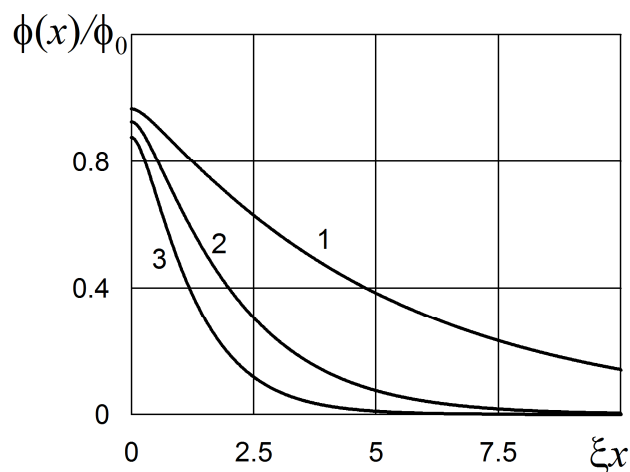


Рис.3.2. Розподіл термодинамічного електричного потенціалу у півпросторі для різних значень параметра ζ/ξ

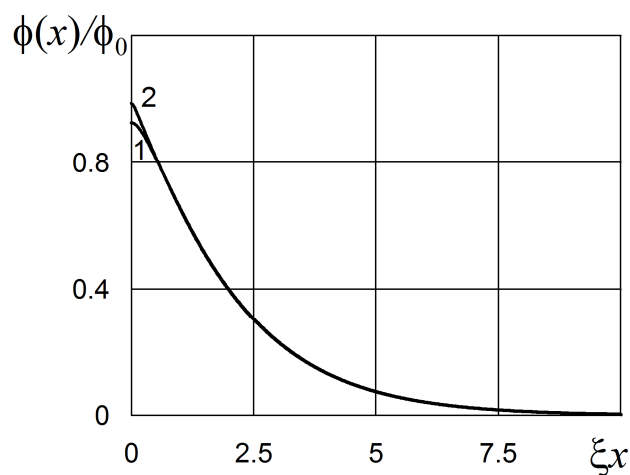


Рис.3.3. Розподіл термодинамічного електричного потенціалу у півпросторі для різних значень параметра χ/ξ

Як показує аналіз розв'язку, поверхнєве значення електричного потенціалу дуже суттєво залежить від неоднорідності. Рисунок 3.4 ілюструє зміну поверхнєвого значення електричного потенціалу

$$\phi(0) = a \frac{\rho_a - \rho_*}{\xi^2 - \zeta^2} \left\{ \frac{\xi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \left(\frac{\zeta}{\chi} - 1 \right) - \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \chi^2} \left(\frac{\xi}{\chi} - 1 \right) \right\} =$$

$$= a(\rho_a - \rho_*) \frac{\xi^2 + \xi\zeta + \zeta^2 + (\xi + \zeta)\chi}{(\xi + \zeta)(\zeta + \chi)(\xi + \chi)\chi} \quad (3.12)$$

від ζ/ξ для $\chi/\xi = 5,30$ (криві 1-2 відповідно). На рис. 3.5 показано залежність $\phi(0)/\phi_0$ від χ/ξ для $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ (криві 1-3, відповідно).

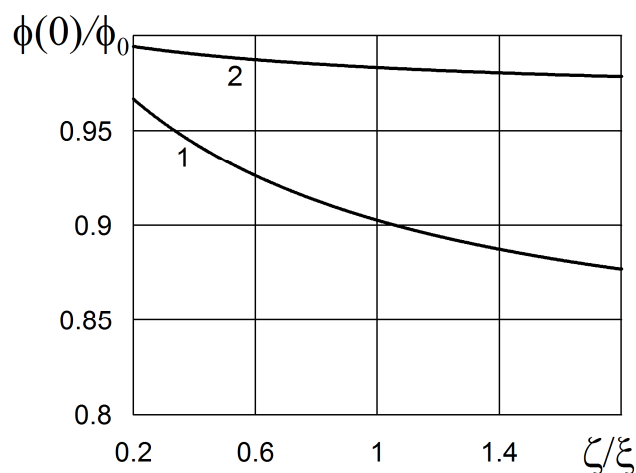


Рис. 3.4. Залежність поверхневого значення електричного потенціалу від значень параметра ζ/ξ

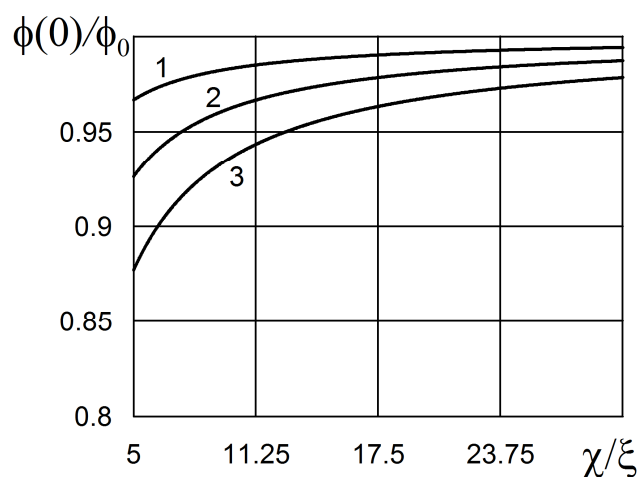


Рис. 3.5. Залежність поверхневого значення електричного потенціалу від значень параметра χ/ξ

Увівши параметр $\omega_0 = a_m \omega \rho_*$, розподіл приведенного заряду ω/ω_0 зображено на рис. 3.6. Тут покладено $\chi/\xi = 5$, а значенням $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ відповідають криві 1-3. Як видно з рисунку, зростання параметра

геометричної неоднорідності поверхні ($\zeta/\xi \rightarrow 1.8$) призводить до зростання відмінності сумарного заряду одного знаку у приповерхневій області, де спостерігаємо існування подвійного електричного шару.

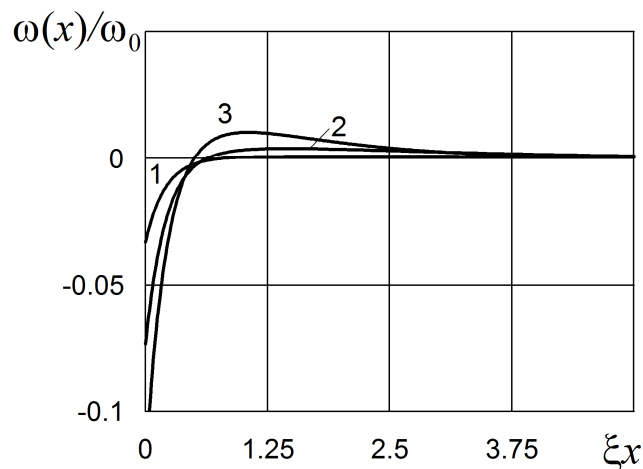


Рис.3.6. Розподіл електричного заряду у півпросторі для різних значень параметра ζ/ξ

Також на рис.3.7 показано розподіл ω/ω_0 при $\zeta/\xi=0.6$, $\chi/\xi=5,30$ (криві 1-2). Варто вказати, що при великих значеннях параметру χ/ξ приповерхнева неоднорідність густини заряду проявляється лише у вузькій області.

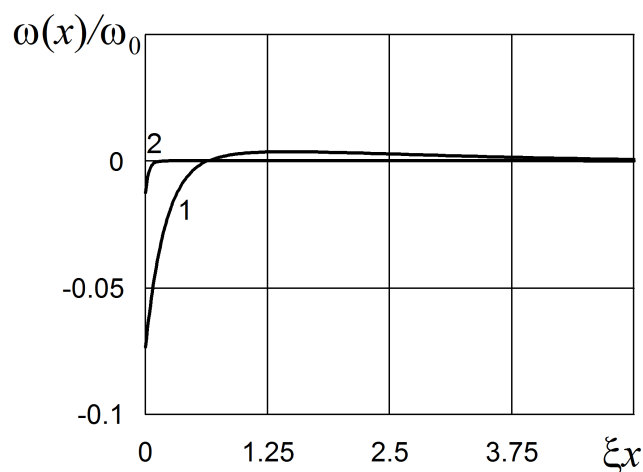


Рис.3.7. Розподіл електричного заряду у півпросторі для різних значень параметру χ/ξ

Заслуговує увагу вплив приповерхневої неоднорідності на поверхнєве значення заряду, яке згідно (3.12) є таким:

$$\begin{aligned} \omega(0) &= -a_{m\omega} \frac{(\rho_a - \rho_*)}{\xi^2 - \zeta^2} \left[\chi^2 \left(\frac{\xi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \frac{\zeta}{\chi} - \frac{\zeta^2}{\xi^2 - \chi^2} \frac{\xi}{\chi} \right) + \xi^2 \zeta^2 \left(\frac{1}{\chi^2 - \zeta^2} - \frac{1}{\chi^2 - \xi^2} \right) \right] = \\ &= a_{m\omega} (\rho_a - \rho_*) \frac{\xi + \zeta + \chi}{(\xi + \zeta)(\xi + \chi)(\zeta + \chi)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Рисунки 3.8 та 3.9 ілюструють залежність $\omega(0)/\omega_0$ від ζ/ξ та χ/ξ аналогічно, як рис. 3.4 та рис. 3.5 ілюстрували залежність від цих же параметрів поверхневого значення термодинамічного електричного потенціалу.

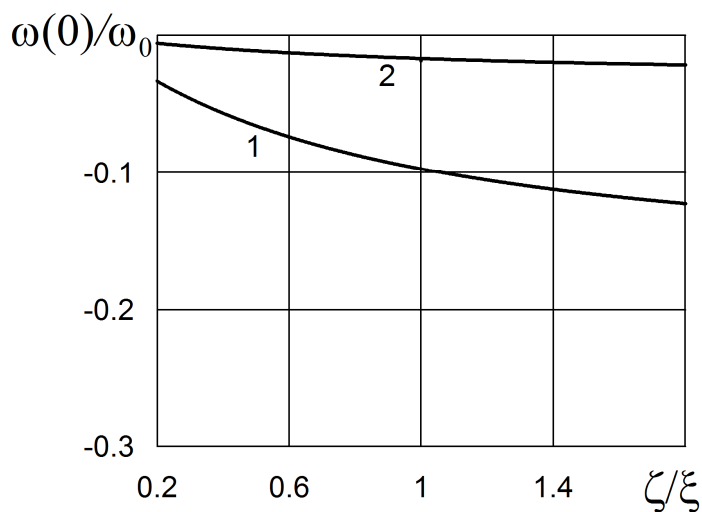


Рис.3.8. Залежність поверхневого значення заряду від значень параметра ζ/ξ

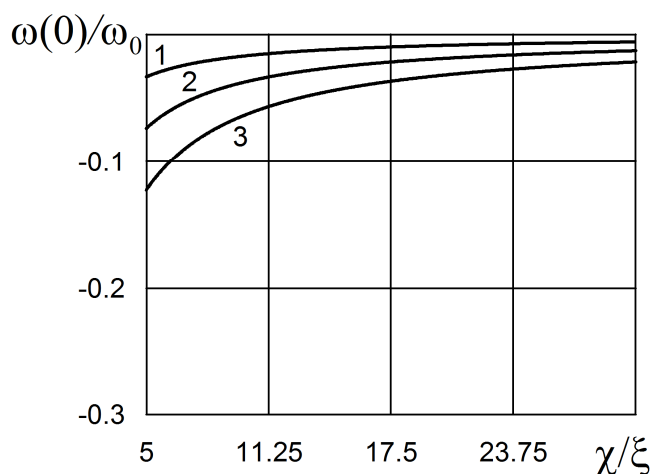


Рис.3.9. Залежність поверхневого значення електричного заряду від значень параметра χ/ξ

На завершення аналізу параметрів електричної підсистеми зазначимо, що у рамках наближення моделі тут відсутній вплив нелінійності, закладений у співвідношеннях (3.2). Разом із тим, ці параметри згідно (3.13) впливають на напруження у гетерогенному тілі. Аналіз цих напружень наведено нижче.

3.5. Результати чисельного аналізу напружень у електропровідному півпросторі

На відміну від електричних потенціалу та заряду, розподіли яких залежать не лише від поверхневого значення густини та відношень характерних розмірів χ/ξ та ζ/ξ , але й від коефіцієнта $b = \epsilon_0 a_m / (a_{m\omega} a_0^\omega)$ і параметрів нелінійності β_E та β_v , а також коефіцієнта Пуассона у відліковому стані ν_0 , який надалі будемо приймати рівним 0,3. При $\beta_E = \beta_v = 0$ отримуємо лінійний випадок, коли не враховуємо залежність модулів пружності від густини.

Вплив параметрів структурної неоднорідності на розподіл напружень проілюстровано на рис. 3.10, де зображено поведінку у півпросторі $\sigma_{yy}(x)/\sigma_0$ ($\sigma_0 = a_0 \rho^* E_0 / (1 - \nu_0)$) при $\beta_E = 1, \beta_v = 0$ для $\chi/\xi = 5$,

$\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ (криві 1-3), $b = 0,02$. Пунктирна лінія відповідає $\beta_E = 0$ при $\zeta/\xi = 0.6$.

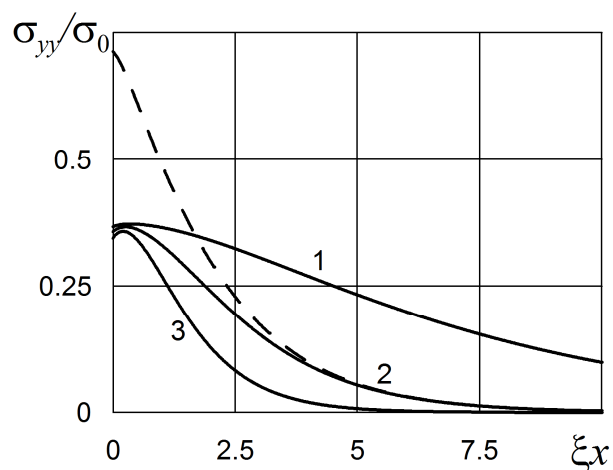


Рис.3.10. Розподіл напружень у півпросторі для різних значень параметра ζ/ξ

Вплив параметра χ/ξ на розподіл напружень проілюстровано на рис. 3.11, де зображено поведінку $\sigma_{yy}(x)/\sigma_0$ при $\zeta/\xi = 0.6$ для $\chi/\xi = 5, 12$, (криві 1-2), $b = 0,02$, $\beta_v = 0$. Суцільні лінії на рисунку відповідають $\beta_E = 1$, а пунктирні лінії – $\beta_E = 0$.

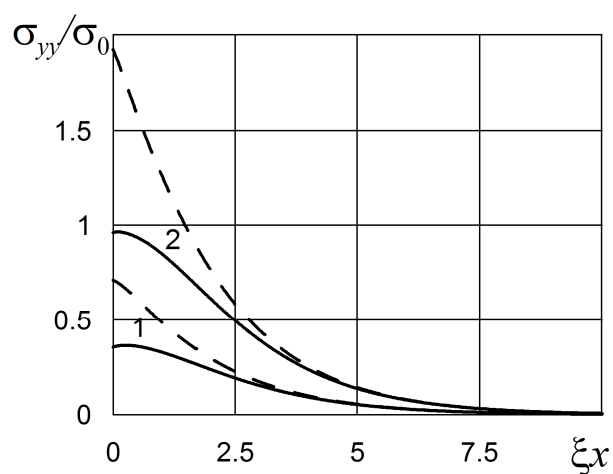


Рис.3.11. Розподіл напружень у півпросторі для різних значень параметра χ/ξ

Для значення параметрів $\zeta/\xi=0.6$, $\chi/\xi=5$, $b=0,02$ вплив параметрів нелінійності на розподіл напружень проілюстровано на рис. 3.12 та рис. 3.13. На першому з них при $\beta_v = 0$ криві 1-3 відповідають $\beta_E = 0,0,5,1$, на другому при $\beta_E = 0$ криві 1-3 відповідають $\beta_v = 0,0,5,1$.

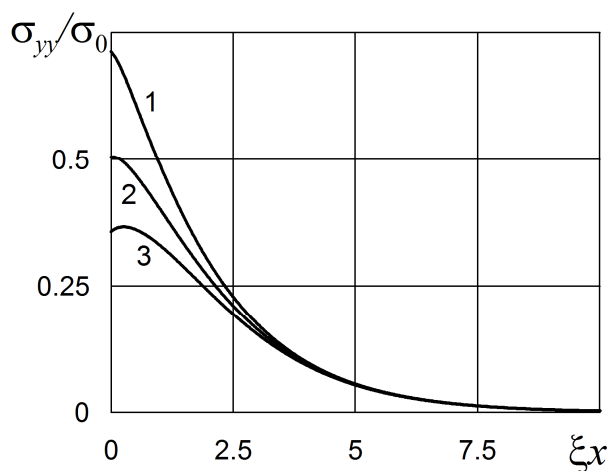


Рис.3.12. Розподіл напружень у півпросторі для різних значень параметра β_E

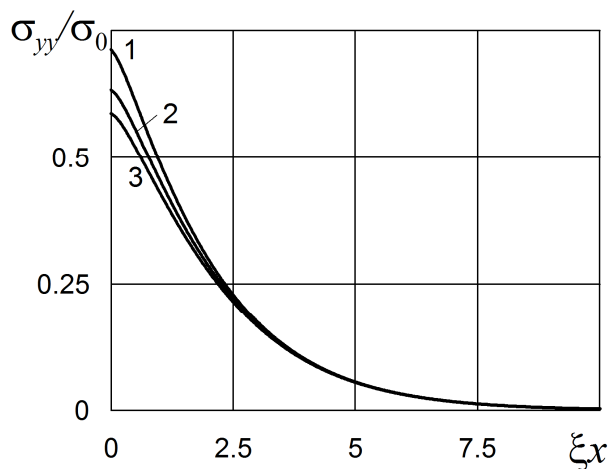


Рис.3.13. Розподіл напружень у півпросторі для різних значень параметра β_v

Аналіз останніх рисунків показує, що врахування зменшення E, ν має наслідком зменшення поверхневих напружень. Як видно із рис. 3.12, зміна β_E від 0 до 1 призводить до зменшення приведених поверхневих напружень

від 0.713 до 0.357, або майже удвічі. Разом із тим аналогічна зміна β_v зменшує $\sigma_{yy}(0)/\sigma_0$ від 0.713 до 0.587, або на 17,76%.

Разом з тим для розглянутих діапазонів значень параметрів напруження у півпросторі будуть розтягальні при цьому монотонно зменшуючись при відході від поверхні у глибину півпростору. При значеннях β_E , що дорівнює 1, максимальні напруження досягаються не на поверхні, а у вузькій приповерхневій області (див. крива 3 на рис. 3.13). Загалом поверхневі напруження у півпросторі заслуговують більш детального аналізу.

На основі (3.10) для значень напружень σ_{yy}, σ_{zz} на поверхні півпростору запишемо такий вираз

$$\sigma_{yy}(0) = \sigma_{zz}(0) = a_0 \frac{\rho_a - \rho_*}{\xi^2 - \zeta^2} \frac{E_0 (\rho_a / \rho_*)^{\beta_E}}{1 - \nu_0 (\rho_a / \rho_*)^{\beta_v}} \times \\ \times \left\{ b \left(1 - \frac{\zeta^2}{\xi^2} \right) + \frac{\xi^2}{\chi^2 - \zeta^2} \left(1 - \frac{\zeta}{\chi} \right) - \frac{\zeta^2}{\chi^2 - \xi^2} \left(1 - \frac{\xi}{\chi} \right) \right\}. \quad (3.14)$$

Аналіз цього виразу показує, що поверхневі напруження суттєво залежать від густини на поверхні тіла. При $\rho_a / \rho_* = 0$ та $\rho_a / \rho_* = 1$ має місце $\sigma_{yy}(0) = 0$. Максимальне відхилення $\sigma_{yy}(0)$ від нуля досягається у точці $r = \rho_a / \rho_*$, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dr} \frac{(1-r)r^{\beta_E}}{1 - \nu_0 r^{\beta_v}} = 0.$$

Зокрема, якщо $\nu_0 = 0.3$ і $\beta_v = \beta_E \equiv \beta$, то при $\beta \rightarrow 0$ розв'язок цього рівняння $r \rightarrow 0$, а при $\beta \rightarrow 1$ маємо $r \approx 0.544$.

Залежність приведених поверхневих напружень від параметра ζ/ξ для $\chi/\xi = 5$, $b = 0,02$, $\beta_v = 0$ проілюстровано на рис. 3. 14. Криві 1-3 відповідають

$\beta_E = 0, 0.5, 1$. Залежність приведених поверхневих напружень від параметра χ/ξ для $\zeta/\xi = 0.6$, $b = 0,02$, $\beta_v = 0$ проілюстровано на рис. 3.15. Криві 1-3 відповідають $\beta_E = 0, 0.5, 1$. Порівняння цих рисунків дає підстави стверджувати, що поверхневі напруження у гетерогенному електропровідному півпросторі практично не залежать від відношення характерних розмірів структурної неоднорідності матеріалу ξ^{-1} та геометричної неоднорідності реальної поверхні ζ^{-1} (рис. 3.14), проте суттєво залежать від відношення характерних розмірів структурної неоднорідності матеріалу ξ^{-1} та сил кулонівської взаємодії χ^{-1} . Із зростанням χ/ξ поверхневі напруження зростають, причому більш помітно це відбувається за лінійного випадку ($\beta_E = 0$) і менш виражено при $\beta_E = 1$.

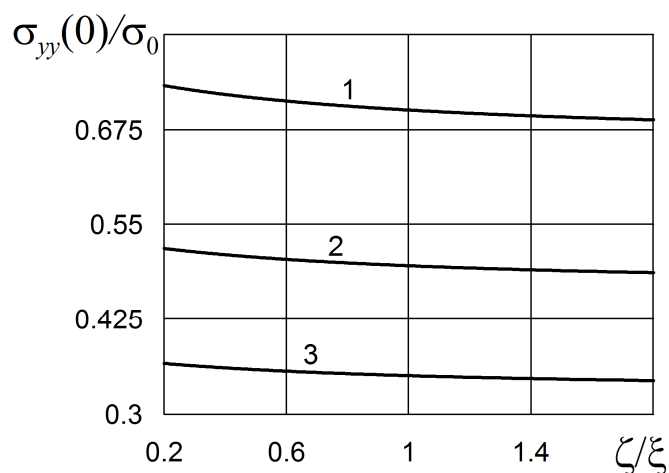


Рис. 3.14. Вплив параметра ζ/ξ на поверхневі напруження

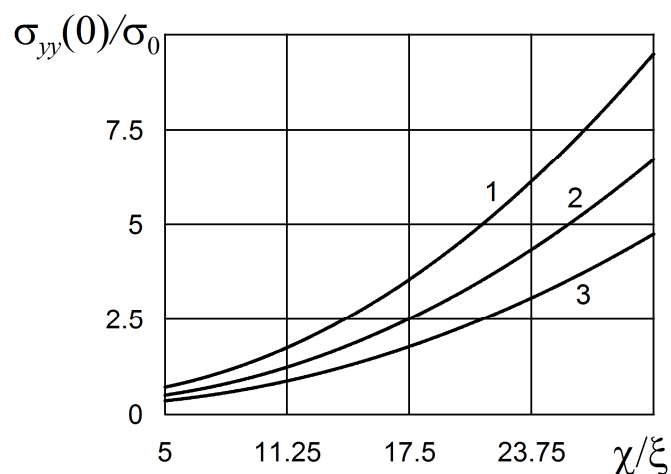


Рис. 3.15. Вплив параметра χ/ξ на поверхневі напруження

Рисунки 3.16 та 3.17 ілюструють зміну поверхневих напружень у півпросторі при зміні відповідно параметрів β_E та β_V від 0 до 1. При цьому покладено $\zeta/\xi = 0.6$, $\chi/\xi = 5$, $b = 0,02$. Криві 1-3 відповідають значенням 0,0.5,1 для параметрів β_V (рис. 3.16) та β_E (рис. 3.17). Аналіз рисунків показує, що врахування нелінійності обумовлює зменшення поверхневих напружень, причому впливу нелінійності модуля Юнга більш помітний на $\sigma_{yy}(0)$, аніж вплив нелінійності коефіцієнта Пуассона.

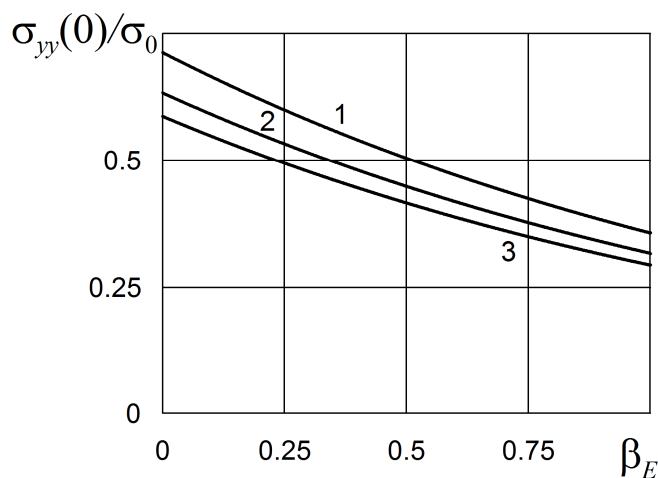


Рис.3.16. Вплив параметра β_E на поверхневі напруження

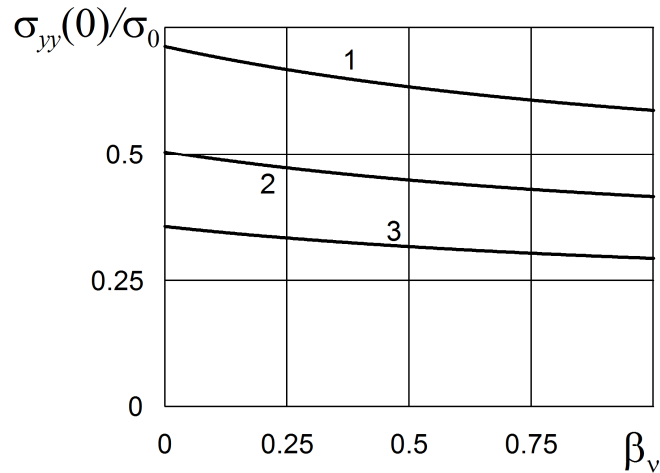


Рис.3.17. Вплив параметра β_v на поверхневі напруження

Вплив одночасної зміни параметрів $\beta_v = \beta_E \equiv \beta$ на $\sigma_{yy}(0)$ показано на рис. 3.18. Криві 1-2 відповідають $\chi/\xi=5$ та $\chi/\xi=12$, відповідно, суцільні лінії відповідають $\zeta/\xi=0.2$, а штрихові – $\zeta/\xi=1.8$.

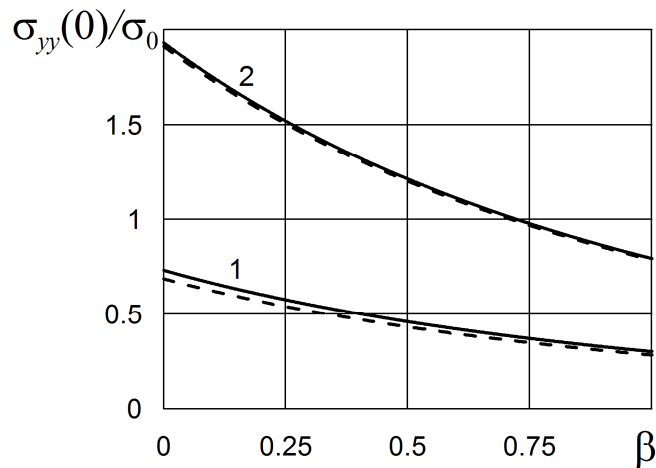


Рис. 3.18. Вплив параметрів $\beta = \beta_v = \beta_E$ на поверхневі напруження

Таким чином, поверхневі напруження у півпросторі є розтягальними і найбільшими при нехтуванні залежністю локальних модулів пружності E, ν від густини $\rho(x)$. Зазначимо, що при $\rho_a = \rho_*$ напружений стан тіла буде нульовий.

3.6. Висновки до розділу 3

Розглянуто математичну модель вільного від зовнішнього силового навантаження електропровідного неферомагнітного півпростіру. При цьому півпростір є неоднорідним, що моделюється шляхом врахування залежності пружних властивостей матеріалу від густини. На поверхні задано збурення густини матеріалу тіла відносно відлікового значення.

З допомогою нелінійної математичної моделі досліджено розподіл у півпросторі густини, термодинамічного електричного потенціалу, електричного заряду та напружень. Поверхневі значення електричних потенціалу та заряду визначено із умови електронейтральності півпростору. Проілюстровано існування подвійного електричного шару. Розподілу густини властива присутність двох, а розподілам потенціалу, заряду й напружень – трьох характерних розмірів ξ^{-1} , ζ^{-1} , χ^{-1} . Перший із цих розмірів пов'язано із структурною неоднорідністю матеріалу, другий – із геометричною неоднорідністю поверхні, третій – із силами кулонівської взаємодії.

Показано, що відношення характерних розмірів ξ^{-1} та ζ^{-1} і ξ^{-1} та χ^{-1} впливають на розподіли електричних потенціалу й заряду та напружень, причому вплив відношення χ/ξ , яке приймається значно більшим за одиницю, відчувається лише у вузькій області біля поверхні півпростору.

Проаналізовано вплив параметрів нелінійності на напружено-деформований стан та поверхневі напруження. Встановлено, що врахування зменшення модуля Юнга матеріалу із зменшенням його густини є наслідком зменшення поверхневих напружень. Подібний ефект спостерігаємо у меншій мірі і для коефіцієнта Пуассона. Поверхневі напруження у півпросторі суттєво залежать від відношення χ/ξ і значно менше від відношення ζ/ξ . Врахування нелінійності та структурної неоднорідності приводить до суттєвих кількісних

змін значення полів, які є необхідними при розрахунку експлуатаційних характеристик конструкцій.

Розділ 4. Моделювання розмірних ефектів модулів пружності локально неоднорідних електропровідних тіл

В рамках моделі локально неоднорідного електропровідного твердого тіла у розділі досліджено закономірності приповерхневої неоднорідності у безмежному гетерогенному шарі. Розглянуто математичну модель стану гетерогенного електропровідного деформівного твердого шару із залежними модулями пружності. Прийнято суттєву залежність пружних властивостей від неоднорідності матеріалу тіла і відображено це шляхом врахування степеневі залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від відносної зміни густини у точці тіла (2.3). Наведено результати числового аналізу з використанням математичної моделі, зокрема, щодо розподілу густини у шарі, розподілу електричного потенціалу та заряду у шарі, а також розподілу напружень у шарі. Розглянуто особливості моделювання розмірного ефекту міцності шару та розмірного ефекту ефективних модулів пружності.

4.1. Модель стану гетерогенного електропровідного деформівного твердого шару із залежними модулями пружності

Розглянемо безмежний ізотропний деформівний електропровідний неферомагнітний твердий шар, що займає область $-l \leq x \leq l$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Шар у цілому електронейтральний, його поверхні є вільними від зовнішнього силового навантаження і на них задано сталі значення густини ρ_a , відмінне від відлікового значення ρ_* , котре характерне для безмежного однорідного середовища. На безмежності шар може бути навантажений зусиллями уздовж серединної поверхні тіла, що спричиняють його розтяг.

У випадку вказаної вище зовнішньої дії рівноважний стан півпростору залежить лише від координати x і описується такою ключовою системою рівнянь для визначення: густини ρ , термодинамічного електричного потенціалу ϕ , компонент тензора напружень $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m},$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{a_{\omega\omega}}{\epsilon_0}\phi + \frac{a_{m\omega}}{\epsilon_0}(\rho - \rho_*) = 0,$$

$$\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} - \frac{\nu}{E} \sigma \right) = -\frac{d^2}{dx^2} (a_m(\rho - \rho_*) + a_0^\omega \phi), \quad \gamma = \{y, z\}.$$

Тут $a_m, a_0^\omega, a_{m\omega}, a_{\omega\omega}, \epsilon_0, \xi, \zeta$ — сталі величини,

$$d_{\sigma m} = (\rho_a - \rho_*) \frac{\text{ch}(\zeta x)}{\text{ch}(\zeta l)}, \quad (4.1)$$

рівняння для густини є таким

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2(\rho_a - \rho_*) \frac{\text{ch}(\zeta x)}{\text{ch}(\zeta l)}. \quad (4.2)$$

Крайові умови для густини, електричного потенціалу, напружень, а також умови для головних вектора і моменту зусиль є такими

$$\rho(\pm l) = \rho_a, \quad \phi(\pm l) = \phi_a, \quad \sigma_{xx}(\pm l) = 0,$$

$$\int_{-l}^l \sigma_{yy}(x) dx = 2l\sigma_a, \quad \int_{-l}^l \sigma_{zz}(x) dx = 0,$$

$$\int_{-l}^l x \sigma_{yy}(x) dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_{zz}(x) dx = 0. \quad (4.3)$$

Ці умови відповідають навантаженню зусиллями інтенсивності σ_a у напрямі осі Oy .

Присутні тут поверхневі значення електричного потенціалу ϕ_a можуть бути визначені із врахуванням умови електронейтральності (2.30), котра для шару набуває вигляду

$$\int_{-l}^l \omega(x) dx = 0. \quad (4.4)$$

Система (2.4) із виразом для джерел маси (4.1), а також умовами (4.3), (4.4) описує стан гетерогенного електропровідного деформівного твердого шару товщиною $2l$, розтягнутого у напрямку осі Oy зусиллями інтенсивності σ_a за степеневі залежності (3.3) модулів пружності від густини та неоднорідності поверхні, що описана характерним розміром ζ^{-1} та поверхневим збуренням густини $\rho_* - \rho_a$.

4.2. Результати числового аналізу з використанням моделі

Аналіз сформульованої вище задачі моделювання показує, що можна послідовно визначити густину $\rho(x)$, термодинамічний електричний потенціал $\phi(x)$ та напруження $\sigma_{xx}(x)$, $\sigma_{yy}(x)$, $\sigma_{zz}(x)$. Розв'язок сформульованої задачі має вигляд

$$\rho(x) - \rho_* = \frac{1}{D} (\rho_a - \rho_*) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\xi^2 \text{ch}(\zeta x)}{\zeta^2 \text{ch}(\zeta l)} \right], \quad (4.5)$$

$$\phi(x) = \alpha_\phi \frac{\rho_a - \rho_*}{D} \left[\frac{\chi^2}{\xi^2 - \chi^2} \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\chi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \frac{\xi^2 \text{ch}(\zeta x)}{\zeta^2 \text{ch}(\zeta l)} - \right.$$

$$-\left[\frac{\chi^2}{\xi^2 - \chi^2} \frac{\xi \operatorname{th}(\xi l)}{\chi \operatorname{th}(\chi l)} - \frac{\chi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \frac{\xi^2 \zeta \operatorname{th}(\zeta l)}{\zeta^2 \chi \operatorname{th}(\chi l)} \right] \frac{\operatorname{ch}(\chi x)}{\operatorname{ch}(\chi l)}, \quad (4.6)$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x) = & -\frac{E(x)a_m\rho^*}{1-\nu(x)} \left[\frac{\rho(x)}{\rho^*} - 1 + a_1^\omega \frac{\phi(x)}{\rho^*} - \frac{In_1}{In_2} \right] + \\ & + \frac{\sigma_a}{2E_0In_2} \frac{E(x)}{1+\nu(x)} \left(\frac{1+\nu(x)}{1-\nu(x)} + \frac{In_2}{In_0} \right), \\ \sigma_{zz}(x) = & \frac{E(x)a_m\rho^*}{1-\nu(x)} \left[\frac{\rho(x)}{\rho^*} - 1 + a_1^\omega \frac{\phi(x)}{\rho^*} - \frac{In_1}{In_2} \right] + \\ & + \frac{\sigma_a}{2E_0In_2} \frac{E(x)}{1+\nu(x)} \left(\frac{1+\nu(x)}{1-\nu(x)} - \frac{In_2}{In_0} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{Тут: } D = \frac{\zeta^2 - \xi^2}{\zeta^2},$$

$$\alpha_\phi = \frac{a_m\omega}{a_\omega\omega},$$

$$a_1^\omega = \frac{a_0^\omega}{a_m},$$

$$In_0 = \frac{1}{2lE_0} \int_{-l}^l \frac{E(t)dt}{1+\nu(t)},$$

$$In_1 = \frac{1}{2lE_0} \int_{-l}^l \frac{E(t)}{1-\nu(t)} \left[\left(\frac{\rho(t)}{\rho^*} - 1 \right) + a_1^\omega \frac{\phi(t)}{\rho^*} \right] dt,$$

$$In_2 = \frac{1}{2lE_0} \int_{-l}^l \frac{E(t)dt}{1-\nu(t)}.$$

4.2.1. Розподіл густини у шарі

Розподіл густини симетричний за товщиною шару і залежить від двох характерних розмірів (ξ^{-1} , ζ^{-1}) та поверхневого збурення ρ_a/ρ_* . На рис. 4.1 показано розподіл густини у шарі для значень $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\xi l = 3, 6, 20$ (криві 1-3, відповідно, $\zeta/\xi = 1.2$). На поверхні тіла збурення густини щодо відлікового значення є максимальне і зменшується в глибину тіла. У серединних областях товстих шарів їх густина наближається до відлікового значення густини ρ_* . У випадку гетерогенного тіла густина є функцією, що описує неоднорідну структуру тіла, а тому природньо, що на неї не впливає електронна система.

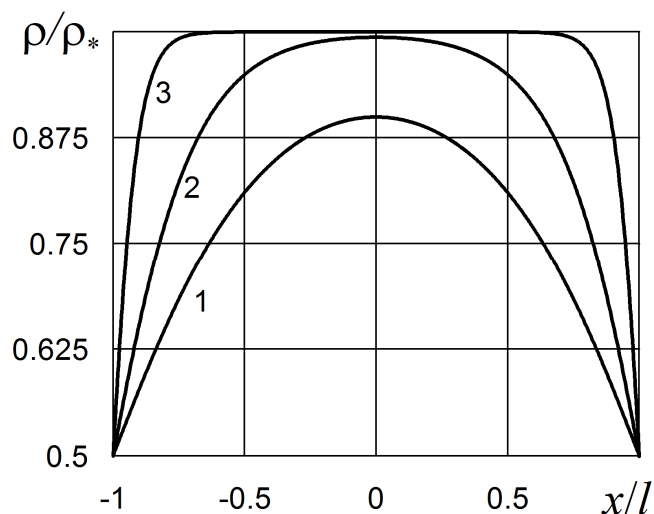


Рис. 4.1. Розподіл густини у шарі різної товщини

На серединній поверхні значення густини $\rho(0)$ швидко наближається до густини у відліковому стані із зростанням товщини шару та зменшенням характерних розмірів, як показано на рис. 4.2. Криві відповідають $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ (криві 1-3, відповідно), $\rho_a/\rho_* = 0.5$. Як видно, уже при $\xi l = 10$ густина у центральній частині шару практично відповідає густині відлікового середовища, крім випадку $\zeta/\xi = 0.2$; шари із $3 < \xi l < 10$ можна вважати тонкими плівками – у них поверхня суттєво впливає на стан усіх

точок тіла. Більш детально аналіз густини проведено у роботах [161, 162] та інших.

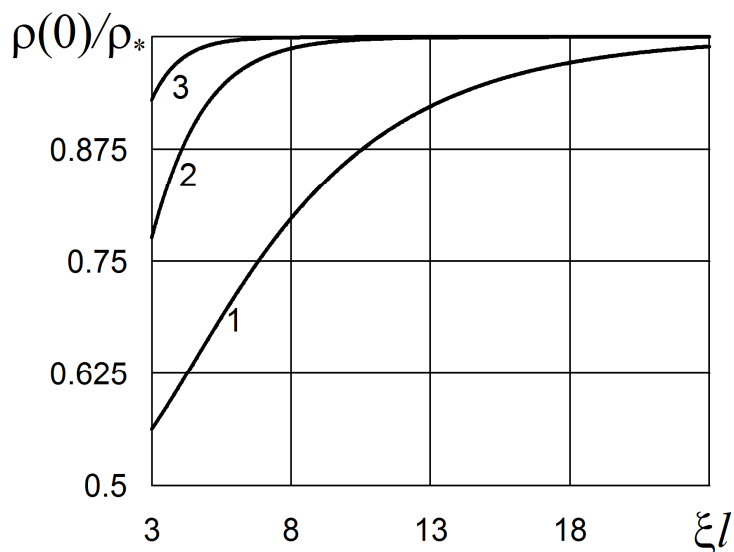


Рис. 4.2. Збурення густини на серединній поверхні:
вплив джерел маси (шорсткості)

4.2.2. Розподіл електричного потенціалу та заряду у шарі

На рис. 4.1 та рис. 4.2 відображено густину, віднесену до значення, характерного для безмежного середовища. У випадку термодинамічного електричного потенціалу $\phi(x)$ його значення доцільно віднести до параметра $\phi_0 = \alpha_0 \rho_*$. Розподіл $\phi(x)$ залежатиме серед іншого від характерного розміру χ^{-1} , пов'язаного із електронною підсистемою тіла; враховуючи, що характерні розміри структури тіла та неоднорідності його поверхні є значно більшими, порівняно із відстанями прояву електричних явищ, доцільно прийняти $\chi^{-1} \ll \xi^{-1}$, $\chi^{-1} \ll \zeta^{-1}$, а більший за одиницю параметр χ/ξ буде визначати відношення характерних розмірів структурної неоднорідності та неоднорідності, пов'язаної із силами кулонівської взаємодії. На рис. 4.3 показано розподіл термодинамічного електричного потенціалу у шарі для

$\chi/\xi=5$, $\rho_a/\rho_*=0.5$, $\xi l=6$, ці результати демонструють вплив параметра шорсткості поверхні $\zeta/\xi=0.6, 1.2, 2.4$ (криві 1-3).

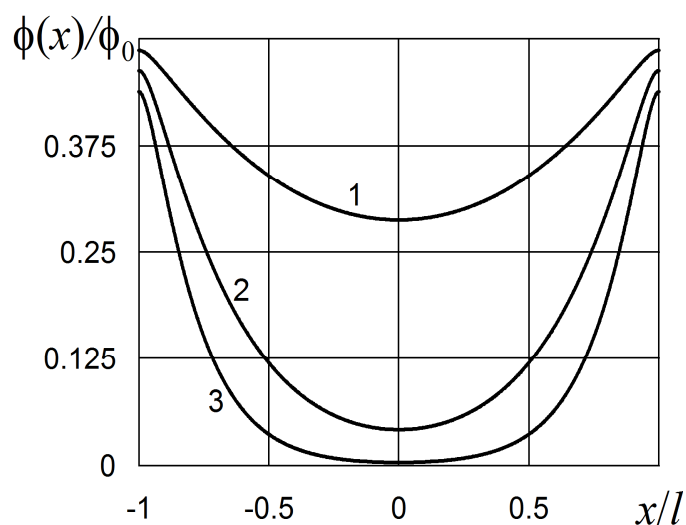


Рис.4.3. Розподіл електричного потенціалу у шарі:
вплив параметрів неоднорідності поверхні

На рис. 4.4 показано розподіл $\phi(x)/\phi_0$ при $\xi l=6$, $\zeta/\xi=1.2$, $\chi/\xi=5$ для $\rho_a/\rho_*=0.25, 0.50, 0.75$ (криві 1-3, відповідно).

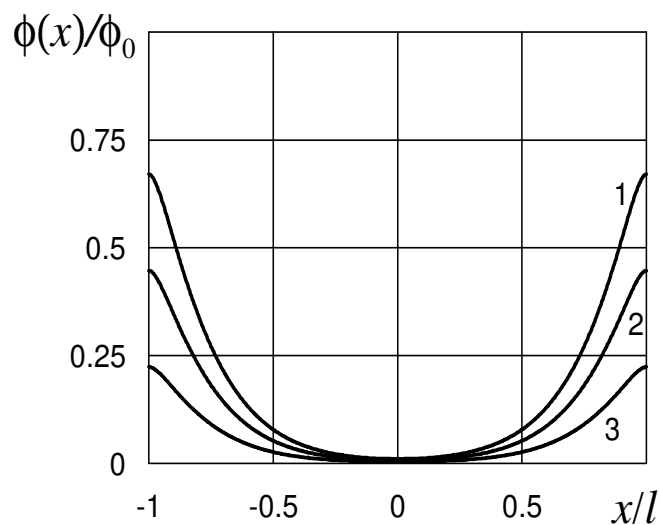


Рис. 4.4. Розподіл електричного потенціалу у шарі:
вплив поверхневого збурення густини

На поверхневе значення електричного потенціалу

$$\phi_a \equiv \phi(\pm l) = \alpha_\phi \frac{\rho_a - \rho_*}{D} \left[\frac{\chi^2}{\xi^2 - \chi^2} \left(1 - \frac{\xi \operatorname{th}(\xi l)}{\chi \operatorname{th}(\chi l)} \right) - \frac{\chi^2}{\zeta^2 - \chi^2} \frac{\xi^2}{\zeta^2} \left(1 - \frac{\zeta \operatorname{th}(\zeta l)}{\chi \operatorname{th}(\chi l)} \right) \right] \quad (4.8)$$

суттєво впливають параметри ζ/ξ та χ/ξ . Разом із тим, вплив розміру тіла є незначним, із зростанням товщини шару l до якого значення термодинамічного електричного потенціалу на його поверхні наближається до значення, що характерне для поверхні півпростору і задано формулою (3.8).

На основі знайденого розв'язку (4.4) та рівняння стану для густини електричного заряду можна знайти розподіл заряду у шарі. В силу умови електронейтральності (2.30), що у випадку шару набуває вигляду (4.4) заряд буде самозрівноважений за товщиною шару. Для нього властиві три характерні розміри $\xi^{-1}, \zeta^{-1}, \chi^{-1}$.

Розподіл електричного заряду ω/ω_0 ($\omega_0 = -a_{m\omega}\rho_*$) показано на рис. 4.5 для $\xi l = 3, 6, 20$ (криві 1-3, відповідно), $\zeta/\xi = 1.2$, $\chi/\xi = 5$, $\rho_a/\rho_* = 0.5$.

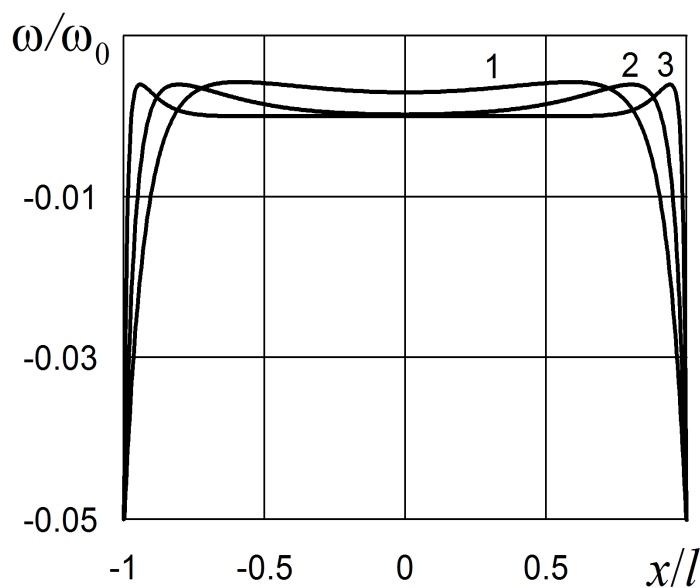


Рис.4.5. Розподіл електричного заряду у шарі: вплив розміру тіла

Як видно із наведених рисунків, у розподілі заряду спостерігаємо існування приповерхневого подвійного електричного шару: негативне значення заряду біля поверхні тіла змінюється позитивним при відході у глибину тіла. У роботі [14] вказано, що у відповідності із макроскопічною електродинамікою енергія частини електронів достатня для виходу за межі тіла, завдяки чому поблизу поверхні провідника утворюється електронна "хмарка"; негативні заряди таких електронів і утворені внаслідок цього позитивні об'ємно розподілені заряди складають подвійний електричний шар. Товщину електронної хмарки при контакті електропровідного тіла з неполяризованим неелектропровідним середовищем оцінюють як $2 \cdot 10^{-10}$ м, а заряд вважають поверхневим. Враховуючи наведене, бачимо, що розглянута математична модель якісно описує розподіл заряду біля поверхні електропровідного тіла.

Зміна розміру тіла (товщини шару) призводить до локалізації подвійного електричного шару ближче (відносно) до поверхні тіла. При цьому максимальне відхилення заряду від відлікового нульового значення у глибині тіла змінюється незначно, поверхнєве від'ємне відхилення заряду змінюється мало. Разом із тим ці значення суттєво залежать від характерного розміру χ^{-1} , пов'язаного із силами кулонівської взаємодії.

Залежність поверхневого значення електричного заряду $\omega(\pm l)$ від відношення ζ/ξ характерних розмірів структурної та приповерхневої неоднорідностей для $\xi l = 3,20$ (криві 1-2, відповідно), $\chi/\xi = 5$, $\rho_a/\rho_* = 0.5$ показано на рис. 4.6.

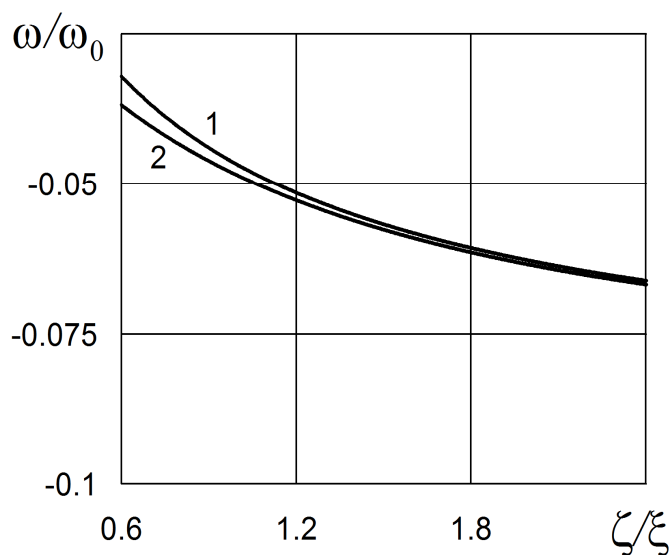


Рис. 4.6. Поверхневе значення електричного заряду:
вплив шорсткості поверхні

Залежність $\omega(\pm l)$ від відношення χ/ξ розмірів структурної неоднорідності та характерного розміру сил кулонівської взаємодії для $\xi l = 3,20$ (криві 1-2, відповідно), $\zeta/\xi = 1.2$, $\rho_a/\rho_* = 0.5$ проілюстровано на рис. 4.7.

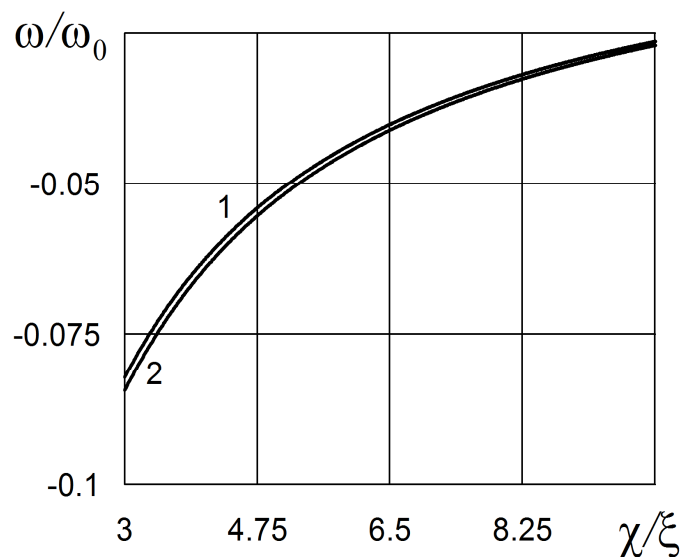


Рис. 4.7. Поверхневе значення електричного заряду:
вплив характерного розміру електричної взаємодії

Із зростанням товщини поверхневе значення заряду наближається до значення, що встановлюється на поверхні півпростору $\omega_a^\infty = -a_{m0}\rho_*\phi_a^\infty$.

4.2.3. Розподіл напружень у шарі

Напруження у тілі мають величезне прикладне значення, а їх аналіз належить до основних задач прикладної механіки. У випадку структурно-неоднорідних тіл напружений стан тіла буде залежати як від умов силового навантаження тіла (що у випадку задачі (4.2)-(4.4) визначається параметром σ_a), так і напружень, обумовлених різними умовами взаємодії частинок біля поверхні тіла (так званих приповерхневих напружень, у випадку цієї задачі залежних передусім від поверхневого збурення густини). Для дослідження останніх розглянемо спершу розв'язок (4.9) за умови $\sigma_a = 0$, в подальшому на прикладі розтягнутого шару ($\sigma_a > 0$) проаналізуємо пружні та міцнісні властивості тіла [158].

На рис. 4.8 показано розподіл напружень σ_{yy}/σ_0 ($\sigma_0 = E_0\rho_*a_m/(1-\nu_0)$) по товщині вільного від силового навантаження ($\sigma_a = 0$) шару для таких значень параметрів: $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\xi l = 6$, $\zeta/\xi = 1.2$, $\chi/\xi = 5$, $a_1^0\alpha_\phi = 0.2; -0.4; -1.2$ (криві 1-3), $\nu_0 = 0.33$, $\beta_e = 1$, $\beta_n = 0$.

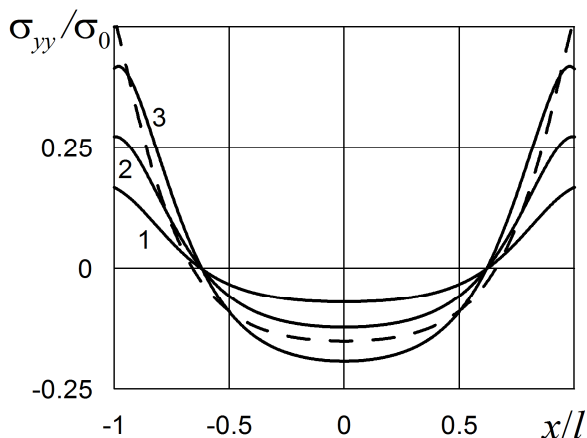


Рис. 4.8. Розподіл напружень у шарі: вплив електричної підсистеми

Пунктирна лінія на цьому рисунку відповідає випадку нехтування залежністю модулів пружності від густини ($\beta_e = \beta_n = 0$) при $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$. Як видно з графіку, розподіл напружень симетричний за товщиною шару, приповерхневі напруження розтягуючі, у серединній частині шару – стискаючі. Із зростанням впливу електричної підсистеми (параметр $a_1^0 \alpha_\phi$), зростають також поверхневі напруження [158].

Вплив нелінійності на розподіл напружень у моделі проявляється у відмінності від нуля показників β_e, β_n у співвідношеннях (3.3). Врахування нелінійності модуля Юнга призводить до зменшення поверхневих напружень порівняно із випадком сталого модуля, а врахування електронної підсистеми суттєво змінює величину напружень як біля поверхні, так і у внутрішніх областях шару. Рисунок 4.9 ілюструє вплив нелінійності:

- Крива 1 – $\beta_e = \beta_n = 0$ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона не залежать від густини матеріалу тіла;
- Крива 2 – $\beta_e = 1, \beta_n = 0$ – модуль Юнга зменшується лінійно із зменшенням густини тіла, а коефіцієнт Пуассона не залежать від густини матеріалу тіла;
- Крива 3 – $\beta_e = 0, \beta_n = 1$ – коефіцієнт Пуассона зменшується лінійно із зменшенням густини тіла, а модуль Юнга не залежать від густини матеріалу тіла;
- Крива 4 – $\beta_e = \beta_n = 1$ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона пропорційні до густини матеріалу тіла.

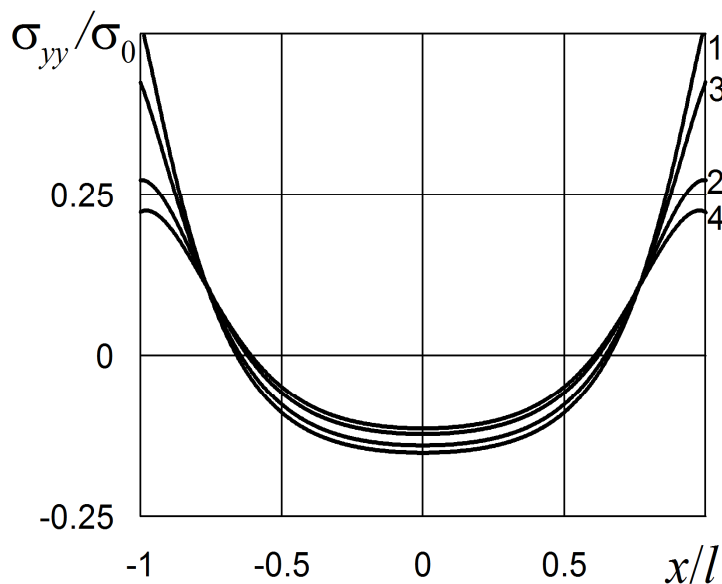


Рис. 4.9. Розподіл напружень у шарі:
вплив нелінійності модулів пружності

При цьому інші параметри матеріалу такі ж, як прийнято вище. Як видно із рисунку відхилення напружень від лінійного випадку ($E = E_0$, $\nu = \nu_0$, крива 1), зростає у приповерхневій області, де збурення густини відносно відлікового значення ρ_* є максимальним. У цілому, врахування залежності локальних модулів пружності від густини призводить до зменшення поверхневих напружень.

Дослідження отриманого розв'язку показують, що характерний розмір неоднорідності, пов'язаний із електронною підсистемою тіла (χ^{-1}) на напруження усередині тіла впливає незначно при $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\xi l = 6$, $\zeta/\xi = 1.2$, $\nu_* = 0.33$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$, $\beta_e = 1$, $\beta_n = 0$ зміна параметра χ/ξ із 3.4 до 24 дає зменшення напружень у центрі $x = 0$ шару на 0,23%, при $x = 0.25l$ – збільшення 0,14%, при $x = 0.5l$ – збільшення 3,14%, і лише при наближенні до поверхні зростає залежність і при $x = l$ сягає 7,07%. На рис. 4.10 показано розподіл напружень при $\xi l = 6$, $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$, $\nu_* = 0.33$, $\beta_n = 0$,

$\chi/\xi = 5$, $\zeta/\xi = 0.2, 1.8$ (відповідно, криві 1 та 2), суцільні лінії відповідають $\beta_e = 1$, пунктирні відповідають $\beta_e = 0$. Електронна система підтвердила своє існування біля поверхні у вузькій приповерхневій області тіла.

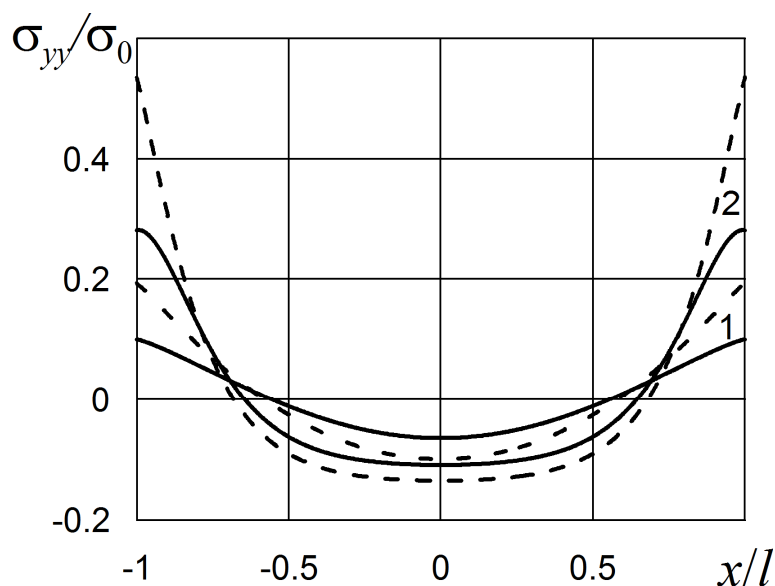


Рис. 4.10. Розподіл напружень у шарі: вплив ζ/ξ

Параметр χ/ξ мало впливає на розподіл напружень за товщиною шару. Тому на рис. 4.11 показано розподіл різниці напружень

$$\sigma_{\delta y} \equiv \sigma_{yy}(x) \Big|_{\frac{\chi}{\xi}=5} - \sigma_{yy}(x) \Big|_{\frac{\chi}{\xi}=30}$$

при $\xi l = 6$, $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$, $\nu_* = 0.33$, $\beta_n = 0$, $\zeta/\xi = 0.6$, суцільна лінія відповідає $\beta_e = 1$, пунктирна – $\beta_e = 0$.

Вплив параметрів нелінійності на поверхневі напруження показано на рис. 4.12 та рис. 4.13. Криві 1-3 відповідають $\xi l = 3, 6, 20$, рис. 4.12 відповідає $\beta_n = 0$, а рис. 4.13 – $\beta_e = 0$, у обох випадках $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$, $\nu_* = 0.33$, $\chi/\xi = 5$, $\zeta/\xi = 1.2$.

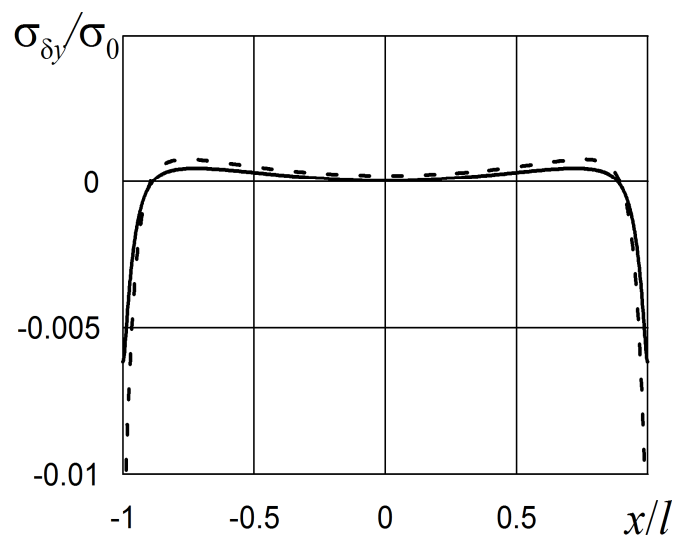


Рис.4.11. Розподіл напружень у шарі: вплив χ/ξ

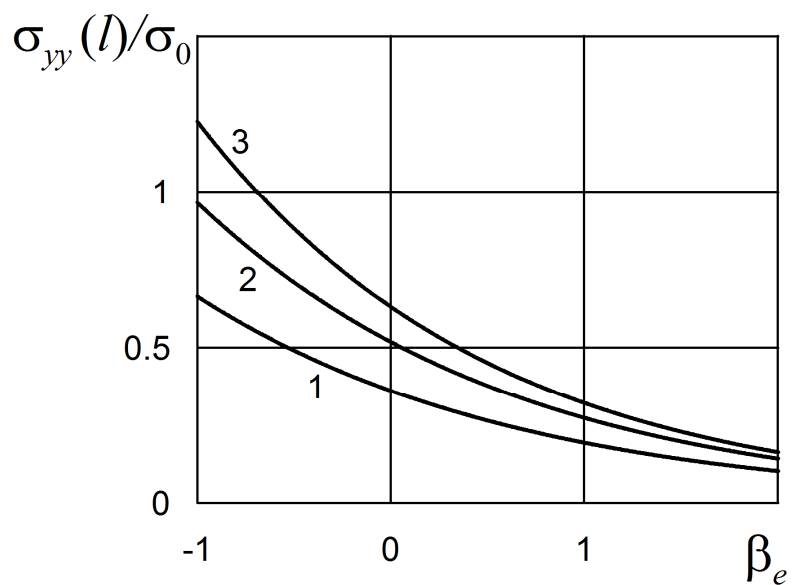


Рис. 4.12. Поверхневі напруження у шарі:
залежність від нелінійності модуля Юнга

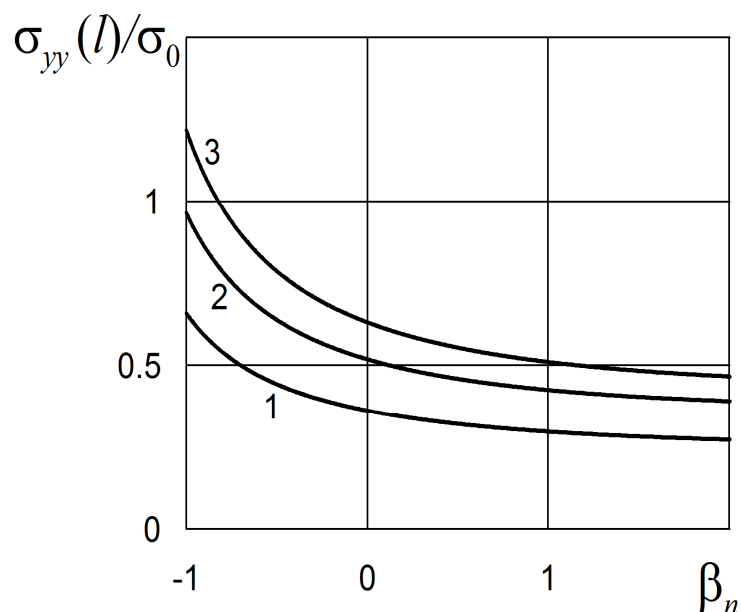


Рис. 4.13. Поверхневі напруження у шарі:
залежність від нелінійності коефіцієнта Пуассона

Як видно із попередніх рисунків, поверхневі напруження є максимальними у тілі і можуть бути збільшеними при $\sigma_a > 0$. Їх дослідження важливе з погляду аналізу міцнісних характеристик тіла. Проведемо далі дослідження міцності шару, за методикою, використаною у працях [158, 170].

4.3. Моделювання розмірного ефекту міцності шару

Для розтягуючих поверхневих напружень, які є найбільшими у тілі, на основі (4.7) запишемо

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(\pm l) = & -\sigma_0 \frac{(1-\nu_0)r^{\beta_n}}{1-\nu_0 r^{\beta_n}} \left[r-1 + a_1^\omega \frac{\phi_a}{\rho_*} - \frac{In_1}{In_2} \right] + \\ & + \frac{\sigma_a}{2In_2} \frac{r^{\beta_n}}{1+\nu_0 r^{\beta_n}} \left(\frac{1+\nu_0 r^{\beta_n}}{1-\nu_0 r^{\beta_n}} + \frac{In_2}{In_0} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

де $r = \frac{\rho_a}{\rho_*}$.

Ввівши позначення

$$A = \frac{1}{2In_2} \frac{r^{\beta_0}}{1 + \nu_0 r^{\beta_n}} \left(\frac{1 + \nu_0 r^{\beta_n}}{1 - \nu_0 r^{\beta_n}} + \frac{In_2}{In_0} \right),$$

$$B = -\frac{(1 - \nu_0)r^{\beta_0}}{1 - \nu_0 r^{\beta_n}} \left[r - 1 + a_1^{\omega} \frac{\phi_a}{\rho_*} - \frac{In_1}{In_2} \right]$$

запишемо співвідношення (4.10) таким чином

$$\sigma_{yy}(\pm l) = A\sigma_a + B\sigma_0.$$

Встановимо критичне навантаження, яке приведе до руйнування шару. За вихідний вибираємо критерій першої класичної теорії міцності, згідно якого руйнування матеріалу відбувається тоді, коли найбільше головне напруження (у даному випадку σ_{yy}) досягає критичного для матеріалу тіла значення σ_p . Із умови $\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_p$ знаходимо значення $\sigma_a > 0$, при якому шар почне руйнуватись і позначимо його σ_{cr}

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{A}(\sigma_p - B\sigma_0). \quad (4.11)$$

Для інтенсивності σ_+ силового навантаження, що приводить до руйнування товстого шару, отримуємо

$$\sigma_+ = \frac{1}{A^\infty}(\sigma_p - B^\infty\sigma_0), \quad A^\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} A, \quad B^\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} B.$$

Враховуючи позначення σ_+ , співвідношення (4.10) запишемо як

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{A} (A^\infty \sigma_+ + (B^\infty - B)\sigma_0). \quad (4.12)$$

Позначимо $In_0^\infty, In_1^\infty, In_2^\infty$ граничні значення, відповідно, In_0, In_1, In_2 при $l \rightarrow \infty$ та врахуємо, що ϕ_a змінюється слабо при зростанні товщини шару. Тоді останнє співвідношення запишемо так

$$\sigma_{cr} = \frac{In_2}{In_2^\infty} \frac{\frac{1+v_0 r^{\beta_n}}{1-v_0 r^{\beta_n}} + \frac{In_2^\infty}{In_0^\infty}}{\frac{1+v_0 r^{\beta_n}}{1-v_0 r^{\beta_n}} + \frac{In_2}{In_0}} \sigma_+ + 2In_2 \frac{(1-v_0)(1+v_0 r^{\beta_n}) \left(\frac{In_1^\infty}{In_2^\infty} - \frac{In_1}{In_2} \right)}{\frac{1+v_0 r^{\beta_n}}{1-v_0 r^{\beta_n}} + \frac{In_2}{In_0}} \sigma_0. \quad (4.13)$$

На рис. 4.14 показано залежність приведенного критичного навантаження σ_{cr}/σ_+ від товщини шару для $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\zeta/\xi = 0.2, 0.6, 1.8$ (криві 1-3), $\chi/\xi = 5$, $\nu_* = 0.33$, $\beta_e = 1$, $\beta_n = 0$, $\sigma_0/\sigma_+ = 4$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$. Варто відзначити, що критичне значення силового навантаження тонкого шару σ_{cr} є більшим за таке навантаження товстих шарів σ_+ і зменшується, прямуючи до останнього, із зростанням товщини шару. У шарів із порівняно гладкою поверхнею ($\zeta/\xi = 0.2$) таке зменшення відбувається повільніше, аніж у тілах із більш значною шорсткістю поверхні ($\zeta/\xi = 0.6, 1.8$, характерний розмір геометричної неоднорідності поверхні ζ^{-1} малий).

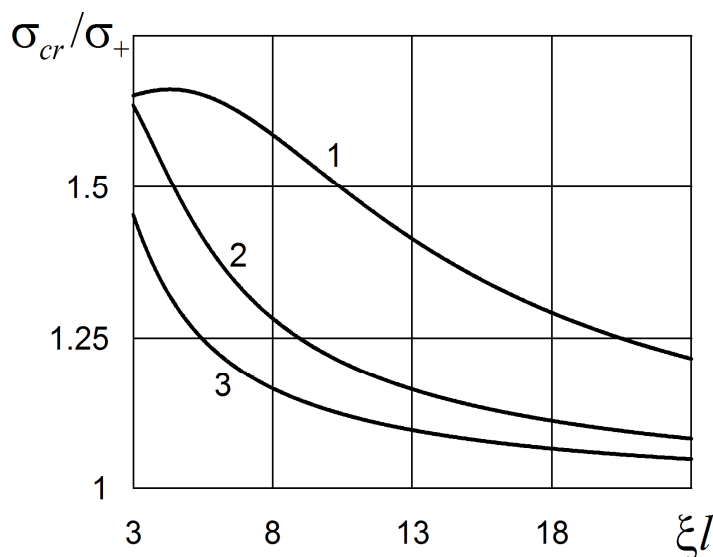


Рис. 4. 14. Розмірний ефект критичного навантаження шару:
вплив неоднорідності поверхні

На рис. 4.15 показано залежність σ_{cr}/σ_+ від товщини шару для $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\zeta/\xi = 1.2$, $\chi/\xi = 5$, $\nu_* = 0.33$, $\sigma_0/\sigma_+ = 4$, $\beta_e = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$ (криві 1-4, відповідно), $\beta_n = 0$, $a_1^0 \alpha_\phi = -0.4$.

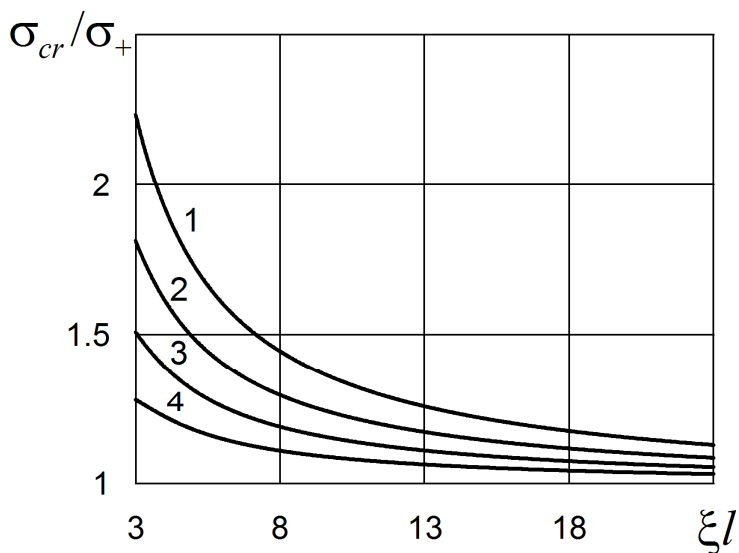


Рис. 4.15. Розмірний ефект критичного навантаження шару:
вплив нелінійності модуля Юнга

Порівнюючи значення силового навантаження, що приводить до крихкого руйнування шару, одержаного на основі лінеаризованої моделі, коли не враховується залежність модулів пружності від густини (крива 1 на рис. 4.15), з результатами, одержаними при врахуванні такої залежності бачимо їх суттєву кількісну відмінність, а особливо у випадку тонких плівок. Тож співвідношення (4.15) можна характеризувати як співвідношення, що описує залежність межі міцності від параметрів структурної неоднорідності матеріалу і шорсткості реальної поверхні тіла, а також від його характерного розміру.

4.4. Розмірний ефект ефективних модулів пружності

Модуль Юнга є експериментально вимірюваною характеристикою тіла, яка чисельно дорівнює відношенню інтенсивності зовнішнього силового

навантаження до відносного видовження тіла. В класичній теорії пружності властивості матеріалу не змінюються переходячи від однієї точки до іншої точки, тому значення локальних і ефективних модулів пружності співпадають [170, 174]. У моделі, що розглядається, локальні модулі пружності, введені співвідношеннями (3.3), залежать від точки тіла $E = E(x)$, а ефективний модуль Юнга E_{ef} дорівнюватиме відношенню σ_a до відносного видовження тіла у напрямку осі Oy

$$E_{ef} = \frac{\sigma_a}{e_{yy}^*}, \quad (4.15)$$

де e_{yy}^* – складова деформації, викликана прикладеним навантаженням.

Щоб знайти компоненти тензора деформації, скористаємось рівняннями стану (2.16). Врахувавши співвідношення (3.1), які дають змогу перейти від λ, μ до E, ν , записуємо

$$\hat{e} = \frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma} - \frac{\nu}{E} \sigma \hat{I} + a_m (\rho - \rho_*) \hat{I} + a_\omega \phi \hat{I}, \quad (4.16)$$

$$\text{де } a_m = \frac{\alpha_{em}}{3\lambda + 2\mu},$$

$$a_\omega = \frac{\alpha_{e\omega}}{3\lambda + 2\mu}.$$

Використовуючи розв'язок (4.5), для нормальних компонент тензора деформації записуємо

$$e_{xx}(x) = -\frac{\sigma_a}{E_0 I_n} \frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[a_m (\rho - \rho_*) + a_\omega \phi \right] - \frac{2\nu a_m \rho_*}{1-\nu} \frac{I_{n_1}}{I_{n_2}},$$

$$e_{yy}(x) = \left(1 + \frac{I_{n_2}}{I_{n_0}} \right) \frac{\sigma_a}{2E_0 I_n} + a_m \rho_* \frac{I_{n_1}}{I_{n_2}}. \quad (4.17)$$

Складові деформації, викликані прикладеним навантаженням, відповідно дорівнюють

$$e_{xx}^*(x) \equiv e_{xx}(x)|_{\sigma_a > 0} - e_{xx}(x)|_{\sigma_a = 0} = -\frac{\sigma_a}{E_0 I n_2} \frac{\nu}{1-\nu},$$

$$e_{yy}^*(x) \equiv e_{yy}(x)|_{\sigma_a > 0} - e_{yy}(x)|_{\sigma_a = 0} = \left(1 + \frac{I n_2}{I n_0}\right) \frac{\sigma_a}{2E_0 I n_2}. \quad (4.18)$$

Таким чином, ефективні модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона дорівнюють

$$E_{ef} = \frac{\sigma_a}{e_{yy}^*} = 2E_0 \frac{I n_0 I n_2}{I n_0 + I n_2},$$

$$\nu_{ef} = -\frac{e_{xx}^*(l)}{e_{yy}^*} = \frac{2I n_0 I n_3}{I n_0 + I n_2}, \quad (4.19)$$

$$\text{де } I n_3 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{\nu(t)}{1-\nu} dt.$$

Вирази для ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона співпадають із виразами, отриманими у [158, 170, 174] для випадку структурно неоднорідного твердого шару.

Отже, дослідимо залежність ефективного модуля Юнга від таких параметрів: $\xi l, \beta_E, \zeta/\xi$.

На рис. 4.16 показано залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E від товщини шару для таких параметрів $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 0.2; 0.5; 1.2$ (криві 1-3, відповідно), $\nu_* = 0.33$, $\beta_e = 1$, $\beta_\nu = 1$.

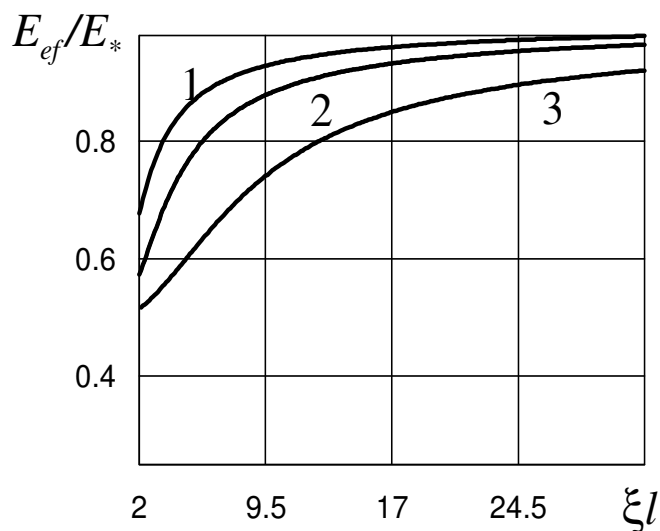


Рис. 4.16. Залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від товщини шару

На рис. 4.17 показано залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від товщини шару ξl . Для таких параметрів $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 0.2; 0.5; 1.2$ (криві 1-3, відповідно), $\nu_* = 0.33$, $\beta_e = 1.5$, $\beta_v = 1$. На цьому рисунку вплив нелінійності слабше проявляється. Як видно з графіку криві змістилися вгору.

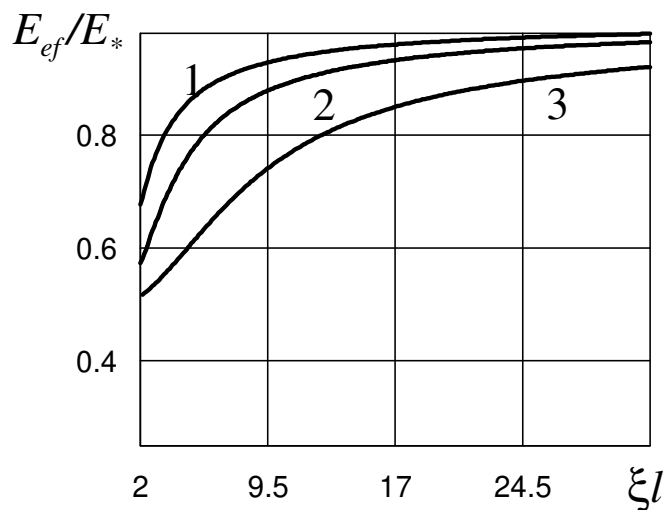


Рис. 4.17. Залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від товщини шару

На рис. 4.18 показано залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від ζ/ξ -характерних розмірів. Для таких параметрів $\rho_a = \rho_*/2$, $\xi l = 2;12;50$ (криві 1-3, відповідно), $\nu_* = 0.33$, $\beta_e = 1.5$, $\beta_v = 1$. При зростанні товщини шару $\xi l \gg 0$, як бачимо вплив нелінійності є суттєвий.

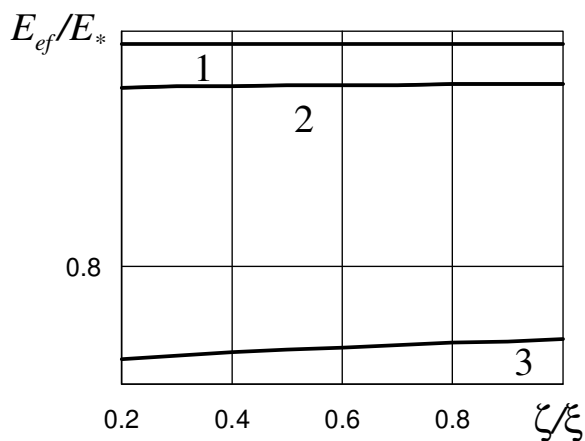


Рис. 4.18. Залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від ζ/ξ

На рис. 4.19 показано залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від параметра β_E . Для таких параметрів $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 2;50$ (криві 1-2, відповідно), $\nu_* = 0.33$, $\xi l = 1.0$. При врахуванні β_E тут, як бачимо, має місце вплив розмірного ефекту на нелінійність, при зростанні характерних розмірів $\zeta/\xi \geq 0$.

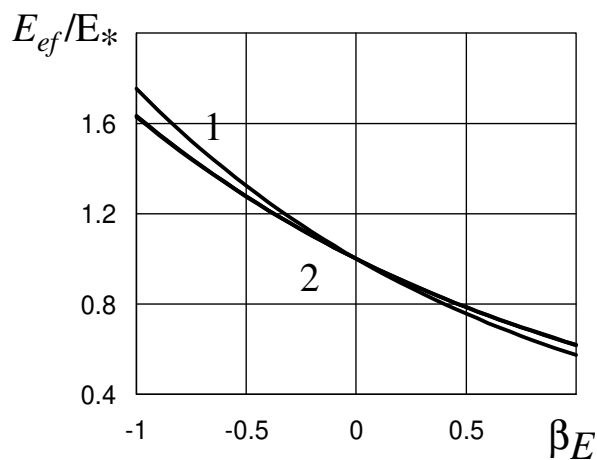


Рис. 4.19. Залежність ефективного модуля Юнга E_{ef}/E_* від β_E .

Таким чином, ми переходимо до аналізу графіків коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від відповідних параметрів, а саме: ξl , β_E , ζ/ξ .

На рис. 4.20 показано залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v/v_* від товщини шару ξl для $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 0.2; 0.5; 1$ (криві 1-3, відповідно), $v_* = 0.33$, $\beta_e = 1$, $\beta_v = 1$.

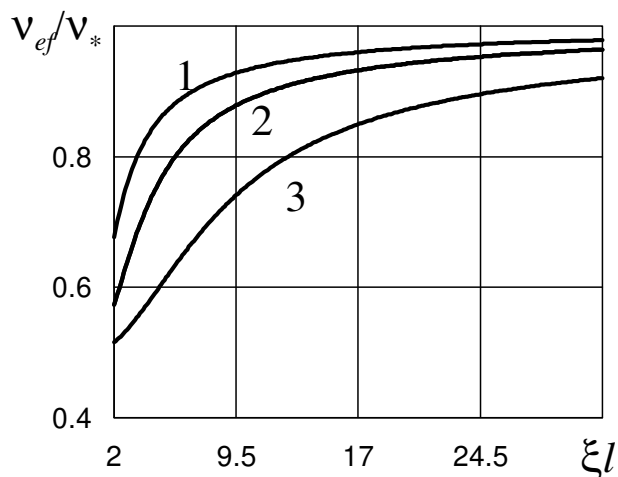


Рис. 4.20 Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від ξl

На рис. 4.21 показано залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від товщини шару ξl для, $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 0.2; 0.5; 1$ (криві 1-3, відповідно), $v_* = 0.33$, $\beta_e = 1$, $\beta_v = -1$ (для оберненої задачі). На цьому графіку добре видно вплив нелінійності.

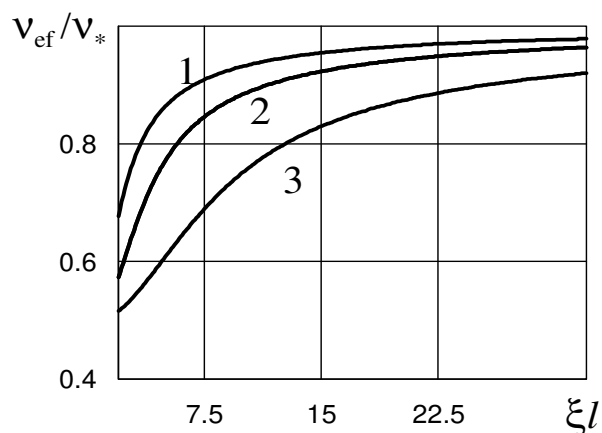


Рис. 4.21 Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від ξ/l

На рис. 4.22 показано залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від параметра β_E для, $\rho_a = \rho_*/2$, $\zeta/\xi = 0.5$, $\xi/l = 2; 1250$ (криві 1-3, відповідно), $v_* = 0.33$, $\beta_v = 1$ Тут є вплив нелінійності, а саме при зростанні товщини шару $\xi/l \gg 0$.

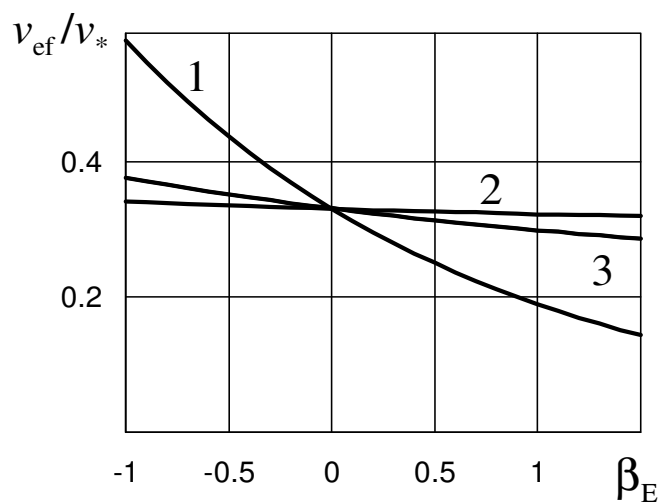


Рис. 4.22 Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від β_E

На рис. 4.23 показано залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від ζ/ξ – співвідношення характерних розмірів для $\beta_E = 1$, $\beta_v = 1$, $\rho_a = \rho_*/2$, $\xi/l = 2; 1250$ (криві 1-3, відповідно), $v_* = 0.33$. Як бачимо з графіку

вплив товщини шару при зростанні товщини шару $\zeta \gg 0$ змінює значення співвідношення характерних розмірів ζ/ξ . Вплив нелінійності на коефіцієнт Пуассона є значно слабшим, а ніж у модуля Юнга.

З наведених графіків видно, що розмірний ефект є властивим як ефективному модулю Юнга, так і ефективному коефіцієнту Пуассона. При цьому співвідношення характерних розмірів структурної та приповерхневої неоднорідностей впливає на величину ефекту. Крім того, як бачимо, електрична підсистема не впливає на розмірний ефект ефективного модуля Юнга та ефективного коефіцієнта Пуассона.

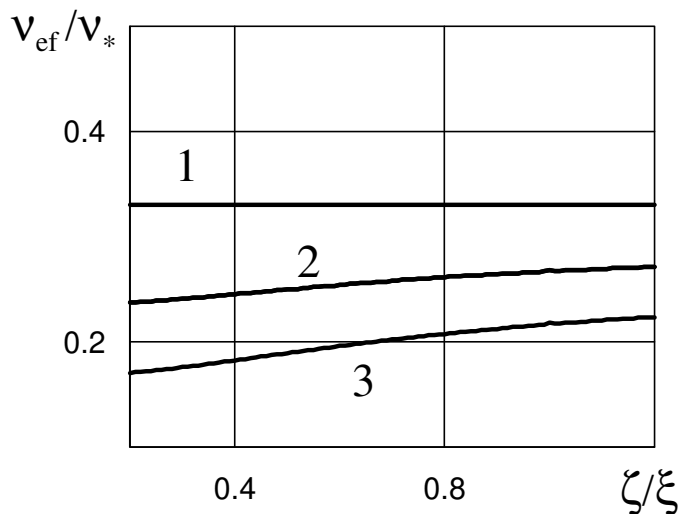


Рис. 4.23. Залежність ефективного коефіцієнта Пуассона v_{ef}/v_* від ζ/ξ

4.5. Дослідження розподілу напружень при визначених характеристиках матеріалу

Напружений стан структурно-неоднорідних тіл залежить як від умов силового навантаження тіла, так і напружень, обумовлених різними умовами взаємодії частинок біля поверхні тіла - приповерхневих напружень, що суттєво залежать від поверхневого збурення густини. Для дослідження останніх в умовах вибору реального матеріалу розглянуто сплави на основі титану, що знаходять широке застосування як матеріали спеціального

призначення завдяки привабливому комплексу їх властивостей. Такий матеріал має високу питому міцність, меншу пружність і кращу стійкість в корозійному середовищі а тому в більшій мірі задовольняє вимогам, що наприклад висуваються до матеріалів біомедичного призначення [280].

На рис. 4.24 показано розподіл напружень σ_{yy}/σ_0 по товщині вільного від силового навантаження ($\sigma_a = 0$) шару, виготовленого з порошкового титану, спеченого при температурі 1473 К, для таких значень параметрів: $\rho_a/\rho_* = 0.5$, $\xi_1 = 6$, $\zeta/\xi = 0.2$, (криві 1 і 3), $\zeta/\xi = 1.2$, (криві 2 і 4), $E_0 = 65$ ГПа, $\nu_0 = 0.37$.

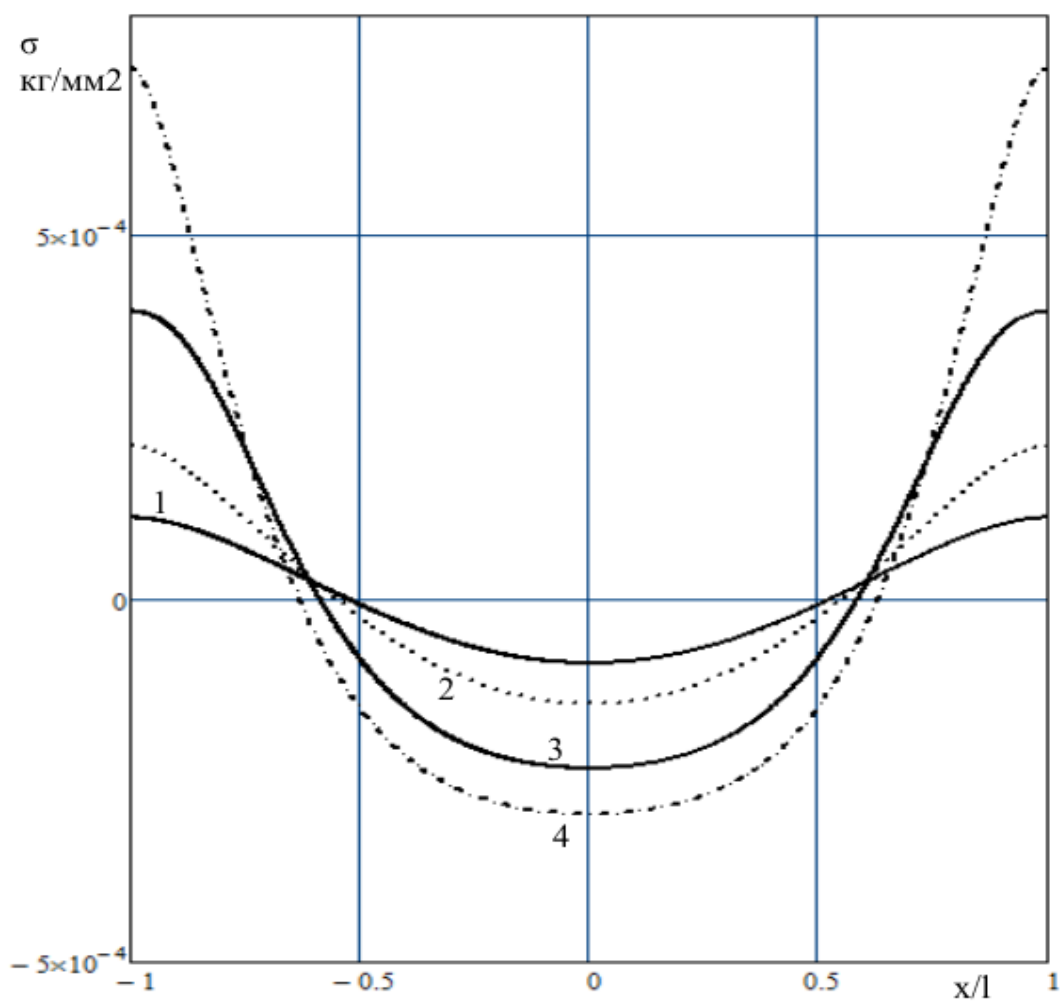


Рис. 4.24. Розподіл напружень у шарі для титану

Пунктирна лінія на цьому рисунку відповідає випадку нехтування залежністю модулів пружності від густини ($\beta_e = \beta_n = 0$), а суцільна лінія в свою чергу, враховує нелінійну залежність модуля Юнга ($\beta_e = 1, \beta_n = 0$).

Як видно з графіку, розподіл напружень симетричний за товщиною шару, приповерхневі напруження розтягуючі, у серединній частині шару – стискаючі. Вплив нелінійності на розподіл напружень у моделі проявляється у відмінності від нуля показника β_e . Врахування нелінійності модуля Юнга призводить до суттєвого зменшення поверхневих напружень порівняно із випадком сталого модуля, що ілюструє вплив не лінійності. При цьому інші параметри матеріалу такі ж, як прийнято вище. Як видно із рисунку відхилення напружень від лінійного випадку ($E = E_0, \nu = \nu_0$, криві 2 і 4), зростає у приповерхневій області, де збурення густини відносно відлікового значення ρ_* є максимальним. У цілому, врахування залежності локальних модулів пружності від густини призводить до зменшення поверхневих напружень.

4.6. Висновки до розділу 4

На основі виконаних досліджень можна стверджувати наступне:

- Розглянуто вільний та розтягнутий електропровідний неферромагнітний шар та змодельовано розподіл фізико-механічних полів та розмірні ефекти напружень, міцності й ефективних пружних характеристик у такому шарі.
- У шарі, вільному від зовнішнього силового навантаження, існує ненульовий напружено-деформований стан, наявність якого обумовлена відхиленням густини на поверхні тіла від густини безмежно неоднорідного середовища.
- Розподілу полів у шарі властиві три характерні розміри, що пов'язані

із силами кулонівської взаємодії, локальною неоднорідністю матеріалу тіла та геометричною неоднорідністю поверхні тіла.

- Значення термодинамічного електричного потенціалу, заряду та напружень, що встановлюються на поверхні тіла, однозначно визначаються фізичними, геометричними параметрами тіла та умовами його навантаження.
- Міцність тонких плівок зростає зі зменшенням її товщини розміру тіла. Врахування електронної підсистеми тіла приводить до зміни значень механічних полів в усій області тіла та характеру їх розподілу у вузькій приповерхневій області.
- Поверхневим напруженням та міцності властивий багатошкальний розмірний ефект.
- Електрична підсистема тіла у рамках прийнятого модельного наближення не впливає на розмірні ефекти ефективних модулів пружності гетерогенного електропровідного неферомагнітного шару.

Висновки

У дисертаційній роботі розв'язано важливе наукове завдання розроблення математичних моделей механічних та фізичних процесів у пружних електропровідних неферромагнітних твердих тілах, які враховують структурну неоднорідність матеріалу та геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла. При цьому отримано такі наукові та практичні результати:

1. Сформульовано основні співвідношення моделі неоднорідного електропровідного неферромагнітного твердого тіла із врахуванням геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла та структурної неоднорідності його матеріалу за лінійних визначальних співвідношень. Обґрунтовано повну нелінійну систему рівнянь моделі для електропровідного термопружного тіла та проведено її аналіз.
2. З допомогою математичної моделі досліджено фізико-механічні поля у неоднорідному, вільному від зовнішнього силового навантаження електропровідному неферромагнітному півпросторі. Прийнято степеневу залежність пружних властивостей матеріалу від густини, що має наслідком нелінійну постановку задачі для півпростору.
3. На основі аналізу розв'язків рівнянь математичної моделі досліджуваних процесів встановлено, що три властиві характерні розміри є пов'язаними із структурною неоднорідністю матеріалу, геометричною неоднорідністю поверхні та із силами кулонівської взаємодії.
4. Поверхневі значення електричних потенціалу та заряду визначено із умови електронейтральності півпростору. Показано, що врахування залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона матеріалу тіла від густини має наслідком зменшення поверхневих напружень.

5. Обґрунтовано математичну модель та з її допомогою досліджено рівноважний стан та експлуатаційні характеристики безмежного неоднорідного електропровідного неферромагнітного шару. Показано, що значення електричного потенціалу, заряду і напружень, які встановлюються на поверхні тіла, визначаються фізичними та геометричними параметрами тіла, а також умовами його навантаження.
6. З використанням розробленої математичної моделі досліджено розмірний ефект межі міцності розтягнутого шару. У результаті числового аналізу встановлено, що міцність тонкої плівки зростає зі зменшенням її товщини тіла. Врахування електронної підсистеми тіла приводить до зміни значень механічних полів в усій області тіла та характеру їх розподілу у вузькій приповерхневій області.
7. Встановлено, що електрична підсистема тіла у рамках прийнятого модельного наближення не впливає на розмірні ефекти ефективних модулів Юнга та коефіцієнта Пуассона. Поверхневим напруженням та міцності властивий багатознакний розмірний ефект.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Truesdell, C., Noll, W., (1965). The Non-Linear Field Theories of Mechanics. In: The Non-Linear Field Theories of Mechanics / Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol 2 / 3 / 3. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46015-9_1
2. Marangantia R., Sharma P. A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies// Journal of the Mechanics and Physics of Solids 55 (2007) 1823–1852.
3. Steigmann, D.J., Ogden, R.W., 1999. Elastic surface–substrate interactions. Proc. R. Soc. A 455, 437–474,
4. Жук, Я. О. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска / Я. О. Жук, І. К. Сенченков, Л. Я. Васильєва//Мат. методи та фіз.-мех. поля.-2011.-Т. 54,№ 1.-С. 101-115.
5. Материалы в машиностроении. Выбор и применение: справочник в 5 т.; под ред. И. В. Кудрявцева. Т. 1. Цветные металлы и сплавы / И. В. Кудрявцев, Л. П. Лужников. - М.: Машиностроение. -1967. - 304 с.
6. Сенченков, И. К. Моделирование неизотермического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала / И. К. Сенченков, Н. Д. Оксенчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2012.-Т. 55, № 1.-С. 138-144.
7. Сенченков, И. К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов / И. К. Сенченков // Прикл. механика. - 2005. - 41, № 9. - С. 118-126.

8. Чечулин, Б. Б. Циклическая и коррозионная прочность титановых сплавов / Б. Б. Чечули, Ю. Д. Хесин. - М.: Металлургия. -1987. - 208 с.
9. Поплавко Ю.М., Борисов О.В., Якименко Ю.І. Нанофізика, наноматеріали, наноелектроніка. Навчальний посібник для студ. ВНЗ. — К. : НТУУ "КПІ", 2012. — 300 с. — ISBN 978-966-622-510-1
10. Кравченко А. Ф. Электронные процессы в твердотельных системах пониженной размерности / А. Ф. Кравченко, В. Н. Овсянко. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 448 с.
11. Заячук Д. М. Нанорозмірні структури і надґратки / Д. М. Заячук. – Л.: Львівська політехніка, 2006. – 220 с.
12. Маркович Б. М., Костробій П. П., Василенко А. І., Токарчук М. В. Електронні властивості металевих підкладів з врахуванням структури ґратки // Моделі квантово-статистичного опису каталітичних процесів на металевих підкладах : Монографія / Під ред. П. П. Костробія. — Львів :Растр-7, 2012. — С. 42–110
13. Григорчак І. І., Костробій П. П., Стасюк І. В. та ін. Фізичні процеси та їх мікроскопічні моделі в періодичних неорганічно/органічних клатратах. —Львів : Растр-7, 2015. — С. 285.
14. Бурак, Я. Й. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. / Я. Й Бурак, Б. П. Галапац, Б. М. Гнідець. - Київ: Наук, думка, 1978. - 230 с.
15. Бурак, Я. И. Исходные уравнения процесса деформации электропроводных твердых растворов с учетом различных путей диффузии примесных частиц / Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Е. Я. Чапля И Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1980. - Вып. 11. - С. 60-66.
16. Нагірний Т. С., Червінка К. А. Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки І. — Львів: СПЛАЙН, 2012. — 264 с.

17. Gleiter H. Nanostructured materials: basic concepts and microstructure. // Acta Mater. 2000, v. 48, p. 1-29.
18. Feynman R.P. There's plenty of room at the bottom. Eng. Sci. 1960;23:22–36
19. Taniguchi N., Arakawa C., Kobayashi T. On the basic concept of nanotechnology; Proceedings of the International Conference on Production Engineering; Tokyo, Japan. 26–29 August 1974.
20. Малыгин А.А. Физика поверхности и нанотехнология: взаимосвязь и перспективы // Соросовский образовательный журнал. 2004, т. 8, № 1, с. 32-3.
21. Андриевский Р.А., Глезер А.М. Размерные эффекты в нанокристаллических материалах. I. Особенности структуры. Термодинамика. Фазовые равновесия. Кинетические явления // ФММ. 1999, т. 88, № 1, с. 50-73.
22. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: «Физматлит», 2005, 416 с.
23. Стасюк З.В., Лопатинський А.І. Розмірні кінетичні явища в тонких плівках металів. Класичні ефекти // ФХТТ. – 2001. – Т. 2, № 4. – С. 521 – 542
24. Андриевский Р.А., Глезер А.М. Размерные эффекты в нанокристаллических материалах. II. Механические и физические свойства // ФММ. 2000, т. 89, № 1, с. 91-112.
25. Сергеев Г.Б. Размерные эффекты в нанохимии // Российский химический журнал. 2002, т.46, с.22-99.
26. Скороход В.В., Рагуля А.В. Наноструктурная керамика и нанокompозиты: достижения и перспективы // Прогресивні Матеріали і технології. Київ: «Академперюдика», 2003, т. 2, с.7-34.
27. Пулмл Ч., Оуэне Ф. Нанотехнологии /Пер. с англ./Под ред. Головина Ю.И. М.: «Техносфера», 2006, 336 с.

28. Фирстов С.А. Особенности деформации и разрушения микро- и нанокристаллических материалов // Збірник наукових праць. Т. 2. Київ: «Академперіодика», 2003, с. 610-630.
29. Трофимов В.И., Мильиан Ю.В., Фирстов С.А. Физические основы прочности тугоплавких металлов. Киев: «Наукова думка», 1975, с. 315.
30. Лякишев Н.П. Нанокристаллические структуры - новое направление развития конструкционных материалов // Вестник РАН. 2003, т. 73, № 5, с. 422-428.
31. Андриевский Р.А., Глезер А.М. Прочность наноструктур // УФН. 2009, т. 179, №4, с. 337-358.
32. Валиев Р.З., Александров И.В. Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства. М.: «Академкнига», 2007, 210 с.
33. Meyers M.A., Mishra A., Benson D.J. Mechanical properties of nanocrystalline materials // Progress in Materials Science. 2006, №51, p. 427-556.
34. Мулюков Р.Р. Развитие принципов получения и исследования объемных наноструктурных материалов в ИПСМ РАН // Российские нанотехнологии. 2007, т. 2, № 7-8, с.38-53.
35. Суздаев И.П. Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М.: «КомКнига», 2006, 592 с.
36. Лякишев Н.П., Алымов М.И. Наноматериалы конструкционного назначения //Российские нанотехнологии. 2006, № 1-2, с. 71-81.
37. Рыбин В.В., Кузнецов П.А., Улин И.В., Фармаковский Б.В., Бахарева В.Е. Наноматериалы конструкционного и функционального класса // Вопросы материаловедения. 2006, № 1(46), с. 169-177.
38. Горынин И.В.. Исследования и разработки ФГУП ЦНИИ КМ «Прометей» в области конструкционных наноматериалов // Российские нанотехнологии. 2007, т. 2, № 3 - 4, с. 36-57.

39. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // УФН. 2002, т. 172, №4, с. 401-438.
40. Золотухин И.В. Углеродные нанотрубки // Соросовский образовательный журнал. 1999, №3, с. 111-115.
41. Елецкий А.В. Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе // УФН. 2007, т. 177, №3, с. 233-273.
42. Харрис П. Углеродные нанотрубки и родственные структуры. Новые материалы XXI века. М.: «Техносфера», 2003, 336 с.
43. Елецкий А.В. Транспортные свойства углеродных нанотрубок // УФН. 2009, т. 179, №3, с. 225-241.
44. George M., Coupeau C., Colin J., Grilhe J., Acta Mater. 53, 411, (2005).
45. Marx V. M., Toth F., Wiesinger A., Berger J., Kirchlechner C., Cordill M. J., Fischer F. D., Rammerstorfer F. G. Dehm G. Acta Mater. 89, 278 (2015).
46. Coupeau C. Thin Solid Films 406, 190 (2002). Moon M. W., Chung J. W., Lee K. R., Oh K. H., Wang R., Evans A. G., Acta Mater. 50, 1219 (2002).
47. Boijoux R., Parry G., Faou J.-Y., Coupeau C. Appl. Phys. Lett. 110, 141602 (2017).
48. Faou J.-Y., Grachev S., Barthel E., Parry G. Acta Mater. 125, 524, (2017).
49. Bemporad E., Sebastiani M., Casadei F., Carassiti F. Surf. Coat. Technol. 201, 7652 (2007).
50. Schmidt S., Hanninen T., Wissting J., Hultman L., Goebbels N., Santana A., Tobler M., Hogberg H. J. Appl. Phys. 121, 171904 (2017).
51. Djaziri S., Renault P.-O., Le Bourhis E., Goudeau P., Faurie D., Geandier G., Mocuta C., Thiaudie`re D., J. Appl. Phys. 116, 093504. (2014).
52. Martinu L., Zabeida O., Klemberg-Sapieha J. E. Handbook of Thin Film Deposition Technology, edited by P. M. Martin (Elsevier, Amsterdam, 2010), pp. 394–467.
53. Espinosa H. D., Prorock B. C., Fischer M. J. Mech. Phys. Solids 51,47 (2003).

54. Blech I. A. *J. Appl. Phys.* 47, 1203 (1976).
55. Chason E., Jadhav N., Pei F., Buchovecky E., Bower A. *Prog. Surf. Sci.* 88, 103 (2013).
56. Horsfall A. B., Dos Santos J. M., Soare S. M., Wright N. G., Neill A. G. O., Bull S. J., Walton A. J., Gundlach A. M., Stevenson J. T. M. *Semicond. Sci. Technol.* 18, 992 (2003).
57. Chason E., Vasquez J., Pei F., Jain N., Hitt A. *J. Electron. Mater.* 47, 103 (2018).
58. Fluri A., Marcolongo A., Roddatis V., Wokaun A., Pergolesi D., Marzari N., Lippert T. *Adv. Sci.* 4, 1700467 (2017).
59. Narayanachari K. V. L. V., Chandrasekar H., Banerjee A., Varma K. B. R., Ranjan R., Bhat N., Raghavan S., *J. Appl. Phys.* 119, 014106 (2016).
60. Sander D. *Rep. Prog. Phys.* 62, 809 (1999).
61. Sander D., Tian Z., Kirschner J. *J. Phys. Condens. Matter* 21, 134015 (2009).
62. Lee M. L., Fitzgerald E. A., Bulsara M. T., Currie M. T., Lochtefeld A. J. *Appl. Phys.* 97, 011101 (2005).
63. Mills E. J. *Proc. R. Soc. London* 26, 504 (1877).
64. Thornton J. A., Hoffman D. W. *Thin Solid Films* 171, 5 (1989).
65. Aliofkhazraei, M. *Nanocoatings: Size Effect in Nanostructured Films* / M. Aliofkhazraei. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. - 251 p.
66. Bozant, P. Z. Size effect IP. Z. Bazant I I *Int. J. Solids and Struct.* - 2000. - 37.-P. 69-80.
67. Katz, Y. Implications of scale effects on the mechanical response / Y. Katz, W. W. Gerberich II *On achievements in mechanical and material engineering: 13th Int. Sci. Conf.* - Poland, Gliwice-Wisla, 16-19th May 2005.-P. 295-298.
68. . Liang, H. Size-dependent elasticity of nanowires: Nonlinear effects /Liang, H., Upmanyu H., Huang H. *Phys. Review. B.* - 2005. - Vol. 71. -P. 241403-1-241403-4.
69. Nahirnyj T. On size effect of mechanical properties of thermoelastic solids /

- Т. Nahirnyj, К. Tchervinka // Фіз. мат. моделювання та інформаційні технології. - 2009. - Вип. 10. - С. 75-83
70. Бартенев, Г. М. Прочность и разрушение высокоэластических материалов / Г. М. Бартенев, Ю. С. Зуев. - Москва-Ленинград: Химия, 1964.-388 с.
71. Иванов, А. Г. О масштабных эффектах при разрушении / А. Г. Иванов, В. Н. Минеев // Физика горения и взрыва. - 1979. - № 5. - С. 70-95.
72. Комник, Ю. Ф. Физика металлических пленок / Ю. Ф. Комник. - М.: Атомиздат. - 1979. - 264 с.
73. Кукса, Л. В. Масштабный эффект пластических свойств поликристаллических материалов / Л. В. Кукса // Пробл. прочности. - 1986. - №5.- С. 90-92.
74. . Одинг, И. А. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести / И. А. Одинг, З. Г. Фридман // Заводская лаборатория. - 1959. - 25, № 3. - С. 329-332.
75. Васильев, В. З. О физико-механической природе эффекта упрочнения материала нитевидных кристаллов и тонких нитей / В. З. Васильев, С. Ю. Каптелин // Прикл. механика и техн, физика. - 1992. - № 4. - С. 135-141.
76. Иголкин, Б. И. О природе масштабного эффекта / Б. И. Иголкин // Пробл. прочности. - 1978. - № 3. - С. 50-52.
77. Ломашевский, В. П. Экспериментальное исследование влияния эффектов масштаба и формы тела на закономерности деформирования и разрушение структурно-неоднородных материалов / В. П. Ломашевский, П. Т. Алфимов, А. А. Лебедев // Пробл. прочности. - 1982. -№9.-С. 68-72.
78. . Серенсен, С. В. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность / С. В. Серенсен, В. П. Кочаев, Р. М. Шнейдерович. - М.: Машиностроение, 1975. - 488 с.

79. Коршунов, А. И. Влияние масштабного эффекта на параметры долговечности / А. И. Коршунов, С. А. Новиков // Пробл. прочности. - 1990.-№7.-С. 56-58.
80. Новиков, Н. В. Численное моделирование прочности и долговечности конструкций с учетом масштабного эффекта. Сообщение 1. Обоснование критерия прочности и долговечности / Н. В. Новиков, В.И. Левишас, С. И. Шестаков // Пробл. прочности. - 1991. - № 5. -С.37-43.
81. Гольдштейн, З. В. Мультифрактальная геометрия разрушения и масштабный эффект / З. В. Гольдштейн, А. Б. Мосаков // ДАН (Россия). - 1993. - Т. 329, № 4. - С. 429-431.
82. Лопощенко, А. М. Влияние масштабного фактора на длительную прочность / А. М. Лопощенко // Пробл. прочности. - 1995. - № 3. - С. 13-18.
83. Юзевич, В. Н. Оценка влияния масштабного фактора на разрушение стержней / В. Н. Юзевич // Пробл. прочности. - 1991. - № 1. С. 77-79.
84. Сосновский, Л. А. Статистическая модель деформируемого твердого тела с опасным объемом и некоторые ее приложения / Л. А. Сосновский // Пробл. прочности. - 1990. - № 5. - С. 8-12.
85. Чечулин, Б. Б. Масштабный фактор и статистическая теория прочности / Б. Б. Чечулин. - М.: Металлургия. -1963. - 116 с.
86. Задумкин, С. Н. К статистической электронной теории поверхностной энергии бинарных сплавов простых металлов / С. Н. Задумкин,
87. Задумкин, С. Н. Современное состояние электронных теорий поверхностных энергий металлов / С. Н. Задумкин, Р. М. Дигилов // Поверхностные явления в расплавах и возникающих из них твердых фазах. - Кишинев: Штиица, 1977. - С. 4-46.
88. Беляев, А. Поверхностные явления в металлургических процессах / А. Беляев, Е. А. Жемчужина. -М.: Металлургиздат, 1952. - 144 с.
89. Linford, R. G. Surface thermodynamics of solids / R. G. Linford // Sol. State

- Surface Sci. - New York: Marcell Dekker, 1973. - 2. P. 1-152.
90. Ghoniem, N. M. Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview / N. M. Ghoniem, E. P. Busso, N. Kioussis // Philos. Mag. - 2003. - 83, No. 31-34. - P. 3475-3528.
 91. Гриффішс, А. А. Явища розриву і течіння в твердих тілах I А. А. Гриффішс // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 1993. - Т. 29, № 3 С. 13-42.
 92. Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов / Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук, Т. М. Онуфрик, Ю. З. Повстенко // Физ.-хим. механика материалов. - 1975.- №2.-С. 36-43.
 93. Подстригач, Я. С. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах / Я. С. Подстригач, Ю. З. Повстенко. - Киев: Наук, думка, 1985. - 200 с.
 94. Подстригач, Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя / Я. С. Подстригач // Инж.-физ. журн. - 1963. - 6, № 10. - С. 129-136.
 95. Подстригач, Я. С. Температурное поле и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. - 1967. - Вып. 7. - С. 227-233.
 96. Подстригач, Я. С. Условия скачка напряжений и перемещений на тонкостенном включении в сплошной среде / Я. С. Подстригач // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1982. - № 12. - С. 30-32.
 97. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
 98. Гиббс, Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика /Дж. В. Гиббс. - Москва: Наука, 1982. - 584 с.
 99. Бурак, Я. И. Исходные уравнения процесса деформации электропроводных твердых растворов с учетом различных путей диффузии примесных частиц / Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Е. Я. Чапля //

- Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1980. - Вып. 11. - С. 60-66.
100. Бурак, Я. И. Термодинамические основы и исследование поверхностных явлений в электропроводных телах / Я. И. Бурак, Б. П. Галапац. // Физ.-хим. механика материалов. - 1981. - 17, № 5. - С. 59-66.
101. Бурак, Я. Й. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: монографія: у 5 т. Т. 1. Термомеханіка багатоконпонентних тіл низької електропровідності / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький; Ін-т приклад. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. — Л.: СПОЛОМ, 2006. — 300 с..
102. Чапля, Е. Я. Исследование поверхностных явлений в электропроводном растворе с учетом структуры матрицы // Физ.-хим. механика материалов. - 1982. -№ 1.С. 111-113.
103. Грицина, О. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці / О. Грицина, Т. Нагірний, К. Червінка // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. - 2006. - № 3. - С. 72-83.
104. Бурак, Я. И. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц / Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Е. Я. Чапля // Физ.-хим. механика материалов. - 1980. - № 5. - С. 71-77.
105. . Фізико-математичне моделювання складних систем I Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. - Львів: СПОЛОМ, 2004. - 264 с.
106. Базаров, И. П. Термодинамика / И. П. Базаров. - М.: Высш, шк., 1991.- 376 с.
107. Де Гроот, С. Р. Термодинамика необратимых процессов / С. Р. де Гроот. - М., 1956. - 281 с.
108. Дьярмати, И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы / И. Дьярмати. - М.: Мир, 1974. - 304 с.

109. Пригожин, И. Введение в термодинамику необратимых процессов / И. Пригожин. - М.: Изд-во иностр, лит., 1960. - 127 с.
110. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. - М.: Наука, 1980. - 512 с.
111. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. Т. 1. - М.: Наука, 1976. - 536 с.
112. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. Т. 2. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
113. Бурак, Я. И. Термодинамические основы и исследование поверхностных явлений в электропроводных телах / Я. И. Бурак, Б. П. Галапац // Физ.-хим. механика материалов. - 1981. - 17, № 5. - С. 59-66..
114. Бурак, Я. Й. Визначальні співвідношення інерційної локально-нерівноважної термопружності I Я. Й. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Т. С. Нагірний П ДАН України. - 1993. - № 6. - С. 48-53.
115. Бурак, Я. Й Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки / Я. Й Бурак, О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний И ДАН УРСР, Сер. А. - 1990. - № 9. - С. 32-35.
116. Бурак, Я. Й Локально градієнтні моделі термопружності для тіл з мікродефектами / Я. Й. Бурак // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 1996. - №2.-С. 15-23.
117. Бурак, Я. Й. Математична модель потенціального опису нелінійних пружних систем / Я. Й. Бурак // Доп. НАН України. - 1995. - № 2. - С. 41-43.
118. Бурак, Я. Й. Механодифузійні процеси у півпросторі з врахуванням поверхневих явищ / Я. Й. Бурак, О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний // ДАН України. - 1992. - № 11. - С. 37-40.
119. Бурак, Я. Й Моделювання та дослідження механоконцентраційних полів у приконтактних областях двокомпонентних кусково-однорідних систем / Я. Й Бурак, О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний // Фіз.-хім. механіка

- матеріалів. - 1994. - № 1. - С. 78-88.
120. Бурак, Я. Й. Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ / Я. Й Бурак, Г І. Мороз, З. В. Бойко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2009. - 52, № 2. - С. 55-65.
121. Бурак, Я. Й. Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів / Я. Й. Бурак, Т. С. Нагірний, О. Р. Грицина // Доп. АН України. - 1991. - № 11. - С. 47-51.
122. Бурак, Я. Й Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці / Я. Й Бурак, Т. С Нагірний, О. Р. Грицина // Доп. АН України. Сер. А. - 1991. - № 9. - С. 66-70.
123. Бурак, Я. Й Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням приповерхневих явищ / Я. Й. Бурак, Т. С. Нагірний І І Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 1993. - № 4.-С. 24-30.
124. Бурак, Я. Й. Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень / Я. Й. Бурак, Ю. І. Говда, Т. С. Нагірний // Доп. НАН України. - 1996.-№2.- С. 39-43.
125. Бурак, Я. Й. Термодинамічні аспекта узагальненої термомеханіки в'язкопружних тіл з врахуванням інерції деформаційного руху / Я. Й Бурак, Т. С Нагірний // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1990. - № 11.— С. 22-25.
126. Бурак, Я. Й Термодинамічні основи локально-градієнтної узагальненої термомеханіки / Я. Й Бурак, Т. С Нагірний // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 1992. - Вип. 35. - С. 20-24.
127. Бурак, Я. Й Термопружні процеси в твердих тілах з врахуванням поля хімічного потенціалу І Я. Й Бурак // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1987.-№ 7.- С. 35-39.

128. Грицина, О. Р. Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність циліндра в процесі його насичення / О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* - 2000. - 43, № 3. - С. 122-126.
129. Грицина, О. Р. Локально градієнтний підхід та вплив температури й домішок на поверхневий натяг у шарі / О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.* - 2005. - Вип. 1. - С. 38-49.
130. Грицина, О. Р. Математичне моделювання та дослідження механо-дифузійних процесів у твердих розчинах із врахуванням ефектів локальної градієнтності: автореф. дис. ... к. ф.-м. н: 01.02.04 І Грицина Ольга Романівна. - Львів, 1995. - 16 с.- Рукопис.
131. Грицина, О. Р. Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності / О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // *Мат. методи та фіз.- мех. поля.* - 2002. - 45, № 1.-С. 123-127.
132. Грицина, О. Р. Рівноважний стан насиченої домішками кулі з покриттям з врахуванням приповерхневих явищ / О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* - 2000. - 43, № 2. - С. 171-175.
133. Кондрат, В. Ф. Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з врахуванням необоротності локального зміщення маси / В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* - 2008.-Т. 51, № 1.-С. 169-177.
134. Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // *Доп. НАН України.* - 2007.-№ 6.-С. 45-49.
135. Нагірний, Т. С. До визначення хімічного потенціалу у двовимірних задачах моделі локально градієнтного термопружного тіла Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // *Вісн. Львів, ун-ту. Сер. мех.-мат.* - 2004.-Вин. 63.-С. 108-113.

136. Нагірний, Т. С. До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища I Т. С. Нагірний // Доп. АН України. - 1992, № 2. - С. 49-53.
137. Нагірний, Т. С. До питання про опис акустичної емісії та оцінки амплітуди механічних коливань у півпросторі при утворенні його поверхні / Т. С. Нагірний // ДАН України. - 1993, № 8. - С. 17-20.
138. Нагірний, Т. С. Моделювання та дослідження впливу температури на власні коливання шару I Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // Вісн. Львів, ун-ту. Сер. мех.-мат. - 2002. - Вип. 60. - С. 102-106.
139. Нагірний, Т. С. Моделювання термопружного деформування твердих тіл із внутрішніми ступенями вільності / Т. С. Нагірний // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 1991. - № 3. - С. 79-83.
140. Нагірний, Т. С. Моделювання хвильових процесів у деформівних твердих тілах з врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності / Т. С. Нагірний, К. А. Червінка II Вісн. Львів, ун-ту. Сер. мех.-мат. --Вип. 54.-С. 117-124.
141. Нагірний, Т. С. Модель термопружного твердого тіла з урахуванням ефектів локальної градієнтності та тензорного характеру хімічного потенціалу / Т. С. Нагірний, К. А. Червінка // Доп. НАН України. --№ 2. - С. 50-53.
142. Нагірний, Т. С. Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару / Т. С. Нагірний // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 1999. - Т. 42, № 4. - С. 111-115.
143. Нагірний, Т. С. Термодинамічний підхід до формулювання конститутивних співвідношень термомеханічних реологічних систем // Доп. НАН України. - 1997. - № 2. - С. 52-56.
144. Burak, Ya. Thermodynamical modelling of the dynamical processes in thermoelastic systems allowing for the interface phenomena / Ya. Burak, Yu. Govda, T. Nagirny // XVII Symp. Vibration in physical systems. - Poland,

- Poznan', 1996. Abstracts. - P. 82-83.
145. Математичне моделювання та дослідження термопружних процесів у локально неоднорідних тілах із врахуванням тензорного характеру хімічного потенціалу: автореферат дис. ..к. ф.-м. н.: 01.02.04 / Червінка Костянтин Андрійович. - Львів, 2003. -17с.- Рукопис.
146. Нагірний, Т. Моделювання та дослідження квазістатичних механо-дифузійних процесів із врахуванням приповерхневої неоднорідності / Т. Нагірний, О. Грицина // 4-а Укр.-Польськ. конф. «Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання» (Львів, 24-26 червня 2004). - Львів: СПОЛОМ, 2004. - Т. 1. - С. 159-174.
147. Aifantis, E. C. Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity I E. C. Aifantis // J. Appl. Phys. - 1979. - Vol. 50, № 3. - P. 1334-1338.
148. Bozant, P. Z. Size effect IP. Z. Bazant // Int. J. Solids and Struct. - 2000. - 37.-P. 69-80.
149. Боженко, Б. Л. До чисельного розв'язування варіаційних задач локально градієнтної механіки з використанням апроксимацій найменших рухомих квадратів / Б. Л. Боженко, Т. С. Нагірний // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2004. - Т. 47, № 2. - С. 124-128.
150. Зозуляк, Ю. Д. Математичне моделювання та оптимізація в термомеханіці пружних оболонок з використанням ітераційно-моментного підходу: автореферат дис. . д. ф.-м. н.: 01.02.04 / Зозуляк Юрій Дмитрович. - Львів, 1997. - 33 с. - Рукопис.
151. Бурак, Я. Й. Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки N-компонентного твердого розчину / Я. Й. Бурак, О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний // Физ.-хим. механика материалов. - 1991. - № 1.-С. 9-13.
152. Бурак, Я. Основи локально градієнтної теорії діелектриків / Я. Бурак, В. Кондрат, О. Грицина. - Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. - 208 с.

153. Кондрат, В. Ф. Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків / В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. - 2009. - Вип. 9. С. 7-46.
154. Кондрат, В. Ф. Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси / В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2009. - Т. 52, № 1. - С. 150-158.
155. Burak, Ya. An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids / Ya. Burak, V. Kondrat, O. Hrytsyna // J. Meeh. Mat. and Struct. - 2008. - Vol. 3, No 6. - P. 1037-1046.
156. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964. 456 с.
157. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955. 492 с.
158. Нагірний Т. С., Червінка К. А. Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.
159. Бурак Я. И., Нагирный Т. С. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3–23.
160. Burak Ya., Nahirnyj T., Tchervinka K. Local gradient thermomechanics // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2794–2801.
161. Нагірний Т. С., Червінка К. А. Основи механіки локально неоднорідних пружних тіл. Основи наномеханіки II. /– Львів: Растр-7, 2014. – 167 с.
162. Nahirnyj T., Tchervinka K. Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // Int.J.Eng.Sci. – 2015. – 91. – P.49–62.
163. Нагірний Т.С. Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній

- термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ [Текст] : дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Нагірний Тарас Семенович ; НАН України, Ін-т приклад. пробл. механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, Наук.-учбовий центр мат. моделювання. - Л., 1998. - 308 л.
164. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1976. 616 с.
165. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры устойчивости и флуктуаций. М., «Мир», 1973. 280 с..
166. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. К., «Наук. думка», 1965. 204 с.
167. Нагірний Т. С., Червінка К. А., З. В. Бойко. Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл і // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011, 54, № 3. – С. 199-200
168. Буряк Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р., Червинка К. А. Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. – 2000. – № 6. – С.35-43.
169. Нагірний Т., Червінка К., Сенік Ю. Моделювання стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного термопружного тіла. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2014. Вип. 19. С. 127-135.
170. Кондрат, В. (2005). Рівняння електромагнітної механіки пористого насиченого середовища. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, (1), 84-96.
171. Грицина, О., Кондрат, В., Нагірний, Т. (2007). Мезорівняння термомеханіки пористого насиченого рідиною багатокомпонентного середовища з урахуванням локальних зміщень маси та електричного заряду. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, (6), 30-43.
172. Нагірний Т., Сенік Ю. Приповерхнева неоднорідність в електропровідному неферомагнітному півпросторі. Фізико-математичне

- моделювання та інформаційні технології. 2015. Вип. 22. С. 111-116.
173. Нагірний Т., Сеник Ю. Рівноважний стан електропровідної неферромагнітної тонкої плівки. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2016. Вип. 24. С. 66-72.
174. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. Панасюка В.В. – В 4-х т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / В.В. Панасюк, А.Е. Андрейкив, В.С. Партон. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
175. Нагірний Т., Червінка К. Структурна та приповерхнева неоднорідності у електропровідних півпросторі та шарі // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2017. – Вип. 25. – С. 100-112.
176. Nahirnyj T., Tchervinka K. Interface phenomena and interaction energy at the surface of electroconductive solids // Computational Methods in Science and Technology. – 2008. – 14(2). – P. 105-110.
177. Nahirnyj T., Tchervinka K. Mathematical modeling of the coupled processes in nanoporous bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – vol.12 no.3. – P.196-203. DOI 10.2478/ama-2018-0030
178. Мусій Р., Шимчак, Ю. (2008). Методика дослідження резонансних явищ у неферромагнітних електропровідних тілах канонічної форми за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модулюючим сигналом. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.
179. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. (2017). Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів. Математичні методи та фізико-механічні поля, 49(1), 75-84.
180. Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Івасько Р. О., Гаєвська Л. М. (2017). До опису термомеханічних процесів у електропровідному неферромагнітному шарі за високочастотного одностороннього індукційного нагрівання. Прикладні проблеми механіки і математики, 14, 37-44.

181. Nahirnyj T., Senyk Y., Tchervinka K. Modeling local non-homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid. *Mathematical Modeling and Computing*. 2014. Vol.1, No.2, P. 214–223.
182. Nahirnyi T, Tchervinka K., Senyk Y. Strength of a conducting nonferromagnetic layer. Size effect. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. № 265. P. 489–497.
183. Markovych B., Senyk Y., Nodzhak L. Stress-deformed state and strength of a locally heterogeneous electrically conductive layer. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, No. 3. P. 750–756.
184. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сеник Ю.А. До опису рівноважного стану електропровідного неферомагнітного локально неоднорідного твердого тіла. *Матеріали 1-ої міжнародної 20-ї всеукраїнської конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”*. Тези доповідей. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 111-113.
185. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сеник Ю.А. Дослідження структурної та приповерхневої неоднорідностей у електропровідному півпросторі. *Матеріали 9-ї міжнародної наукової конференції. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 78-80.
186. Сеник Ю.А. Рівноважний стан структурного неоднорідного електропровідного неферомагнітного півпростору. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2016»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2016. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Senik.pdf>
187. Сеник Ю.А. Міцність електропровідного неферомагнітного шару. Розмірний ефект. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2017»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача

- НАН України. 2017.
URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Senyk.pdf>
188. Нагірний Т., Сенік Ю. Напружено-деформований стан електропровідного неферромагнітного шару із урахування геометричної неоднорідності його поверхні. Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики». Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2018. С. 116.
189. Сенік Ю.А. Моделювання напружено-деформованого стану локально неоднорідного електропровідного шару. Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2019». Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2019.
URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Senyk.pdf>
190. Сенік Ю.А. Напружено-деформований стан локально неоднорідного електропровідного півпростору. Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2020». Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2020.
URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Senyk.pdf>.
191. Сенік Ю.А. Дослідження ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на прикладі неоднорідного електропровідного шару. Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання - 2021». Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021.
URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Senyk.pdf>.
192. Сенік Ю.А. Вплив нелінійності модулів пружності на поверхневі напруження. Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми термомеханіки - 2021". Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021. С. 23-24.
193. Сенік Ю.А. Дослідження впливу модулів пружності на розмірний ефект межі міцності шару. Матеріали конференції молодих вчених

- «Підстригачівські читання -2022». Львів: ІППИМ ім. Я.С.Підстригача.
URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Senyk.pdf>
194. Senyk A., Pabyrivskiy V., Ukhanska O., Futryk Y., Senyk Y., Stepanyuk O. Methodology of specification of parameters of strengthening of elements of bearing surfaces of aircraft. 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2022). Lviv. 2022, P. 746-750. (Scopus).
 195. Markovych B.M. Квантово-статистичний опис рівноважних характеристик та дифузійних процесів у просторово обмежених металевих системах. 2020. Thesis for: DSc
DOI:10.13140/RG.2.2.35346.07369
 196. Kostrobij P.P., Markovych B.M. Effect of Coulomb interaction on chemical potential of metal film, Philosophical Magazine, 2018. 98:21, 1991-2002, DOI: 10.1080/14786435.2018.1459056
 197. Kostrobij P. P., Markovych B. M., Polovyi V. Ye. Influence of the electroneutrality of a metal layer on the plasmon spectrum in dielectric-metal-dielectric structures // Mathematical Modeling and Computing. –2019. –V.6, n.2. –P.297–303
 198. Kostrobij P. P., Markovych B. M., Polovyi V. Ye. Frequency spectrum of surface plasmon-polariton waves: influence of Coulomb correlations // Mathematical Modeling and Computing. –2020. –V.7, n.1. –P.140–145
 199. Kostrobij P. P., Markovych B. M. The chemical potential and the work function of a metal film on a dielectric substrate // Philosophical Magazine Letters. –2019. –V.99, n.1. –P.12–20
 200. Dreizler R. M., Gross E. K. U. Density functional theory. — Springer, 1996. — 302 p.
 201. Theory of the Inhomogeneous Electron Gas / Ed. by S. Lundqvist, N. H. March. Physics of Solids and Liquids. — 1 edition. — Springer US, 1983. — P. 395.

202. Теория неоднородного электронного газа / Под ред. С. Лундквист, Н. Марч. — М. : Мир, 1987. — С. 400.
203. Lang N. D., Kohn W. Theory of metal surfaces: Charge density and surface energy // *Phys. Rev. B.* — 1970. — Vol. 1, no. 12. — P. 4555–4568.
204. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous electron gas // *Phys. Rev.* — 1964. — Vol. 136, no. 3B. — P. B864–B871.
205. De Heer W. A. The physics of simple metal clusters: experimental aspects and simple models // *Rev. Mod. Phys.* — 1993. — Vol. 65, no. 3. — P. 611–676.
206. Brack M. The physics of simple metal clusters: self-consistent jellium model and semiclassical approaches // *Rev. Mod. Phys.* — 1993. — Vol. 65, no. 3. — P. 677–732.
207. Milun M., Pervan P., Woodruff D. P. Quantum well structures in thin metal films: simple model physics in reality? // *Reports on Progress in Physics.* — 2002. — Vol. 65, no. 2. — P. 99–141.
208. Tsallis C. Possible generalization of BoltzmannGibbs statistics // *J. Stat. Phys.* — 1988. — Vol. 52, no. 1–2. — P. 479–487.
209. Mariz A. M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies // *Physics Letters A.* — 1992. — Vol. 165, no. 5. — P. 409–411.
210. Ramshaw J. D. Htheorems for the Tsallis and Renyi entropies // *Physics Letters A.* — 1993. — Vol. 175, no. 3. — P. 169–170.277
211. Ramshaw J. D. Irreversibility and generalized entropies // *Physics Letters A.* — 1993. — Vol. 175, no. 3. — P. 171–172.
212. Tsallis C. Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections // *Brazilian Journal of Physics.* — 1999. — Vol. 29, no. 1. — P. 1–35.
213. *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications* / Ed. by S. Abe, Y. Okamoto. — Heidelberg : SpringerVerlag, 2001.

214. Non Extensive Thermodynamics and Physical applications. Special issue of *Physica A* / Ed. by G. Kaniadakis, M. Lissia, A. Rapisarda. — 2002. — Vol. 305. — 350 p.
215. Tsallis C. Nonextensive statistical mechanics: a brief review of its present status // *Anais da Academia Brasileira de Ciências*. — 2002. — Vol. 74. — P. 393–414.
216. Rajagopal A. K., Abe S. Implications of form invariance to the structure of nonextensive entropies // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83, no. 9. — P. 1711–1714.
217. Abe S., Rajagopal A. K. Microcanonical foundation for systems with powerlawdistributions // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2000. — Vol. 33, no. 48. — P. 8733–8739.
218. Gell-Mann M., Tsallis C. Nonextensive entropy: Interdisciplinary applications. Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity. — Oxford University Press, USA, 2004. — 440 p.
219. Tsallis C. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics — an overview after 20 years // *Brazilian Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 39. — P. 337–356.
220. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a complex world. — New York : SpringerVerlag, 2009. — 389 p.
221. Abe S. Stability of Tsallis entropy and instabilities of Rényi and normalized Tsallis entropies: A basis for qexponential distributions // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 66, no. 4. — P. 046134.
222. Abe S., Bagci G. B. Necessity of qexpectation value in nonextensive statistical mechanics // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Vol. 71, no. 1. — P. 016139.
223. Saguia A., Sarandy M. Nonadditive entropy for random quantum spinS chains // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 34. — P. 3384–3388.

224. Lutsko J. F., Boon J. P., Grosfils P. Is the Tsallis entropy stable? // *Europhysics Letters*. — 2009. — Vol. 86, no. 4. — P. 40005.
225. Tsallis C. From nonlinear statistical mechanics to nonlinear quantum mechanics— Concepts and applications. — 2004. — arXiv:1202.3178v1.
226. T. S. Bir 'o E. M. Nonextensive statistics, relativistic kinetic theory and fluid dynamics. — 2012. — arXiv:1205.6079v2.
227. R'enyi A. *Probability theory*. — Amsterdam : NorthHolland, 1970. — 670 p.
228. *Selected papers by Alfr'ed R'enyi* / Ed. by P. Turan. — Budapest : Akademiai Kiado, 1976. — Vol. 2. — 662 p.
229. Beck C., Schlogl F. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1993. — 308 p.
230. Климонтович Ю. Л. *Статистическая теория открытых систем*. — М. : ТОО «Янус», 1995. — 624 с.
231. Bashkirov A. G., Vityazev A. V. Information entropy and powerlaw distributions for chaotic systems // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2000. — Vol. 277, no. 1. — P. 136–145.
232. Lesche B. R'enyi entropies and observables // *Phys. Rev. E*. — 2004. — Vol. 70, no. 1. — P. 017102.
233. Jizba P., Arimitsu T. Generalized statistics: yet another generalization // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2004. — Vol. 340, no. 1. — P. 110–116.
234. Jizba P., Arimitsu T. The world according to R'enyi: thermodynamics of multifractal systems // *Annals of Physics*. — 2004. — Vol. 312, no. 1. — P. 17–59.
235. Masi M. A step beyond Tsallis and R'enyi entropies // *Physics Letters A*. — 279 2005. — Vol. 338, no. 3. — P. 217–224.
236. Башкиров А. Г., Суханов А. Д. Функция распределения для подсистемы, испытывающей флуктуации температуры // *ЖЭТФ*. — 2002. — Т. 122, № 3. — С. 513–520.

237. Bashkirov A. G. On maximum entropy principle, superstatistics, powerlaw distribution and renyi parameter // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2004. — Vol. 340, no. 1. — P. 153–162.
238. Bashkirov A. G. Maximum Renyi Entropy Principle for Systems with PowerLaw Hamiltonians // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 13. — P.130601.
239. Башкиров А. Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия сложных систем // *ТМФ*. — 2006. — Т. 149, № 2. — С. 299–317.
240. Markiv B., Tokarchuk R., Kostrobij P., Tokarchuk M. Nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2011. — Vol. 390, no. 5. — P. 785–791.
241. Sharma B. D., Mittal D. P. New nonadditive measures of entropy for discrete probability distributions // *J. Math. Sci.* — 1975. — Vol. 1. — P. 28–40.
242. Akturk E., Bagci G. B., Sever R. Is SharmaMittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? — 2007. — arXiv:condmat/ 0703277v1.
243. Beck C. Superstatistics: theory and applications // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. — 2004. — Vol. 16, no. 3. — P. 293–304.
244. Beck C. Superstatistics: Theoretical Concepts and Physical Applications // *Anomalous Transport*. — WileyVCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008. — P. 433–457.
245. Abe S., Beck C., Cohen E. G. D. Superstatistics, thermodynamics, and fluctuations // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 76, no. 3. — P. 031102.
246. Beck C. Recent developments in superstatistics // *Brazilian Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 39. — P. 357–363.
247. Tsallis C., Souza A. M. C. Constructing a statistical mechanics for BeckCohen superstatistics // *Phys. Rev. E*. — 2003. — Vol. 67, no. 2. — P. 026106. 280
248. Sob'yanin D. N. Generalization of the BeckCohen superstatistics // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 84, no. 5. — P. 051128.

249. Essex C., Schulzky C., Franz A., Hoffmann K. H. Tsallis and Rényi entropies in fractional diffusion and entropy production // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2000. — Vol. 284, no. 1–4. — P. 299–308.
250. Tsallis C., Lenzi E. Anomalous diffusion: nonlinear fractional Fokker–Planck equation // *Chemical Physics*. — 2002. — Vol. 284, no. 1–2. — P. 341–347.
251. Bologna M., Tsallis C., Grigolini P. Anomalous diffusion associated with nonlinear fractional derivative FokkerPlancklike equation: Exact timedependent solutions // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 62, no. 2. — P. 2213–2218.
252. Boon J. P., Lutsko J. F. Generalized diffusion equation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2006. — Vol. 368, no. 1. — P. 55–62.
253. Beck C., Lewis G. S., Swinney H. L. Measuring nonextensivity parameters in a turbulent CouetteTaylor flow // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. 63, no. 3. — P. 035303.
254. Arimitsu T., Arimitsu N. Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 61, no. 3. — P. 3237–3240.
255. Ramos F. M., Rosa R. R., Neto C. R. et al. Nonextensive statistics and threedimensional fully developed turbulence // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2001. — Vol. 295, no. 1–2. — P. 250–253.
256. Arimitsu T., Arimitsu N. Tsallis statistics and turbulence // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2002. — Vol. 13, no. 3. — P. 479–489.
257. Arimitsu T., Arimitsu N. Multifractal analysis of fluid particle accelerations in turbulence // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2004. — Vol. 193, no. 1. — P. 218–230.

258. Gotoh T., Kraichnan R. H. Turbulence and Tsallis statistics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2004. — Vol. 193, no. 1. — P. 231–244.
259. Yoshida K., Arimitsu T. Energy spectra in quantum fluid turbulence // *J Low Temp Phys*. — 2006. — Vol. 145. — P. 219–230. 281
260. Arimitsu T., Arimitsu N., Mouri H. Analyses of turbulence in a wind tunnel by a multifractal theory for probability density functions // *Fluid Dynamics Research*. — 2012. — Vol. 44, no. 3. — P. 031402.
261. Bezerra J. R., Silva R., Lima J. A. S. Transport coefficients and nonextensive statistics // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2003. — Vol. 322. — P. 256–266.
262. Lima J. A. S., Silva R., Santos J. Plasma oscillations and nonextensive statistics // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 61, no. 3. — P. 3260–3263.
263. Kirchanov V. S. Using the Renyi entropy to describe quantum dissipative systems in statistical mechanics // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2008. — Vol. 156, no. 3. — P. 1347–1355.
264. Anghel D. V., Parvan A. S. The statistics of mesoscopic systems and the physical interpretation of extensive and nonextensive entropies // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2018. — Vol. 51, no. 44. — P. 445002.
265. Vasconcellos A. R., Galvão Ramos J., Gorenstein A. et al. Statistical Approach To NonFickian Diffusion // *International Journal of Modern Physics B*. — 2006. — Vol. 20, no. 28. — P. 4821–4841.
266. Runge E., Gross E. K. U. Density-functional theory for time-dependent systems // *Phys. Rev. Lett*. — 1984. — Vol. 52, no. 12. — P. 997–1000.
267. Vignale G., Kohn W. Current-Dependent Exchange-Correlation Potential for Dynamical Linear Response Theory // *Phys. Rev. Lett*. — 1996. — Vol. 77, no. 10. — P. 2037–2040.

268. Ullrich C. A., Gossmann U. J., Gross E. K. U. Time-Dependent Optimized Effective Potential // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74, no. 6. — P. 872–875.
269. Maitra N. T., Burke K., Appel H. et al. Ten Topical Questions In Time-Dependent Density Functional Theory // *Reviews of Modern Quantum Chemistry.* — World Scientific, 2012. — P. 1186–1225.
270. Onida G., Reining L., Rubio A. Electronic excitations: density-functional versus many-body green's-function approaches // *Rev. Mod. Phys.* — 2002. — Vol. 74, no. 2. — P. 601–659.
271. Tokatly I. V., Pankratov O. Local exchange-correlation vector potential with memory in time-dependent density functional theory: The generalized hydrodynamics approach // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 20. — P. 201103.
272. Schirmer J., Dreuw A. Critique of the foundations of time-dependent densityfunctional theory // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 75, no. 2. — P. 022513.
273. Marques M. A. L., Gross E. K. U. Time-Dependent Density Functional Theory // *Annual Review of Physical Chemistry.* — 2004. — Vol. 55, no. 1. — P. 427–455.
274. Burke K., Werschnik J., Gross E. K. U. Time-dependent density functional theory: Past, present, and future // *The Journal of Chemical Physics.* — 2005. — Vol. 123, no. 6. — P. 062206.
275. Harris J., Jones R. O. On the surface energy of a bounded electron gas // *Physics Letters A.* — 1974. — Vol. 46, no. 6. — P. 407–408.
276. Harris J., Jones R. O. The surface energy of a bounded electron gas // *Journal of Physics F: Metal Physics.* — 1974. — Vol. 4, no. 8. — P. 1170.
277. Wikborg E., Inglesfield J. E. The exchange and correlation energy at a metal surface // *Solid State Communications.* — 1975. — Vol. 16, no. 3. — P. 335–339.

278. Jonson M., Srinivasan G. Correlation contribution to the surface energy of metals // *Physica Scripta*. — 1974. — Vol. 10, no. 5. — P. 262.
279. Lang N. D., Sham L. J. Exchange correlation in inhomogeneous systems –a comment on the surface energy problem // *Solid State Communications*. — 1975. — Vol. 17, no. 5. — P. 581–584.
280. Вдовиченко О.В., Мосолаб О.О., Назаренко В.А. Оцінка дефектності пористого титану неруйнівними ультразвуковими методами. *Электронная микроскопия и прочность материалов: Сб. научн . тр.* — К.: ИММ НАН України, 2009. — Вып. 16. — С. 80-87.

ДОДАТОК А

Акти про використання результатів дисертаційної роботи

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Генеральний директор
ТзОВ «ПОЛІКОР»
Гарасим І.В.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи
інженера інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Сеник Юлії Андріївни
на тему «*Моделювання та дослідження розмірних ефектів
в електропровідних тілах*»

Ми, комісія у складі заступника Генерального директора, кандидата технічних наук Гарасима Дмитра Ігоровича, директора з виробництва Радя Володимира Григоровича та начальника проектно-конструкторського відділу (ПКВ) Парфенюка Тараса Валентиновича склали даний акт про те, що на ТзОВ «Полікор» застосовано низку результатів дисертаційної роботи інженера інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Сеник Юлії Андріївни.

Зокрема, використане наступне:

- математичну модель, що описує розподіл у шарі та півпросторі густини, електричного заряду та напружень, яка побудована на основі системи рівнянь у нелінійній постановці;
- результати досліджень впливу параметрів нелінійності та зміни модулів пружності при визначенні напружено-деформованого стану та межі міцності елементів конструкцій.

Використання отриманих Сеник Ю.А. результатів досліджень та алгоритмів розрахунку дало можливість удосконалити деякі складові технологічного процесу виробництва конструктивних елементів «чистих приміщень».

Заступник Генерального директора, к.т.н.
ТзОВ «Полікор»

Гарасим Д.І.

Директор з виробництва
ТзОВ «Полікор»

Радь В.Г.

Начальник ПКВ
ТзОВ «Полікор»

Парфенюк Т.В.



ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної роботи
 Національного університету
 «Львівська політехніка»
 Олег ДАВИДЧАК

“ 30 ” 03 2023 р.

АКТ

Про впровадження результатів кандидатської дисертаційної роботи здобувача наукового ступеня Сенік Юлії Андріївни на тему «Моделювання та дослідження розмірних ефектів в електропровідних тілах» у навчальному процесі на кафедрі прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка».

Даним актом засвідчується, що наукові та практичні результати дисертаційної роботи здобувача Сенік Ю.А. на тему «Моделювання та дослідження розмірних ефектів в електропровідних тілах» впроваджено у навчальний процес кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», а саме знаходження розв'язків задач математичної фізики, що моделюють механічні процеси в твердих тіл, з врахуванням нелінійного представлення коефіцієнтів пружності, використано в лекційному курсі «Рівняння математичної фізики» для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти (спеціальність 113 - «Прикладна математика», освітньо-наукова програма «Прикладна математика») у таких темах:

- Тема № 2: Основні математичні моделі фізичних задач.
- Тема № 5: Задача Коші

Розроблені Сенік Ю.А. методики розв'язування прикладних нелінійних задач математичної фізики, які коректно, з достатньою точністю та з врахуванням мікроструктури матеріалу описують приповерхневі та приконтактні механічні процеси в твердих тілах, дають студентам можливість оволодіти фаховими компетентностями щодо аналітичних методів в при вивченні курсу «Рівняння математичної фізики».

Лектор курсу

Богдан МАРКОВИЧ

Завідувач кафедри
 Прикладної математики

Богдан МАРКОВИЧ

Директор
 Інституту прикладної математики
 та фундаментальних наук

Петро ПУКАЧ

ДОДАТОК Б

**Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості
про апробацію результатів дисертації**

1. Nahirnyj T., Senyk Y., Tchervinka K. Modeling local non-homogeneity in electroconductive non-ferromagnetic thermoelastic solid. *Mathematical Modeling and Computing*. 2014. Vol.1, No.2, P. 214–223.
2. Nahirnyi T., Tchervinka K., Senyk Y. Strength of a conducting nonferromagnetic layer. Size effect. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. № 265. P. 489–497.
3. Markovych B., Senyk Y., Nodzhak L. Stress-deformed state and strength of a locally heterogeneous electrically conductive layer. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, No. 3. P. 750–756.
4. Нагірний Т., Червінка К., Сенік Ю. Моделювання стаціонарного стану локально неоднорідного електропровідного неферомагнітного термопружного тіла. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2014. Вип. 19. С. 127-135.
5. Нагірний Т., Сенік Ю. Приповерхнева неоднорідність в електропровідному неферомагнітному півпросторі. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. Вип. 22. С. 111-116.
6. Нагірний Т., Сенік Ю. Рівноважний стан електропровідної неферомагнітної тонкої плівки. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2016. Вип. 24. С. 66-72.
7. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сенік Ю.А. До опису рівноважного стану електропровідного неферомагнітного локально неоднорідного твердого тіла. *Матеріали 1-ої міжнародної 20-ї всеукраїнської конференції*

- “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”. Тези доповідей. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 111-113.
8. Нагірний Т.С., Червінка К. А., Сенік Ю.А. Дослідження структурної та приповерхневої неоднорідностей у електропровідному півпросторі. *Матеріали 9-ї міжнародної наукової конференції. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2014. С. 78-80.
 9. Сенік Ю.А. Рівноважний стан структурного неоднорідного електропровідного неферомагнітного півпростору. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2016»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2016. URL: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Senik.pdf>
 10. Нагірний Т., Сенік Ю. Рівноважний стан електропровідної неферомагнітної тонкої плівки. *«Сучасні проблеми термомеханіки» Збірник наукових праць*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2016. С. 105-106.
 11. Сенік Ю.А. Міцність електропровідного неферомагнітного шару. Розмірний ефект. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2017»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2017. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Senyk.pdf>
 12. Нагірний Т., Сенік Ю. Напружено-деформований стан електропровідного неферомагнітного шару із урахування геометричної неоднорідності його поверхні. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2018. С. 116.
 13. Сенік Ю.А. Моделювання напружено-деформованого стану локально неоднорідного електропровідного шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2019»*. Львів: ІППММ ім.

- Я.С.Підстригача НАН України. 2019. URL:
<http://iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Senyk.pdf>
14. Сеник Ю.А. Напружено-деформований стан локально неоднорідного електропровідного півпростору. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2020»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2020. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Senyk.pdf>.
 15. Сеник Ю.А. Дослідження ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона на прикладі неоднорідного електропровідного шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання - 2021»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021. URL:
<http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Senyk.pdf>.
 16. Сеник Ю.А. Вплив нелінійності модулів пружності на поверхневі напруження. *Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми термомеханіки - 2021"*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. 2021. С. 23-24.
 17. Сеник Ю.А. Дослідження впливу модулів пружності на розмірний ефект межі міцності шару. *Матеріали конференції молодих вчених «Підстригачівські читання -2022»*. Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача. URL:<http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Senyk.pdf>
 18. Senyk A., Pabyrivskyi V., Ukhanska O., Futryk Y., Senyk Y., Stepanyuk O. Methodology of specification of parameters of strengthening of elements of bearing surfaces of aircraft. *2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2022)*. Lviv. 2022, P. 746-750.
 19. Маркович Б., Сеник Ю. Рівноважний стан деформівного електропровідного неферомагнітного півпростору. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023»*, присвячена 95-річчю від дня народження академіка НАН

України Я.С.Підстригача, 23–25 травня 2023 р. Львів, 2023. С. 89-90.
http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_37.pdf

Апробація результатів дисертації. Ключові результати досліджень доповідались на таких наукових конференціях: 1-а міжнародна конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2014; 9-а міжнародна наукова конференція. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”, Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2014; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2016», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2016; «Сучасні проблеми термомеханіки», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2016; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2017», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2017; Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2018; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання -2019», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2019; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2020», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2020; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2021», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2021; Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки - 2021", Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2021; Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання - 2022», Львів, ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, 2022; IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2022), Lviv, 2022; Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», присвячена 95-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С.Підстригача, 23–25 травня 2023 р. Львів, 2023.