

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**КУРАПОВ ПАВЛО РОСТИСЛАВОВИЧ**

УДК 519.876.5; 537.8

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНО  
НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії  
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ П.Р. Курапов

Науковий керівник:

Юзефович Роман Михайлович  
доктор технічних наук, доцент

Львів – 2023

## АНОТАЦІЯ

**Куранов П.Р. Взаємоспектральний аналіз періодично нестационарних випадкових процесів** – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 “Прикладна математика” (11 – Математика та статистика). – Національний університет “Львівська політехніка”, Львів, 2023.

У випадку, коли зміни параметрів досліджуваного явища носять переважно регулярний характер тоді для опису та дослідження таких процесів доцільно використовувати детерміністичний підхід. Проте, за наявності значних стохастичних складових чи стохастичній природі досліджуваного процесу слід використовувати відповідні моделі у вигляді випадкових процесів, що описуються імовірнісними законами. Сигнал первинного перетворювача чи давача, котрий характеризує такий процес тоді можна описати багатовимірними розподілами густини ймовірності  $p_{\xi(t)}(x;t), \dots, p_{\xi(t_1)\dots\xi(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  [21], проте існують значні практичні труднощі при їх аналізі та оцінюванні. Відомо два загальні підходи до розв’язання цієї проблеми. Перший ґрунтується на основі виокремлення класу таких процесів, для яких шукана оцінка багатовимірного розподілу густини ймовірності деякої розмірності має певну структуру, яку можна отримати з менш розмірної ймовірності та відомого алгоритму для даного класу таких процесів. При другому підході властивості випадкового процесу описуються за допомогою його моментних функцій. Саме цей підхід буде використовуватись у роботі.

Процес, коли всі ймовірнісні характеристики випадкового процесу не змінюються протягом часу досліджень, називають стаціонарним [24]. Для оцінювання моментних функцій стаціонарних випадкових процесів було запропоновано низку непараметричних (метод моментів, метод найменших квадратів та інші) та ряд параметричних методів. Розробка непараметричних методів почалася після появи робіт А. Колмогорова та Н. Вінера, які сформулювали основні принципи побудови цих оцінок, які в більшості випадків

використовуються дотепер. Параметрами обробки сигналу за допомогою непараметричних методів є довжина реалізації сигналу, інтервал дискретизації, точка усічення корелограми, вагові кореляційні та спектральні вікна. Неврахована частина значень автокореляційної функції за межами вікна вважається рівною нулю або є періодичним продовженням врахованої частини, що звичайно є грубим припущенням і веде до спотворення оцінок.

Дослідження нестационарних випадкових процесів можливе лише при умові виокремлення серед них певних класів шляхом виділення конструктивної ознаки, яка їх об'єднує у клас. Накладаючи певні умови на характер часової зміни ймовірнісних характеристик, приходимо до окремих класів нестационарних процесів, серед яких відзначимо локально стаціонарні випадкові процеси та періодично нестационарні випадкові процеси (ПНВП).

Властивості повторюваності та стохастичності характерні для багатьох випадкових сигналів, що зустрічаються у природі та техніці. Тому використання ймовірнісного підходу, що ґрунтується на моделях у вигляді періодично нестационарних випадкових процесів (ПНВП) для аналізу таких стохастичних сигналів дає змогу описати властивості фізичних явищ, як з врахуванням їх детермінованої частини, так і з врахуванням випадкових завад і збурень, що можуть нести як корисну, так і неістотну інформацію про фізичне явище або бути породженими додатковими збуреннями, наприклад шумом первинного перетворювача. Властивості джерела сигналу в рамках теорії ПНВП описуються на основі аналізу моментних функцій першого та другого порядку – математичного сподівання, кореляційної функції, спектральної густини та коефіцієнтів їх розкладу у ряд Фур'є.

Випадковий процес  $\xi(t)$  називають періодично нестационарним випадковим процесом у широкому розумінні з періодом  $T$  тоді і тільки тоді, коли функція його математичного сподівання, кореляційна функція та миттєва спектральна густина є періодичними у часі [21]:

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi}(t + T), \quad b_{\xi}(t, u) = b_{\xi}(t + T, u), \quad f(\omega, t) = f(\omega, t + T)$$

і при виконанні наступних умов:

$$\int_0^T |m(t)| dt < \infty, \quad \int_0^T |b(t,u)| dt du < \infty, \quad \int_0^T |f(\omega,t)| d\omega dt < \infty,$$

ці функції можуть бути розкладені у ряди Фур'є:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad b(t,u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad f(\omega,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) e^{ik \frac{2\pi}{T} t},$$

де

$$m_k = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad B_k(u) = \frac{1}{T} \int_0^T b(t,u) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad f_k(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega,t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt,$$

тут  $m_k$  – коефіцієнти Фур'є розкладу функції математичного сподівання;  $B_k(u)$  – коефіцієнти Фур'є розкладу кореляційної функції;  $f_k(\omega)$  – коефіцієнти Фур'є розкладу змінної в часі функції миттєвої спектральної густини.

Значний вклад у розвиток теорії та методів статистики ПКВП внесли, зокрема О. Коронкевич, Л. Гудзенко, Є. Гладишев, Я. Драган, І. Яворський, Н. Hurd, W. Gardner. Вони сприяли розвитку аналізу та методів оцінювання ймовірнісних характеристик ПНВП. Проте відсутність надійних алгоритмів виділення та аналізу модуляцій у періодично нестационарних процесах не давало можливості повністю використати корисні властивості параметричних методів. Саме тому недавні дослідження були зосереджені на розробці параметричних моделей ПНВП та аналізі властивостей його гармонічного представлення [32, 120, 121].

Цей підхід до вивчення властивостей ПНВП започаткували Я. Драган [110] та Н. Ogura [119], які ввели гармонізоване представлення ПКВП:

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Для гармонізованих ПНВП з обмеженою середньою потужністю Я. Драган довів, що випадковий процес є ПНВП тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді поданого вище ряду [111]. Проблеми гармонічного представлення ПНВП також розглядали у своїх роботах Н. Hurd [127],

D. Dehay [132]. Саме цей підхід розвивається у роботі для розроблення методів параметричного моделювання та статистичного аналізу ПКВП.

Запропонований метод виділення стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонент ПНВП використовує смугову фільтрацію і перетворення Гільберта для розділення синусних та косинусних складових (квадратур) стаціонарно зв'язаних компонент ПНВП. Він базується на ідеї демодуляції вузькосмугових квадратурних складових  $v_k(t)$  ПНВП. Оскільки спектр кожної складової подання  $v_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \sum_{k=1}^N [\xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} + \bar{\xi}_k(t) e^{-ik\omega_0 t}]$  зосереджений в обмеженій смузі частот  $[(k-0,5)\omega_0; (k+0,5)\omega_0]$  то, пропустивши ПНВП через фільтр, смуга якого збігається із інтервалом  $[(k-0,5)\omega_0; (k+0,5)\omega_0]$ , отримаємо процес:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \left[ \xi_k^c(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \xi_k^s(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right],$$

$\xi_k^c(t), \xi_k^s(t)$  отримують з виразів:

$$\begin{aligned} \xi_k^c(t) &= \xi(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \eta(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right), \\ \xi_k^s(t) &= \eta(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) - \xi(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right), \end{aligned}$$

а сигнал  $\eta(t) = H\{\xi(t)\}$  є Гільберт трансформантою сигналу  $\xi(t)$ .

Використовуючи перетворення Гільберта знайдено співвідношення, що визначають спектральні характеристики квадратурних складових компонент ПНВП. Проведений аналіз цих виразів показав, що квадратурні складові виділенні за допомогою перетворення Гільберта є стаціонарними стаціонарно зв'язаними процесами. Вирази, що описують їх спектральну структуру:

$$\begin{aligned} f_k^c(\omega) &= f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) + 2\operatorname{Re}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\}, \\ f_k^s(\omega) &= f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) - 2\operatorname{Re}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\}, \\ f_k^{cs}(\omega) &= 2\operatorname{Im}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\} + i[f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) - f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0)] \end{aligned}$$

визначаються не тільки нульовим, але й другими спектральними компонентами квадратурних складових.

Розроблений алгоритм виділення стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонент ПНВП на основі запропонованого методу верифіковано на комп'ютерно-імітаційній моделі однокомпонентного ПНВП (модель Райса) з метою аналізу спектрально-кореляційних властивостей Гільберт-трансформанти  $\eta(t)$  такого сигналу. Також досліджено стійкість алгоритму в залежності від кореляційної структури та ширини частотної смуги стохастичних модуляцій (косинус та синус квадратур), і отримано умови коли він є стійкими [2]. Для верифікації інших теоретичних викладок наведених у 2-му та 3-му розділах у 4-му розділі було наведено результати виконаних експериментальних досліджень, зокрема: аналіз симуляції сигналу коливань балки із тріщиною; аналіз вібраційного сигналу редуктора промислового вітрогенератора, що дозволив виявити та провести моніторинг дефекту зубчастого колеса на різних етапах його розвитку; аналіз добових змін вертикальної складової магнітного поля Землі, який показав, що його стохастичну складову можна представити як суму двох вузькосмугових випадкових процесів, а сама спектрально-кореляційна структура може бути використана для параметризації та комп'ютерного моделювання поведінки магнітного поля Землі.

За темою кваліфікаційної роботи опубліковано 19 наукових праць, з них: 1 розділ колективної монографії [1]; 4 статі, з яких 3 індексовані у Scopus [2–4], 1 у фаховому науковому виданні категорії Б із переліку, затвердженого МОН України [5]; 14 матеріалів тез конференцій [6–18].

**Ключові слова:** періодично корельовані випадкові процеси, комп'ютерне моделювання, гармонічне представлення, параметричні моделі, методи оцінювання, вібраційні сигнали, магнітне поле Землі.

## ABSTRACT

***Kurapov P. R. The cross-spectral analysis of periodically non-stationary random processes***—Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

The thesis for the Philosophy Doctor (Ph.D.) degree in specialty 113 “Applied Mathematics” (11 “Mathematics and Statistics”). – Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine, 2023.

In the case when changes in the parameters of the studied phenomenon are mostly regular, then it is advisable to use a deterministic approach to describe and investigate such processes. However, the significant stochastic components or the stochastic nature of the investigated process are present, and then appropriate models in the form of random processes described by the probability distribution laws should be used. The signal from the primary transducer or sensor, which characterizes such a process, can be described by multidimensional probability density distributions  $P_{\xi(t)}(x;t), \dots, P_{\xi(t_1)\dots\xi(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  [21], but there are significant practical difficulties during their analysis and estimation. Two general approaches to solving this problem are known. The first one is based on distinguishing a class of such processes for which unknown estimate of the multidimensional probability density distribution with some dimension has a certain structure that can be obtained from a known, less dimensional probability and a known algorithm for a given class of such processes. According to a second approach, the properties of a random process are described using its moment functions. This approach will be applied to this work.

The random process, in which probabilistic characteristics don't change during the observation time, is called stationary [24]. A number of non-parametric methods (method of moments, method of the least squares, and others) and several parametric methods were proposed for estimating the moment functions of stationary random processes. The development of non-parametric methods began after the publication of the works of A. Kolmogorov and N. Wiener, who formed the basic principles of construction of these estimates, which in most cases are used until now. There are the following parameters of signal processing using non-parametric methods: the length

of the signal realization, the sampling interval, the truncation point of the correlogram, the weighted correlation and spectral windows. The unaccounted part of the autocorrelation function outside that window is assumed to be equal to zero or is a periodic continuation of the considered part. Such an assumption usually is rough and leads to a distortion of the obtained estimations.

Studying non-stationary random processes is possible only under the condition of distinguishing some certain classes among them by selecting a constructive feature that unites them into a single class. To imposing certain conditions on the character of the temporal changes of the probability characteristics of the investigated process, we come to separate classes of non-stationary processes, among which we note locally stationary random processes and periodically non-stationary random processes (PNRP).

The properties of repeatability and stochasticity are typical for many random signals existing in nature and engineering. So the use of a probabilistic approach, based on models in the form of periodically non-stationary random processes (PNRP) for the analysis of such stochastic signals makes it possible to describe the properties of physical phenomena. It allows also taking into account their deterministic part and random interferences and disturbances that both can introduce useful as well as irrelevant information about the physical phenomenon or can be generated by additional perturbations, for example primary transducer noise. The properties of the signal within the framework of the PNRP theory are describing on the basis of the analysis of the first and second-order moment functions - mean function, covariance function, instantaneous spectral density as well as coefficients of their expansion into Fourier series.

The random process  $\xi(t)$  is called in a wide sense a periodically non-stationary with a period  $T$  if and only if its mean function, covariation function, and instantaneous spectral density are periodical in time [21]:

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi}(t + T), \quad b_{\xi}(t, u) = b_{\xi}(t + T, u), \quad f(\omega, t) = f(\omega, t + T)$$

and under fulfillment of the following conditions:



$$\int_0^T |m(t)| dt < \infty, \quad \int_0^T \int_0^T |b(t,u)| dt du < \infty, \quad \int_0^T \int_0^T |f(\omega,t)| d\omega dt < \infty,$$

these functions can be decomposed into a Fourier series:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad b(t,u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad f(\omega,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) e^{ik \frac{2\pi}{T} t},$$

where

$$m_k = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad B_k(u) = \frac{1}{T} \int_0^T b(t,u) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad f_k(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega,t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt,$$

herein  $m_k$  – Fourier coefficients of the mean function expansion;  $B_k(u)$  – Fourier coefficients of the covariance function expansion;  $f_k(\omega)$  – Fourier coefficients of the expansion of the time-varying function of instantaneous spectral density.

A significant contribution to the development of the theory and methods of PNRP statistics was made, by O. Koronkevich, L. Gudzenko, E. Gladyshev, Y. Dragan, I. Yavorskyi, H. Hurd, W. Gardner. They developed methods for analyzing and estimating the probabilistic characteristics of the PNRP. However, the lack of reliable algorithms for the selection and analysis of modulations in periodically non-stationary processes do not make it possible to use whole properties of parametric methods. That is why recent research has focused on the development of parametric models of PNRP and the analysis of the properties of their harmonic representation [32, 120, 121].

This approach to the study of the properties of PNRP was initiated by Y. Dragan [110] and H. Ogura [119], who introduced a harmonized presentation of the PNRP:

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Y. Dragan proved that for such harmonized PNRP with limited average power a random process is a PNRP if and only if it can be represented in the form of the series given above [111]. The problems of harmonic representation of PNRP were also considered in the works of H. Hurd [127] and D. Dehay [132]. Just such approach is

developed in this Ph.D. work for the parametric modeling and statistical analysis methods for PCR. P.

The proposed method for extracting the stationary and stationary-related components of PNRP uses band-pass filtering and the Hilbert transform to separate the sine and cosine components (quadratures) of the stationary-related components of PNRP. It is based on the idea of following demodulation of the narrowband quadrature components  $v_k(t)$  of the PNRP. Since the spectrum of each component of the signal  $v_k(t) = e^{ik\omega_0 t} \sum_{k=1}^N [\xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} + \bar{\xi}_k(t) e^{-ik\omega_0 t}]$  is concentrated in a limited frequency band  $[(k-0,5)\omega_0; (k+0,5)\omega_0]$ , after passing the PNRP signal through a filter, whose band corresponds with the interval  $[(k-0,5)\omega_0; (k+0,5)\omega_0]$ , we will obtain the following process:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \left[ \xi_k^c(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \xi_k^s(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right],$$

here the quadrature components  $\xi_k^c(t)$ ,  $\xi_k^s(t)$  are obtained from the expressions:

$$\begin{aligned} \xi_k^c(t) &= \xi(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \eta(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right), \\ \xi_k^s(t) &= \eta(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) - \xi(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right), \end{aligned}$$

where the signal  $\eta(t) = H\{\xi(t)\}$  is the Hilbert transform of the signal  $\xi(t)$ .

The relations, which determine the spectral characteristics of the quadrature components of the PNRP were found using the Hilbert transform. The analysis of these expressions shows that the quadrature components extracted with the Hilbert transform are stationary and stationary-related processes. The expressions, describing their spectral structure are the following:

$$\begin{aligned} f_k^c(\omega) &= f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) + 2\operatorname{Re}\left\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\right\}, \\ f_k^s(\omega) &= f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) - 2\operatorname{Re}\left\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\right\}, \end{aligned}$$

$$f_k^{cs}(\omega) = 2\text{Im}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\} + i[f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) - f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0)].$$

They are determined not only by zero but also by the 2nd spectral components of the quadratures.

The developed algorithm for the extraction of stationary and stationary-related components of the PNRP based on the proposed method was verified using a computer simulation model of a mono-component PNRP (Rice model) that was developed to analyze the spectral-covariance properties of the Hilbert transformation  $\eta(t)$ . The conditions of the algorithm stability depending on the covariance structure and frequency bandwidth of stochastic modulations (cosine and sine quadrature) were obtained [2]. In order to verify the theoretical statements presented in the 2nd and 3rd chapters, the 4th chapter presented the results of the experimental studies, in particular: analysis of the simulation of the vibration signal of a beam with a crack; analysis of the vibration signal of an industrial wind generator gearbox, which made it possible to detect and monitor the gear tooth defect during various stages of its development; analysis of daily changes in the vertical component of the Earth's magnetic field, which showed that its stochastic component can be represented as the sum of two narrowband random processes, and its spectral-covariance structure can be used for parameterization and computer modeling of the behavior of the Earth magnetic field.

On the topic of qualification work have been published 19 scientific works, including: 1 section of a collective monograph [1]; 4 articles, 3 of which are indexed in Scopus [2–4], 1 in a professional scientific publication of category B from the list approved by the Ministry of Education and Culture of Ukraine [5]; 14 conference theses materials [6–18].

**Key words:** cyclostationary processes, harmonic representation, parametric models, parameter estimation, vibration signals, Earth's magnetic field, computer simulation modeling.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

### ***Розділ колективної монографії***

- [1] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Lychak O.V., The quadrature components of narrowband periodically non-stationary random signals, Advances in Intelligent Systems and Computing V, Vol. 1293, Springer, 2020, p. 696–713, ISBN: 978-3-030-63270-0*

### ***Статті, які включені до наукометричних баз даних:***

- [2] *Javorskyj I.M., Kurapov P.R., Yuzefovych R.M., Covariance characteristics of narrowband periodically non-stationary random signals, Mathematical Modeling and Computing, 2019, Vol. 6 № 2, p. 276–288.*
- [3] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R., Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration stochastic recurrence, Procedia Structural Integrity, 2019, Vol. 16, p. 205–210.*
- [4] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kurapov P., Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation, Digital Signal Processing, 2021, Vol. 116, 103113.*

### ***Стаття у науковому фаховому виданні України***

- [5] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Model of multicomponent narrow-band periodically non-stationary random signal, Information extraction and processing, 2020, 48 (124), p. 17–24.*

*Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

### ***Публікації в матеріалах конференцій:***

- [6] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Periodically non-stationary analytic signals and their properties, Proceedings of XIII International Scientific and Technical Conference Computer Science and Information Technologies (CSIT – 2018), Lviv :Lviv Polytechnic National University, 2018, p. 191–194.*
- [7] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Semenov P.A., The Covariance and Spectral Properties of the Quadrature Components of Narrowband Periodically Non-Stationary Random Signals, Proceedings of XV International Scientific and Technical Conference Computer Sciences and Information Technologies, 2020, p. 95–98.*

- [8] Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P., Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field, **2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies**, 2021, p. 181–185.
- [9] Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Яворський І.М., Аналітичні періодично нестационарні випадкові сигнали у вібродіагностиці, *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / За заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*, 2018, Т. 3, с. 41–42.
- [10] Юзефович Р.М., Яворський І.М., Семенов П.О., Курапов П.Р., Трохим Г.Р., Взаємоспектральний аналіз вібраційних сигналів для виявлення та локалізації дефектів елементів механічних конструкцій, *Збірка тез доповідей двадцять другої міжнародної конференції “Сучасні методи та засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики” (до 100-річчя Національної академії наук України)*, Одеса, 2018, с. 64.
- [11] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Властивості аналітичного сигналу періодично нестационарних випадкових процесів, *Праці V науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”*, Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2018, с. 91–92.
- [12] Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R., Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration stochastic recurrence, *Book of Abstract of the 6<sup>th</sup> International Conference Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity*, Lviv, 2019, p. 93–94.
- [13] Юзефович Р.М., Варивода М.З., Яворський І.М., Курапов П.Р., Аналіз експлуатаційної надійності елементів механічних конструкцій з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, *Праці міжнародної науково-технічної конференції “Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти”*, Херсон : Херсонський національний технічний університет, 2019, с. 79–81.
- [14] Курапов П.Р., Кореляційні властивості перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, *Proceedings of Young Scientists*

- Conference on *Materials Science and Surface Engineering (MSSE-2019)*, Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2019, p. 27–28.
- [15] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Трохим Г.Р., Курапов П.Р., Дисперсія оцінки взаємоспектральної густини періодично корельованих випадкових сигналів, Праці XIX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2020, с. 116–117.
- [16] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Аналіз кореляційних властивостей перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, Тринадцята міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2020), Київ : Національний авіаційний університет, 2020, с. 263–264.
- [17] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Мацько І.Й., Трохим Г.Р., Застосування перетворення Гільберта для аналізу вузькосмугового періодично нестационарного випадкового сигналу, Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021, с. 132.
- [18] Kurapov P., Javorskyj I., Yuzefovych R., Application of analytical signal and methods of analysis of periodically non-stationary random processes for diagnosis of rotary mechanisms, Proceedings of Young Scientists Conference on Materials Science and Surface Engineering (MSSE-2021), Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2021, p. 164–167.
- [19] Юзефович Р.М., Личак О.В., Курапов П.Р., Варивода М.З., Яворський І.М., Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022, с. 196–198.

## ЗМІСТ

<b>Перелік умовних позначень та скорочень.....</b>	<b>17</b>
<b>Вступ.....</b>	<b>18</b>
<b>Розділ 1. Математичні моделі випадкових явищ.....</b>	<b>27</b>
1.1. Детерміністичний підхід до моделювання. Детерміновані сигнали та їх аналіз.....	28
1.2. Статистично-ймовірнісні математичні моделі випадкових явищ ...	35
1.3. Стаціонарні та локально стаціонарні випадкові процеси.....	40
1.3.1. Властивості ймовірносних характеристик стаціонарних та локально стаціонарних випадкових процесів.....	40
1.3.2. Методи оцінювання ймовірнісних характеристик стаціонарних та локально стаціонарних випадкових процесів.....	43
1.4. Висновки до розділу 1.....	49
<b>Розділ 2. Математичні моделі нестаціонарних випадкових процесів...50</b>	<b>50</b>
2.1. Періодично корельовані випадкові процеси.....	50
2.2. Моделі представлення нестаціонарних випадкових процесів.....	53
2.2.1. Періодично корельований білий шум.....	55
2.2.2. Полігармонічна модель.....	57
2.2.3. Адитивна модель.....	59
2.2.4. Мультиплікативна модель.....	61
2.2.5. Квадратурна модель.....	63
2.2.6. Загальна параметрична модель.....	66
2.3. Методи оцінювання ймовірнісних характеристик періодично корельованих випадкових процесів.....	68
2.4. Висновки до розділу 2.....	70
<b>Розділ 3. Методи декомпозиції періодично нестаціонарних випадкових сигналів.....71</b>	<b>71</b>
3.1. Аналіз кореляційної та спектральної структур періодично нестаціонарного випадкового процесу.....	76
3.2. Аналіз кореляційної та спектральної структур перетворення	

Гільберта періодично нестационарного випадкового процесу .....	80
3.3. Аналіз кореляційної та спектральної структур аналітичного сигналу періодично нестационарного випадкового процесу .....	88
3.4. Вузькосмуговий однокомпонентний періодично нестационарний випадковий сигнал. Модель Райса .....	91
3.5. Висновки до розділу 3 .....	100
<b>Розділ 4. Метод декомпозиції багатоконпонентних періодично нестационарних випадкових сигналів.....</b>	<b>101</b>
4.1. Багатоконпонентне представлення періодично нестационарного випадкового сигналу.....	101
4.2. Багатоконпонентний періодично нестационарний випадковий процес з взаємнокорельованими квадратурами.....	107
4.3. Вузькосмугові багатоконпонентні періодично нестационарні випадкові сигнали .....	109
4.4. Висновки до розділу 4 .....	114
<b>Розділ 5. Аналіз вузькосмугових періодично нестационарних випадкових сигналів .....</b>	<b>115</b>
5.1. Симуляція та аналіз сигналу коливання балки з тріщиною .....	115
5.2. Аналіз вібросигналу редуктора промислового вітрогенератора ...	122
5.3. Дослідження періодичної структури магнітного поля Землі .....	127
5.4. Висновки до розділу 5 .....	131
<b>Висновки.....</b>	<b>132</b>
<b>Список використаних джерел .....</b>	<b>135</b>
<b>Додатки .....</b>	<b>154</b>
Додаток А Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації .....	154
Додаток Б Акти впровадження.....	159
Додаток В Означення та властивості перетворення Гільберта .....	162
Додаток Г Програмний код розроблених модулів .....	169



**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРЧЕНЬ**

ГВД	Гільбертова вібраційна декомпозиція
ЕДМ	емпірична декомпозиція мод
ПАРКС	періодична авторегресійна модель ковзного середнього
ПГ	перетворення Гільберта
ПЗ	програмне забезпечення
ПКВП	періодично корельований випадковий процес
ПКВС	періодично корельований випадковий сигнал
ПНВП	періодично нестационарний випадковий процес
ПНВС	періодично нестационарний випадковий сигнал
ПФ	перетворення Фур'є

## ВСТУП

Вібродіагностика вузлів механізмів з обертовим рухом, зокрема підшипникових вузлів, зубчастих передач, валів, турбін, лопаток потребує використання комплексу сучасних методів статистичного аналізу випадкових сигналів для виявлення дефектності механічної обертової системи на основі аналізу структури вібраційних коливань, що з'являються. Для цього необхідно розробити нові методи статистичного аналізу та моделювання стохастичних сигналів, за допомогою яких можливо адекватно описати структуру вібраційного сигналу, якому притаманні властивості повторюваності та стохастичності.

**Актуальність теми:** Детерміністичні принципи дослідження процесів при своїй простоті не дозволяють у повній мірі описати динаміку змін реальних фізичних явищ. Застосування імовірнісного підходу до аналізу сигналів, зокрема вібросигналів обертових вузлів, дає змогу детальніше описати поведінку явища. Випадковий характер шумів і завад, що спостерігаються при роботі механічних систем, вимагає використання імовірнісних методів в задачах дефектоскопії об'єктів тривалої експлуатації. Останнім часом випадковий процес став основною математичною моделлю для опису таких об'єктів. Слід відзначити, що методи статистичної обробки набули широкого та ефективного застосування в радіолокації, радіозв'язку, радіофізиці, сейсмології, телеметрії, вібродіагностиці, біомедичній інженерії, кліматології. Властивості повторюваності та стохастичності характерні для багатьох випадкових сигналів, що зустрічаються в природі та технічній діяльності людини. Тому використання імовірнісного підходу, що ґрунтується на моделях у вигляді періодично нестационарних випадкових процесів (ПНВП), до аналізу та моделювання таких сигналів дає змогу повніше описати властивості фізичних систем з врахуванням детерміністичних законів так і з врахуванням стохастичної частини, що може нести як корисну інформацію про фізичну систему, так і інформацію спричинену випадковими завадами та збуреннями.

Властивості джерела сигналу в рамках кореляційної та спектральної теорії ПНВП описуються на основі аналізу моментних функцій першого та другого порядку – математичного сподівання, кореляційної функції, спектральної густини та компонентів їх розкладу у ряди Фур'є. Параметрами обробки сигналу за допомогою непараметричних методів є довжина реалізації сигналу, інтервал дискретизації, точка усічення корелограми, вагові кореляційні та спектральні вікна. Неврахована частина значень автокореляційної функції за межами вікна вважається рівною нулю або є періодичним продовженням врахованої частини, що звичайно є грубим припущенням і веде до помилок при обчисленні оцінок. Точніші оцінки характеристик процесу отримують на основі побудови параметричних моделей випадкових процесів, що передбачає визначення кількості параметрів та їх оцінювання. Така методологія дозволяє приймати більш реалістичні доповнення про дані за межами вікна, а отже, і зменшити, зв'язані з таким наближенням, похибки. Це дозволяє отримати оцінки спектральної густини потужності процесу з вищою роздільною здатністю. Також параметричні моделі є зручними для задач прогнозування і відновлення втрачених значень.

Методологія отримання параметричних оцінок ґрунтовно розроблена для класу стаціонарних випадкових процесів. Для нестаціонарних випадкових процесів розроблено методи авторегресії інтегрованого ковзного середнього, періодичної авторегресії ковзного середнього (ПАРКС) та деякі розширення стаціонарних моделей – сезонні, квартальні тощо. Модель ПАРКС розроблена спеціально для моделювання періодично нестаціонарних випадкових процесів, кількість її параметрів залежить від періоду корельованості та є значною при великих значеннях останнього. Очевидно, що для моделювання нестаціонарних сигналів, в яких присутні стохастичні модуляційні зв'язки періодичної структури, доцільно використовувати моделі, що враховують періодичну структуру ПНВП. Так, використання гармонічного представлення моделі ПНВП дозволяє описати властивості досліджуваного сигналу через властивості його стаціонарних складових та зменшити кількість параметрів моделювання,

не понижуючи його точності. Саме тому, розроблення підходу до аналізу і параметричного моделювання сигналів зі стохастичною повторюваністю, що ґрунтується на представленні ПНВП через стаціонарно зв'язані випадкові процеси, є актуальною науковою задачею, а її розв'язання надає принципово нові можливості для дефектоскопії оскільки на основі характеристик модуляцій можна побудувати нові індикатори, які враховують взаємкореляційні зв'язки виділених стаціонарних компонент для виявлення та типізації дефектів у обертових вузлах. Цьому і присвячена ця дисертаційна робота.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційну роботу виконано на кафедрі прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка”. Дисертаційні дослідження виконувались в рамках державних бюджетних тем Національної академії наук України “Розроблення інформаційних технологій та засобів вібраційної діагностики на основі періодично нестаціонарних нелінійних моделей з використанням перетворення Гільберта” (державний реєстраційний номер 0119U101061), “Розроблення методів кореляційного аналізу полі-ритмічної структури вібраційних сигналів для підвищення ефективності діагностики елементів вузлів механізмів з різними швидкостями обертання” (0122U002138), договору “Спеціалізовані пристрої для виявлення дефектів на ранніх стадіях їх зародження при визначенні технічного стану механізмів” (0119U101190) цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України “Надійність і довговічність матеріалів, конструкцій, обладнання та споруд” (РЕСУРС-2), договору “Інформаційно-вимірювальна система вібраційного контролю для неперервного моніторингу обертових вузлів” (0121U110376) цільової програми наукових досліджень НАН України “Науково-технічні проблеми моніторингу стану, оцінювання і подовження ресурсу конструкцій, обладнання та споруд тривалої експлуатації” (РЕСУРС-3), а також при виконанні госпдоговірної тематики “Дослідження технічного стану редуктора приводу стрілового конвеєра судно навантажувальної машини 18СП1 інв. №000100” (договір 1813). У цих роботах автор брав участь як

виконавець і розробив параметричні моделі та підходи до статистичного аналізу сигналів зі стохастичною повторюваністю.

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* є побудова параметричної математичної моделі стохастичних сигналів та методів їх статистичного аналізу на основі представлення через стаціонарні стаціонарно зв'язані випадкові процеси.

Для досягнення поставленої мети в роботі розв'язано такі задачі:

– проведено теоретичне дослідження властивостей гармонічного представлення ПНВП та запропоновано новий метод виділення його стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонентів на основі смугової фільтрації та перетворення Гільберта;

– проведено аналіз похибок виділення стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонентів ПНВП, що отримуються запропонованим методом, та визначено клас процесів, для яких похибка виділення є мінімальною;

– розроблено покращений метод симулювання ПНВП з наперед заданими імовірнісними характеристиками та оцінено точність такого моделювання;

– на основі результатів комп'ютерного імітаційного моделювання проаналізовано вплив ширини смуги частот модуляційних процесів і відношення їх частот до частоти несучої на точність виділення стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонентів ПНВП;

– на основі гармонічного представлення ПНВП проведено аналіз залежностей оцінених імовірнісних характеристик від довжини відрізка реалізації, кроку дискретизації та параметрів апроксимацій, запропонованих для опису кореляційної структури ПНВП;

– на основі результатів комп'ютерного імітаційного моделювання проаналізовано вплив ефектів елайзингу (просочування енергії гармонік і накладання гармонік) при виділенні стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонентів ПНВП;

– проведено порівняльний аналіз оцінювання імовірнісних характеристик ПНВП когерентним методом та методом на основі смугової фільтрації та перетворення Гільберта;

– розроблено новий підхід до статистичного аналізу вібраційних сигналів, на основі отриманих результатів запропоновані нові діагностичні індикатори та показана їх ефективність.

– розроблено новий підхід статистичного аналізу динаміки зміни магнітного поля Землі та на основі отриманих результатів запропоновано параметричну модель його сигналу.

*Об'єктом дослідження* є сигнали від випадкових процесів зі стохастичною повторюваністю.

*Предметом дослідження* є методи статистичного аналізу ПНВП на основі їх представлення через стаціонарні стаціонарно зв'язані випадкові процеси та оцінювання показників точності їх виділення.

*Методи дослідження.* Для вирішення поставлених у дисертаційній роботі завдань використано наступні методи дослідження: виділення стаціонарно зв'язаних компонентів гармонічного подання ПНВП методом на основі смугової фільтрації; метод виділення стаціонарно зв'язаних квадратурних складових сигналів ПНВП на основі перетворення Гільберта; когерентний та компонентний методи статистичного аналізу періодично корельованих випадкових процесів для визначення статистично-ймовірнісних характеристик виділених стаціонарно зв'язаних компонентів; метод параметричного моделювання сигналів зі стохастичною повторюваністю; метод комп'ютерного імітаційного моделювання для верифікації теоретичних положень; метод верифікації теоретичних положень на натурних даних.

**Наукова новизна отриманих результатів:** у дисертаційній роботі розроблено новий підхід до побудови ймовірнісних моделей сигналів у вигляді їх гармонічного представлення ПНВП через стаціонарні стаціонарно зв'язані випадкові процеси та побудові нових параметричних моделей сигналів через стаціонарно зв'язані компоненти сигналу. При цьому:

– *вперше* обґрунтовано ПНВП-модель вібраційних сигналів на основі представлення через стаціонарні стаціонарно зв'язані процеси та проаналізовано метод виділення стаціонарно зв'язаних квадратурних складових

на основі перетворення Гільберта, що дозволяє описати ймовірнісну структуру явища та побудувати його параметричну модель;

– *вперше* отримано і проаналізовано властивості зміщення й дисперсії оцінок імовірнісних характеристик стаціонарно зв'язаних компонентів гармонічного представлення ПНВП, виділених запропонованим методом, і на цій основі обґрунтовано параметри обробки, що забезпечують наперед задану точність їх виділення;

– *вперше* досліджено властивості зміщення й дисперсії оцінок ймовірнісних характеристик ПНВП при їх обчисленні на основі гармонічного представлення, що описують їх залежності від довжини відрізка реалізації та параметрів, які визначають кореляційну структуру, що дало змогу кількісно оцінити вірогідність результатів обробки, які забезпечують наперед задану її точність;

– *вперше* обґрунтовано новий критерій для діагностики технічного стану об'єктів на основі авто- та взаємкореляційних функцій стаціонарних стаціонарно зв'язаних компонентів стохастичної складової вібродинамічного сигналу, який на відміну від критеріїв побудованих на компонентах кореляційної функції є більш чутливим до нестационарності, викликаного модуляцією гармонік несучої;

– *вперше* створено параметричні моделі стохастичної складової вібраційних сигналів на основі їх гармонічного представлення, які на відміну від моделей періодичної авторегресії використовують меншу кількість параметрів моделювання внаслідок врахування періодичної структури ПНВП.

**Практичне значення отриманих результатів.** Практична цінність розробленого в дисертаційній роботі підходу до статистичного аналізу сигналів полягає в тому, що він розширює та збільшує можливості діагностики та моніторингу стану деталей обертових вузлів.

Запропонований підхід до статистичного аналізу вібраційних сигналів, полягає у розділенні сигналу на смуги частот і оцінюванні квадратур цих смуг, які використано для побудови параметричної моделі процесу. На основі

кореляційних функцій виділених квадратур можуть бути побудовані нові індикатори, які враховують взаємкореляційні зв'язки виділених стаціонарних компонент, для раннього виявлення дефектів у обертових вузлах. При тому взаємозв'язок гармонічного та трансляційного представлення ПНВП дає можливість легко комп'ютерно змоделювати ПНВС з наперед заданими імовірнісними характеристиками, що дозволяє верифікувати методи виділення стаціонарно зв'язаних компонентів сигналу та на основі отриманих параметричних моделей провести тестові дослідження роторних систем.

Теоретичні та практичні результати, отримані у дисертаційній роботі, використано у науково-дослідній роботі відділу “Методів та засобів відбору та обробки діагностичних сигналів” Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України. Розроблене автором програмне забезпечення і методика використовувались при виконанні тем державного замовлення. Апаратно-програмний комплекс, у створенні якого автор дисертації брав участь, апробований на вібротехнічному стенді ВМС-1. Розроблений дисертантом пакет комп'ютерних програм для аналізу, моделювання та дослідження стохастичних процесів впроваджено у навчальний процес на кафедрі прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка”.

**Особистий внесок здобувача.** Результати, що становлять основу дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: [1, 2, 4–7] – вивід та аналіз співвідношень, що пов'язують кореляційні та спектральні характеристики вузькосмугових ПНВС та їх перетворень Гільберта, а також доведення, що квадратурні складові такого сигналу є стаціонарними стаціонарно зв'язаними випадковими процесами, а їх авто- та взаємкореляційна функції залежать, як від нульових, так і від других кореляційних компонентів, вивід співвідношень, які доводять, що дійсна частина взаємспектральної густини квадратурних складових є парною функцією частоти, а уявна частина непарною функцією частоти; [3, 12] – аналіз методів спектрального аналізу та пошуку прихованих періодич-



ностей для технічної діагностики роторних механізмів; [10, 13, 15, 19] – застосування методів періодично нестационарних випадкових процесів для аналізу технічного стану елементів механізмів; [4, 8] – аналіз виділення квадратур сигналу варіацій магнітного поля Землі, аналіз параметричного моделювання такого сигналу; [9] – аналіз властивостей обвідної обчисленої з використанням аналітичного сигналу; [11] – вивід та аналіз формул дисперсії оцінки взаємкореляційної функції сигналу та його перетворення Гільберта; [14, 16] – вивід та аналіз співвідношень, що пов’язують авто- та взаємкореляційну функції вузькосмугового ПНВС та його перетворення Гільберта; [17] – дослідження обвідної вузькосмугового та широкосмугового ПНВС; [18] – аналіз можливого використання аналітичного сигналу та ПНВП для технічної діагностики, побудова нових індикаторів для визначення технічного стану елементів механічних систем.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення та результати роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних та всеукраїнських конференціях: науково-технічній конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2018); 22-й міжнародній науково-технічній конференції “Сучасні методи та засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики”, Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України (Одеса, 2018); 13-й міжнародній науково-технічній конференції “Computer Sciences and Information Technologies” (CSIT), Національний університет “Львівська політехніка” (Львів, 2018); науково-технічній конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2018); 6-й міжнародній науково-технічній конференції “Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity”, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2019); 10-й міжнародній науково-технічній конференції “Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти”, Херсонський національний технічний університет (Херсон,

2019); міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених “*Materials Science and Surface Engineering*” (MSSE), Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2019); 19-ій, 20-ій та 21-ій міжнародній науково-технічній конференції “*Приладобудування: стан і перспективи*”, Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського (Київ, 2020, 2021, 2022); 13-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси*”, Національний авіаційний університет (Київ, 2020); 15-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Computer Sciences and Information Technologies*” (CSIT), Національний університет “Львівська політехніка” (Львів, 2020); 12-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Electronics and Information Technologies*” (ELIT), IEEE (Львів, 2021); міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених “*Materials Science and Surface Engineering*” (MSSE-2021), Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2021).

Наукові результати дисертаційної роботи також доповідались та обговорювались на наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка” (2018-2021 рр.).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 19 наукових праць, з них: 1 розділ колективної монографії [1]; 4 статі, з яких 3 індексовані у Scopus [2-4], 1 у фаховому науковому виданні категорії Б із переліку, затвердженого МОН України [5]; 14 тез конференцій [6-18].

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг дисертації становить 183 сторінки, з яких основний зміст викладений на 134-ох сторінках, містить 18 рисунків, у бібліографії наведено 193 джерел.

## РОЗДІЛ 1

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ЯВИЩ

Під методологічною основою дослідження техногенних і природних явищ на базі експериментальних даних розуміють обґрунтування і знаходження параметрів його математичної моделі. Така модель повинна описувати суттєві (характеристичні) властивості об'єкта (явища) і допускати просту параметризацію (знаходження взаємозв'язків між параметрами самої моделі та факторами, що впливають на це явище). Бажано, щоб параметри моделі та фактори явища мали простий зв'язок і легко знаходилися [20–23].

Під коливанням розуміють зміну параметрів системи довільної природи, яка відбувається більш чи менш регулярно в часі. Під системою розуміють сукупність істотних характеристик явища (об'єкта) які достатньо повно і точно описують його [24].

Жан-Батист-Жозеф Фур'є запропонував описувати коливання періодичними функціями, які задовольняють умову  $f(t+T) = f(t)$  при всіх значеннях аргументу  $t \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$ , і представити їх як суму гармонічних компонент [25]

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} [a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)],$$

тобто як суперпозицію гармонік з частотами  $\omega_k = k\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  кратними до основної частоти  $\Omega$ , яка пов'язана з періодом  $T$  функції  $f(t)$

співвідношенням  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, що описуються по закону синуса чи косинуса. Наближено таку модель коливань виконує ізохронний маятник і на основі цієї абстракції було сконструйовано перший маятниковий годинник [26].

Перші дослідження таких явищ базуються на детерміністичному підході, коли явище спостерігають через відбір сигналів його характеристик, а зміни в часі сигналів описують детермінованими функціями [27–29]. Детерміновані сигнали поділяють на сигнали з обмеженою потужністю і сигнали з обмеженою енергією [30]. Серед першого класу особливу увагу приділяють періодичним і майже періодичним сигналам, властивості яких аналізують, використовуючи теорію рядів Фур'є [31]. Сигнали, що належать до другого класу, називають ще перехідними. Їх теорія, методи аналізу та обробки ґрунтується на теорії інтегралів Фур'є [32].

Регулярні коливання фізичних процесів, що описують детермінованими функціями, в реальних ситуаціях завжди супроводжуються стохастичними змінами. Стохастичні процеси можуть додаватися до регулярних коливань, модулювати як коливання в цілому, так і окремі його частотні складові. У багатьох процесах потужність флуктуаційних змін є значною порівняно з потужністю регулярних коливань (може навіть перевищувати її). Методи аналізу та обробки сигналів тоді треба опрацьовувати на підставі їх моделей у вигляді випадкових процесів [21, 23]. Такий підхід є цікавим і тому, що саме з імовірнісними характеристиками випадкових процесів пов'язані ті властивості об'єктів, які є суттєвими для діагностики та моніторингу технічного стану елементів механічних конструкцій [3, 4, 18, 21].

### **1.1. Детерміністичний підхід до моделювання. Детерміновані сигнали та їх аналіз**

Сигнали, зміни в часі яких однозначно описуються заданими функціями часу, називають детермінованими. Моделі у вигляді детермінованих сигналів використовуються для потреб теорії зв'язку, радіофізики, оптики, вібродіагностики та ін., і досліджуються за допомогою гармонічного аналізу, який переважно ґрунтується на розкладах функцій в ортогональному базисі [31].

Для опису детермінованих сигналів часто використовують гармонічні процеси:

$$f(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $a$  – амплітуда (найбільше відхилення змінної),  $\omega_0$  – циклічна частота, а  $\varphi_0$  – початкова фаза. Такими процесами з достатнім для практики наближенням можуть бути описані, наприклад, коливання напруги на виході генератора змінного струму і вібрація незбалансованого ротора [21, 24].

Більш корисною, з точки зору опису довільних сигналів, є узагальнена модель детермінованих сигналів, де базисними функціями можуть бути довільні функції – так зване ортогональне представлення [30]. Функцію  $f(t)$  з обмеженою енергією, яка визначена на інтервалі  $[0, \theta]$ , можна подати у вигляді:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [f_i \phi_i(t)],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_i(t) \phi_j(t)] dt = 0, \text{ коли } i \neq j,$$

де  $\{\phi_i(t)\}$  – деякий набір ортогональних функцій. На практиці досить часто використовують розклад в базисі поліноміальних та тригонометричних функцій.

Серед класу детермінованих випадкових сигналів виділяють періодичні, майже періодичні та перехідні сигнали [30]. Сигнал  $f(t)$  називають періодичним, якщо для всіх  $t \in [0, T]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  виконується умова

$$f(t) = f(t + nT),$$

де величина  $T$  – період сигналу. При виконанні умови

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty,$$

сигнал  $f(t)$  можна подати рядом Фур'є

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] = A_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} [A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_0)],$$

де

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t) \cos(k\omega_0 t)] dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T [f(t) \sin(k\omega_0 t)] dt,$$

$$A_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}, \quad \varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

при  $k \rightarrow \infty$ :  $|a_k| \rightarrow 0$ ,  $|b_k| \rightarrow 0$ ,  $A_k \rightarrow 0$ . Множину значень амплітуд  $\{A_k\}$  називають амплітудним спектром, а множину значень фаз  $\{\varphi_k\}$  – фазовим спектром [30]. Даний ряд можна представити у комплексному вигляді:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [c_k e^{ik\omega_0 t}], \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t) e^{-ik\omega_0 t}] dt, \quad c_{\pm k} = (a_k \mp ib_k).$$

Середня потужність сигналу визначається співвідношенням

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} [(a_k)^2 + (b_k)^2] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [|c_k|^2].$$

Цей вираз має назву рівності Парсеваля [30].

Сигнал  $f(t)$  називають майже періодичним [30], якщо для кожного  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке додатне число  $l = l(\varepsilon)$ , що в кожному інтервалі довжини  $l$  знайдеться хоча б одне число  $\tau$ , для якого  $|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon$ .

Кожному майже періодичному сигналу можна поставити у відповідність ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [c_k e^{i\omega_k t}],$$

де  $\{\omega_k\}$  – злічена множина значень циклічних частот і

$$c_k = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} [f(t) e^{-i\omega_k t} dt] \right].$$

Представлення цього ряду у тригонометричній формі [30] має вигляд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] = A_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} [A_k \cos(\omega_k t - \varphi_0)],$$

де  $a_k = c_k + c_{-k}$ ,  $b_k = i(c_k - c_{-k})$ . Тоді амплітудний спектр сигналу описується множиною  $\{A_k\}$ , а фазовий спектр – множиною  $\{\varphi_k\}$ . Рівність Парсеваля в такому випадку має вигляд [30]

$$\mathbb{E}_t \left\{ [f(t)]^2 \right\} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} [(a_k)^2 + (b_k)^2] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [c_k]^2.$$

де  $\mathbb{E}_t \{\bullet\}$  – оператор усереднення в часі. Періодичні чи майже періодичні сигнали належать до класу сигналів з обмеженою потужністю [30], тобто сигналів, для яких виконується умова

$$\mathbb{E}_t \left\{ [f(t)]^2 \right\} < \infty.$$

Енергія  $E$  цих сигналів визначається величиною

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$$

і не є скінченою [30]. Сигнали, для яких енергія скінчена ( $E < \infty$ ), називають перехідними. Такі сигнали можна подати у вигляді інтеграла Фур'є

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega) e^{i\omega t}] d\omega,$$

де

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-i\omega t}] dt.$$

Для енергії сигналу отримуємо наступну рівність [30]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)]^2 d\omega.$$

Гармонічний аналіз детермінованих сигналів полягає у визначенні амплітуд і фаз гармонічних складових на підставі експериментальних даних, які

здебільшого  $\epsilon$  відліками сигналу в певні дискретні моменти часу  $t_n$  і мають обмежену довжину реалізації [21].

Нехай періодичний сигнал  $f(t)$  заданий на періоді відліками  $f(t_n)$ , при цьому  $t_n = nh$ , де  $h = \frac{T}{M+1}$  – крок дискретизації. Тоді для обчислення коефіцієнтів Фур'є  $c_k$  використовують інтегральну суму [21, 33]

$$\hat{c}_k = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M \left[ f(nh) e^{-ik \frac{2\pi}{M+1} nh} \right],$$

при тому для отриманих оцінок повинна виконуватися наступна рівність

$$\hat{c}_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ c_{k+l(M+1)} \right].$$

Зауважимо, що оцінка  $\hat{c}_k$  значень амплітуд реалізації, дає значення які відрізняються від значень амплітуд  $c_k$  досліджуваного явища. При тому має місце ефект накладання  $(k+l) - \text{тих}$  гармонік на  $k - \text{ти}$  гармоніки. Ефекту накладання можна уникнути, якщо кількість гармонік сигналу  $N$  обмежена, а число  $M$  вибрати так, що буде задовольнятися умова  $|k+l(M+1)| \geq N+1$ . З неї для кроку дискретизації  $h$  отримаємо  $h \leq T(2N+1)^{-1}$  [21, 33].

Коефіцієнти Фур'є  $c_k$  майже періодичного сигналу, коли реалізація  $\epsilon$  неперервною в часі, можуть бути визначені за наступною формулою [21, 33]

$$\hat{c}_k = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[ f(t) e^{-i\omega_k t} \right] dt,$$

яку можна представити наступним чином

$$\hat{c}_k = c_k + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \left[ c_m \frac{\sin((\omega_m - \omega_k)\theta)}{(\omega_m - \omega_k)\theta} \right].$$

З останнього виразу видно, що оцінка  $\hat{c}_k$  має методичну похибку, спричинену ефектом просочування енергії інших гармонік [32]. Вплив



просочування зменшується, якщо збільшується довжина реалізації  $\theta$ , і при  $\theta \rightarrow \infty \hat{c}_k = c_k$ .

Для дискретних реалізацій дана оцінка буде мати такий вигляд [21, 33]

$$\hat{c}_k = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K [f(t) e^{-i\omega_k t n h}], \quad \theta = Kh.$$

Після певних перетворень отримуємо наступну рівність

$$\hat{c}_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ c_m \frac{\sin((2K+1)(\omega_m - \omega_k)h)}{(2K+1)\sin((\omega_m - \omega_k)h)} \right]. \quad (1.1)$$

З виразу (1.1) легко можна побачити, що похибка накладання є присутньою навіть в асимптотиці. Визначальним для цієї похибки є інтервал дискретизації  $h$ . Якщо частоти гармонічних компонент сигналу належать до певної смуги  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ , тобто для всіх  $\omega_k$  виконується нерівність  $|\omega_k| \leq \omega_{\max}$ , тоді якщо вибрати інтервал дискретизації як  $h < \pi\omega_{\max}^{-1}$ , то можна позбутися ефекту накладання [32].

Визначити циклічні частоти  $\omega_k$  гармонік майже періодичного сигналу можна по так званій схемі Бюй-Балло [21, 33].

Скінченність довжини відрізка реалізації та дискретність даних позначається і на точності гармонічного аналізу перехідних сигналів. Оцінка їх спектра матиме наступний вигляд [30]:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [f(nh) k(nh) e^{i\omega n h}], \quad k(nh) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \theta, \\ 0, & |t| > \theta. \end{cases}$$

Ця формула є еквівалентною рівності

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_1 + l \frac{2\pi}{h}\right) F(\omega_1) d\omega_1 \right], \quad \lambda(\omega) = \frac{\sin(\omega\theta)}{\pi\omega}.$$

Функція  $\lambda(\omega)$  описує ефект просочування, а сума по  $l$  – ефект накладання. Якщо  $\theta \rightarrow \infty$  відношення прямує до  $\delta$ -функції Дірака, тому в асимптотиці можемо записати

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ F \left( \omega + l \frac{2\pi}{h} \right) \right].$$

Якщо спектр сигналу  $F(\omega)$  відмінний від нуля в смузі  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ , тоді при  $h < \pi\omega_{\max}^{-1}$  маємо  $\hat{F}(\omega) = F(\omega)$ . Похибка обробки, спричинена ефектом накладання, при такому інтервалі дискретизації відсутня [32], і тоді оцінка спектру має вигляд:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega_1) \lambda(\omega - \omega_1)] d\omega_1.$$

Очевидно, що використання записів обмеженої довжини при гармонічному аналізі сигналів є неминучим. Скінченність інтервалу спостереження впливає на визначення частот гармонік у присутності близьких гармонік із великою енергією, на їх розділення (екстрагування), на точність оцінок їх параметрів. Врахування даних у початковому вигляді рівносильне застосуванню прямокутної часової вагової функції  $k(t)$ . Значна частка енергії сигналу, що розтікається, зумовлена високим рівнем бокових пелюсток відповідної їй спектральної вагової функції  $\lambda(\omega)$ . Тому для одержання точнішої оцінки спектра намагаються локалізувати енергію біля центральної частоти. Для цього вибирають вікна з меншим рівнем бокових пелюсток, ніж у прямокутного вікна. Використання інших вікон веде до розширення головного максимуму і погіршує роздільну здатність аналізу [21, 32].

Вагові функції завжди спотворюють спектр. Щоб мінімізувати це спотворення необхідно забезпечити такі властивості спектральної й часової вагових функцій:

- висока концентрація енергії на основному максимумі спектральної вагової функції  $\lambda(\omega)$  – для цього потрібна широка часова вагова функція  $k(t)$ ;
- малий рівень бокових пелюсток спектральної вагової функції  $\lambda(\omega)$  – для цього потрібна гладка часова вагова функція  $k(t)$ .

Прямокутна часова вагова функція  $k(t)$  не спотворює часової залежності сигналу, але може спричинити сильні спотворення у частотній області. Небажані ефекти в області високих частот при цьому викликані різкими зрізами прямокутної вагової функції. Застосування вагової функції, яка плавно спадає до обох кінців вікна, спотворює часову форму сигналу, але водночас дозволяє зменшити високочастотні спотворення. Вагової функції, яка не вносить спотворень ні в часову, ні частотну область сигналу, не існує [32]. Прямого вибору  $k(t)$  теж не існує [32]. Оскільки загальний підхід до вибору найкращої форми вагової функції ґрунтується на компромісі між різними вимогами, то процедура цього вибору нагадує метод спроб. Усі вагові функції, крім прямокутної, мають форму подібну до Гаусової кривої, мета якої максимізувати вклад початкових відліків і потім плавно зменшувати вклад від наступних, що дозволяє зменшити вклад високочастотних компонент. Вагові функції можуть бути тригонометричними, степеневими, експоненціальними. Загальною вимогою до них є мала зміна спектру сигналу на ширині спектральної вагової функції  $\lambda(\omega)$ . Підбираючи оптимальні параметри  $k(t)$ , можна покращити якість обробки, але повністю виключити вплив скінченності інтервалу спостережень неможливо [21, 32].

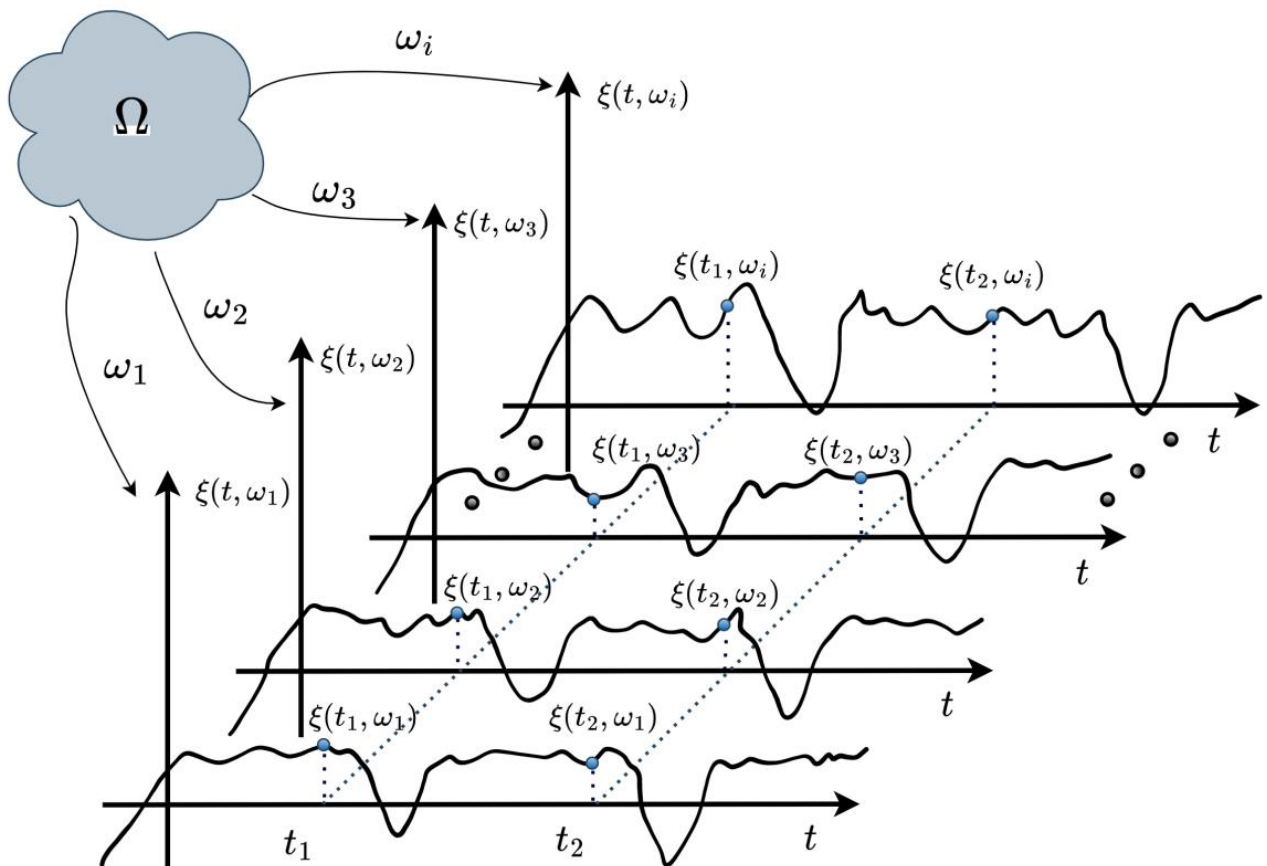
## 1.2. Статистично-ймовірнісні математичні моделі випадкових явищ

Детерміністичний підхід корисний в тому випадку, коли зміни в часі параметрів системи мають регулярний характер та можуть бути описані системою диференціальних рівнянь певного порядку. При чому уточнення значень параметрів залежить від граничних умов, проте у випадку наявності значних стохастичних змін, необхідно використовувати моделі у вигляді випадкових процесів [21, 23].

Наочне уявлення про випадковий процес можна отримати з різноманітних галузей науки – гідродинаміки, фізики плазми, геофізики, акустики,

радіоастрономії, фізіології, медицини, біології, ядерної фізики, економіки, радіотехніки та багатьох інших. Осцилограма струму електронної лампи, флуктуації напруги на будь-якому опорі, броунівське переміщення частинки, сейсмічні коливання ґрунту, коливання тиску чи температури – все це є прикладами явищ, які моделюють як випадкові процеси (статистично-ймовірнісний підхід). Здійснений запис спостережуваної величини фактично прийнятих нею в даному експерименті (спостережені), при такому підході дає нам одну з можливих реалізацій процесу [24].

Якщо уявити собі безліч ідентичних екземплярів деякої системи, поставлених в ідентичні умови (ансамбль реалізацій), то при умові однакового способу реєстрації процесу (явища) отримані реалізації будуть, взагалі кажучи, різні, в чому і виявляється випадковий характер процесу [24]. Елемент випадковості при тому в сукупності реалізацій може бути різноманітним. Коли він повністю відсутній, то приходимо до окремого випадку – цілком детермінованого перебігу процесу.



## Рисунок 1.1 – Схематична модель випадкового процесу

Випадковим процесом називають функцію, сукупність значень якої при будь-якому фіксованому аргументі (перетині) є випадковою величиною. Схематично випадковий процес можна представити як (рис. 1.1). Кожна точка в просторі можливих значень  $\Omega$  вказує на функцію часу. Тоді кожному функцію з підпростору  $\omega_i$  можна подати як  $\xi(t, \omega_i)$ , щоб акцентувати на її випадковій природі, проте, як правило, використовують компактніший запис як функцію однієї змінної  $\xi(t)$ . Множину функцій (реалізацій)  $\xi(t, \omega_i)$  при тому з  $\Omega$  називають ансамблем. Наприклад, якщо будемо дивитися на ансамбль в певний момент часу  $t_1$ , то отримаємо випадкову величину  $\xi_{t_1} = \xi(t_1, \omega_i)$ . Так само, в інші моменти часу  $t_i$  матимемо випадкові величини  $\xi_{t_i}$ , що описують імовірнісними законами [24, 34].

Властивості випадкових сигналів  $\xi(t)$  описують за допомогою функцій розподілу, густин ймовірностей, а також моментних функцій [24, 34-40].

$F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$   $n$ -вимірна функція розподілу – це ймовірність того, що для значень сигналу в моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  виконуються нерівності  $\xi_1(t) < x_1, \dots, \xi_n(t) < x_n$ , тобто

$$F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P\{\xi_1(t) < x_1, \dots, \xi_n(t) < x_n\},$$

$p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$   $n$ -вимірна густина ймовірності визначає ймовірність того, що значення випадкового сигналу  $\xi(t)$  в  $n$  моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  належить до інтервалів  $[x_1, x_1 + dx], \dots, [x_n, x_n + dx]$ . Вона дорівнює  $n$ -ій змішаній похідній від функції розподілу:

$$p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n},$$

Густина ймовірності задовольняє наступні умови:

- 1) невід'ємності

$$p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \geq 0;$$

2) нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [p_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)] dx_1 \dots dx_n = 1;$$

3) симетрії

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_2, x_1, \dots, x_n, t_2, t_1, \dots, t_n);$$

4) узгодження

$$p_n(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [p_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n)] dx_{m+1} \dots dx_n.$$

$n$ -вимірні функції розподілу та густини ймовірності дозволяють говорити про зв'язок між ймовірнісними значеннями сигналу в  $n$  довільних моментах часу [24, 34].

Серед моментних функцій розрізняють початкові та центральні моменти. Початкові моменти означенні формулою

$$\begin{aligned} m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \mathbb{E}\{\xi^{i_1}(t_1)\xi^{i_2}(t_2)\dots\xi^{i_n}(t_n)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)] dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

а центральні відповідно визначаються виразом

$$\begin{aligned} M_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}^{i_1}(t_1)\overset{\circ}{\xi}^{i_2}(t_2)\dots\overset{\circ}{\xi}^{i_n}(t_n)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \overset{\circ}{x}_1^{i_1}, \overset{\circ}{x}_2^{i_2}, \dots, \overset{\circ}{x}_n^{i_n} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

де  $\overset{\circ}{\xi}(t_n) = \xi(t_n) - m(t_n)$ ,  $\overset{\circ}{x}_n = x_n - m(t_n)$ . Серед початкових моментів найчастіше використовують функцію математичного сподівання

$$m(t) = m_1(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [xp(x, t)] dx \quad (1.2)$$

і коваріаційну функцію

$$K(t_1, t_2) = m_{11}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2)] dx_1 dx_2.$$

А серед центральних найбільш вживаним є дисперсія

$$D(t) = M_2(t) = \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m(t)]^2 p(x, t) dx$$

і кореляційна функція

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) = M_{11}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Очевидно, що

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2), \quad D(t) = R(t, t).$$

Розділ теорії випадкових процесів, який присвячений вивченню їх властивостей з використанням лише математичного сподівання і кореляційної функції, називається кореляційною теорією або теорією другого порядку [34, 40].

Кореляційна функція дійсного випадкового процесу є симетричною відносно своїх аргументів  $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ . Вона також задовольняє нерівність  $R^2(t_1, t_2) \leq D(t_1)D(t_2)$ . Фундаментальною властивістю будь-якої кореляційної функції, що вона повинна бути додатно визначеною [24, 34]. А це означає, що завжди має місце нерівність

$$\sum_{i,k=1}^n \left[ R(t_i, t_k) \alpha_i \bar{\alpha}_k \right] \geq 0,$$

де  $t_1, t_2, \dots, t_n$  – довільне скінчене число точок;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – довільні комплексні величини,  $\bar{\phantom{x}}$  – операція комплексного спряження. Будь-яка функція, що задовольняє останню умову, може розглядатися як кореляційна функція випадкового процесу [24, 34].

### 1.3. Стаціонарні та локально стаціонарні випадкові процеси

#### 1.3.1. Властивості ймовірносних характеристик стаціонарних та локально стаціонарних випадкових процесів

Уявлення про стаціонарний процес може дати, наприклад, спостереження яких-небудь флуктуацій за незмінних макроскопічних умов. Електричний шум в опорі, температура якого постійна; турбулентність в сталому потоці і т.д. – все це стаціонарні випадкові процеси. На практиці достатньо дотримання постійності умов протягом скінченного проміжку часу, до початку якого можливі перехідні процеси в системі, що розглядається вже закінчилися, а в кінці ще не почалися [24].

Випадковий сигнал називається стаціонарним у вузькому розумінні [34], якщо густини ймовірностей будь-якого порядку  $n$  є інваріантними відносно зсуву за часом:

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Для стаціонарного (у вузькому розумінні) сигналу одновимірна густина ймовірності не залежить від часу, а двовимірна – залежить тільки від різниці  $u = t_2 - t_1$ :

$$p_1(x, t) = p_1(x), \quad p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2, t_1 - t_2) = p_2(x_1, x_2, u).$$

Математичне сподівання і дисперсія такого сигналу є сталими, а кореляційна функція залежить лише від зсуву  $u$ . У теорії другого порядку, де оперують тільки математичним сподіванням і кореляційною функцією, введено поняття стаціонарності в широкому розумінні. Стаціонарним в широкому розумінні [34] називають процес, математичне сподівання якого є сталим, а кореляційна функція залежить тільки від різниці  $u = t_2 - t_1$ .

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парною функцією:  $R(u) = R(-u)$ . Для неї завжди виконується нерівність  $|R(u)| \leq R(0)$ , а властивість додатної визначеності переписується у вигляді



$$\sum_{i,k=1}^n [R(t_i - t_k) \alpha_i \bar{\alpha}_k] \geq 0.$$

З цієї нерівності випливає фундаментальне співвідношення, більш відоме як теорема Вінера-Хінчина [41]

$$R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} dF(\omega).$$

Тут  $dF(\omega)$  – неспадна функція. Якщо кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу абсолютно інтегрована

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(u)| du < \infty,$$

то відповідно теорему Вінера-Хінчина можна записати у наступній формі [42]

$$R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega u} f(\omega)] d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega) d\omega, \quad f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}.$$

Обернене перетворення має вигляд

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega u} R(u)] du.$$

Таке зображення є спектральним розкладом кореляційної функції. Функція  $F(\omega)$  називається спектральною функцією випадкового процесу, а  $f(\omega)$  – спектральною густиною. Спектральна густина є дійсною функцією, парною і всюди невід'ємною [24, 34]:

$$\bar{f}(\omega) = f(\omega), \quad f(-\omega) = f(\omega), \quad f(\omega) \geq 0.$$

Виходячи зі співвідношення

$$D = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega,$$

її трактують як спектральну густину потужності сигналу.

У разі нестационарного сигналу така інтерпретація перетворення Фур'є кореляційної функції можлива тільки для так званих локально стаціонарних випадкових процесів [21, 23]. Розглянемо кореляційну функцію

$b(t, u) = R(t, t + u)$ . Припустимо, що для всіх  $t \in \mathbb{R}$  функція є абсолютно інтегрованою

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(t, u)| du < \infty.$$

Тоді вона може бути подана інтегралом Фур'є [21]

$$b(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega u} f(\omega, t)] d\omega, \quad f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega u} b(t, u)] du.$$

Миттєва спектральна густина є комплексною  $f(\omega, t) = \text{Re}\{f(\omega, t)\} - i\text{Im}\{f(\omega, t)\}$ .

При цьому

$$\text{Re}\{f(\omega, t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [b^+(t, u) \cos(\omega u)] du, \quad \text{Im}\{f(\omega, t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [b^-(t, u) \sin(\omega u)] du,$$

де  $b^+(t, u)$  та  $b^-(t, u)$  – відповідно парна та непарна частини кореляційної функції:

$$b^+(t, u) = \frac{1}{2} [b(t, u) + b(t - u, u)], \quad b^-(t, u) = \frac{1}{2} [b(t, u) - b(t - u, u)].$$

Для локально стаціонарного процесу з ростом зсуву  $u$  кореляції зникають набагато швидше, ніж змінюються за  $t$ , так що можна покласти  $b(t - u, u) \approx b(t, u)$ . Тоді

$$b^+(t, u) \approx b(t, u), \quad b^-(t, u) \approx 0.$$

$$\text{Re}\{f(\omega, t)\} \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [b^+(t, u) \cos(\omega u)] du, \quad \text{Im}\{f(\omega, t)\} \approx 0.$$

Кореляційна функція локально стаціонарного випадкового сигналу для всіх  $t$  має всі властивості кореляційної функції стаціонарного процесу [21]. Тому для всіх  $t$  виконуються співвідношення  $\bar{f}(\omega, t) = f(\omega, t)$ ,  $f(-\omega, t) = f(\omega, t)$ ,  $f(\omega, t) \geq 0$  і

$$b(t, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, t) d\omega.$$

Спектральна густина описує в такому випадку змінну в часі спектральну гуστину потужності [21, 24, 43].

### ***1.3.2. Методи оцiнювання ймовiрнiсних характеристик стацiонарних та локально стацiонарних випадкових процесiв***

Найбiльш поширенi методи побудови оцiнок характеристик випадкових процесiв – метод моментiв, метод найменших квадратiв та метод максимальної правдоподiбності [24, 43–45]. Розробка методiв оцiнювання почалася пiсля появи робiт А. Н. Колмогорова [46, 47] та Н. Вiнера [31, 49]. Ними були сформованi основнi принципи, якi переважно використовуються i сьогоднi. Подальшi дослiдження були проведенi в роботах [45, 49–56].

При обчисленнi ймовiрнiсних характеристик випадкових процесiв необхідно врахувати дискретнiсть даних та скiнченнiсть їх довжини реалiзацiї. Цi параметри впливають на якiсть побудованих оцiнок. Найкращими оцiнками вважаються незмiщенi та слухнi [24].

Якщо iснує  $n$  реалiзацiй  $\{\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)\}$  випадкового процесу, то знаходження оцiнок характеристик, якi досліджуємо, можна проводити шляхом усереднення за ансамблем реалiзацiй, проте, якщо було проведено лише один дослiд, за яким отриманнi спостереження, то тодi в наявностi є лише одна реалiзацiя процесу. Тому на практицi особливу цiннiсть мають ергодичнi випадковi процеси, для яких можна проводити оцiнювання характеристик лише по однiй реалiзацiї [24].

Характеристики ергодичних стацiонарних та локально стацiонарних випадкових сигналiв оцiнюють простим усередненням [21, 55]. Достатньою умовою ергодичностi є згасання кореляцiйних зв'язкiв зi збiльшенням зсуву [24]

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} R(u) = 0.$$

Для локально стаціонарних процесів умова згасання кореляційних зв'язків (при тому швидкого) є визначальною. Неперервні оцінки математичного сподівання та кореляційної функції мають вигляд [21]

$$\hat{m} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \xi(t) dt,$$

$$\hat{R}(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} [(\xi(t) - \hat{m})(\xi(t+u) - \hat{m})] dt.$$

Оцінка математичного сподівання  $\hat{m}$  незміщена, бо  $\mathbb{E}\{\hat{m}\} = m$ , а її дисперсія

$$D(\hat{m}) = \mathbb{E}\left\{|\hat{m} - \mathbb{E}\{\hat{m}\}|^2\right\} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[1 - \frac{|u|}{\theta}\right] R(u) du.$$

Оцінка кореляційної функції  $\hat{R}(u)$  асимптотично незміщена. Її зміщення для скінчених  $\theta$  визначається формулою [21, 24]

$$\varepsilon[\hat{R}(u)] = \mathbb{E}\{\hat{R}(u)\} - R(u) = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[1 - \frac{|u_1|}{\theta}\right] R(u + u_1) du_1.$$

Формула для дисперсії цієї оцінки для гауссових сигналів у першому наближенні має вигляд [21]

$$D[\hat{R}(u)] \approx \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[1 - \frac{|u_1|}{\theta}\right] \left[R^2(u_1) + R(u_1 + u) + R(u_1 - u)\right] du_1.$$

При великих зсувах останню рівність можна записати так [21]:

$$D[\hat{R}(u)] \approx \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[1 - \frac{|u_1|}{\theta}\right] R^2(u_1) du_1.$$

Щоб кількісно описати якість оцінювання, як правило, використовують величини  $m^{-1} \sqrt{D(\hat{m})}$  та  $R(u)^{-1} \sqrt{\varepsilon^2[\hat{R}(u)] + D[\hat{R}(u)]}$ . Для типових кореляційних функцій можуть бути обчислені конкретні числові значення цих величин і тим самим кількісно схарактеризовано якість статистичної обробки певного типу сигналів залежно від довжини реалізації  $\theta$ , а також розв'язана

зворотна задача – вибрана певна довжина  $\theta$  для досягнення потрібної точності (вірогідності) обробки [21, 58].

При статистичній обробці дискретних даних оцінки математичного сподівання та кореляційної функції обчислюються за формулами [21]:

$$\hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi(nh)],$$

$$\hat{R}(jh) = \sum_{n=0}^{K-1} [ [\xi(nh) - \hat{m}] [\xi((n+j)h) - \hat{m}] ],$$

де  $K = \frac{\theta}{h}$ ,  $h$  – крок дискретизації. Зміщення і дисперсія цих оцінок відповідно [21, 59]:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{m}] &= \mathbb{E}\{\hat{m}\} = 0, \quad D(\hat{m}) = \mathbb{E}\left\{|\hat{m} - \mathbb{E}\{\hat{m}\}|^2\right\} = \frac{1}{K} \left[ R(0) + 2 \sum_{n=1}^{K-1} \left[ \left(1 - \frac{n}{K}\right) R(nh) \right] \right]; \\ \varepsilon[\hat{R}(jh)] &= \mathbb{E}\{\hat{R}(jh)\} - R(jh) = \frac{1}{K} \left[ \sum_{n=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|n|}{K}\right) R[(n+j)h] \right], \\ D[\hat{R}(jh)] &= \frac{1}{K} \left[ \sum_{n=-K+1}^{K-1} \left(1 - \frac{|n|}{K}\right) \left[ R^2[nh] + R[(n+j)h] + R[(n-j)h] \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Використавши величини (1.4), можна кількісно схарактеризувати якість обробки даних залежно від кроку дискретизації та обґрунтувати його вибір при статистичному аналізі сигналів певних типів.

Для оцінювання спектральної густини широко застосовують корелограмний метод Блекмана-Тьюкі [31], згідно з яким

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k(u) \hat{R}(u) e^{-i\omega u}] du.$$

Тут  $k(u)$  – кореляційне вікно, яке повинно задовольняти умови:  $k(0) = 1$ ,  $k(u) = k(-u)$ ,  $k(u) = 0$ , при  $|u| > u_{\max}$ ,  $u_{\max}$  – точка усічення корелограми. Зміщення цієї оцінки визначається виразом

$$\varepsilon[\hat{f}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lambda(\omega - \omega_1) f(\omega_1) \left[ 1 + \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left(1 - \frac{|u_1|}{\theta}\right) e^{i\omega_1 u_1} du_1 \right] \right] d\omega_1 - f(\omega).$$

де

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k(u) e^{-i\omega u} du].$$

Якщо точка усічення корелограми вибрана так, що на ширині спектрального вікна  $\lambda(\omega)$  спектральна густина  $f(\omega)$  міняється мало, то [31]:

$$\varepsilon[\hat{f}(\omega)] \approx \frac{f(\omega)}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \left[ \left(1 - \frac{|u|}{\theta}\right) k(u) e^{-i\omega u} \right] du.$$

Для дисперсії оцінки у першому наближенні маємо [31]:

$$D[\hat{f}(\omega)] = \frac{2\pi}{\theta} f^2(\omega) [W(0) + W(2\omega)], \quad W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k^2(u) e^{-i\omega u}].$$

Точність спектральної обробки визначається довжиною реалізації  $\theta$  та точкою усічення корелограми  $u_{\max}$ . Зі збільшенням  $u_{\max}$  росте дисперсія оцінки спектральної густини та друга інтегральна складова виразу для зміщення. Похибка яка зумовлена першою складовою зміщення буде спадати. Точку усічення корелограми слід вибирати з урахуванням протилежних тенденцій у поведінці різних складових похибки спектральної обробки, мінімізуючи величину  $f(\omega)^{-1} \sqrt{\varepsilon^2[\hat{f}(\omega)] + D[\hat{f}(\omega)]}$  [21].

При спектральній обробці дискретних реалізацій оцінка спектральної густини переписується у формі

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}(nh) k(nh) e^{-i\omega nh}].$$

Її зміщення та дисперсія відповідно [31]:

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{f}(\omega)] &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ f\left(\omega + l \frac{2\pi}{h}\right) \right] \left[ 1 - \frac{1}{K} \sum_{n=-K+1}^{K-1} \left[ \left(1 - \frac{|n|}{K}\right) k(nh) e^{-i\omega nh} \right] \right], \\ D[\hat{f}(\omega)] &\approx \frac{2\pi}{\theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W\left(2\omega + k \frac{2\pi}{h}\right) \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} f\left(2\omega - m \frac{2\pi}{h}\right) f\left(2\omega - n \frac{2\pi}{h}\right) + \\ &+ \frac{2\pi}{\theta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f\left(2\omega + l \frac{2\pi}{h}\right) W(0). \end{aligned}$$

На показники якості оцінювання суттєво впливає ефект накладання. Уникнути його можна тільки тоді, коли спектр сигналу зосереджений в обмеженій смузі частот  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$  і  $h < \pi\omega_{\max}^{-1}$ . Величина зміщення і дисперсія в цьому випадку мало відрізняються від аналогічних характеристик при неперервній обробці [21].

У разі локальної стаціонарності сигналу його характеристики оцінюють методом ковзного короткочасового усереднення. Сформовані у такий спосіб неперервні оцінки математичного сподівання і кореляційної функції мають вигляд [21]:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2\theta} \int_{t-\theta}^{t+\theta} \xi(s) ds,$$

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{2\theta} \int_{t-\theta}^{t+\theta} [[\xi(s+u) - \hat{m}(s+u)][\xi(s) - \hat{m}(s)]] ds.$$

Для оцінювання спектральної густини також можна використати корелограмний метод [31, 59-60]:

$$\hat{f}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k(u) \hat{b}(t, u) e^{-i\omega u}] du.$$

Внаслідок нестаціонарності сигналу з ростом довжини відрізка реалізації  $\theta$  збільшується зміщення оцінок і одночасно зменшуються їх дисперсії. Останні будуть тим меншими, чим швидше згасають кореляції з ростом зсуву, тобто чим більше інтервалів кореляції сигналу вкладається в довжину  $\theta$ . Конкретні числові значення показників якості оцінювання характеристик можуть бути обчислені за допомогою тих самих формул, що й для стаціонарних випадкових сигналів, з використанням певних апроксимацій ймовірнісних характеристик [21]. Величина зміщення теж може бути обчислена теоретично при знанні декременту зникання кореляційних характеристик. На цій підставі може бути вибраний оптимальний параметр ковзного усереднення, що мінімізує загальну похибку обробки. Якщо апріорних відомостей про структуру сигналу недостатньо і теоретичні дослідження неможливі, то параметр ковзного

усереднення, вибирають у процесі самої обробки, порівнюючи її результати [59, 60].

Також відомий прямий метод, що дозволяє описати сигнал його частотними характеристиками, заснований на обчисленні квадрата модуля перетворення Фур'є для нескінченної послідовності даних з використанням відповідного ковзного статистичного усереднення по часу [59, 60]:

$$\hat{f}(\omega) = \left| \mathbb{E}_t \left\{ \sum_{n=-u_{\max}}^{u_{\max}} [k(nh) \xi(t+nh) e^{-i\omega nh}] \right\} \right|^2.$$

Відомо, що спектральна густина потужності, отримана без такого усереднення, так звана вибіркова спектральна густина потужності, є незадовільною оцінкою через велику дисперсію отриманих за її допомогою оцінок, оскільки середньоквадратична похибка таких оцінок співмірна зі значенням оцінки [60]. Методи усереднення забезпечують отримання слушних і статистично стійких оцінок, отриманих за скінченою довжиною реалізації даних. Оцінки спектрального представлення, засновані на прямому перетворенні даних і їх подальшому усередненні, отримали назву періодограм [27–29].

Більш докладну інформацію про класичні методи оцінювання характеристик стаціонарних випадкових процесів можна отримати в працях Gardner W.A [38], Дженкінса Г. та Ваттса Д. [59], Blackman R.B. та Tukey J.W. [61], Коорманс L.H. [62]. Корелограмний, періодограмний і комбінований періодограмно-корелограмний класичні методи, дають оцінки, які володіють аналогічними статистичними характеристиками і, в цілому, виглядають приблизно однаково, якщо не вважати на певні візуальні відмінності в тонких деталях. Частіше за все, перевага віддається тому методу, який виявляється найефективнішим в обчислювальному відношенні. До широкого розповсюдження електронних обчислювальних машин в основному застосовувався корелограмний метод, про що стисло згадується в книзі Blackman R.B. та Tukey J.W. [61]. З появою алгоритму швидкого перетворення



Фур'є і спеціальних інтегральних схем для обробки сигналів перевага стала віддаватися методам, заснованим на використанні періодограмних методів оцінювання спектральної густини потужності (Jones R.H. [63]).

Проте у багатьох випадках, зокрема коли необхідно побудувати якісні моделі передбачення даних, відновити втрачені значення та оцінити характеристики сигналу при обмеженій довжині реалізації, якість оцінювання на основі непараметричних методів є незадовільною. В цих випадках набагато якіснішим є використання представлення процесів в термінах ортогонального послідовного представлення (гармонічне представлення), та параметричного представлення [32, 64, 65].

#### **1.4. Висновки до розділу 1**

1. На основі проведеного порівняльного аналізу детерміністичного та ймовірнісного підходів до опису сигналів зі стохастичною повторюваністю показано необхідність застосування останнього при описі фізичних явищ, зміни параметрів яких мають стохастичну природу.
2. Проаналізовано особливості відомих ймовірнісних моделей, а саме стаціонарні та локально стаціонарні випадкові процеси, і методи оцінювання їх ймовірнісних характеристик.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Загальну теорію для нестационарних процесів розвинути непросто, позаяк відсутність стаціонарності не є конструктивною властивістю. Тому вивчення нестационарних процесів можливе лише шляхом виділення конструктивно означених класів внаслідок окреслення внутрішніх властивостей, які об'єднують цей клас. Накладаючи певні умови на характер часової зміни ймовірнісних характеристик приходимо до класу локально-стаціонарних випадкових процесів та класу нестационарних випадкових процесів з ритмічною структурою або як їх ще називають періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП) [21]. Перший із них характеризується тим, що ймовірнісні характеристики суттєво змінюються на відносно великому інтервалі часу, і цей інтервал часу є значно більшим від інтервалу кореляції. При параметричному симулюванні локально стаціонарних випадкових процесів використовуються методи теорії стаціонарних випадкових процесів. Іншим важливим класом нестационарних випадкових процесів, що дає можливість параметризувати ймовірнісну структуру явищ, що досліджується, є ПКВП.

#### **2.1. Періодично корельовані випадкові процеси**

Періодичні явища часто зустрічаються в інженерії та науці. Для прикладу, в давачах механічних коливань різних механізмів, де періодичність виникає при обертаннях, періодичних рухах та коливаннях зубчастих передач, валів, приводних пасів, ланцюгів, осей, пропелерів, підшипників, поршнів і т.д., в атмосфері для передбачення погоди, де періодичність пов'язана з рухом Землі навколо Сонця та осьовим обертанням; в радіоастрономії періодичність пов'язана з обертанням Місяця, обертанням та циклічною пульсацією Сонця, обертанням Юпітера та його супутників і ця періодичність може проявлятися у

характеристиках часових рядів величин, що їх описують; у телекомунікаціях, телеметрії, радарах, сонарах періодичність виникає при дискретизації, скануванні, модуляції, кодуванні інформації, та може бути викликана обертаннями рефлекторів, таких як крила гелікоптера та вітро- або водяних гвинтів. Для прикладу, у теорії обробки сигналів доречність концепції періодичності може бути представлена такими роботами по синхронізації [66–68], модуляції та пристроях передавання інформації [68–71], розробці фільтрів [69, 72, 73], аналізу впливу шуму в електричних колах [74, 75], адаптивній фільтрації [73, 76–79], кодуванні інформації [80–82], детектуванні [83–92], та в цифрових алгоритмах обробки сигналів [72, 73, 76, 93–98].

Важливу роль періодичностей в інших областях обробки сигналів можна проілюструвати в біомедичній інженерії [99], кліматології [100, 101], а також розвитку теорії передбачення [78, 101], розкладанні [67], детектуванні [83, 84], модуляції [102–104], моделюванні та представленні сигналу [102, 105, 106].

У [107] запропоновано термін “циклостационарність” для позначення такого класу процесів, його ввів W. Bannett у своїй роботі по дослідженню синхронних часових імпульсів. Інші дослідники використовують такі терміни як “циклостационарні” [67, 107], “періодично стаціонарні” [108], “періодично корельовані” [109–112], “процеси з періодичною структурою” [113, 114] та “періодично-нестационарні” [115–119] для позначення цього ж класу.

Випадковий процес  $\xi(t)$  називається періодично корельованим випадковим процесом (ПКВП), у широкому розумінні, з періодом  $T$  тоді і лише тоді, коли його математичне сподівання, кореляційна функція та миттєва спектральна густина є періодичними функціями [21]:

$$\begin{aligned}
 m_{\xi}(t) &= \mathbb{E}\{\xi(t)\} = m_{\xi}(t+T); \\
 b_{\xi}(t,u) &= \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t-u)\right\} = b_{\xi}(t+T,u), \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t); \\
 f(\omega,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [b(t,u)e^{-i\omega u}] du = f(\omega,t+T).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Оскільки математичне сподівання ПКВП, кореляційна функція і миттєва спектральна густина є періодичними функціями часу, то при виконанні умов

$$\int_0^T |m(t)| dt < \infty, \quad \int_0^T |b(t,u)| dt du < \infty, \quad \int_0^T |f(\omega,t)| d\omega dt < \infty,$$

вони можуть бути представленні у вигляді рядів Фур'є [21]:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ m_k e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \right], \quad b(t,u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ B_k(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \right], \quad f(\omega,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ f_k(\omega) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \right],$$

де

$$m_k = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ m(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} \right] dt, \quad B_k(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ b(t,u) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} \right] dt, \quad f_k(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ f(\omega,t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} \right] dt,$$

при  $k \rightarrow \infty$ :  $|m_k| \rightarrow 0$ ,  $|B_k(u)| \rightarrow 0$ ,  $|f_k(\omega)| \rightarrow 0$ . Коефіцієнти  $B_k(u)$  і  $f_k(\omega)$  мають назву кореляційних і спектральних компонентів. Коефіцієнти Фур'є  $m_k$  та  $B_k(u)$  є кількісними характеристиками форми періодичних кривих, відповідно, математичного сподівання і кореляційної функції [21, 43, 115].

Багато дослідників розпізнали важливість ПКВП класу нестационарних процесів, і вони сприяли розвитку та аналізу фундаментальних понять теорії циклостационарності. Гудзенко Л.И. [117, 118], Гладишев Е.Г. [44, 109], Драган Я.П. [22, 23, 110–112, 124] та Hurd Н.І. [125–133], Gardner W.A. [67, 83, 84, 92, 102–106] сприяли розвитку та аналізу Фур'є представлення періодичних автокореляційних функцій гармонізованих та негармонізованих ПКВП процесів. Проте відсутність простих алгоритмів симулювання періодично нестационарних процесів не дозволяло повністю використати корисні властивості непараметричних методів. Саме тому недавні дослідження були зосередженні на розробці параметричних моделей та ортогональних представлень ПКВП, з яких слідують відповідні властивості для автокореляційної функції [1–5, 10, 15, 17–18, 32, 120, 121].

## 2.2. Моделі представлення нестационарних випадкових процесів

В імовірнісних моделях стохастичних коливань у вигляді ПКВП повторюваність їх властивостей описується певними типами часових змін їх імовірнісних характеристик першого і другого порядків: математичного сподівання, кореляційної функції, спектральної густини. При цьому детерміновані зображення коливань у вигляді періодичних функцій, які повністю ігнорують нерегулярність часових змін, та зображення у вигляді стаціонарних випадкових процесів, які в свою чергу вже не передбачають ніякого збереження в часі тої чи іншої фазової структури, належать в класі ПКВП-моделей до двох крайніх випадків. Поєднання опису повторюваності та стохастичності при аналізі коливань як ПКВП [21, 111] досягається врахуванням стохастичної амплітудної та фазової модуляції кожного з нескінченної суми гармонічних коливань з частотами  $\omega_k = k\omega_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}. \quad (2.2)$$

Модулюючі випадкові процеси  $\xi_k(t)$  є стаціонарними стаціонарно зв'язаними випадковими процесами. Їх математичні сподівання  $m_k = \mathbb{E}\{\xi_k(t)\}$  визначають Фур'є коефіцієнти функції  $m(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)\}$ , а кореляції між ними формують структуру Фур'є компонентів кореляційної функції  $b(t, u)$ :

$$B_k(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_{l-k, l}(u) e^{il\omega_0 u}. \quad (2.3)$$

З розкладу кореляційної функції  $r(t, s) = b(t, s - t)$

$$r(t, s) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} R_{pq}(s - t) e^{i\omega_0(qs - pt)}$$

впливає, що для дійсного ПКВП  $R_{-p, -q}(s - t) = \bar{R}_{pq}(s - t)$ , а звідси

$$R_{l-k, l}(u) = \bar{R}_{-l+k, -l}(u). \quad (2.4)$$

Виконання останньої рівності забезпечує те, що

$$B_k(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{R}_{-l+k, -l}(u) e^{il\omega_0 u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{R}_{l+k, l}(u) e^{-il\omega_0 u} = \bar{B}_{-k}(u).$$

Ряд для кореляційної функції

$$r(t, t+u) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} R_{pq}(u) e^{i\omega_0(q(t+u)-pt)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ e^{ik\omega_0 t} \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k, q}(u) e^{iq\omega_0 u} \right], \quad (2.5)$$

виходячи з умови  $r(t, t+u) = r(t+u, t)$  можна також переписати у вигляді

$$r(t+u, t) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} R_{pq}(-u) e^{i\omega_0[qt-p(t+u)]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ e^{ik\omega_0 t} \left[ \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k, q}(-u) e^{-iq\omega_0 u} \right] e^{ik\omega_0 u} \right]. \quad (2.6)$$

Порівнюючи співвідношення (2.5) і (2.6), приходимо до висновку, що

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k, q}(-u) e^{-iq\omega_0 u} = \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{q-k, q}(u) e^{-i\omega_0(q-k)u}. \quad (2.7)$$

Це означає, що кореляційні компоненти, які визначаються формулою (2.3), задовольняють умову  $B_k(-u) = B_k(u) e^{-ik\omega_0 u}$ .

При виборі апроксимаційних виразів для кореляційних функцій стаціонарних компонентів, очевидно, потрібно також враховувати умову симетрії

$$R_{pq}(u) = \bar{R}_{qp}(-u), \quad (2.8)$$

та нерівність

$$|R_{pq}(u)|^2 \leq R_p(0) R_q(0). \quad (2.9)$$

Остання умова обмежує значення взаємкореляційних функцій для довільних зсувів відносно значень автокореляційних функцій в нулі. Сильнішою є нерівність для взаємоспектральних густин

$$f_{pq}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_{pq}(u) e^{-i\omega u}] du,$$

а саме

$$|f_{pq}(\omega)|^2 \leq f_{pp}(\omega) f_{qq}(\omega), \quad (2.10)$$

яка впливає з  $|f_{\xi\eta}(\omega)|^2 \leq f_{\xi}(\omega) f_{\eta}(\omega)$ . Вона справедлива для довільних значень частот як лівої, так і правої її сторін. Це, зокрема, означає, що взаємоспектральна густина завжди дорівнює нулю для тих частот, для яких

спектральна густина потужності одного з процесів приймає нульові значення. З формули

$$R_{pq}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_{pq}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega$$

тоді випливає, що корельованим можуть бути тільки ті стаціонарні компоненти, спектри яких перекриваються [21, 111, 119].

Підкреслимо, що наведені вище умови (2.4), (2.7) – (2.10) є необхідними та достатніми для того, щоб функції (2.3) були кореляційними компонентами.

Підґрунтям для побудови параметричних ПКВП-моделей конкретних фізичних процесів є статистична обробка даних експериментальних спостережень методами ПКВП з метою знаходження оцінок математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції, спектральної густини та Фур'є компонентів цих характеристик. Класи параметричних функцій доцільно вибирати, виходячи із зображення ПКВП через стаціонарні стаціонарно зв'язані компоненти (2.2) та формул для кореляційних компонентів, що випливають з такого зображення [111, 120–122]. Такий підхід зводить параметризацію імовірнісних характеристик ПКВП до параметризації кореляційних компонентів на основі їх представлень через авто- та взаємкореляційні функції випадкових процесів, які формують даний ПКВП. Розглянемо приклади основних моделей ПКВП [21].

### **2.2.1. Періодично корельований білий шум**

Періодично корельованим білим шумом будемо називати за Я. Драганом [110] такий ПКВП, для якого спектральні компоненти  $f_k(\omega)$  для всіх  $\omega \in \mathbb{R}$  і  $k \in \mathbb{Z}$  є незалежними від частоти, тобто  $f_k(\omega) = \frac{N_k}{2\pi}$ , при цьому  $N_k$  – такі комплексні величини, для яких

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k e^{ik\omega_0 t} \geq 0.$$

Двочастотна спектральна густина періодично корельованого шуму має вигляд

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} [N_k \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0)].$$

З формули

$$r(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i(\omega_1 s - \omega_2 t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} [f_k(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0)] d\omega_1 d\omega_2 \right],$$

тоді випливає, що

$$\begin{aligned} r(t, s) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ N_k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 s - \omega_2 t)} \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k e^{ik\omega_0 t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(s-t)} d\omega \right] = g(t) \delta(s-t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

або  $b(t, u) = g(t) \delta(u)$ . Для миттєвої спектральної густини звідси маємо:

$$f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k e^{ik\omega_0 t}.$$

Ця величина для всіх  $\omega \in \mathbb{R}$  і  $t \in \mathbb{R}$  є невід'ємною:  $f(\omega, t) \geq 0$ . Тому її можна інтерпретувати як спектральну густину потужності коливань [21, 43].

Припустимо, що авто- та взаємкореляційні функції стаціонарних компонентів  $\xi_k(t)$  мають вигляд:

$$R_{pp}(u) = R_{pp} \delta(u),$$

$$R_{pq}(u) = R_{pq} \delta(u),$$

тобто випадкові процеси  $\xi_k(t)$  є стаціонарно зв'язаними білими шумами.

Використовуючи рівність  $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$ , приходимо до співвідношення:

$$b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \left[ \sum_{p \in \mathbb{Z}} R_{p-k, p} \right] \delta(u). \quad (2.12)$$

Порівнюючи (2.11) і (2.12), отримуємо  $N_k = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R_{p-k, p}$ . Таким чином, у випадку,

коли стаціонарні компоненти  $\xi_k(t)$  є білими шумами, то сам випадковий процес  $\xi(t)$  є періодично корельованим білим шумом [21, 110].



### 2.2.2. Полігармонічна модель

Вона отримується тоді, коли стаціонарні компоненти  $\xi_k(t)$  вироджуються у випадкові величини  $\xi_k$ :

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k e^{ik\omega_0 t}. \quad (2.13)$$

Якщо математичні сподівання випадкових величин  $\xi_k$  не дорівнюють нулю і вони є корельованими, то

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}, \quad (2.14)$$

$$r(t, s) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \left[ \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k \overset{\circ}{\xi}_l e^{i\omega_0(l s - k t)} \right\} \right] = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} r_{kl} e^{i\omega_0(l s - k t)}, \quad (2.15)$$

де  $m_k = \mathbb{E} \{ \xi_k \}$ ,  $r_{kl} = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k \overset{\circ}{\xi}_l \right\}$ ,  $\overset{\circ}{\xi}_k = \xi_k - m_k$ . Математичне сподівання (2.14) і

кореляційна функція (2.15) задовольняють умови

$$m(t + pT) = m(t), \quad r(t + pT, s + qT) = r(t, s) \quad (2.16)$$

для всіх  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Остання рівність означає, що кореляційна функція  $r(t, s)$  є періодичною за двома аргументами  $t$  і  $s$ . Випадкові процеси, для яких умови (2.16) виконуються, називаються періодичними нестаціонарними випадковими процесами (ПНВП) в широкому розумінні [21, 110, 115]. Очевидно, що цей клас процесів належить до ПКВП. Для останніх умова для кореляційної функції  $r(t, s)$  виконується тільки при  $p = q$ .

Періодичними нестаціонарними випадковими процесами у вузькому розумінні [21, 110, 115] називають такі процеси, для яких умова

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + q_1 T, t_2 + q_2 T, \dots, t_n + q_n T)$$

виконується для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$  і  $q_i \in \mathbb{Z}$ .

Для одномірної та двомірної густин, зокрема, маємо

$$p(x; t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(x) e^{ik\omega_0 t},$$

$$p(x_1, x_2; t, s) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} p_{kl}(x_1, x_2) e^{i\omega_0(ls+kt)},$$

а звідси легко отримуємо формули, аналогічні до (2.14) і (2.15):

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} x p_k(x) dx \right],$$

$$r(t, s) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \left[ e^{i\omega_0(ls+kt)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2 p_{kl}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right],$$

при цьому

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x p_k(x) dx, \quad r_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2 p_{k,l}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Покладемо  $s = t + u$  і перепишемо ряд (2.15) у вигляді

$$r(t, t+u) = b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ e^{ik\omega_0 t} \sum_{l \in \mathbb{Z}} r_{k-l, l} e^{il\omega_0 u} \right].$$

Кореляційні компоненти періодичного нестационарного процесу

$$B_k(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ r_{l-k, l} e^{il\omega_0 u} \right]$$

є періодичними функціями зсуву  $u$ . Періодичною, звісно, є також кореляційна функція стаціонарного наближення  $B_0(u) = R(u)$ , амплітуди гармонічних складових якої визначаються дисперсіями випадкових величин  $\xi_k$ . Спектральні компоненти

$$f_k(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ r_{l-k, l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-l\omega_0)u} du \right] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} r_{l-k, l} \delta(\omega - l\omega_0)$$

є рядами зважених  $\delta$ -функцій.

Подавши кореляційну функцію  $r(t, s)$  у вигляді

$$r(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i(\omega_1 s - \omega_2 t)} f(\omega_1, \omega_2) \right] d\omega_1 d\omega_2$$

і взявши до уваги рівняння

$$e^{i(k\omega_1 - l\omega_2)T} f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2),$$

яке випливає з  $r(t+lT, s+kT) = r(t, s)$ , приходимо до висновку, що значення двомірної спектральної густини  $f(\omega_1, \omega_2)$  періодичного нестационарного випадкового процесу зосереджені тільки в точках  $(l\omega_0, k\omega_0)$ ,  $l, k \in \mathbb{Z}$  [32, 119]. Зауважимо, що процес (2.13) стає періодичним стаціонарним випадковим процесом у випадку, коли для всіх  $k \neq 0$   $m_k = 0$ , а випадкові величини  $\xi_k$  є некорельованими. В літературі такий процес часто називають квазідетермінованим [34, 123].

### 2.2.3. Адитивна модель

Адитивна модель отримується, коли в зображенні (2.2) стаціонарні компоненти  $\xi_k(t)$  мають вигляд  $\xi_k(t) = c_k + \eta_k(t)$ , де  $c_k$  – постійні величини, а  $\eta_k(t)$  – некорельовані стаціонарні випадкові процеси [21]. Тоді

$$\xi(t) = \eta(t) + f(t), \quad (2.17)$$

де

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

деяка періодична функція, а

$$\eta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t} \quad (2.18)$$

деякий стаціонарний випадковий процес. Очевидно, що математичне сподівання процесу  $\eta(t)$  є постійним, якщо  $\mathbb{E}\{\eta_k(t)\} = 0$  для всіх  $k \neq 0$ . Для спрощення позначень вважатимемо також, що  $\mathbb{E}\{\eta_0(t)\} = 0$ . Математичне сподівання процесу (2.17) в цьому випадку дорівнює періодичній функції:  $m(t) = f(t)$ . А кореляційна функція має вигляд

$$b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ e^{ik\omega_0 t} \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_{l-k, l}^{(\eta)}(u) e^{il\omega_0 u} \right],$$

де  $R_{l-k, l}^{(\eta)}(u) = \mathbb{E}\{\bar{\eta}_{l-k}(t)\eta_l(t+u)\}$ . Оскільки  $R_{l-k, l}^{(\eta)}(u) = 0$  для всіх  $k \neq 0$ , то

$$b(t, u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_l^{(\eta)}(u) e^{il\omega_0 u} = B_0(u).$$

Вищі кореляційні компоненти для адитивної моделі дорівнюють нулю [21].

Стационарні процеси  $\eta_k(t)$  подамо у вигляді

$$\eta_k(t) = \frac{1}{2} [\eta_k^c(t) - i\eta_k^s(t)]$$

і будемо вважати, що  $\eta_0^s(t) \equiv 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} R_l^{(\eta)}(u) &= \frac{1}{4} \mathbb{E} \left\{ [\eta_l^c(t) + i\eta_l^s(t)] [\eta_l^c(t+u) - i\eta_l^s(t+u)] \right\} = \\ &= \frac{1}{4} [R_l^c(u) + R_l^s(u) + i[R_l^{sc}(u) - R_l^{cs}(u)]], \end{aligned} \quad (2.19)$$

де

$$R_l^c(u) = \mathbb{E} \{ \eta_l^c(t) \eta_l^c(t+u) \},$$

$$R_l^s(u) = \mathbb{E} \{ \eta_l^s(t) \eta_l^s(t+u) \},$$

$$R_l^{cs}(u) = \mathbb{E} \{ \eta_l^c(t) \eta_l^s(t+u) \}.$$

Взявши до уваги вираз (2.19), отримуємо

$$B_0(u) = \frac{1}{4} R_{00}^c(u) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} [ [R_l^c(u) + R_l^s(u)] \cos l\omega_0 u + [R_l^{cs}(u) - R_l^{sc}(u)] \sin l\omega_0 u ].$$

Оскільки для такого ПКВП кореляційна функція не змінюється в часі, тобто відмінним від нуля є тільки нульовий кореляційний компонент, то, очевидно, буде постійною в часі й дійсна частина змінної спектральної густини:

$$\operatorname{Re} \{ f(\omega, t) \} = f_0(\omega). \text{ Уявна частина тотожно дорівнює нулю: } \operatorname{Im} \{ f(\omega, t) \} = 0.$$

Нульовий спектральний коефіцієнт визначається формулою:

$$\begin{aligned} f_0(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [B_0(u) \cos \omega u] du = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [R_{00}^c(u) \cos \omega u] du + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty [ [R_l^c(u) + R_l^s(u)] [\cos(\omega + l\omega_0)u + \cos(\omega - l\omega_0)u] + \right. \\ &\left. + 2R_l^{cs}(u) [\sin(\omega + l\omega_0)u - \sin(\omega - l\omega_0)u] \right] du. \end{aligned}$$

### 2.2.4. Мультиплікативна модель

Мультиплікативна модель є ПКВП, що описує тільки амплітудну стохастичну модуляцію коливань [21, 68, 72]. До неї приходимо, коли всі стаціонарні компоненти є пропорційними до якогось одного випадкового процесу:  $\xi_k(t) = c_k \eta(t)$ . Тоді

$$\xi(t) = \eta(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega_0 t} = \eta(t) f(t), \quad (2.20)$$

де  $f(t)$  – деяка періодична функція. Математичне сподівання такого процесу має вигляд

$$m(t) = m_\eta f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_\eta c_k e^{ik\omega_0 t} = m_\eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

де  $m_\eta = \mathbb{E}\{\eta(t)\}$ . Його коефіцієнти Фур'є є пропорційними до коефіцієнтів Фур'є періодичної функції  $f(t)$ . Знайдемо кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} b(t, u) &= \mathbb{E}\left\{\left[\eta(t)f(t) - m_\eta f(t)\right]\left[\eta(t+u)f(t+u) - m_\eta f(t+u)\right]\right\} = \\ &= R_\eta(u) f(t)f(t+u). \end{aligned}$$

Для кореляційних компонентів тоді маємо:

$$B_n(u) = R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \bar{c}_{l-n} c_l e^{il\omega_0 u} \right].$$

Взявши до уваги формули

$$c_l = \frac{1}{2}(a_l - ib_l), \quad B_n(u) = \frac{1}{2} \left[ B_n^c(u) - iB_n^s(u) \right]$$

отримуємо [21]

$$B_0(u) = R_\eta(u) \left[ c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_l^2 + b_l^2) \cos l\omega_0 u \right], \quad (2.21)$$

$$B_n^c(u) = \frac{R_\eta(u)}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) \cos l\omega_0 u + (a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}) \sin l\omega_0 u \right], \quad (2.22)$$

$$B_n^s(u) = \frac{R_\eta(u)}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ (b_l a_{l-n} - a_l b_{l-n}) \cos l\omega_0 u - (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) \sin l\omega_0 u \right]. \quad (2.23)$$

Якщо кореляційні зв'язки процесу  $\eta(t)$  швидко загасають на інтервалі часу, де періодична функція змінюється мало, то [21, 42]

$$b^+(t,u) \approx R_\eta(u) f^2(t), \quad b^-(t,u) \approx 0. \quad (2.24)$$

Кореляційна функція  $b(t,u)$  в такому випадку для кожного  $t$  має всі властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу [21, 32, 42]. Такий випадковий процес, як вже згадувалось вище, називають локально стаціонарним. З виразу (2.24) випливає, що ознакою локальної стаціонарності є рівність нулю непарної частини кореляційної функції. На основі співвідношень (2.22) і (2.23) легко отримуємо формули для дійсної та уявної частин змінної спектральної густини [21, 42]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(\omega, t)\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [b^+(t,u) \cos \omega u] du = 2c_0^2 I(\omega) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} (a_l^2 + b_l^2) [I(\omega + l\omega_0) + I(\omega - l\omega_0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \cos n\omega_0 t \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) [I(\omega + l\omega_0) + I(\omega - l\omega_0)] + \right. \\ &\left. + \sin n\omega_0 t \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}) [I(\omega + l\omega_0) + I(\omega - l\omega_0)] \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{f(\omega, t)\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [b^-(t,u) \sin \omega u] du = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \cos n\omega_0 t \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}) [I(\omega - l\omega_0) - I(\omega + l\omega_0)] - \right. \\ &\left. - \sin n\omega_0 t \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) [I(\omega - l\omega_0) - I(\omega + l\omega_0)] \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

де

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty R_\eta(u) \cos \omega u du.$$

Якщо виконується умова локальної стаціонарності, то

$$\operatorname{Re}\{f(\omega, t)\} \approx 2I(\omega) f^2(t), \quad \operatorname{Im}\{f(\omega, t)\} \approx 0.$$

Для спектральних компонентів процесу (2.20) маємо [21, 42]

$$f_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B_0(u) \cos \omega u du = 2c_0^2 I(\omega) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_l^2 + b_l^2) [I(\omega + l\omega_0) + I(\omega - l\omega_0)], \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f_n(\omega)\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_n^c(u) \cos \omega u - B_n^s(u) \sin \omega u] du = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_\eta(u) \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) \cos(\omega + l\omega_0)u + (a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}) \sin(\omega - l\omega_0)u] \right] du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{f_n(\omega)\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_n^c(u) \sin \omega u + B_n^s(u) \cos \omega u] du = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\eta(u) \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} [a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}] \cos(\omega + l\omega_0)u + (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) \sin(\omega - l\omega_0)u \right] du. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} [R_\eta(u) \sin(\omega - l\omega_0)u] du = 0,$$

то

$$\operatorname{Re}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}) I(\omega + l\omega_0)], \quad (2.28)$$

$$\operatorname{Im}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [(a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}) I(\omega + l\omega_0)]. \quad (2.29)$$

Дійсна частина спектральних компонентів, як бачимо, залежить від добутків амплітуд косинусних і добутків амплітуд синусних складових, а уявна – від їх взаємних добутків.

Для локально стаціонарного випадкового процесу [21, 42]

$$f_0(\omega) = 2I(\omega) \left[ c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} (a_l^2 + b_l^2) \right],$$

$$\operatorname{Re}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{2} I(\omega) \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_l a_{l-n} + b_l b_{l-n}), \quad \operatorname{Im}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{2} I(\omega) \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a_{l-n} b_l - a_l b_{l-n}).$$

### 2.2.5. Квадратурна модель

Адитивна модель ПКВП описує просте накладання стохастичного процесу на періодичну функцію. Такий випадковий процес є нестаціонарним тільки по відношенню до математичного сподівання. В мультиплікативній моделі передбачається однакова періодична зміна всіх гармонічних складових, які формують випадковий процес. При цьому ця зміна має характер амплітудної

модуляції. Модель, про яку йтиме мова нижче, відображає вже амплітудну і фазову модуляції коливних процесів і є найпростішою моделлю такого типу [1, 21, 68, 72]. В ній передбачається існування тільки однієї гармоніки несучої, яка зазнає модуляційних змін. Із зображення (2.2) до такої моделі приходимо, коли відмінними від нуля є стаціонарні компоненти  $\xi_1(t)$  та  $\xi_{-1}(t)$ . Представимо їх у вигляді

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2}[\xi_c(t) - i\xi_s(t)], \quad \xi_{-1}(t) = \frac{1}{2}[\xi_c(t) + i\xi_s(t)].$$

Тоді отримуємо

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.30)$$

Математичне сподівання такого процесу  $m(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)\}$  матиме вигляд

$$m(t) = m_c \cos \omega_0 t + m_s \sin \omega_0 t,$$

де  $m_c = \mathbb{E}\{\xi_c(t)\}$ ,  $m_s = \mathbb{E}\{\xi_s(t)\}$ . Кореляційна функція містить нульовий

$$B_0(u) = \frac{1}{2}[R_c(u) + R_s(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2}[R_{cs}(u) - R_{sc}(u)] \sin \omega_0 u \quad (2.31)$$

і другі кореляційні компоненти

$$B_2^c(u) = \frac{1}{2}[R_c(u) - R_s(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2}[R_{cs}(u) + R_{sc}(u)] \sin \omega_0 u, \quad (2.32)$$

$$B_2^s(u) = \frac{1}{2}[R_{cs}(u) + R_{sc}(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2}[R_s(u) - R_c(u)] \sin \omega_0 u. \quad (2.33)$$

У виразах (2.32) і (2.33)  $R_{c,s}(u) = \mathbb{E}\{\overset{\circ}{\xi}_{c,s}(t) \overset{\circ}{\xi}_{c,s}(t+u)\}$ ,  $R_{cs}(u) = \mathbb{E}\{\overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u)\}$ ,

$R_{sc}(u) = \mathbb{E}\{\overset{\circ}{\xi}_s(t) \overset{\circ}{\xi}_c(t+u)\}$ . Виділимо у взаємкореляційній функції  $R_{cs}(u)$  парну

$R_{cs}^+(u)$  і непарну  $R_{cs}^-(u)$  частини:

$$R_{cs}(u) = R_{cs}^+(u) + R_{cs}^-(u). \quad (2.34)$$

Очевидно, що

$$R_{sc}(-u) = R_{sc}^+(-u) + R_{sc}^-(-u) = R_{cs}^+(u) - R_{cs}^-(u). \quad (2.35)$$



Взявши до уваги останнє співвідношення, приходимо до висновку, що нульовий кореляційний компонент  $B_0(u)$ , який є кореляційною функцією стаціонарного наближення процесу  $\xi(t)$ , визначається сумою автокореляційних функцій квадратурних складових і непарною частиною їх взаємкореляційної функції. Другі кореляційні компоненти, що визначають характер нестационарності процесу, залежать тільки від парної частини взаємної кореляційної функції і різниці автокореляційних функцій. Отже, якщо  $R_c(u) = R_s(u)$  і  $R_{cs}^+(u) = 0$ , то  $B_2^c(u) = B_2^s(u) = 0$ , і процес є стаціонарним [1, 21]. Використовуючи співвідношення (2.31)–(2.35), отримуємо наступні вирази для спектральних компонентів

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ [R_c(u) + R_s(u)] \cos \omega_0 u + 2R_{cs}^-(u) \sin \omega_0 u \right] \cos \omega_0 u du ,$$

$$\operatorname{Re}\{f_2(\omega)\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} [R_c(u) - R_s(u)] \cos(\omega - \omega_0) u du ,$$

$$\operatorname{Im}\{f_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{cs}^+(u) \cos(\omega - \omega_0) u du .$$

Кожна зі спектральних характеристик  $f_0(\omega)$ ,  $\operatorname{Re} f_2(\omega)$ ,  $\operatorname{Im} f_2(\omega)$  відображає різні властивості квадратурних складових. Нульовий спектральний компонент, визначаючи розподіл за частотами середньої потужності коливань, залежить від суми їх автокореляційних функцій і непарної частини їх взаємкореляційної функції. Дійсна частина другого спектрального компонента визначається тільки різницею автокореляційних функцій, а уявна – тільки парною частиною взаємкореляційної функції. Очевидно, що ті властивості коливання, котрі пов'язані з другими спектральними компонентами, аж ніяк не можуть бути отримані при аналізі нульового спектрального компонента, тобто в рамках стаціонарного наближення [1-2, 21].

### 2.2.6. Загальна параметрична модель

Повернемося тепер до розгляду загальної моделі (2.2) [4, 21, 104] подавши стаціонарні компоненти  $\xi_k(t)$  у вигляді

$$\xi_k(t) = \frac{1}{2} \left[ \xi_k^c(t) - i \xi_k^s(t) \right], \quad \xi_0^s(t) = 0,$$

для їх взаємкореляційної функції маємо

$$R_{kl}(u) = \mathbb{E} \left\{ \bar{\xi}_k(t) \xi_l(t+u) \right\} = \frac{1}{4} \left[ R_{kl}^c(u) + R_{kl}^s(u) + i \left[ R_{kl}^{sc}(u) - R_{kl}^{cs}(u) \right] \right],$$

де

$$R_{kl}^{c,s}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) \overset{\circ}{\xi}_l^{c,s}(t+u) \right\}, \quad R_{kl}^{cs}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k^c(t) \overset{\circ}{\xi}_l^s(t+u) \right\}.$$

Формулу для кореляційної функції перепишемо у вигляді

$$b(t,u) = \frac{1}{4} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \cos l \omega_0 t + \left[ R_{ll}^{cs}(u) - R_{ll}^{sc}(u) \right] \sin l \omega_0 u \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \cos n \omega_0 t \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \right] \cos l \omega_0 u + \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \right] \sin l \omega_0 u \right] \right] + \right. \\ \left. + \sin n \omega_0 t \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \right] \cos l \omega_0 u - \left[ R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \right] \sin l \omega_0 u \right] \right].$$

З цієї формули випливає, що ПКВП вироджується в стаціонарний випадковий процес [21] тоді, коли для всіх  $n \neq 0$

$$R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) = 0,$$

$$R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) = 0.$$

Використовуючи співвідношення

$$R_{-l,-l}^c(u) = R_{ll}^c(u), \quad R_{-l,-l}^s(u) = R_{ll}^s(u), \quad R_{-l,-l}^{cs}(u) = -R_{ll}^{cs}(u), \quad R_{-l,-l}^{sc}(u) = -R_{ll}^{sc}(u),$$

а також представляючи  $R_{ll}^{sc}(u)$  як суму парної і непарної частини

$$R_{ll}^{cs}(u) = P_{ll}^{cs}(u) + N_{ll}^{cs}(u),$$

для нульового кореляційного компонента отримуємо

$$B_0(u) = \frac{1}{4} R_{00}^c(u) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{2} \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \cos l \omega_0 u + N_{ll}^{cs}(u) \sin l \omega_0 u \right]. \quad (2.36)$$

Відтак, нульовий кореляційний компонент містить інформацію тільки про суму автокореляцій квадратурних складових і про непарну частину їх автокореляцій. Решта інформації про кореляційні співвідношення між модуляційними процесами  $\xi_k(t)$  міститься у вищих кореляційних компонентах [21]. Нульовий кореляційний компонент (2.35) є парною функцією зсуву, а вищі кореляційні компоненти

$$B_n^c(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \right] \cos l \omega_0 u + \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \right] \sin l \omega_0 u \right], \quad (2.37)$$

$$B_n^s(u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \right] \cos l \omega_0 u - \left[ R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \right] \sin l \omega_0 u \right] \quad (2.38)$$

в загальному випадку мають парну й непарну частини, які, своєю чергою, формують парну й непарну частини кореляційної функції

$$b^+(t, u) = \frac{1}{4} R_{00}^c(u) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{2} \left[ R_u^c(u) + R_u^s(u) \right] \cos l \omega_0 t + N_u^{cs}(u) \sin l \omega_0 t \right] + \quad (2.39)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \left[ B_n^c(u) + B_n^c(-u) \right] \cos n \omega_0 t + \left[ B_n^s(u) + B_n^s(-u) \right] \sin n \omega_0 t \right],$$

$$b^-(u) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \left[ B_n^c(u) - B_n^c(-u) \right] \cos n \omega_0 t + \left[ B_n^s(u) - B_n^s(-u) \right] \sin n \omega_0 t \right]. \quad (2.40)$$

Враховуючи співвідношення (2.37)–(2.38), легко знаходимо

$$B_n^c(u) \pm B_n^c(-u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^c(u) \pm R_{l,l-n}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \pm R_{l,l-n}^s(u) \right] \cos l \omega_0 u + \right. \quad (2.41)$$

$$\left. + \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) \mp R_{l,l-n}^{sc}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \pm R_{l,l-n}^{cs}(u) \right] \sin l \omega_0 u \right]$$

$$B_n^s(u) \pm B_n^s(-u) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \left[ R_{l-n,l}^{cs}(u) \pm R_{l,l-n}^{sc}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u) \mp R_{l,l-n}^{cs}(u) \right] \cos l \omega_0 u - \right. \quad (2.42)$$

$$\left. - \left[ R_{l-n,l}^c(u) \mp R_{l,l-n}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u) \mp R_{l,l-n}^s(u) \right] \sin l \omega_0 u \right]$$

Дійсну частину миттєвої спектральної густини знаходимо, обчислюючи косинус-трансформанту Фур'є парної частини кореляційної функції (2.39), а уявну – синус-трансформанту Фур'є непарної частини (2.40) [21].

Спектральні компоненти визначаються формулами:

$$f_0(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} R_{00}^c(u) \cos \omega u du + \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_0^{\infty} \left[ \begin{array}{l} [R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u)] \cos l \omega_0 u + \\ + 2N_{ll}^{sc}(u) \sin l \omega_0 u \end{array} \right] \cos \omega_0 u du, \quad (2.43)$$

$$\operatorname{Re}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} [R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u)] \cos(\omega - l\omega_0)u - \\ - [R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u)] \sin(\omega - l\omega_0)u \end{array} \right] du, \quad (2.44)$$

$$\operatorname{Im}\{f_n(\omega)\} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} [R_{l-n,l}^{cs}(u) - R_{l-n,l}^{sc}(u)] \cos(\omega - l\omega_0)u + \\ + [R_{l-n,l}^c(u) + R_{l-n,l}^s(u)] \sin(\omega - l\omega_0)u \end{array} \right] du. \quad (2.45)$$

Для локально стаціонарних випадкових процесів [21]:

$$b^+(t, u) = \frac{1}{4} R_{00}^c(u) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{N}} [R_{ll}^c(u) + P_{ll}^s(u)] + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} [R_{nn}^c(u) - R_{nn}^s(u)] \cos 2n\omega_0 t + \\ + P_{nn}^{cs}(u) \sin 2n\omega_0 t \end{array} \right],$$

$$b^-(t, u) \approx 0.$$

А тоді

$$\operatorname{Re}\{f(\omega, t)\} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} R_{00}^c(u) \cos \omega u du + \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_0^{\infty} [R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u)] \cos \omega u du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ \int_0^{\infty} [R_{nn}^c(u) - R_{nn}^s(u)] du \right] \cos n\omega_0 t + \left[ 2 \int_0^{\infty} P_{nn}^c(u) \cos n\omega_0 u du \right] \sin 2\omega_0 t,$$

$$\operatorname{Im}\{f(\omega, t)\} \approx 0.$$

Очевидно, що з формул (2.39) та (2.40), (2.43)–(2.45), які описують структуру кореляційних і спектральних характеристик ПКВП в загальному випадку, отримуються вирази для характеристик вже розглянутих окремих моделей.

### 2.3. Методи оцінювання ймовірнісних характеристик періодично корельованих випадкових процесів

Можна навести такі основні методи оцінювання ймовірнісних характеристик нестационарних випадкових процесів: метод найменших квадратів [35, 36, 134–137]; когерентний та компонентний метод [32, 112, 115,

138–143]. Когерентне оцінювання [32, 115] спирається на той факт, що відліки ПКВП через період корельованості при різному початку відліку утворюють стаціонарні стаціонарно пов'язані послідовності  $\{\xi(t_0 + kT), k \in \mathbb{Z}, t_0 \in [0, T]\}$ . У цьому випадку використовується усереднення за множинами для різних  $t_0$ , що дозволяє виявити часову структуру корельованості. Оцінювання математичного сподівання і кореляційної функції проводиться за формулами:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [\xi(t+nT)], \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - \hat{m}(t),$$

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [\overset{\circ}{\xi}(t+nT) \overset{\circ}{\xi}(t+u+nT)].$$

Компонентний метод базується на представленні характеристик ПКВП у вигляді рядів Фур'є і на відміну від когерентного методу, що використовує лише одне значення процесу на періоді, залучає для оцінювання весь інтервал реалізації процесу [32, 115]:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}] dt, \quad \hat{m}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\hat{m}_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}],$$

$$\hat{B}_k(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}] dt, \quad \hat{b}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\hat{B}_k(u) e^{ik\frac{2\pi}{T}t}].$$

Істотна перевага по збіжності компонентного методу оцінювання досягається при невеликій кількості компонентів. Зі збільшенням довжини оброблюваної реалізації селективні властивості когерентного і компонентного перетворень покращуються. Збіг результатів оцінювання цими двома методами відбудеться при нескінченій кількості компонентів і довжині реалізації  $\theta \rightarrow \infty$ , що складається із цілого числа періодів  $\theta = NT$  [32]. У багатьох практичних випадках кількість компонентів невідома, тому аналіз натурних даних спочатку проводять когерентним методом, визначають кількість компонентів математичного сподівання і кореляційної функції та на основі цих відомостей застосовують компонентний метод [21, 32].

## 2.4. Висновки до розділу 2

1. Проаналізовано особливості ймовірнісних моделей нестационарних випадкових процесів. З них виокремлено та обґрунтовано гармонічне представлення періодично корельованого випадкового процесу для опису сигналів зі стохастичною повторюваністю.

2. Показано, що для моделювання нестационарних сигналів, в яких присутні стохастичні модуляційні зв'язки періодичної структури, доцільно використовувати моделі, що враховують їх періодичну структуру. Тому, використання гармонічного представлення моделі ПКВП дозволяє описати властивості досліджуваного сигналу через властивості його стаціонарних складових та зменшити кількість параметрів моделювання, не понижуючи його точності. Для ПКВП-моделі розглянуто її основні часткові випадки, а саме: адитивну, мультиплікативну, квадратурну і загальну параметричну моделі. Для цих моделей виведено вирази, які зводять параметризацію ймовірнісних характеристик ПКВП до параметризації кореляційних компонентів на основі їх представлень через авто- та взаємкореляційні функції стаціонарних стаціонарно зв'язаних випадкових процесів, які формують цей ПКВП.

3. Проаналізовано основні методи оцінювання ймовірнісних характеристик сигналів зі стохастичною повторюваністю, серед яких виокремленні когерентний та компонентний методи, оскільки отримані ними оцінки незміщені та слушні.

Результати розділу 2 опубліковано у наукових працях [1, 2, 4, 5, 15, 18, 19].

## РОЗДІЛ 3

### МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Концепцію аналітичного сигналу і перетворення Гільберта часто використовують для обробки сигналів в різних галузях науки, а саме статистичній радіофізиці, телекомунікації, геофізиці, вібраційному аналізі, технічній діагностиці [144–148]. Окремо варто зазначити, що їх використовують як для аналізу детермінованих, так і стохастичних коливань. З їх допомогою можна отримати такі характеристики сигналу: миттєву амплітуду (обвідну), фазу і частоту. У випадку, коли сигнал є вузькосмуговим, обвідна повільно змінюється, сигнал і обвідна мають рівні перші похідні, сигнал має точки дотику до обвідної, але вони не перетинаються, частоти повільно змінної обвідної є додатними. Ці властивості пропадають коли смуга сигналу стає ширшою і сигнал стає широкосмуговим, тоді миттєва амплітуда і фаза вже є складними функціями часу. Задачу декомпозиції широкосмугових сигналів на компоненти було висвітлено у літературі [149–153]. Першим відомим методом запропонованим для розв’язання цієї задачі був [149, 150], і називається він емпірична декомпозиція мод (ЕДМ). Цей метод полягає у виділенні (екстрагуванні) із сигналу так званих функцій власних мод, кожна з яких допускає коректне застосування перетворення Гільберта. Отриманої пари сигналів достатньо, щоб провести демодуляцію, використовуючи той факт, що вони зміщені по фазі на  $-\pi/2$ . Виділені власні моди мають різні масштаби часу і будуються на основі локальних максимумів вхідного широкополосого сигналу, використовуючи сплайнові алгоритми. Обвідну і миттєву частоту кожного виділеного компонента розглядають як пару функцій часу, а комбінація всіх компонентів формує частотно-часовий розподіл відомий як спектр Гільберта [149, 150, 153].

Емпіричну декомпозицію мод часто використовують у різних задачах обробки сигналів. Варто зауважити, що даний метод емпіричний і був введений в науку як алгоритм, а його теоретичне підґрунтя так і не було розроблено [148, 153].

У працях [148, 150, 151] задача декомпозиції сигналів була вирішена використовуючи інший метод відомий як Гільбертова вібраційна декомпозиція (ГВД). Було припущено, що вхідний сигнал може бути представлений як сума певних монокомпонент:

$$s(t) = \sum_{l=1}^L \left[ A_l(t) \cos\left(\int \omega_l(t) dt\right) \right], \quad (3.1)$$

де  $A_l(t)$  – обвідна (миттєва амплітуда), а  $\omega_l(t)$  – миттєва частота  $l$ -ї монокомпоненти. Метод ГВД передбачає використання перетворення Гільберта, і не передбачає жодних додаткових процедур обробки сигналів. Відповідні повільнозмінні монокомпоненти екстрагуються виконанням низькочастотної фільтрації миттєвої частоти, що еквівалентно смуговій фільтрації, де несуча частота  $\omega_0$  є центральною частотою смуги пропускання фільтра. Тоді ширина смуги пропускання фільтра відповідає частоті зрізу (*cutoff frequency*) фільтра нижніх частот.

У літературі проаналізовано тільки використання алгоритму ГВД до обробки експериментальних даних, а властивості представлення (3.1) описанні дуже загально. У [148, 152] було зауважено що, метод ГВД призначений в першу чергу для модульованих і нестационарних вібрацій або вібрацій нелінійної динамічної системи, наприклад вібрація ротора при запуску чи зупинці. Окремо варто зауважити, що цей метод не можна використовувати для виділення випадкових імпульсів зокрема неперіодичних вібраційних сигналів. У роботах [148-153] в яких наведені аргументи на користь методів емпіричної декомпозиції мод і Гільбертової вібраційної декомпозиції автори ще не розглядали можливе використання методів періодично і майже періодично нестационарних випадкових процесів (їх також називають



циклостационарними) [23, 43, 69, 115, 154-161] для аналізу нелінійних та нестационарних коливань.

Запропоновано використати гармонічне представлення [22, 115, 155, 157, 161] ПНВП, що дозволяє спільно розглядати різні типи стохастичної повторюваності:

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (3.2)$$

де  $\xi_k(t)$  – є стаціонарні стаціонарно зв'язані випадкові процеси,  $\omega_0 = 2\pi/P$  – несуча частота,  $P$  – період нестационарності,  $\mathbb{Z}$  – множина цілих чисел. Кожна амплітудно-фазово модульована гармоніка з ряду (3.2) може бути представлена як монокомпонента сигналу  $\xi(t)$ , і її можна виділити використовуючи смугову фільтрацію. Для проведення цього аналізу важливо розрізнити випадки різних співвідношень між шириною смуги частот модулюючих процесів  $\xi_k(t)$  і несучими частотами  $k\omega_0$ . Модуляція є низькочастотною, якщо спектри модулюючих процесів обмежені в інтервалах  $[-\omega_m, \omega_m]$  і  $\omega_m < \omega_0$ . Модуляція є високочастотною, якщо спектри модулюючих процесів обмежені в інтервалах  $[\nu_0 - \omega_m, \nu_0 + \omega_m]$  і  $\nu_0 - \omega_m > N\omega_0$ , де  $N$  є порядковий номер найвищої гармоніки. Прикладом високочастотної модуляції є вібрація підшипника кочення з локальним дефектом. Низькочастотну модуляцію можна спостерігати у вібродіагностиці [152, 153, 161–163] і коливаннях іншої природи виникнення [22, 115, 158, 163].

Аналіз обвідної – одна з найбільш часто використовуваних методик діагностики підшипників кочення [164–169], однак аналіз обвідної був введений як емпірична методика і не має теоретичного обґрунтування. Саме застосування методики обвідної пояснюють припущенням, що дефекти проявляються як амплітудна модуляція коливань механізму з певними власними частотами [164, 165, 169]. Представлення вібраційного сигналу як амплітудно модульованого є частковим випадком (3.2), який можна отримати якщо підставити  $\xi_k(t) = c_k \eta(t)$ , де  $c_k$  комплексні числа:

$$\xi(t) = \eta(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega_0 t} = \eta(t) s(t).$$

Тут  $s(t)$  періодична функція, частоти гармонік якої кратні до основної частоти  $\omega_0$ . Варто зауважити, що мультиплікативна модель вібрації є феноменологічною [170], і ще не доказаною. Для періодично нестаціонарного випадкового сигналу (ПНВС) функція математичного сподівання  $m(t)$ , кореляційна функція  $b(t, u)$ , функція миттєвої спектральної густини  $f(\omega, t)$  та їх коефіцієнти Фур'є  $m_k, B_k(u), f_k(\omega)$  є загальними характеристиками, що описують амплітудну та фазову модуляцію гармонік. Тому доцільно проводити аналіз саме на основі узагальненого представлення (3.2), яке враховує можливість амплітудної й фазової модуляції гармонік різного ступеня і зв'язок між гармоніками.

Стохастичні коливання, часові варіації яких характеризуються як повторюваністю, так і стохастичністю, можна зустріти в багатьох галузях науки та техніки [22, 23, 69, 155–158, 163, 171]. Взаємодія цих характеристик описується коливальними моделями у вигляді періодично нестаціонарних випадкових процесів шляхом стохастичної модуляції їх несучих гармонік [22, 23, 69, 156]. Ця модуляція може бути низько- або високочастотною, а також широко- або вузькосмуговою в кожній предметній області. Зокрема, річні варіації геофізичних процесів [158], характеризуються одночасно як низькочастотною, так і високочастотною модуляціями [69, 163], причому остання є широкосмуговою і її потужність більша за низькочастотну. Кореляційні функції стохастичної складової усереднених за місяць даних швидко спадають, отже корелограми не містять річних коливань [163]. На противагу цьому, в добовій ритміці багатьох процесів спостерігаються низькочастотні вузькосмугові модуляції. У [4] зазначається, що вібраційні властивості як низькочастотної, так і високочастотної модуляції можуть мати місце в різних випадках. Оскільки високочастотна модуляція зумовлена появою локальних дефектів в елементах обертових машин, то основну увагу в

літературі привертає саме її аналіз. Цей аналіз традиційно проводився з використанням так званих методик “обвідної” чи “резонансу” (“демодуляційного резонансного аналізу”) [164, 166, 167, 172] аж до появи та розвитку циклостаціонарного підходу [87, 161, 163, 166, 167, 170, 173–176]. Аналіз обвідної зазвичай передбачає високочастотну смугову фільтрацію навколо деякої “резонансної” частоти з наступною побудовою аналітичного сигналу, виділенням обвідної, та її Фур’є-перетворенням для отримання оцінки спектру. Обвідна тут визначається подібно до випадку низькочастотної модуляції як модуль аналітичного сигналу. Протягом багатьох років спектр обвідної вважався одним з найефективніших інструментів для діагностики обертових машин [164, 167]. На даний час переважно використовується квадрат спектру обвідної [166, 170, 177, 178]. Імовірність виявлення дефекту при аналізі обвідної (квадратичної обвідної) значною мірою залежить від вибору резонансної частоти та смуги (так званої інформативної спектральної смуги [179]). Для розв’язання цієї проблеми було запропоновано використовувати спектральний ексцес [180, 181], також запропоновано декілька його варіантів [182, 183]. Ідея побудови подібних критеріїв походить від нелінійності сигналу, зокрема ексцес характеризує імпульсивність сигналу від дефекту механізму. На даний час існує чимало робіт [177, 179, 184–188], присвячених вибору оптимальної смуги частот, у якій можна легко виявити характерну частоту несправностей. Перш за все, серед інших слід виділити два методи. Це метод деконволюції мінімальної ентропії [189] з наступним виділенням спектрального ексцесу та циклостаціонарний аналіз сигналу [87, 158, 166, 173–176].

Аналіз обвідної був введений як чисто емпіричний метод [166, 172, 178]. Його коректно застосовувати до стохастичної складової сигналу, а отже детермінована складова повинна бути попередньо виключена. Дана властивість пояснюється, тим фактом, що для побудови обвідної використовується перетворення Гільберта, і його властивості інваріантності та лінійності, а дані властивості для сигналів із постійною компонентною не виконуються [24, 144].

Для цього було розроблено цілий ряд процедур: синхронне (когерентне) усереднення за часом [22, 23, 156, 171], відоме в обробці сигналів також як метод (фільтр) Б'юй-Балло [62, 190], метод лінійного передбачення [191], метод напіваадаптивного усування шумів [192], спектральний метод [193] та інші.

Найкращі результати були отримані методом синхронного усереднення, однак він вимагає окремих додаткових операцій, включаючи індивідуальну передискретизацію сигналу для кожного конкретного випадку. Усунення цього недоліку можливе шляхом використання компонентного методу чи методу найменших квадратів для виділення детермінованої складової сигналу. Вони не вимагають інтерполяції чи передискретизації та можуть застосовуватися при довільній величині кроку дискретизації задовільняючи вимоги антиалайзінгу. Ці методи були запропоновані для аналізу вібраційного сигналу в [173].

### **3.1 Аналіз кореляційної та спектральної структур періодично нестационарного випадкового процесу**

Представлення явища у формі ПНВП підходить для опису та аналізу коливань різної природи, які мають властивості повторюваності та стохастичності [22, 23, 155, 157, 161]. Модель ПНВП гармонійно поєднує і розвиває як детерміністичний, так і стохастичний підхід. Детерміністичний підхід ґрунтується на представленні явища у формі періодичних функцій, а стохастичний на представленні явища як стаціонарних випадкових процесів. Згідно з виразом (3.2), отримуємо періодичні функції якщо  $\xi_k(t)$  вироджуються у комплексні числа  $c_k$ , і стаціонарний випадковий процес якщо  $\xi_k(t) = \eta_k(t)$  і вони не корельовані. Якщо  $\xi_k(t)$  є сумами чи добутками цих величин, то отримуємо адитивну чи мультиплікативну модель відповідно. З (3.2), впливає що у загальному випадку ПНВП – це сума амплітудно- і фазово- модульованих гармонік частоти яких є кратними до частоти основного коливання  $\omega_0$ .

Ймовірнісні характеристики модуляційних процесів  $\xi_k(t)$  визначають кореляційну і спектральну структуру випадкового процесу  $\xi(t)$ . Значення величин математичного сподівання  $m_k^{(\xi)} = \mathbb{E}\{\xi_k(t)\}$  є коефіцієнтами Фур'є функції математичного сподівання процесу (3.2):

$$m(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{(\xi)} e^{ik\omega_0 t}.$$

Взаємкореляційні функції процесів  $\xi_k(t)$ , а саме  $R_{kl}(u) = \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_l(t+u)\right\}$ ,

$\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$  ("̄" – операція комплексного спряження), порядки яких зсунуті на  $r$  визначають  $r-i$  коефіцієнти Фур'є кореляційної функції  $b_\xi(t, u) = \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u)\right\}$ ,  $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ :

$$B_r^{(\xi)}(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u}. \quad (3.3)$$

Отже,

$$b_\xi(t, u) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} B_r^{(\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t}. \quad (3.4)$$

З (3.3) і (3.4) видно, що випадковий процес (3.2) є періодично нестационарним другого порядку лише у тих випадках коли одна з взаємкореляційних функцій модулюючих процесів  $R_{l-r, l}^{(\xi)}(u)$  не є рівною нулю.

Автокореляційні функції цих процесів  $R_{kk}(u) = \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_k(t+u)\right\}$  визначають нульовий коефіцієнт Фур'є  $B_0^{(\xi)}(u)$  кореляційної функції ПНВП  $b_\xi(t, u)$ .

Миттєва спектральна густина потужності ПНВП

$$f_\xi(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [b_\xi(t, u) e^{-i\omega u}] du$$

може бути представлена як ряд Фур'є

$$f_\xi(\omega, t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} f_r^{(\xi)}(\omega) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$f_r^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_r^{(\xi)}(u) e^{-iu\omega}] du = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{l-r,r}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0),$$

а

$$f_{kl}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_{kl}^{(\xi)}(u) e^{-iu\omega}] du.$$

Величинами  $B_k^{(\xi)}(u)$  та  $f_k^{(\xi)}(\omega)$  позначені кореляційні й спектральні компоненти [22, 23, 157, 161] (також відомі як циклічні кореляції й циклічні спектральні густини [43, 69, 154, 156]). Оскільки  $b_\xi(t, -u) = b_\xi(t - u, u)$ , то тоді

$$B_k^{(\xi)}(-u) = B_k^{(\xi)}(u) e^{-ik\omega_0 u}. \quad (3.5)$$

Звідси

$$f_k^{(\xi)}(-\omega) = f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0).$$

З рівності  $B_{-k}^{(\xi)}(u) = \bar{B}_k^{(\xi)}(u)$  отримаємо:

$$f_{-k}^{(\xi)}(\omega) = \bar{f}_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0)$$

Якщо у представленні (3.2) покласти  $\xi_k(t) \equiv 0 \quad \forall k \neq -1, 1$  то тоді

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_{-1}(t) e^{-i\omega_0 t} + \xi_1(t) e^{i\omega_0 t} = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t \\ &= \mu(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

де  $\xi_c(t) = \xi_1(t) + \xi_{-1}(t)$ ,  $\xi_s(t) = i[\xi_1(t) - \xi_{-1}(t)]$ ,  $\mu(t) = \sqrt{\xi_c^2(t) + \xi_s^2(t)}$  і  $\varphi(t) = \text{arctg} \frac{\xi_s(t)}{\xi_c(t)}$ . Це є так звана квадратурна модель (модель Райса). Функція

математичного сподівання від (3.6) буде мати наступний вигляд

$$m(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)\} = m_c \cos \omega_0 t + m_s \sin \omega_0 t,$$

де  $m_c = \mathbb{E}\{\xi_c(t)\}$ ,  $m_s = \mathbb{E}\{\xi_s(t)\}$ . Тоді кореляційна функція від (3.6) буде:

$$b_\xi(t, u) = B_0^{(\xi)}(u) + C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t = \sum_{k=0, \pm 2} B_k^{(\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) + R_s(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.7)$$

$$C_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.8)$$

$$S_2^{(\xi)}(u) = R_{cs}^+(u) \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [R_s(u) - R_c(u)] \sin \omega_0 u, \quad (3.9)$$

$$B_2^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} [C_2^{(\xi)}(u) - iS_2^{(\xi)}(u)] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] - i\tilde{R}_{cs}(u) \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (3.10)$$

Тут  $R_c(u)$  і  $R_s(u)$  є автокореляційні функції квадратурних складових  $\xi_c(t)$  і  $\xi_s(t)$  відповідно, а саме

$$R_c(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_c(t+u) \right\}, \quad \overset{\circ}{\xi}_c(t) = \xi_c(t) - m_c,$$

$$R_s(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_s(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u) \right\}, \quad \overset{\circ}{\xi}_s(t) = \xi_s(t) - m_s.$$

Величини  $\tilde{R}_{cs}(u)$  і  $\tilde{\tilde{R}}_{cs}(u)$  є парною і непарною частиною взаємокореляційної функції  $R_{cs}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u) \right\}$ .

Випадковий сигнал (3.6) є періодично нестационарним другого порядку якщо  $B_2^{(\xi)}(u) \neq 0$ . У цьому випадку, друга спектральна компонента:

$$f_2(\omega) = \frac{1}{4} [f_c(\omega - \omega_0) - f_s(\omega - \omega_0)] - \frac{i}{2} \tilde{f}_{cs}(\omega - \omega_0), \quad (3.11)$$

де

$$f_{c,s}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R_{c,s}(u) \cos \omega u] du, \quad \tilde{f}_{cs}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{R}_{cs}(u) \cos \omega u] du.$$

Нульовий спектральний компонент, який визначає усереднену в часі потужність сигналу (3.6), відповідно рівний:

$$f_0(\omega) = \frac{1}{4} [f_c(\omega - \omega_0) + f_s(\omega - \omega_0) + f_c(\omega + \omega_0) - f_s(\omega + \omega_0)] - \frac{1}{2} [\tilde{\tilde{f}}_{cs}(\omega + \omega_0) - \tilde{\tilde{f}}_{cs}(\omega - \omega_0)], \quad (3.12)$$

де

$$\tilde{f}_{cs}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega u \right] du.$$

Рівняння (3.7)–(3.10) описують зв'язок кореляційних компонент ПНВС (3.3) з авто- та взаємкореляційними функціями квадратур, тоді як рівняння (3.11) та (3.12) описують залежності спектральних компонентів ПНВС з авто- та взаєм-спектральними густинами квадратур. У загальному випадку неможливо виразити кореляційні функції та спектральні густини потужності квадратур через кореляційні та спектральні компоненти випадкового сигналу, оскільки ця задача не вирішується однозначно, але для гауссових локально-стаціонарних і гауссових періодично нестаціонарних випадкових процесів ця задача вирішується однозначно і далі продемонстровано як.

### 3.2. Аналіз кореляційної та спектральної структур перетворення Гільберта періодично нестаціонарного випадкового процесу

Поширений спосіб розв'язання цієї проблеми полягає у введенні деякого допоміжного процесу  $\eta(t)$ , визначеного як перетворення Гільберта сигналу (3.6) [4, 171]

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (3.13)$$

і означенні аналітичного сигналу

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t). \quad (3.14)$$

Якщо ширина смуги частот квадратур  $\xi_c(t)$ ,  $\xi_s(t)$  задовольняє нерівність  $\Delta\omega < \omega_0$ , тоді

$$\eta(t) = \xi_c(t) \sin \omega_0 t - \xi_s(t) \cos \omega_0 t, \quad (3.15)$$

і враховуючи рівність (3.6) отримаємо вирази для косинусної й синусної складової сигналу (3.6)

$$\xi_c(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.16)$$

$$\xi_s(t) = \xi(t) \sin \omega_0 t - \eta(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.17)$$



Ці вирази можуть бути використані для виведення співвідношень для кореляційних функцій та спектральних густин потужності квадратур та їх залежностей від кореляційних та спектральних компонент власне сигналу (3.6).

Якщо випадковий процес (3.6) стаціонарний, тоді відповідно до [171]

$$R_c(u) = R_s(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) \cos \omega u] d\omega, \quad (3.18)$$

де  $f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  є спектральна густина потужності сигналу в області додатних частот, зсунута на величину  $-\omega_0$ . З (3.18) слідує, що

$f_c(\omega) = f_s(\omega) = 2f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$ . Ця величина є непарною функцією і не дорівнює нулю, якщо  $f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  містить непарну частотну складову.

Взаємкореляційна функція квадратур є синус трансформантою додатної складової спектральної густини потужності сигналу, зсунутої на величину  $-\omega_0$ :

$$R_{sc}(u) = 2 \int_0^{\infty} [f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) \sin \omega u] d\omega. \quad (3.19)$$

Ця величина є непарною функцією і не дорівнює нулю, якщо  $f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  містить непарну частотну складову. Можемо представити вираз  $f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  у вигляді суми парної  $\tilde{f}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  та непарної частин  $\tilde{\tilde{f}}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$  і тоді:

$f_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) = \tilde{f}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) + \tilde{\tilde{f}}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$ , де  $\tilde{f}_{\xi}(-\omega^+ + \omega_0) = \tilde{f}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$ , а  $\tilde{\tilde{f}}_{\xi}(-\omega^+ + \omega_0) = -\tilde{\tilde{f}}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0)$ .

Тоді отримаємо:

$$R_c(u) = R_s(u) = 4 \int_0^{\infty} [\tilde{f}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) \cos \omega u] d\omega,$$

$$R_{sc}(u) = 4 \int_0^{\infty} [\tilde{\tilde{f}}_{\xi}(\omega^+ + \omega_0) \sin \omega u] d\omega.$$

Як можна побачити, частотно обмежені квадратури стаціонарного випадкового сигналу (3.6) є некорельовані у кожен момент часу.

Покажемо, що кореляційні та спектральні властивості перетворення Гільберта змінюються, коли випадковий процес (3.6) демонструє періодичну нестационарність. Для цього випадку будуть оцінені та проаналізовані нові властивості квадратур (3.16) та (3.17). Припустимо, що випадковий процес  $\xi(t)$  має нульову постійну компоненту, тоді його перетворення Гільберта  $\eta(t) = H\{\xi(t)\}$  є інваріантним і лінійним (Додаток В), і для його функції математичного сподівання  $m_\eta(t) = \mathbb{E}\{\eta(t)\}$  маємо

$$m_\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (3.20)$$

Підставляючи у формулу (3.20) наступний ряд

$$m_\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [m_k^c \cos(k\omega_0 t) + m_k^s \sin(k\omega_0 t)], \quad (3.21)$$

де  $m_k^c = m_k + \bar{m}_k$ ,  $m_k^s = i(m_k - \bar{m}_k)$ , отримуємо наступне:

$$\begin{aligned} m_\eta(t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} [m_k^c H\{\cos(k\omega_0 t)\} + m_k^s H\{\sin(k\omega_0 t)\}] = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} [m_k^c \sin(k\omega_0 t) - m_k^s \cos(k\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (3.22)$$

тобто гармоніки функції математичного сподівання (3.20) зсунуті по фазі на  $-\pi/2$  у порівнянні з гармоніками математичного сподівання (3.21).

Виходячи з виразу (3.13) і формули оберненого перетворення Гільберта

$$\xi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

Знаходимо залежності для автокореляційних  $b_\xi(t, u)$ ,  $b_\eta(t, u) = \mathbb{E}\{\dot{\eta}(t)\dot{\eta}(t+u)\}$ ,

$\dot{\eta}(t) = \eta(t) - m_\eta(t)$ , і взаємокореляційних функцій  $b_{\xi\eta}(t, u) = \mathbb{E}\{\dot{\xi}(t)\dot{\eta}(t+u)\}$

[102, 174]:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{b_\eta(t+u, \tau)}{\tau + u} \right] d\tau, \quad (3.23)$$

$$b_\xi(t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{b_{\xi\eta}(t+u, \tau)}{\tau + u} \right] d\tau, \quad (3.24)$$

$$b_{\eta^\xi}(t, u) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{b_\xi(t+u, \tau)}{\tau+u} \right] d\tau, \quad (3.25)$$

$$b_\eta(t, u) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{b_{\eta^\xi}(t+u, \tau)}{\tau+u} \right] d\tau. \quad (3.26)$$

Тоді справедливою буде наступна теорема.

**Теорема 3.1.** ПНВС  $\xi(t)$  кореляційна функція якого представляється рядом Фур'є (3.4) і його Гільберт трансформанта  $\eta(t)$  (3.13) є періодично взаємокорельованими випадковими процесами, і їх авто- та взаємокореляційні компоненти пов'язані між собою виразами:

$$B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ h(u-\tau) B_k^{(\eta^\xi)}(\tau) \right] d\tau, \quad (3.27)$$

$$B_k^{(\eta^\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left[ h(u-\tau) B_k^{(\eta)}(\tau) \right] d\tau, \quad (3.28)$$

$$B_k^{(\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left[ h(u-\tau) B_k^{(\xi\eta)}(\tau) \right] d\tau, \quad (3.29)$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ h(u-\tau) B_k^{(\xi)}(\tau) \right] d\tau, \quad (3.30)$$

де  $h(\tau) = (\pi\tau)^{-1}$  є імпульсним відгуком перетворення Гільберта, а отримані вирази показують, що кореляційні компоненти  $B_k^{(\eta)}(u)$  з  $B_k^{(\eta^\xi)}(u)$ , та  $B_k^{(\xi\eta)}(u)$  з  $B_k^{(\xi)}(u)$  є Гільбертовою парою.

**Доведення.** Підставляючи (3.25) в ряд (3.4) отримуємо:

$$b_{\eta^\xi}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega_0 t} \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{B_k^{(\xi)}(\tau)}{\tau+u} \right] d\tau \right] e^{ik\omega_0 u}.$$

З цієї рівності випливає, що взаємокореляційна функція періодично змінюється в часі, і її коефіцієнти Фур'є визначаються наступною формулою:

$$B_k^{(\eta^\xi)}(u) = -\frac{e^{ik\omega_0 u}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{B_k^{(\xi)}(\tau)}{\tau+u} \right] d\tau,$$

а отже

$$B_k^{(\eta\xi)}(-u) = e^{-ik\omega_0 u} \int_{-\infty}^{\infty} [h(u-\tau)B_k^{(\xi)}(\tau)] d\tau.$$

Оскільки  $b_{\xi\eta}(t, -u) = b_{\eta\xi}(t-u, u)$ , тоді  $B_k^{(\xi\eta)}(-u) = B_k^{(\eta\xi)}(u)e^{-ik\omega_0 u}$ . Взявши до уваги останню рівність отримаємо формулу (3.28).

Тепер підставимо взаємкореляційну функцію

$$b_{\xi\eta}(t+u, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}(\tau) e^{ik\omega_0(t+u)}$$

у (3.24) та отримаємо

$$B_k^{(\xi)}(u) = \frac{e^{ik\omega_0 u}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{B_k^{(\xi\eta)}(\tau)}{\tau+u} \right] d\tau,$$

або

$$B_k^{(\xi)}(-u) e^{ik\omega_0 u} = - \int_{-\infty}^{\infty} [h(u-\tau)B_k^{(\xi\eta)}(\tau)] d\tau.$$

Взявши до уваги рівність  $B_k^{(\xi)}(-u) e^{ik\omega_0 u} = B_k^{(\xi)}(u)$ , отримуємо формулу (3.29).

З виразу (3.26) випливає, що

$$B_k^{(\eta)}(-u) = - \frac{e^{-ik\omega_0 u}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{B_k^{(\eta\xi)}(\tau)}{\tau-u} \right] d\tau.$$

Використовуючи рівність  $B_k^{(\eta)}(-u) e^{ik\omega_0 u} = B_k^{(\eta)}(u)$  отримуємо (3.27).

Використавши залежність (3.23) і рівність  $B_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(-u) e^{ik\omega_0 u}$ , а також представлення кореляційної функції у формі:

$$b_{\eta}(t+u, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [B_k^{(\eta)}(\tau) e^{ik\omega_0(t+u)}]$$

отримуємо тотожність (3.30). Теорему доведено. ■

Для спрощення наступного аналізу переведемо рівняння (3.27)–(3.30) у частотну область. Перетворення Фур'є від компонент взаємкореляційної функції:

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u}] du,$$

називають компонентами взаємспектральної густини потужності [102], і для них будуть виконуватися наступні рівності:

$$f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) = f_k^{(\eta\xi)}(\omega + k\omega_0) = \bar{f}_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega). \quad (3.31)$$

Взявши до уваги, що передавальна функція перетворення Гільберта  $H(\omega) = -i$  для  $\omega > 0$  і  $H(\omega) = i$  для  $\omega < 0$ , і представлення

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

з (3.27)–(3.30) отримаємо наступні вирази:

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = H(\omega) f_k^{(\eta\xi)}(\omega), \quad (3.32)$$

$$f_k^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_k^{(\eta)}(\omega), \quad (3.33)$$

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_k^{(\xi\eta)}(\omega), \quad (3.34)$$

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_k^{(\xi)}(\omega). \quad (3.35)$$

Взявши до уваги вище викладене, сформулюємо наступну теорему.

**Теорема 3.2.** *Нульові кореляційні компоненти ПНВС і його Гільберт трансформанти є рівними, а їх нульові взаємкореляційні компоненти відрізняються лише знаком; вони є непарними функціями та визначаються нульовою спектральною складовою  $f_0^{(\xi)}(\omega)$  сигналу  $\xi(t)$ :*

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = 2 \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) \sin(\omega u)] d\omega. \quad (3.36)$$

**Доведення.** З рівняння (3.31) випливає, що  $f_0^{(\eta\xi)}(\omega) = \bar{f}_0^{(\xi\eta)}(\omega)$ . А з рівняння (3.33) маємо  $f_0^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega)$ . Підстановка останньої формули у рівність (3.32) дає нам залежність  $f_0^{(\eta)}(\omega) = -H(\omega)H(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega)$  звідки випливає  $B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u)$ .

З (3.35) для нульової взаємкореляційної компоненти функції  $B_0^{(\xi\eta)}(u)$  отримуємо наступне:

$$\begin{aligned} B_0^{(\xi\eta)}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(\omega) f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega = 2 \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) \sin(\omega u)] d\omega. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Оскільки  $f_0^{(\xi)}(\omega) = f_0^{(\eta)}(\omega)$ , а вирази (3.33) і (3.35) відрізняються лише знаком, то легко побачити наступне  $B_0^{(\xi\eta)}(u) = -B_0^{(\eta\xi)}(u)$ . Отже з (3.37) слідує, що нульові компоненти взаємкореляційної функції є непарними функціями. Теорему доведено. ■

Також справедливою є наступна теорема.

**Теорема 3.3.** *Якщо  $k$ -та спектральна компонента ПНВС, належить інтервалу  $k^{\text{th}}$   $k \in \mathbb{N}$ , тобто:*

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \begin{cases} f_k^{(\xi)}(\omega), & \omega \in [0, k\omega_0], \\ 0, & \omega \notin [0, k\omega_0], \end{cases} \quad (3.38)$$

тоді їх  $k$ -ті кореляційні компоненти сигналу  $\xi(t)$  і його Гільберт трансформанти  $\eta(t)$  будуть відрізнятися лише знаком  $B_k^{(\eta)}(u) = -B_k^{(\xi)}(u)$ . А їх  $k$ -ті взаємкореляційні компоненти є симетричні, і пов'язані з  $k$ -тими кореляційними компонентами сигналу співвідношенням:

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(u) = -iB_k^{(\xi)}(u). \quad (3.39)$$

**Доведення.** Взявши до уваги рівності (3.32)–(3.35) та властивості спектральних компонент, вирази для кореляційних компонент:

$$B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

$$B_k^{(\eta\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\eta\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega.$$

А також то, що  $H(-\omega) = -H(\omega)$ ,  $f_k^{(\eta\xi)}(-\omega) = f_k^{(\eta\xi)}(\omega + k\omega_0)$  і (3.32), отримуємо

$$\begin{aligned} B_k^{(\eta)}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega) f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega) f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) e^{-i\omega u}] d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega) f_k^{(\xi\eta)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u}] d\omega. \end{aligned}$$

Введемо нову змінну  $\nu = \omega + k\omega_0$ . Використовуючи рівність (3.34), отримаємо

$$B_k^{(\eta)}(u) = -e^{ik\omega_0 u} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) H(\omega - k\omega_0) H(\omega) e^{-i\omega u} \right] d\omega.$$

Оскільки  $B_k^{(\eta)}(u) = B_k^{(\eta)}(-u)e^{-ik\omega_0 u}$ , тоді

$$B_k^{(\eta)}(u) = -e^{ik\omega_0 u} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) H(\omega - k\omega_0) H(\omega) e^{-i\omega u} \right] d\omega. \quad (3.40)$$

Використаємо, що

$$-H(\omega)H(\omega - k\omega_0) = \begin{cases} 1, & \omega \in (-\infty, 0], \\ -1, & \omega \in (0, k\omega_0], \\ 1, & \omega \in (k\omega_0, \infty), \end{cases}$$

і перепишемо інтеграл (3.40) у вигляді

$$\begin{aligned} B_k^{(\eta)}(u) &= \int_{-\infty}^0 \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega - \int_0^{2\omega_0} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega + \int_{2\omega_0}^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega - 2 \int_0^{2\omega_0} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Тепер виведемо формулу для компонентів взаємкореляційної функції.

З (3.40) випливає, що  $f_k^{(\eta)}(\omega) = -H(\omega - k\omega_0)H(\omega)f_k^{(\xi)}(\omega)$ . Підставляємо цю рівність у (3.33). Тоді

$$f_2^{(\eta\xi)}(\omega) = H(\omega)H(\omega)H(\omega - k\omega_0)f_k^{(\xi)}(\omega) = -H(\omega - k\omega_0)f_k^{(\xi)}(\omega).$$

і отже

$$B_2^{(\eta\xi)}(u) = -i \left[ \int_0^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u} \right] d\omega + \int_0^{k\omega_0} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega - \int_{k\omega_0}^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega \right]. \quad (3.42)$$

Тут використана рівність:

$$\int_{-\infty}^0 \left[ f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega = \int_0^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u} \right] d\omega.$$

Виходячи зі співвідношення (3.35), отримаємо

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = i \int_0^{\infty} \left[ f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u} - f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega. \quad (3.43)$$

Якщо виконується умова (3.38), тоді

$$\int_0^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\alpha\omega}] d\omega = 0, \quad \int_{k\omega_0}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\alpha\omega}] d\omega = 0.$$

і отримаємо наступне

$$B_k^{(\eta)}(u) = - \int_0^{k\omega_0} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\alpha\omega}] d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\alpha\omega}] d\omega,$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(u) = -i \int_0^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\alpha\omega}] d\omega = -i \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\alpha\omega}] d\omega.$$

Отже рівності (3.39) і  $B_k^{(\eta)}(u) = -B_k^{(\xi)}(u)$  є вірними. Теорему доведено. ■

### 3.3. Аналіз кореляційної та спектральної структур аналітичного сигналу періодично нестационарного випадкового процесу

Найдемо вираз для функції математичного сподівання аналітичного сигналу  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ , для цього використаємо ряди (3.21) та (3.22) і отримаємо

$$m_{\zeta}(t) = \mathbb{E}\{\zeta(t)\} = m_{\xi}(t) + im_{\eta}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}.$$

Отже, функція математичного сподівання аналітичного сигналу містить лише додатні частоти. Кореляційна функція аналітичного сигналу

$b_{\zeta}(t, u) = \mathbb{E}\left\{\overset{\circ}{\zeta}(t) \overset{\circ}{\zeta}(t+u)\right\}$ ,  $\overset{\circ}{\zeta}(t) = \zeta(t) - m_{\zeta}(t)$  визначається виразом:

$$b_{\zeta}(t, u) = b_{\xi}(t, u) + b_{\eta}(t, u) + i[b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\eta\xi}(t, u)]. \quad (3.44)$$

Цей вираз можна представити як ряд Фур'є

$$b_{\zeta}(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k^{(\zeta)} e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_k^{(\zeta)}(u) = B_k^{(\xi)}(u) + B_k^{(\eta)}(u) + i[B_k^{(\xi\eta)}(u) - B_k^{(\eta\xi)}(u)]. \quad (3.45)$$

Справедливою буде наступна теорема.



**Теорема 3.4.** Аналітичний сигнал  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ , де  $\xi(t) \in$  ПНВС, спектральні компоненти якого не задовольняють умову (3.38), є періодично нестационарним і його кореляційні компоненти  $B_k^{(\zeta)}(u)$ ,  $k \neq 0$  визначаються виразом

$$B_k^{(\zeta)}(u) = 2 \left[ \int_{R \setminus [0, k\omega_0]}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega - \int_{k\omega_0}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) [e^{-i(\omega - k\omega_0)u} - e^{i\omega u}]] d\omega \right], \quad (3.46)$$

де  $R \setminus [0, k\omega_0]$  є різниця між множинами  $R$  і  $[0, k\omega_0]$ . А нульова кореляційна компонента є комплекснозначною, її дійсна і уявна частина є парою Гільберта і дорівнює

$$B_0^{(\zeta)}(u) = 4 \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

і задовольняє нерівність  $|B_0^{(\zeta)}(u)| \leq 2B_0^{(\xi)}(0)$ .

**Доведення.** Оскільки  $B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u)$  і  $B_0^{(\eta\xi)}(u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$  (Теорема 3.2), тоді  $B_0^{(\zeta)}(u) = 2[B_0^{(\xi)}(u) + iB_0^{(\xi\eta)}(u)]$ . З (3.29) і (3.30) слідує, що  $B_0^{(\xi\eta)}(u)$  і  $B_0^{(\xi)}(u)$  є парою Гільберта:  $B_0^{(\xi\eta)}(u) = \mathcal{H}\{B_0^{(\xi)}(u)\}$ . З представлення  $B_0^{(\xi)}(u)$  у формі:

$$B_0^{(\xi)}(u) = 2 \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) \cos \omega u] d\omega \quad (3.47)$$

і рівності (3.36), отримуємо

$$B_0^{(\zeta)}(u) = 4 \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega. \quad (3.48)$$

Отже

$$|B_0^{(\zeta)}(u)| \leq 4 \int_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega) d\omega = 2B_0^{(\xi)}(0).$$

З рівняння (3.48) випливає, що для нульової величини зсуву ( $u=0$ ), маємо рівність  $B_0^{(\zeta)}(0) = 2B_0^{(\xi)}(0)$ , а це означає, що усереднена в часі дисперсія аналітичного сигналу у двічі більша, ніж усереднена в часі дисперсія ПНВС на основі якого вона побудована.

З виразу

$$B_k^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega$$

і рівняння (3.41), отримуємо суму першого і другого членів (3.45):

$$\begin{aligned} B_k^{(\xi)}(u) + B_k^{(\eta)}(u) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega - 2 \int_0^{k\omega_0} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega = \\ &= 2 \int_{R \setminus [0, k\omega_0]} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Вираз (3.42) можна переписати у формі

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = i \left[ \int_{-\infty}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u}] d\omega - \int_0^{k\omega_0} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega - \int_{k\omega_0}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega \right].$$

Взявши до уваги (3.43), отримуємо

$$\begin{aligned} B_k^{(\xi\eta)}(u) - B_k^{(\eta\xi)}(u) &= 2i \int_0^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u}] d\omega - 2i \int_{k\omega_0}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega = \\ &= 2i \int_{k\omega_0}^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega) [e^{-i(\omega - k\omega_0)u} - e^{i\omega u}]] d\omega. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Просумувавши (3.49) та (3.50) приходимо до (3.46). Теорему доведено. ■

Квадрат модуля аналітичного сигналу  $|\zeta(t)|^2 = \xi^2(t) + \eta^2(t)$  часто називають квадратом обвідної [165, 167]. Математичне сподівання цієї величини дорівнює дисперсії аналітичного сигналу

$$\mathbb{E} \left\{ |\zeta(t)|^2 \right\} = b_{\zeta}(t, 0) = B_0^{(\zeta)}(0) + \sum_{k \in R} B_k^{(\zeta)}(0) e^{ik\omega_0 t}$$

яка у загальному випадку змінна в часі. З рівності

$$B_k^{(\zeta)}(0) = 2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) d\omega - \int_0^{k\omega_0} f_k^{(\xi)}(\omega) d\omega \right],$$

впливає, що потужність цих часових варіацій залежить від величин тих спектральних компонент ПНВС  $f_k^{(\xi)}(\omega)$ , котрі не належать до інтервалу  $[0, k\omega_0]$ .

**Наслідок 3.1.** Якщо спектральні компоненти ПНВС обмежені інтервалом  $[0, k\omega_0]$  (умова (3.38)), то кореляційна функція аналітичного сигналу  $\zeta(t)$  не залежить від часу і визначається виразом

$$R_{\zeta}(u) = B_0^{(\zeta)}(u) = 4 \int_0^{\infty} [f_0^{(\zeta)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega.$$

Далі конкретизуємо деякі з отриманих вище результатів, використовуючи гармонічне представлення ПНВС (3.2) і його окремі випадки.

### 3.4. Вузькосмуговий однокомпонентний періодично нестационарний випадковий сигнал. Модель Райса

Розглянемо ряд (3.2), який є обмежений і кількість його гармонік (членів ряду) дорівнює  $N$ . Поклавши  $\xi_0(t) \equiv 0$ , отримуємо наступне представлення:

$$\xi(t) = \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=1}^N [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t]. \quad (3.51)$$

Припускаємо також, що спектральна густина потужності  $f_r^{(\xi_k)}(\omega)$  модулюючих процесів  $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_{\xi}$  зосереджена в інтервалі  $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ . Назвемо це вузькосмуговим ПНВС. Для вузькосмугового ПНВС виконуються умови теореми Бедрояна [144–147], і перетворення Гільберта від такого сигналу буде наступним:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\{\xi(t)\} = \eta(t) &= \sum_{k=1}^N [\xi_k^c(t) \sin k\omega_0 t - \xi_k^s(t) \cos k\omega_0 t] = \\ &= i \sum_{k=1}^N [\bar{\xi}_k(t) e^{-ik\omega_0 t} - \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Спочатку розглянемо один з найпростіших випадків ПНВС – однокомпонентний сигнал, який ще називають моделлю сигналу Райса або квадратурною моделлю. У цьому випадку тільки  $\xi_{-1}(t) = \bar{\xi}_1(t)$  не дорівнюють нулю, і отже приходимо до виразу (3.6), де  $\xi_1(t) = \frac{1}{2} [\xi_c(t) - i\xi_s(t)]$ . Тоді аналітичний сигнал можна представити у формі:

$$\zeta(t) = \tilde{\mu}(t) e^{i\omega_0 t} \quad (3.53)$$

де  $\tilde{\mu}(t) = \xi_c(t) - i\xi_s(t)$  називають комплексною обвідною.

Використовуючи вирази (3.13)–(3.15) та (3.53), проаналізуємо кореляційні та спектральні властивості перетворення Гільберта сигналу (3.6) та його квадратур.

**Наслідок 3.2.** Другий кореляційний компонент вузькосмугового ПНВС (3.6) та його Гільберт трансформанти (3.15) відрізняються лише знаком  $B_2^{(\eta)}(u) = -B_2^{(\xi)}(u)$ . Їх другі взаємокореляційні компоненти є симетричні  $B_2^{(\xi\eta)}(u) = B_2^{(\eta\xi)}(u)$ , і зв'язані з другим кореляційним компонентом сигналу співвідношенням:

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = -iB_2^{(\xi)}(u).$$

**Наслідок 3.3.** Кореляційна функція аналітичного сигналу (3.14) залежить лише від величини зсуву  $u$ , визначається виразом

$$R_\zeta(u) = 4 \int_0^\infty [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

і задовольняє нерівність:  $|R_\zeta(u)| \leq 2B_0^{(\xi)}(u)$ .

Використовуючи рівняння (3.6) і (3.15) підтвердимо ці результати прямими розрахунками. Для кореляційної функції Гільберт трансформанти (3.15) сигналу (3.6) отримаємо

$$b_\eta(t, u) = B_0^{(\eta)}(u) + \sum_{k=\pm 2} B_k^{(\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) + R_s(u)] \cos \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.54)$$

$$B_2^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} [R_s(u) - R_c(u)] + i\tilde{R}_{cs}(u) \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (3.55)$$

З порівняння (3.7)–(3.10) та (3.54), (3.55) можна зробити висновок, що  $B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u)$  і  $B_2^{(\eta)}(u) = -B_2^{(\xi)}(u)$ .

Взаємокореляційна функція сигналу (3.6) і його Гільберт трансформанти (3.15) визначається співвідношенням:

$$b_{\xi\eta}(t, u) = B_0^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{k=\pm 2} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) + R_s(u)] \sin \omega_0 u - \tilde{R}_{cs}(u) \cos \omega_0 u, \quad (3.56)$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] - i\tilde{R}_{cs}(u) \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (3.57)$$

Взаємкореляційна функція Гільберт трансформанти і сигналу дорівнює:

$$b_{\eta\xi}(t, u) = B_0^{(\eta\xi)}(u) + \sum_{k=\pm 2} B_k^{(\eta\xi)}(u) e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\eta\xi)}(u) = -\frac{1}{2} [R_c(u) + R_s(u)] \sin \omega_0 u + \tilde{R}_{cs}(u) \cos \omega_0 u, \quad (3.58)$$

$$B_2^{(\eta\xi)}(u) = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] - i\tilde{R}_{cs}(u) \right] e^{i\omega_0 u}. \quad (3.59)$$

З (3.7)–(3.10) та (3.58)–(3.59) випливає, що задовольняються рівності  $B_0^{(\eta\xi)}(u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$ ,  $B_0^{(\xi\eta)}(u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$ ,  $B_2^{(\xi\eta)}(u) = B_2^{(\eta\xi)}(u) = -iB_2^{(\xi)}(u)$ .

Тепер перевіримо істинність співвідношення (3.37). Можна переписати його у вигляді:

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = -i \int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega + i \int_{-\infty}^0 [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega.$$

Звідси слідує, що

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \begin{cases} -i f_0^{(\xi)}(\omega), & \omega > 0; \\ i f_0^{(\xi)}(\omega), & \omega < 0. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (3.56), отримуємо

$$\begin{aligned} f_0^{(\xi\eta)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0^{(\xi)}(u) e^{-i\omega u} du = \\ &= i \left[ \frac{1}{4} [f_c(\omega - \omega_0) + f_s(\omega - \omega_0) - f_c(\omega + \omega_0) - f_s(\omega + \omega_0)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\tilde{f}_{cs}(\omega + \omega_0) - \tilde{f}_{cs}(\omega - \omega_0)] \right]. \end{aligned}$$

Для вузькосмугового ПНВС:

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \begin{cases} i \left[ \frac{1}{4} [f_c(\omega - \omega_0) + f_s(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} \tilde{f}_{cs}(\omega - \omega_0) \right] = -i f_0^{(\xi)}(\omega), & \omega > 0; \\ i \left[ \frac{1}{4} [f_c(\omega + \omega_0) + f_s(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} \tilde{f}_{cs}(\omega + \omega_0) \right] = i f_0^{(\xi)}(\omega), & \omega < 0. \end{cases}$$

Ці співвідношення підтверджують (3.37).

Тепер виведемо формули для кореляційних функцій квадратур. Щоб спростити перетворення, спочатку представимо  $\xi_c(t)$ ,  $\xi_s(t)$  у вигляді:

$$\xi_c(t) = \frac{1}{2} [\zeta(t)e^{-i\omega_0 t} + \bar{\zeta}(t)e^{i\omega_0 t}], \quad (3.60)$$

$$\xi_s(t) = \frac{i}{2} [\zeta(t)e^{-i\omega_0 t} - \bar{\zeta}(t)e^{i\omega_0 t}]. \quad (3.61)$$

**Теорема 3.5.** Квадратурні складові (3.16) і (3.17) вузькосмугового ПНВС (3.6) є взаємостаціонарними випадковими частотно-обмеженими процесами, а залежності їх авто- та взаємкореляційних функцій від нульового, другого косинусного та другого синусного компонентів сигналу визначаються співвідношеннями:

$$R_c(u) = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u + C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$R_s(u) = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u - C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$R_{cs}(u) = B_0^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u - B_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega_0 u + C_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u.$$

**Доведення.** Для автокореляційних функцій квадратур (3.60) і (3.61) маємо:

$$b_c(t, u) = \mathbb{E} \left\{ \overline{\xi_c(t)} \overset{\circ}{\xi}_c(t+u) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} + b_{\zeta\bar{\zeta}}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \right\}, \quad (3.62)$$

$$b_s(t, u) = \mathbb{E} \left\{ \overline{\xi_s(t)} \overset{\circ}{\xi}_s(t+u) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} - b_{\zeta\bar{\zeta}}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \right\}, \quad (3.63)$$

де

$$b_{\zeta\bar{\zeta}}(t, u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\zeta}(t) \overset{\circ}{\zeta}(t+u) \right\} = b_\zeta(t, u) + b_\eta(t, u) + i [b_{\xi\eta}(t, u) + b_{\eta\xi}(t, u)],$$

а  $b_\zeta(t, u)$  є кореляційною функцією аналітичного сигналу, визначеною (3.44).

Оскільки

$$B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u), \quad B_2^{(\eta)}(u) = -B_2^{(\xi)}(u), \quad (3.64)$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = -B_0^{(\eta\xi)}(u), \quad B_2^{(\xi\eta)}(u) = B_2^{(\eta\xi)}(u). \quad (3.65)$$

тоді

$$b_\xi(t, u) + b_\eta(t, u) = 2B_0^{(\xi)}(u), \quad (3.66)$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\eta\xi}(t, u) = 2B_0^{(\xi\eta)}(u). \quad (3.67)$$

Використовуючи попередні вирази для перших членів у (3.62) та (3.63), отримаємо

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} \} = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u.$$

Можна представити другий компонент взаємкореляційної функції у вигляді:

$$B_2^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \left[ C_2^{(\xi\eta)}(u) - i S_2^{(\xi\eta)}(u) \right],$$

а тоді, використовуючи рівності (3.64)–(3.67), маємо

$$C_2^{(\xi\eta)}(u) = -S_2^{(\xi)}(u), \quad S_2^{(\xi\eta)}(u) = C_2^{(\xi)}(u) \quad (3.68)$$

і

$$b_\xi(t, u) - b_\eta(t, u) = 2 \left[ C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t \right],$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) + b_{\eta\xi}(t, u) = 2 \left[ C_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 t - S_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 t \right].$$

Тоді другі члени у (3.62) і (3.63) задаються як:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ b_{\zeta\zeta}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \} = C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u.$$

Для першого та другого членів співвідношень (3.62) і (3.63) маємо:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} \} = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u,$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ b_{\zeta\zeta}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \} = C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u.$$

Тоді

$$b_c(t, u) = R_c(u) = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u + C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.69)$$

$$b_s(t, u) = R_s(u) = B_0^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \sin \omega_0 u - C_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u, \quad (3.70)$$

і взаємкореляційна функція квадратур визначається за формулою:

$$b_{cs}(t, u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u) \right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} + b_{\zeta\zeta'}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \right\}. \quad (3.71)$$

На основі залежностей між компонентами кореляційної функції (3.64), (3.65) і (3.68), можна легко отримати вирази для додатків взаємкореляційної функції (3.71):

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ b_\zeta(t, u) e^{-i\omega_0 u} \right\} = -B_0^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u + B_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega_0 u, \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ b_{\zeta\zeta'}(t, u) e^{-i\omega_0(2t+u)} \right\} = -C_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u. \quad (3.73)$$

Взявши до уваги (3.72) і (3.73), отримаємо

$$b_{cs}(t, u) = R_{cs}(u) = B_0^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u - B_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega_0 u + C_2^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \cos \omega_0 u. \quad (3.74)$$

Кореляційні функції (3.69) і (3.70) є парними функціями. Це впливає з рівностей

$$B_0^{(\xi)}(-u) = B_0^{(\xi)}(u), \quad B_0^{(\xi\eta)}(-u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u),$$

і залежностей

$$C_2^{(\xi)}(-u) = C_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 u,$$

$$S_2^{(\xi)}(-u) = C_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 u,$$

які легко отримати з виразу (3.5) для  $k = 2$ . Взаємкореляційна функція (3.71) є сумою парної  $\tilde{R}_{cs}(u)$  та непарної  $\tilde{\tilde{R}}_{cs}(u)$  частини, тобто

$$\tilde{R}_{cs}(u) = C_2^{(\xi)}(u) \sin 2\omega_0 u + S_2^{(\xi)}(u) \cos 2\omega_0 u, \quad (3.75)$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{cs}(u) = B_0^{(\xi)}(u) \sin \omega_0 u - B_0^{(\xi\eta)}(u) \cos \omega_0 u. \quad (3.76)$$

Відмітимо, що парна взаємкореляційна компонента  $\tilde{R}_{cs}(u)$  має місце лише у випадку коли  $\xi(t)$  є ПНВС. Теорему доведено. ■

На основі (3.69), (3.70) та (3.74) проаналізуємо спектральну структуру квадратур.



**Теорема 3.6.** *Спектральна густина квадратурних складових вузькосмугового ПНВС, на відміну від стаціонарного випадкового сигналу, визначається не тільки стаціонарним наближенням спектральної густини потужності сигналу  $\xi(t)$ , а й дійсною частиною другого компонента спектральної густини, а саме*

$$f_c(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) + 2\operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\},$$

$$f_s(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) - 2\operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\},$$

де  $f_0^{(\xi)}(\omega^+)$  і  $f_0^{(\xi)}(\omega^-)$  розподіли усередненої за часом спектральної густини потужності в додатній і від'ємній областях частот відповідно. Взаємоспектральна густина квадратурних складових є комплексозначною функцією; її дійсна частина визначається уявною частиною другої компоненти спектральної густини, зміщеної вниз на  $\omega_0$ , а уявна частина визначається різницею нульових спектральних компонент в додатній і від'ємній областях частот, зміщених відповідно вниз і вгору на  $\omega_0$ :

$$f_{cs}(\omega) = 2\operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\} + i[f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) - f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0)]. \quad (3.77)$$

**Доведення.** Можна представити автокореляційну функцію квадратур у вигляді суми та різниці двох доданків:

$$R_c(u) = R_1(u) + R_2(u), \quad R_s(u) = R_1(u) - R_2(u),$$

де

$$R_1(u) = B_0^{(\xi)}(u)\cos\omega_0 u + B_0^{(\xi)}(u)\sin\omega_0 u, \quad (3.78)$$

$$R_2(u) = C_2^{(\xi)}(u)\cos\omega_0 u - S_2^{(\xi)}(u)\sin\omega_0 u. \quad (3.79)$$

Використовуючи співвідношення (3.38) і (3.47), перший член у (3.78) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} R_1(u) &= 2\int_0^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega)\cos(\omega - \omega_0)u] d\omega = \\ &= \int_{-\omega_0}^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega + \omega_0)e^{i\omega u}] d\omega + \int_{-\infty}^{\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega - \omega_0)e^{i\omega u}] d\omega. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
f_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\omega_0}^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega_0 + \omega_1) e^{i(\omega_1 - \omega)u}] d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega_0 - \omega_1) e^{i(\omega_1 - \omega)u}] d\omega_1 \right] du = \\
&= \int_{-\omega_0}^{\infty} [f_0^{(\xi)}(\omega_1 + \omega_0) \delta(\omega_1 - \omega)] d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_1 - \omega)] d\omega_1 = \\
&= f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- + \omega_0),
\end{aligned}$$

де  $f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0)$  – складова  $f_0^{(\xi)}(\omega)$  у позитивній частотній області, і  $f_0^{(\xi)}(\omega^- + \omega_0)$  – складова  $f_0^{(\xi)}(\omega)$  у негативній частотній області.

Другу спектральну компоненту  $f_2^{(\xi)}(\omega)$  можна представити у вигляді

$$f_2^{(\xi)}(\omega) = \operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} - i \operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\}.$$

Тоді з рівняння

$$B_2^{(\xi)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = \frac{1}{2} [C_2^{(\xi)}(u) - iS_2^{(\xi)}(u)],$$

отримаємо

$$C_2^{(\xi)}(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \cos \omega u + \operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \sin \omega u] d\omega, \quad (3.80)$$

$$S_2^{(\xi)}(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \cos \omega u - \operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \sin \omega u] d\omega. \quad (3.81)$$

Підставлення (3.80) і (3.81) у вираз (3.79) дає:

$$\begin{aligned}
R_2(u) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \cos(\omega - \omega_0)u + \operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega)\} \sin(\omega - \omega_0)u] d\omega = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\} \cos \omega u + \operatorname{Im}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\} \sin \omega u] d\omega.
\end{aligned}$$

Друга спектральна компонента ПНВС задовольняє рівність  $f_2^{(\xi)}(-\omega) = f_2^{(\xi)}(\omega + 2\omega_0)$ . Тоді  $f_2^{(\xi)}(-\omega + \omega_0) = f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)$ , тобто  $f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)$  є парною функцією частоти. Таким чином,

$$R_2(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}\{f_2(\omega + \omega_0)\} \cos \omega u] d\omega,$$

і отже  $f_2(\omega) = 2 \operatorname{Re}\{f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0)\}$ .

Використовуючи вирази (3.80) і (3.81) для парної складової взаємкореляційної функції (3.75), отримуємо

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{cs}(u) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Im} \{ f_2^{(\xi)}(\omega) \} \cos(\omega - \omega_0)u - \operatorname{Re} \{ f_2^{(\xi)}(\omega) \} \sin(\omega - \omega_0)u \right] d\omega = \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \} \sin \omega u + \operatorname{Im} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \} \cos \omega u \right] d\omega \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \} \cos \omega u d\omega,\end{aligned}$$

і отже  $\tilde{f}_{cs}(\omega) = 2 \operatorname{Im} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \}$ .

Непарна складова взаємкореляційної функції має вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{cs}(u) &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega) \sin(\omega - \omega_0)u \right] d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \sin \omega u \right] d\omega = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\omega_0} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega + \omega_0) e^{i\omega u} \right] d\omega + i \int_{-\omega_0}^{\infty} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega + \omega_0) e^{i\omega u} \right] d\omega.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{cs}(u) &= i \int_{-\omega_0}^{\infty} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega_1 + \omega_0) \delta(\omega_1 - \omega) \right] d\omega_1 - i \int_{-\infty}^{\omega_0} \left[ f_0^{(\xi)}(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_1 - \omega) \right] d\omega_1 = \\ &= i \left[ f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) - f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) \right].\end{aligned}$$

Беручи до уваги властивості кореляційних і спектральних компонент сигналу, перетвореннями Фур'є виразів (3.78) і (3.79) будуть:

$$f_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_1(u) e^{-i\omega u} \right] d\omega = f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0),$$

$$f_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_2(u) e^{-i\omega u} \right] d\omega = 2 \operatorname{Re} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \}.$$

Тоді

$$f_c^{(\xi)}(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) + 2 \operatorname{Re} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \}, \quad (3.81)$$

$$f_s^{(\xi)}(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) + f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) - 2 \operatorname{Re} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \}. \quad (3.82)$$

Перетворення Фур'є парної (3.75) та непарної (3.76) частин взаємкореляційної функції дають:

$$\tilde{f}_{cs}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{R}_{cs}(u)e^{-i\omega u}] du = 2 \operatorname{Im} \{ f_2^{(\xi)}(\omega + \omega_0) \},$$

$$\tilde{f}_{cs}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{R}_{cs}(u)e^{-i\omega u}] du = i [ f_0^{(\xi)}(\omega^+ + \omega_0) - f_0^{(\xi)}(\omega^- - \omega_0) ].$$

Додаючи ці співвідношення, приходимо до формули (3.77). Теорему доведено. ■

Слід зазначити, що дійсна частина взаємоспектральної густини потужності квадратур є парною функцією частоти, а уявна частина є непарною функцією.

З (3.69), (3.70), (3.74), (3.77), (3.81) та (3.82) випливає, що кореляційна та спектральна структура квадратур для ПНВС та стаціонарного наближення відрізняються. Формули для авто- і взаємокореляційних функцій і спектральних густин потужності містять додаткові члени, які залежать від другого кореляційного і спектрального компонентів.

### 3.5. Висновки до розділу 3

1. Виведено взаємозв'язки між ймовірнісними характеристиками однокомпонентного періодично нестаціонарного випадкового сигналу представленого моделлю Райса та характеристиками його квадратур.

2. Запропоновано та обгрунтовано метод оцінювання стаціонарної компоненти однокомпонентного періодично нестаціонарного випадкового сигналу, який використовує смугову фільтрацію та перетворення Гільберта для виокремлення квадратур вузькосмугового періодично нестаціонарного випадкового сигналу.

3. Проаналізовано властивості перетворення Гільберта однокомпонентного періодично нестаціонарного випадкового сигналу, досліджено його властивості в залежності від кореляційної структури стохастичних модуляцій, розроблено методи оцінювання її характеристик.

Результати розділу 3 опубліковано у наукових працях [2, 4, 6, 11, 14, 16, 17].

## РОЗДІЛ 4

### МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

#### 4.1 Багатокомпонентне представлення періодично нестационарного випадкового сигналу

Розглянемо ПНВС, який представлений обмеженим рядом (3.51). Для подальшого аналізу перепишемо його у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N [\xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} + \bar{\xi}_k(t) e^{-ik\omega_0 t}]. \quad (4.1)$$

Тоді його кореляційна функція є такою:

$$b_\xi(t, u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) \right\} = 2 \operatorname{Re} \{ S_1(u, t) + S_2(u, t) \}, \quad (4.2)$$

де

$$S_1(u, t) = \sum_{k, l=1}^N \left[ R_{kl}^{(\xi)}(u) e^{i(l-k)t} e^{il\omega_0 u} \right], \quad (4.3)$$

$$S_2(u, t) = \sum_{k, l=1}^N \left[ R_{\xi_k \xi_l}^{\bar{\xi}}(t, u) e^{i(l+k)t} e^{il\omega_0 u} \right], \quad (4.4)$$

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overline{\overset{\circ}{\xi}_k(t)} \overset{\circ}{\xi}_l(t+u) \right\} = \frac{1}{4} \left[ R_{kl}^c(u) + R_{kl}^c(u) - i \left[ R_{kl}^{cs}(u) - R_{kl}^{sc}(u) \right] \right], \quad (4.5)$$

$$R_{\xi_k \xi_l}^{\bar{\xi}}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k(t) \overset{\circ}{\xi}_l(t+u) \right\} = \frac{1}{4} \left[ R_{kl}^c(u) - R_{kl}^c(u) - i \left[ R_{kl}^{cs}(u) + R_{kl}^{sc}(u) \right] \right], \quad (4.6)$$

$$\text{і } R_{kl}^c(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k^c(t) \overset{\circ}{\xi}_l^c(t+u) \right\}, R_{kl}^s(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k^s(t) \overset{\circ}{\xi}_l^s(t+u) \right\}, R_{kl}^{cs}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{\xi}_k^c(t) \overset{\circ}{\xi}_l^s(t+u) \right\},$$

$$\overset{\circ}{\xi}_k^c(t) = \xi_k^c(t) - m_k^c, \quad \overset{\circ}{\xi}_k^s(t) = \xi_k^s(t) - m_k^s, \quad m_k^c = \mathbb{E} \{ \xi_k^c(t) \}, \quad m_k^s = \mathbb{E} \{ \xi_k^s(t) \}.$$

Введемо нові індекси сумування і змінимо порядок сумування у подвійних сумах (4.3) та (4.4). Для першої суми  $S_1(t, u)$  введемо новий індекс  $r = l - k$

$$S_1(t, u) = \sum_{l=1}^N \left[ e^{il\omega_0 u} \sum_{r=l-1}^{l-N} \left[ R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t} \right] \right].$$

Тепер поміняємо порядок сумування (рис. 4.1а), і отримаємо

$$S_1(t, u) = \sum_{r=-N+1}^0 \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l=1}^{r+N} \left[ R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right] + \sum_{r=1}^{N-1} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l=r+1}^N \left[ R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right].$$

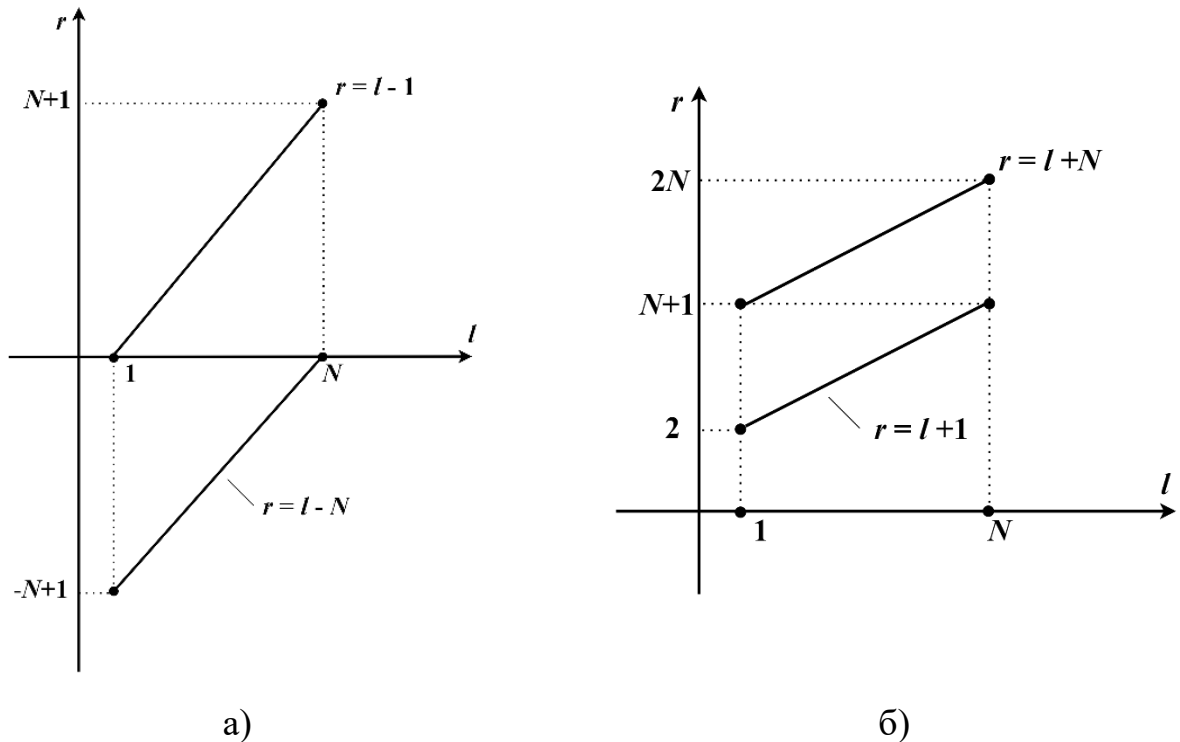


Рисунок 4.1 – Переупорядковане сумування

Другу суму  $S_2(t, u)$  після введення нового індексу  $r = l + k$  можна представити наступним чином:

$$S_2(t, u) = \sum_{l=1}^N \left[ e^{il\omega_0 u} \sum_{r=l+1}^{l+N} \left[ R_{\xi_{r-l}, \xi_l}(u) e^{ir\omega_0 t} \right] \right].$$

Зміна порядку сумування (рис. 4.1б) приводить до:

$$S_2(t, u) = \sum_{r=2}^{N+1} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l=1}^{r-1} \left[ R_{\xi_{r-l}, \xi_l}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right] + \sum_{r=N+2}^{2N} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l=r-N}^N \left[ R_{\xi_{r-l}, \xi_l}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right].$$

Після введення нових індексів сумування і зміни порядку в подвійних сумах (4.3) та (4.4) отримаємо:

$$S_1(t, u) = \sum_{r=-N+1}^{N-1} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in M_1} \left[ R_{l-r, l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right], \quad (4.7)$$

$$S_2(t, u) = \sum_{r=2}^{2N} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in M_2} \left[ R_{\xi_{r-l}, \xi_l}(u) e^{il\omega_0 u} \right] \right], \quad (4.8)$$

де  $M_1 = \{1, \dots, r + N\}$  для  $r \leq 0$  і  $M_1 = \{r + 1, \dots, N\}$  для  $r > 0$ ;  $M_2 = \{1, \dots, r - 1\}$  для  $r = \overline{2, N + 1}$  і  $M_2 = \{r - N, \dots, N\}$  для  $r = \overline{r + 2, 2N}$ .

Зі співвідношень (4.5) і (4.6) для нульової кореляційної компоненти сигналу (4.1) маємо

$$B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left[ \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \cos l\omega_0 u + \tilde{R}_{ll}^{cs}(u) \sin l\omega_0 u \right], \quad (4.9)$$

де  $\tilde{R}_{ll}^{cs}(u)$  є непарною частиною взаємкореляційної функції  $R_{ll}^{cs}(u)$ . Отже

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{l=1}^N \left[ f_{ll}^c(\omega + l\omega_0) + f_{ll}^s(\omega + l\omega_0) + f_{ll}^c(\omega - l\omega_0) + f_{ll}^s(\omega - l\omega_0) + 2 \left[ \tilde{f}_{ll}^{cs}(\omega + l\omega_0) - \tilde{f}_{ll}^{sc}(\omega - l\omega_0) \right] \right], \quad (4.10)$$

де

$$f_{kl}^{c,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kl}^{c,s}(u) e^{-i\omega u} d\omega, \quad f_{kl}^{cs}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{kl}^{cs}(u) e^{-i\omega u} d\omega$$

і  $\tilde{f}_{ll}^{cs}(\omega)$  є непарною частиною від  $f_{ll}^{cs}(\omega)$ . З виразу (4.10) видно, що смуга частот нульової компоненти ПНВС для даного випадку обмежена інтервалом  $\left[ -N\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, N\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right]$ . Оскільки

$$|f_{kl}^{cs}(\omega)|^2 \leq f_{kk}^c(\omega) f_{ll}^s(\omega), \quad (4.11)$$

то з (4.10) і (4.11) випливає, що смуга частот будь-якої спектральної компоненти  $f_r(\omega)$  не може бути більшою за смугу частот нульової компоненти  $f_0(\omega)$ .

Використовуючи вирази (4.6) і (4.8), знаходимо формули для кореляційних компонент з порядками  $r \geq N$ :

$$B_r^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} \sum_{l \in M_2} \left[ R_{r-l,l}^c(u) - R_{r-l,l}^s(u) - i \left[ R_{r-l,l}^{cs}(u) + R_{r-l,l}^{sc}(u) \right] e^{il\omega_0 u} \right]. \quad (4.12)$$

Отже

$$f_r^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{l \in M_2} \left[ \begin{array}{l} f_{r-l,l}^c(\omega - l\omega_0) - f_{r-l,l}^s(\omega - l\omega_0) - \\ -i \left[ f_{r-l,l}^{cs}(\omega - l\omega_0) + f_{r-l,l}^{sc}(\omega - l\omega_0) \right] \end{array} \right]. \quad (4.13)$$

Як видно з (4.12), спектральні компоненти  $f_r^{(\xi)}(\omega)$ , при  $r \geq N$  належать інтервалу  $[0, r\omega_0]$ , тобто задовольняють умову (3.38) Теорема 3.3.

**Наслідок 4.1.** *Кореляційні компоненти вузькосмугового ПНВС та його Гільберт трансформанти, з номерами  $r \geq N$  відрізняються лише знаком  $B_r^{(\eta)}(u) = -B_r^{(\xi)}(u)$ , а їх взаємокореляційні компоненти є симетричними непарними функціями та визначаються рівністю  $B_r^{(\xi\eta)}(u) = B_r^{(\eta\xi)}(u) = -iB_r^{(\xi)}(u)$ .*

Аналогічні результати можна отримати шляхом прямого розрахунку компонент автокореляційної функції  $B_r^{(\eta)}(u)$  та компонент взаємокореляційних функцій  $B_r^{(\xi\eta)}(u)$ ,  $B_r^{(\eta\xi)}(u)$  використовуючи формули (3.52) та (4.1). Для кореляційних функцій маємо:

$$b_\eta(t, u) = \mathbb{E}\{\eta(t)\eta(t+u)\} = 2\operatorname{Re}\{S_1(u, t) - S_2(u, t)\}, \quad (4.14)$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) = \mathbb{E}\{\bar{\xi}(t)\eta(t+u)\} = 2\operatorname{Im}\{S_1(u, t) + S_2(u, t)\}, \quad (4.15)$$

$$b_{\eta\xi}(t, u) = \mathbb{E}\{\bar{\eta}(t)\xi(t+u)\} = 2\operatorname{Im}\{S_1(u, t) - S_2(u, t)\}. \quad (4.16)$$

Рівності  $B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u)$  та  $B_2^{(\eta)}(u) = -B_2^{(\xi)}(u)$  безпосередньо впливають з (4.14). Нульовий взаємокореляційний компонент є одним з доданків суми  $S_1(u, t)$ . Отже,  $B_0^{(\eta\xi)}(u) = -B_0^{(\xi\eta)}(u)$  і тоді

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left[ \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \sin l\omega_0 u - 2\tilde{R}_{ll}^{cs}(u) \cos l\omega_0 u \right], \quad (4.17)$$

де  $\tilde{R}_{ll}^{cs}(u)$  є непарною частиною кореляційної функції  $R_{ll}^{cs}(u)$ .

З рівняння (4.17) легко побачити, що  $B_0^{(\xi\eta)}(u)$  є непарною функцією. А з (4.17) отримуємо вираз для нульового компонента  $f_0^{(\xi\eta)}(\omega)$  взаємоспектральної функції:



$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{i}{4} \sum_{l=1}^N \left[ f_{ll}^c(\omega - l\omega_0) + f_{ll}^s(\omega - l\omega_0) - f_{ll}^c(\omega + l\omega_0) - f_{ll}^s(\omega + l\omega_0) + \right. \\ \left. + 2 \left[ f_{ll}^{cs}(\omega + l\omega_0) + f_{ll}^{sc}(\omega - l\omega_0) \right] \right],$$

що дозволяє зробити висновок, що в цьому випадку рівність (3.36) також є справедливою.

Взаємкореляційні компоненти  $B_r^{(\xi\eta)}(u)$ ,  $r \geq N$ , є доданками суми  $S_2(u, t)$ , а тому рівність  $B_r^{(\xi\eta)}(u) = B_r^{(\eta\xi)}(u)$  безпосередньо випливає з (4.15) та (4.16). З (4.8) отримуємо наступний вираз для  $B_r^{(\xi\eta)}(u)$ :

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{1}{4} \sum_{l \in M}^N \left[ R_{r-l, l}^{cs}(u) + R_{r-l, l}^{sc}(u) + i \left[ R_{r-l, l}^c(u) - R_{r-l, l}^s(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u}. \quad (4.18)$$

Порівняння виразів (4.12) та (4.18) показує, що  $B_r^{(\xi\eta)}(u) = -iB_r^{(\eta\xi)}(u)$  для  $r \geq N$ .

Далі можна сформулювати наступну теорему.

**Теорема 4.1.** *Якщо кореляційні функції квадратур окремих гармонік ПНВС задовольняють умовам*

$$R_{kl}^c(u) + R_{kl}^s(u) \neq 0 \text{ або } R_{kl}^{cs}(u) - R_{kl}^{sc}(u) \neq 0$$

для  $k \neq l$ , тоді аналітичний сигнал  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  є періодично нестационарним і його кореляційна функція визначається рядом:

$$b_\zeta(t, u) = \sum_{r=-N+1}^{N-1} B_r^{(\zeta)}(u) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\zeta)}(u) = \sum_{l=1}^N \left[ \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \cos l\omega_0 u + \tilde{R}_{ll}^{cs}(u) \sin l\omega_0 u + \right. \\ \left. + i \left[ R_{ll}^c(u) + R_{ll}^s(u) \right] \sin l\omega_0 u - \tilde{R}_{ll}^{sc}(u) \cos l\omega_0 u \right], \quad (4.19)$$

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \sum_{l \in M_2} \left[ R_{l-r, l}^c(u) + R_{l-r, l}^s(u) - i \left[ R_{l-r, l}^{cs}(u) - R_{l-r, l}^{sc}(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u}, \quad (4.20)$$

а величини спектральних компонентів  $f_k^{(\zeta)}(\omega)$  лежать і поза межами інтервалу  $[0, r\omega_0]$ .

**Доведення.** Беручи до уваги рівності  $B_2^{(\eta)}(u) = -B_2^{(\xi)}(u)$  та  $B_r^{(\xi\eta)}(u) = B_r^{(\eta\xi)}(u)$  для  $r \geq N$ , приходимо до висновку, що ряд для кореляційної функції  $b_\zeta(t, u)$  містить лише  $N-1$  гармоніку. Вирази для кореляційних компонент можна отримати використовуючи (3.44), (4.2)–(4.4) та (4.14)–(4.16). Отримаємо:

$$b_\zeta(t, u) + b_\eta(t, u) = 2 \sum_{r=-N+1}^{N-1} \sum_{l \in M_1} \left[ \begin{array}{c} R_{l-r, l}^c(u) + \\ + R_{l-r, l}^s(u) \end{array} \right] \cos(r\omega_0 t + l\omega_0 u) + \left[ \begin{array}{c} R_{l-r, l}^{cs}(u) + \\ + R_{l-r, l}^{sc}(u) \end{array} \right] \sin(r\omega_0 t + l\omega_0 u),$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) - b_{\eta\xi}(t, u) = 2 \sum_{r=-N+1}^{N-1} \sum_{l \in M_2} \left[ \begin{array}{c} R_{l-r, l}^c(u) + \\ + R_{l-r, l}^s(u) \end{array} \right] \sin(r\omega_0 t + l\omega_0 u) - \left[ \begin{array}{c} R_{l-r, l}^{cs}(u) - \\ - R_{l-r, l}^{sc}(u) \end{array} \right] \cos(r\omega_0 t + l\omega_0 u).$$

Отже,

$$b_\zeta(t, u) = \sum_{r=-N+1}^{N-1} \left[ e^{ir\omega_0 t} \sum_{l \in M_2} \left[ R_{l-r, l}^c(u) + R_{l-r, l}^s(u) - i \left[ R_{l-r, l}^{cs}(u) - R_{l-r, l}^{sc}(u) \right] \right] e^{il\omega_0 u} \right].$$

Зауважимо, що таку ж формулу для кореляційної функції аналітичного сигналу можна отримати представивши аналітичний сигнал рядом:

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \xi(t) + i\eta(t) = 2 \sum_{k=1}^N \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \xi_k^c(t) (\cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t) - i \left[ \xi_k^s(t) (\cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t) \right] \right]. \end{aligned}$$

З (4.20), отримаємо вираз для спектральних компонентів аналітичного сигналу

$$f_r^{(\zeta)}(\omega) = \sum_{l \in M_2} \left[ \begin{array}{c} f_{l-r, l}^c(\omega - l\omega_0) + f_{l-r, l}^s(\omega - l\omega_0) - \\ - i \left[ f_{l-r, l}^{cs}(\omega - l\omega_0) - f_{l-r, l}^{sc}(\omega - l\omega_0) \right] \end{array} \right]. \quad (4.21)$$

Значення індексу сумування  $l = \overline{1, N+r}$  для  $r \leq 0$  та  $l = \overline{r+1, N}$   $l = \overline{1, N+r}$  для  $r > 0$ , тобто нерівність  $l \geq r$  виконується для всіх  $l$ . Для цього випадку з (4.21) випливає, що спектральні компоненти  $f_r^{(\zeta)}(\omega)$  лежать поза межами інтервалів  $[0, r\omega_0]$  для  $\forall r = \overline{-N+1, N-1}$ . Теорему доведено. ■

Дисперсія аналітичного сигналу є рівною

$$b_\zeta(t, 0) = \sum_{r=-N+1}^{N-1} \left[ B_r^{(\zeta)}(0) e^{ir\omega_0 t} \right] = B_0^{(\zeta)}(0) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N \left[ \begin{array}{c} \left[ R_{l-r, l}^c(0) + R_{l-r, l}^s(0) \right] \cos r\omega_0 t + \\ + \left[ R_{l-r, l}^{cs}(0) - R_{l-r, l}^{sc}(0) \right] \sin r\omega_0 t \end{array} \right],$$

де  $B_r^{(\zeta)}(0) = \sum_{l=1}^N [R_l^c(0) + R_l^s(0)]$ .

Ступінь періодичної нестационарності аналітичного сигналу

$$\gamma = \frac{\sum_{r=1}^{N-1} |B_r^{(\zeta)}(0)|}{B_0^{(\zeta)}(0)}$$

не рівний нулю, лише тоді, коли взаємкореляційні функції квадратур компонент різних порядків не є рівними нулю у точці  $u = 0$ .

## 4.2 Багатокомпонентний періодично нестационарний випадковий процес з взаємнекорельованими квадратурами

Розглянемо тепер окремий випадок вузькосмугового ПНВС, для якого квадратури компонент різних порядків у представленні (4.1) є некорельованими. Тоді нульова кореляційна компонента сигналу визначається виразом (4.9), як і у загальному випадку. І лише ненульові компоненти парних порядків  $l = 2k$  не рівні нулю:

$$B_{2k}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4} [R_{kk}^c(u) + R_{kk}^s(u) - 2i\tilde{R}_{kk}^{cs}(u)] e^{ik\omega_0 u}. \quad (4.22)$$

А компоненти спектральної густини

$$f_{2k}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4} [f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) - f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) - 2i\tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0)] \quad (4.23)$$

сконцентровані в інтервалі  $[0, (k+1)\omega_0]$ , і отже вони задовольняють умову (3.38) Теорема 3.3. Тепер можна постулювати наступне.

**Наслідок 4.2.** *Кореляційні компоненти багатокомпонентного ПНВС з взаємнекорельованими квадратурами та його Гільберт трансформанти відрізняються лише знаком*

$$B_{2k}^{(\eta)}(u) = -B_{2k}^{(\xi)}(u),$$

а їх взаємкореляційні компоненти  $B_{2k}^{(\xi\eta)}(u)$ ,  $B_{2k}^{(\eta\xi)}(u)$  є симетричними і можуть бути виражені наступним чином:

$$B_{2k}^{(\xi\eta)}(u) = B_{2k}^{(\eta\xi)}(u) = -iB_{2k}^{(\xi)}(u). \quad (4.24)$$

Тоді формула (4.18) для взаємокореляційних компонент може бути зведена до

$$B_{2k}^{(\xi\eta)}(u) = -\frac{1}{4} \left[ 2\tilde{R}_{kk}^{cs}(u) + i \left[ R_{kk}^c(u) - R_{kk}^s(u) \right] \right] e^{ik\omega_0 u}. \quad (4.25)$$

Порівняння співвідношень (4.25) та (4.22) також показує, що рівність (4.24) є правильною. Ці факти ведуть нас до наступного наслідку:

**Наслідок 4.3.** Аналітичний сигнал  $\zeta(t)$  сформований на основі вузькосмугового багатокомпонентного ПНВС з взаємнекорельованими квадратурами є стаціонарним випадковим процесом, а його кореляційна функція визначається одностороннім перетворенням Фур'є (3.48) нульової спектральної компоненти сигналу (4.1).

З проведеного вище аналізу випливає, що цей тип вузькосмугового ПНВС можна розглядати як суперпозицію некорельованих сигналів представлених моделлю Райса

$$v_k(t) = \xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t,$$

і кожен сигнал  $v_k(t)$  має властивості наведенні у розділі 3.2.

У цьому випадку кореляційна функція аналітичного сигналу є рівною сумі кореляційних функцій його окремих компонент  $\zeta_k(t) = 2\xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}$ :

$$R_\zeta(u) = \sum_{k=1}^N R_{\zeta_k}(u), \quad (4.26)$$

де

$$R_{\zeta_k}(u) = 4 \int_0^\infty \left[ f_0^{(\zeta_k)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega,$$

$$f_0^{(\zeta_k)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) - \right. \\ \left. - f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) - 2 \left[ \tilde{f}_{kk}(\omega + k\omega_0) - \tilde{f}_{kk}(\omega - k\omega_0) \right] \right].$$

Тоді загальну дисперсію  $R_\zeta(0)$  можна розглядати як величину, що характеризує потужність гармонічних модуляцій.

### 4.3 Вузькосмугові багатоконпонентні періодично нестационарні випадкові сигнали

Тепер розглянемо властивості сигналу, коли на сигнал (4.1) подіяли фільтром, передавальна функція якого має вигляд

$$H_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[-k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, -k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2}\right] \cup \left[k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2}\right]; \\ 0, & \omega \notin \left[-k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, -k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2}\right] \cup \left[k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2}\right]. \end{cases}$$

Можна представити ПНВС у формі [155, 157, 172, 173]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega),$$

де

$$\mathbb{E}\{dZ(\omega)\} = \sum_{k=-N}^N [m_k^{(\xi)} \delta(\omega - k\omega_0)] d\omega, \quad (4.27)$$

$$\mathbb{E}\left\{d\bar{Z}(\omega_1) d\dot{Z}(\omega_2)\right\} = \sum_{k=-2N}^{2N} [f_k^{(\xi)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1] d\omega_2, \quad (4.28)$$

а  $\dot{Z}(\omega) = Z(\omega) - \sum_{k=-N}^N m_k U(\omega - k\omega_0)$ , де  $U(\omega)$  є функція Гевісайда (одиничного стрибка). Відношення «вхід-вихід» для фільтрації є наступним:

$$v_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (4.29)$$

Функція математичного сподівання фільтрованого сигналу (4.29) дорівнює:

$$m_{v_k}(t) = \mathbb{E}\{v_k(t)\} = \sum_{r=-N}^N m_r^{(\xi)} \left[ \int_{-k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{-k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [e^{i\omega t} \delta(\omega - r\omega_0)] d\omega + \int_{k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [e^{i\omega t} \delta(\omega - r\omega_0)] d\omega \right].$$

Співвідношення для кореляційної функції виражається як

$$b_{v_k}(t, u) = \mathbb{E}\left\{\bar{v}_k(t) \dot{v}_k(t+u)\right\} = B_0^{(v_k)}(u) + \sum_{r=\pm 2k} B_k^{(v_k)}(u) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(v_k)}(u) = \int_{-k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{-k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega + \int_{k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega,$$

$$B_{2k}^{(v_k)}(u) = \int_{k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega, \quad B_{-2k}^{(v_k)}(u) = \int_{-k\omega_0 - \frac{1}{2}\omega_0}^{-k\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0} [f_0^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega.$$

оскільки

$$f_0^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l=-2N}^{2N} f_{ll}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0),$$

$$f_{2k}^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l \in M} f_{l-2k,l}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0), \quad (4.30)$$

$$f_{-2k}^{(\xi)}(\omega) = \sum_{l \in M} f_{l+2k,l}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0),$$

де  $M = \{-N + 2k, \dots, N\}$  для  $k \geq 0$  і  $M = \{-N, \dots, N + 2k\}$  для  $k < 0$ , маємо

$$f_0^{(v_k)}(\omega) = f_{-k,k}^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^{(\xi)}(\omega - k\omega_0),$$

$$f_{2k}^{(v_k)}(\omega) = f_{-k,k}^{(\xi)}(\omega - k\omega_0), \quad f_{-2k}^{(v_k)}(\omega) = f_{k,-k}^{(\xi)}(\omega + k\omega_0).$$

Використовуючи співвідношення (4.5), отримуємо

$$f_{-k,-k}^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left[ [R_{kk}^c(u) + R_{kk}^s(u)] \cos(\omega + k\omega_0)u + 2\tilde{R}_{kk}^{cs}(u) \sin(\omega + k\omega_0)u \right] du =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega + k\omega_0) + 2\tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$f_{kk}^{(\xi)}(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left[ [R_{kk}^c(u) + R_{kk}^s(u)] \cos(\omega - k\omega_0)u - 2\tilde{R}_{kk}^{cs}(u) \sin(\omega - k\omega_0)u \right] du =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) - 2\tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0) \right],$$

і отже

$$f_0^{(v_k)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) + \right. \\ \left. + f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) + 2 \left[ \tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega + k\omega_0) - f_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0) \right] \right].$$

На основі (4.30) також маємо:

$$\begin{aligned}
f_{2k}^{(v_k)}(\omega) &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left[ R_{kk}^c(u) - R_{kk}^s(u) \right] \cos(\omega - k\omega_0)u - 2i\tilde{R}_{kk}^{cs}(u) \cos(\omega - k\omega_0)u \right] du = \\
&= \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) - f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) - 2i\tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0) \right].
\end{aligned}$$

Тоді очевидно, що  $f_{-2k}^{(v_k)}(\omega) = \overline{f_{2k}^{(v_k)}(\omega)}$ .

Беручи до уваги формули (4.27) та (4.28), вирази для математичного сподівання та кореляційної функції для (4.29) є такими:

$$\begin{aligned}
m_{v_k}(t) &= m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t, \\
b_{v_k}(t, u) &= B_0^{(v_k)}(u) + \sum_{r=\pm 2k} B_r^{(v_k)}(u) e^{ir\omega_0 t},
\end{aligned}$$

де

$$B_0^{(v_k)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_0^{(v_k)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega, \quad B_{2k}^{(v_k)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_{2k}^{(v_k)}(\omega) e^{i\omega u} \right] d\omega,$$

і

$$\begin{aligned}
f_0^{(v_k)}(\omega) &= \frac{1}{4} \left[ f_{kk}^c(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega + k\omega_0) + f_{kk}^c(\omega - k\omega_0) + f_{kk}^s(\omega - k\omega_0) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[ \tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega + k\omega_0) - \tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0) \right] \right], \tag{4.31}
\end{aligned}$$

$$f_{2k}^{(v_k)}(\omega) = \frac{1}{4} \left[ \tilde{f}_{kk}^c(\omega - k\omega_0) - \tilde{f}_{kk}^s(\omega - k\omega_0) - 2i\tilde{f}_{kk}^{cs}(\omega - k\omega_0) \right]. \tag{4.32}$$

З порівняння виразів (3.11) та (3.12) з (4.31) та (4.32) можна зробити висновок, що величини (4.31) та (4.32) визначають спектральні компоненти квадратурної моделі:

$$v_k(t) = \xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t, \tag{4.33}$$

тобто, окремі компоненти багатокomпонентного представлення сигналу (4.1) як моделей Райса (3.6). Кожна із таких компонент  $v_k(t)$  є вузькосмуговим ПНВС, який був проаналізований у розділі 3.2. Звідси одразу отримуємо наступні результати.

**Факт 4.1.** *Кореляційні компоненти квадратурної моделі (4.33) визначаються наступними формулами:*

$$B_0^{(v_k)}(u) = \frac{1}{2} [R_{kk}^c(u) + R_{kk}^s(u)] \cos k\omega_0 u + \tilde{R}_{kk}^{cs}(u) \sin k\omega_0 u,$$

$$B_{2k}^{(v_k)}(u) = \frac{1}{4} [R_{kk}^c(u) - R_{kk}^s(u) - 2i\tilde{R}_{kk}^{cs}(u)] e^{ik\omega_0 u},$$

тоді як їх спектральні компоненти визначаються залежностями (4.31) та (4.32).

**Факт 4.2.** Автокореляційні компоненти сигналу (4.33) та його Гільберт трансформанти

$$\eta_k(t) = \mathbb{H}\{\xi_k(t)\} = \xi_k^c(t) \sin k\omega_0 t - \xi_k^s(t) \cos k\omega_0 t,$$

з парними порядками  $2k$  відрізняються лише знаком  $B_{2k}^{(v_k)}(u) = -B_{2k}^{(\eta_k)}(u)$ , тоді як компоненти взаємкореляційної функції

$$B_{2k}^{(v_k \eta_k)}(u) = -\frac{1}{4} [2\tilde{R}_{kk}^{cs}(u) + i[R_{kk}^c(u) - R_{kk}^s(u)]] e^{ik\omega_0 u},$$

та  $B_{2k}^{(v_k \eta_k)}(u)$  є симетричними,  $B_{2k}^{(v_k \eta_k)}(u) = B_{2k}^{(\eta_k v_k)}(u)$ , і виражаються як  $B_{2k}^{(v_k \eta_k)}(u) = -iB_{2k}^{(v_k)}(u)$ .

**Факт 4.3.** Аналітичні сигнали кожної з екстрагованих компонент є стаціонарними випадковими процесами, а їхні кореляційні функції є комплекснозначними:

$$R_{\zeta_k}(u) = B_0^{(v_k)}(u) + iB_0^{(v_k \eta_k)}(u),$$

тут дійсна  $\operatorname{Re}\{R_{\zeta_k}(u)\}$  і уявна  $\operatorname{Im}\{R_{\zeta_k}(u)\}$  частина кореляційної функції аналітичних сигналів є парою Гільберта, а самі кореляційні функції екстрагованих компонент визначаються наступним виразом

$$R_{\zeta_k}(u) = 4 \int_0^{\infty} f_0^{(v_k)} e^{i\omega u} d\omega.$$

**Факт 4.4.** Авто- та взаємкореляційні функції квадратур кожної компоненти  $v_k(t)$ , зокрема

$$\xi_k^c(t) = v_k(t) \cos k\omega_0 t + \eta_k(t) \sin k\omega_0 t,$$

$$\xi_k^s(t) = v_k(t) \sin k\omega_0 t - \eta_k(t) \cos k\omega_0 t,$$



можна порахувати за формулами:

$$R_k^c(u) = B_0^{(v_k)}(u) \cos k\omega_0 u + B_0^{(v_k \eta_k)}(u) \sin k\omega_0 u + C_{2k}^{(v_k)}(u) \cos k\omega_0 u - S_{2k}^{(v_k)}(u) \sin k\omega_0 u,$$

$$R_k^s(u) = B_0^{(v_k)}(u) \cos k\omega_0 u + B_0^{(v_k \eta_k)}(u) \sin k\omega_0 u - C_{2k}^{(v_k)}(u) \cos k\omega_0 u + S_{2k}^{(v_k)}(u) \sin k\omega_0 u,$$

$$R_{kk}^{cs}(u) = B_0^{(v_k)}(u) \sin k\omega_0 u - B_0^{(v_k \eta_k)}(u) \cos k\omega_0 u + S_{2k}^{(v_k)}(u) \cos k\omega_0 u + C_{2k}^{(v_k)}(u) \sin k\omega_0 u,$$

де  $C_{2k}^{(v_k)}(u)$  та  $S_{2k}^{(v_k)}(u)$  є косинусною і синусною складовою сигналу порядку  $2k$ , тоді як спектральні і взаємоспектральні густини можуть бути розраховані за співвідношеннями:

$$f_k^c(\omega) = f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) + 2\operatorname{Re}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\},$$

$$f_k^s(\omega) = f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) + f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0) - 2\operatorname{Re}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\},$$

$$f_k^{cs}(\omega) = 2\operatorname{Im}\{f_{2k}^{(v_k)}(\omega + k\omega_0)\} + i[f_0^{(v_k)}(\omega^+ + k\omega_0) - f_0^{(v_k)}(\omega^- - k\omega_0)].$$

У загальному випадку екстраговані квадратури компонент різних порядків є корельованими, а це означає, що їх аналітичні сигнали також корельовані. І рівняння (4.26) тоді є некоректним. Як впливає з (4.19), це вірно лише для усередненої за часом кореляційної функції, тобто для стаціонарного наближення кореляційної функції аналітичного сигналу. А це, в свою чергу, означає, що усереднена по часу дисперсія аналітичного сигналу  $\zeta(t)$  визначає сумарну потужність всіх модуляцій. Часові варіації кореляційної функції аналітичного сигналу  $\zeta(t)$  є наслідком кореляції квадратур компонент різних порядків. Зауважимо, що експериментальні дослідження стохастичних коливань дозволяють оцінити ці кореляції на основі виділених компонентів.

#### 4.4. Висновки до розділу 4

1. Розроблено новий підхід до оцінювання ймовірнісних характеристик багатокомпонентного ПНВП на основі його розкладу через стаціонарні стаціонарно зв'язані випадкові процеси.

2. Запропоновано та обґрунтовано метод декомпозиції багатоконпонентних ПНВС, який використовує смугову фільтрацію та перетворення Гільберта. На основі запропонованого методу розроблено процедуру для виділення стаціонарних компонент із сигналів зі стохастичною повторюваністю.

3. Досліджено властивості перетворення Гільберта багатоконпонентних ПНВС з низькочастотною модуляцією несучих гармонік, проведено аналіз кореляційної та спектральної структури їх аналітичного сигналу та обвідної, розроблено методи оцінювання їх характеристик, а також проведено порівняння результатів з відомими літературними даними.

Результати розділу 4 опубліковано у наукових працях [1, 4, 5, 7, 8].

## РОЗДІЛ 5

### АНАЛІЗ ВУЗЬКОСМУГОВИХ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

#### 5.1. Симуляція та аналіз сигналу коливання балки з тріщиною

Розглянемо вимушенні коливання балки з тріщиною під дією стохастичних навантажень. Як модель сигналу цих коливань пропонуємо використати модель Райса (квадратурну модель):

$$v(t) = v_c(t) \cos \omega t + v_s(t) \sin \omega t, \quad (5.1)$$

тут  $v_c(t)$ ,  $v_s(t)$  є некорельованими стаціонарними випадковими процесами з відповідно кореляційними функціями  $R_c^{(v)}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{v}_c(t) \overset{\circ}{v}_c(t+u) \right\}$  та  $R_s^{(v)}(u) = \mathbb{E} \left\{ \overset{\circ}{v}_s(t) \overset{\circ}{v}_s(t+u) \right\}$ , де  $\overset{\circ}{v}_{c,s}(t) = v_{c,s}(t) - m_{c,s}$ ,  $m_{c,s} = \mathbb{E} \left\{ v_{c,s}(t) \right\}$ . Кореляційна функція випадкового процесу (5.1) у цьому випадку залежить лише від значення часу затримки  $u$  (лагу):

$$R_v(u) = \frac{1}{2} \left[ R_c(u) + R_s(u) \right] \cos \omega u,$$

а функція математичного сподівання цього процесу відповідно дорівнює

$$m_v(t) = \mathbb{E} \left\{ v(t) \right\} = m_c^{(v)}(t) \cos \omega t + m_s^{(v)}(t) \sin \omega t.$$

Для комп'ютерного симулювання процесу (5.1) була використана білінійна модель з одним ступенем свободи (BSDO model) [162, 175, 176], яку можна представити наступним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + \omega_c^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} (1 + \operatorname{sgn} \xi) \right] = v(t),$$

де  $\alpha = \frac{k_c - k}{k}$ ,  $k_c$  та  $k$  є значеннями жорсткості балки при закритій і відкритій тріщині відповідно,  $\omega_c = \sqrt{k_c/m}$ ,  $m$  еквівалентна маса, а  $\beta$  – коефіцієнт згасання. Таке диференціальне рівняння часто використовують при аналізі вимушених коливань балки з тріщиною коли навантаження є гармонічними [175, 176]. Чисельний розв’язок був отриманий для режиму суперрезонансу, коли частота  $\nu$  дорівнювала половині основної резонансної частоти. Апроксимація для кореляційних функцій  $R_c^{(\nu)}(u) = R_s^{(\nu)}(u)$  була вибрана у вигляді виразу  $R_c(u) = De^{-\alpha_c|u|}$ . Значення параметрів були наступними:  $\omega_c = 2\pi$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\alpha_c = \alpha_s = 0.01$ ,  $D = 10^4$ ,  $m_c = 10^2$ ,  $m_s = 0$ . Фрагмент симульованого часового ряду показано на рис. 5.1.

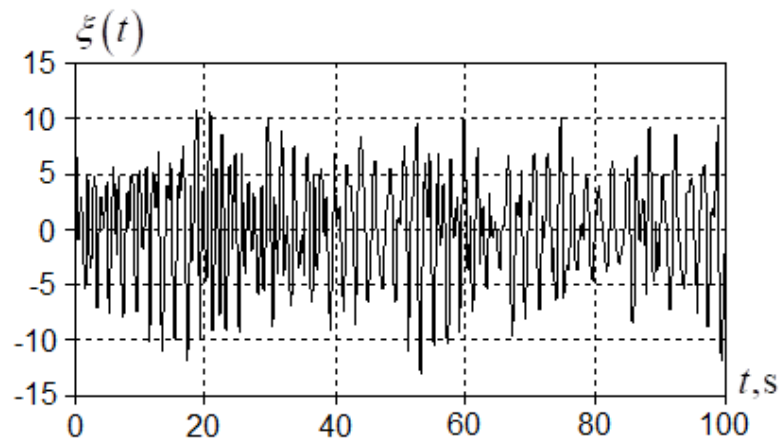


Рисунок 5.1 – Фрагмент симульованого часового ряду

На рис. 5.2а представлено графік залежності нульового кореляційного компонента від  $u$ , обчисленого з використанням наступної формули

$$\hat{B}_0^{(\xi)}(rh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \left[ \xi(nh) - \hat{m}_\xi(nh) \right] \left[ \xi((n+r)h) - \hat{m}_\xi((n+r)h) \right] \right], \quad (5.2)$$

де

$$\hat{m}(nh) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^2 \left[ \hat{m}_k^c \cos(k\hat{\omega}_0 nh) + \hat{m}_k^s \sin(k\hat{\omega}_0 nh) \right],$$

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh), \quad \begin{cases} \hat{m}_k^c \\ \hat{m}_k^s \end{cases} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi(nh) \begin{cases} \cos(k\hat{\omega}_0 nh) \\ \sin(k\hat{\omega}_0 nh) \end{cases}, \quad (5.3)$$

де  $K$  розмір вибірки,  $\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\hat{T}}$ , а  $\hat{T}$  оцінка періоду, тобто координата точки екстремуму статистики (5.3) [102, 87]. На рис. 5.2б показана оцінка нульової спектральної компоненти, яку обчислювали по наступній формулі:

$$\hat{f}_0^{(\xi)}(\omega) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^L [k(nh) B_0^{(\xi)}(nh) \cos(\omega nh)], \quad (5.4)$$

де  $L = u_m/h$ ,  $u_m$  точка усічення корелелограми,  $k(nh)$  – вікно Хеммінга

$$k(u) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\pi \frac{u}{u_m}\right), & |u| \leq u_m, \\ 0, & |u| > u_m. \end{cases}$$

З рис. 5.2б видно, що оцінка  $\hat{f}_0^{(\xi)}(\omega)$  має два чіткі піки в точках  $\{\hat{\omega}_0, 2\hat{\omega}_0\}$ . Дві вузькосмугові складові  $v_1(t)$  та  $v_2(t)$  можна екстрагувати фільтром з передавальними функціями  $H_1(\omega)$  та  $H_2(\omega)$  (див. розділ 4.3):

$$v_1(t) = \xi_1^c(t) \cos \hat{\omega}_0 t + \xi_1^s(t) \sin \hat{\omega}_0 t,$$

$$v_2(t) = \xi_2^c(t) \cos 2\hat{\omega}_0 t + \xi_2^s(t) \sin 2\hat{\omega}_0 t.$$

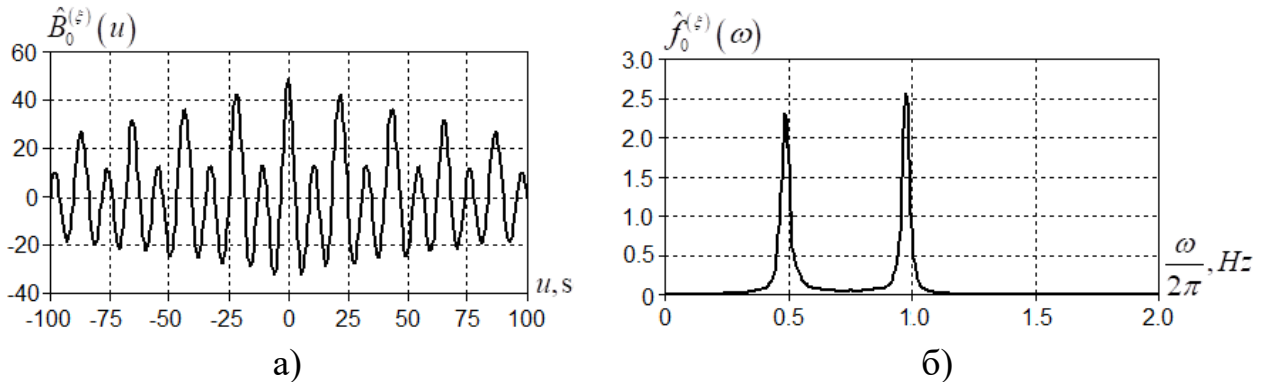


Рисунок 5.2 – Оцінки нульового кореляційного (а) та спектрального (б) компонентів

Перетворення Гільберта від цих компонент буде таким:

$$\mathbb{H}\{\xi_k(t)\} = \eta_k(t) = \xi_k^c(t) \sin(k\hat{\omega}_0 t) - \xi_k^s(t) \cos(k\hat{\omega}_0 t), \quad k = \overline{1, 2}.$$

І для квадратур цих компонент відповідно отримаємо

$$\xi_k^c(t) = v_k(t) \cos(k\hat{\omega}_0 t) + \eta_k(t) \sin(k\hat{\omega}_0 t), \quad k = \overline{1, 2}, \quad (5.5)$$

$$\xi_k^s(t) = v_k(t) \sin(k\hat{\omega}_0 t) - \eta_k(t) \cos(k\hat{\omega}_0 t), \quad k = \overline{1, 2}. \quad (5.6)$$

На основі виразів (5.5) та (5.6) отримують ряди квадратур, а оцінки їх авто- та взаємкореляційних функцій розраховують наступним чином:

$$\hat{R}_{kl}^{c,s}(rh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi_k^{c,s}(nh) \xi_l^{c,s}((n+r)h)], \quad \hat{R}_{kl}^{cs}(rh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi_k^c(nh) \xi_l^s([n+r]h)].$$

Графіки залежностей оцінок авто- та взаємкореляційних функцій від часу затримки кожної компоненти показані на рис. 5.3. З рис. 5.3 видно, що значення автокореляційних функцій є подібними, а значення взаємкореляційної функції є близькими до нуля.

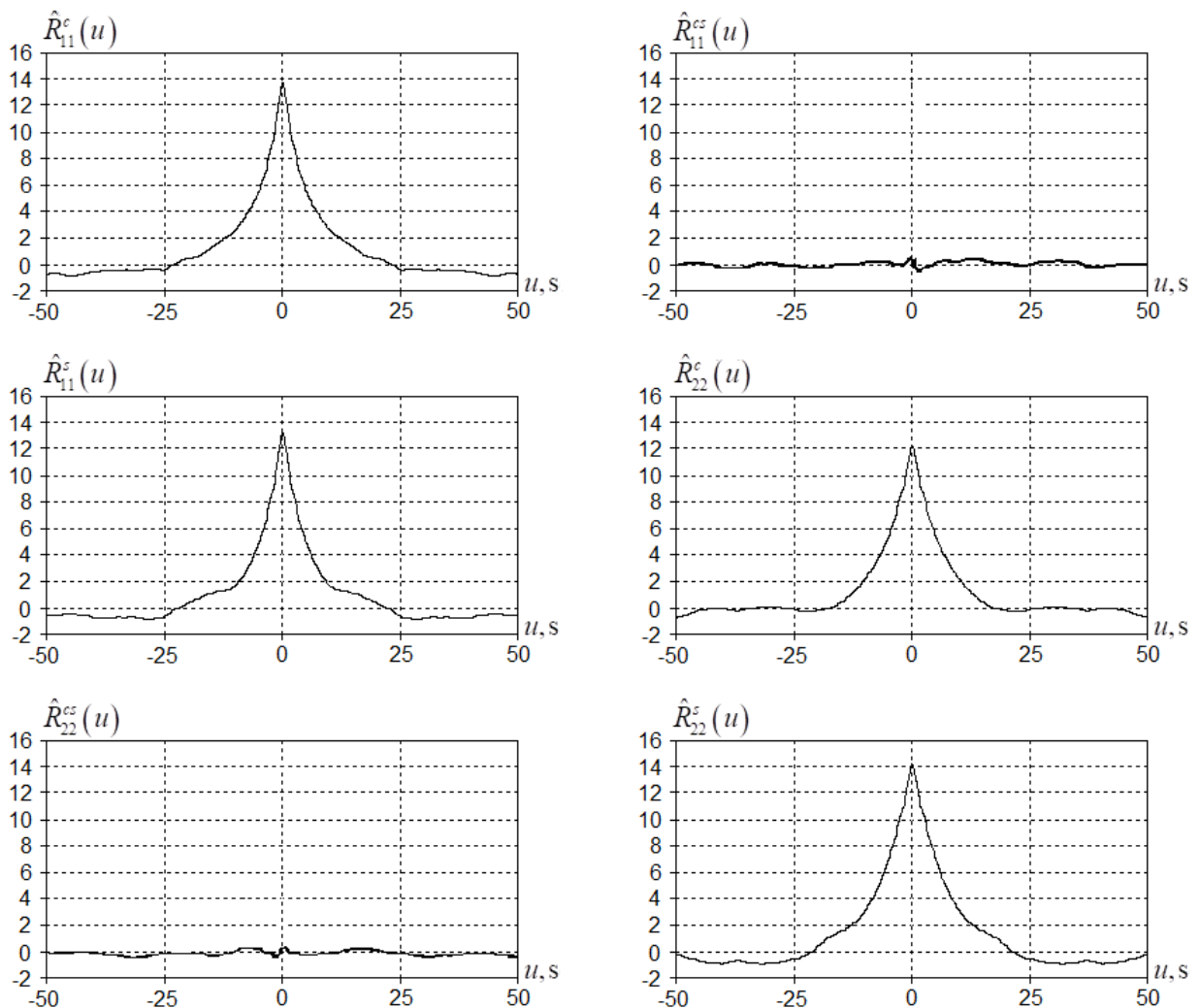


Рисунок 5.3 – Оцінки авто- та взаємкореляційних функцій різних компонент

Отже, кожна екстрагована компонента може розглядатися як стаціонарний випадковий процес із автокореляційною функцією виду

$R_{v_k}(u) = \frac{1}{2} [R_{kk}^c(u) + R_{kk}^s(u)]$ . Оцінка кореляційної функції аналітичного сигналу

для кожної компоненти відповідно дорівнює

$$\hat{R}_{\zeta_k}(u) = 4 \int_0^{\infty} [\hat{f}_0^{(v_k)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega, \quad k = \overline{1, 2},$$

де

$$\hat{f}_0^{(v_k)}(\omega) = \frac{1}{4} [\hat{f}_{kk}^c(\omega + k\omega_0) + \hat{f}_{kk}^s(\omega + k\omega_0) + \hat{f}_{kk}^c(\omega - k\omega_0) + \hat{f}_{kk}^s(\omega - k\omega_0)].$$

А оцінки спектральних густин квадратур  $k$ -ої компоненти

$$\hat{f}_{kk}^{c,s}(\omega) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^L [\hat{R}_{kk}^{c,s}(nh) k(nh) \cos(\omega nh)]$$

показані на рис. 5.4.

Аналіз графіків оцінок спектральних густин квадратур  $k$ -их компонент, а саме їх вигляд у формі чітких високих піків дозволяє нам вважати вимушені коливання виду:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^2 [\xi_k^c(t) \cos k\hat{\omega}_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\hat{\omega}_0 t], \quad (5.7)$$

бікомпонентним вузькосмуговим випадковим сигналом. З результатів обчислень слідує, що величини оцінок  $\hat{R}_{12}^c(u)$  та  $\hat{R}_{12}^s(u)$  є малими у порівнянні зі значеннями автокореляційних функцій  $\hat{R}_{11}^c(u)$ ,  $\hat{R}_{11}^s(u)$ ,  $\hat{R}_{22}^c(u)$ ,  $\hat{R}_{22}^s(u)$ .

Однак, значення величини взаємокореляційних функцій  $\hat{R}_{12}^{cs}(u)$  та  $\hat{R}_{12}^{sc}(u)$  є лише трохи менші за значення автокореляційних функцій. Тому сигнал (5.7) можна переписати у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^2 [\xi_k(t) e^{ik\hat{\omega}_0 t} + \bar{\xi}_k(t) e^{-ik\hat{\omega}_0 t}].$$

Його кореляційну функцію можна представити як:

$$b_{\xi}(t, u) = 2 \operatorname{Re} \{ S_1(t, u) + S_2(t, u) \},$$

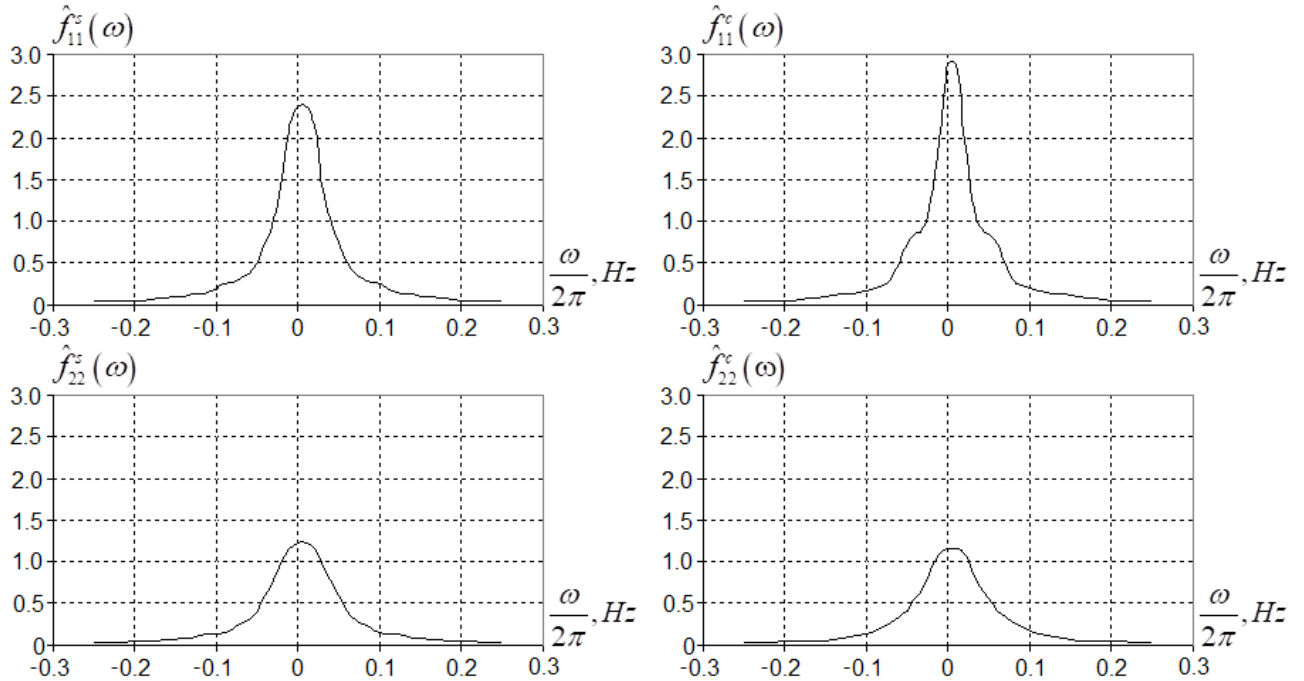
де

$$S_1(t, u) = \sum_{l=1}^2 [R_{ll}^{(\xi)}(u) e^{il\hat{\omega}_0 u}] + R_{21}^{(\xi)}(u) e^{i\hat{\omega}_0(u-t)} + R_{12}^{(\xi)}(u) e^{i\hat{\omega}_0(t+2u)}, \quad (5.8)$$

$$S_2(t, u) = \left[ R_{21}^{(\xi)}(u) e^{i\omega_0 u} + R_{12}^{(\xi)}(u) e^{i2\omega_0 u} \right] e^{i3\omega_0 t}. \quad (5.9)$$

i

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = -\frac{i}{4} \left[ R_{kl}^{cs}(u) - R_{kl}^{sc}(u) \right], \quad k, l = \overline{1, 2}; \quad k \neq l.$$

Рисунок 5.4 – Оцінки спектральної густин квадратур  $k$ -ої компоненти

Гільберт-трансформанта сигналу (5.7) буде:

$$\eta(t) = \mathbb{H}\{\xi(t)\} = \sum_{k=1}^2 \left[ \xi_k^c(t) \sin(k\omega_0 t) - \xi_k^s(t) \cos(k\omega_0 t) \right],$$

тоді її автокореляційну  $b_\eta(t, u)$  і взаємкореляційні  $b_{\xi\eta}(t, u)$  і  $b_{\eta\xi}(t, u)$  функції можна означити виразами:

$$b_\eta(t, u) = 2 \operatorname{Re}\{S_1(t, u) - S_2(t, u)\},$$

$$b_{\xi\eta}(t, u) = 2 \operatorname{Im}\{S_1(t, u) + S_2(t, u)\},$$

$$b_{\eta\xi}(t, u) = 2 \operatorname{Im}\{S_2(t, u) - S_1(t, u)\}.$$

З (5.8) і (5.9) випливає, що аналітичний сигнал є ПНВС. Його кореляційна функція містить тільки першу гармоніку і має наступний вигляд:

$$b_\zeta(t, u) = \sum_{l=1}^2 \left[ R_{ll}^c(u) - R_{ll}^s(u) \right] e^{il\omega_0 u} - i \left[ \begin{aligned} & \left[ R_{21}^{sc}(u) - R_{21}^{cs}(u) \right] e^{i\omega_0(u-t)} + \\ & + \left[ R_{12}^{cs}(u) - R_{12}^{sc}(u) \right] e^{i\omega_0(2u+t)} \end{aligned} \right]. \quad (5.10)$$



Легко помітити, що дійсна та уявна частина кореляційної функції (5.10) є парою Гільберта.

Стаціонарне наближення кореляційної функції аналітичного сигналу  $B_1^{(\zeta)}(u) = b_\zeta(0, u)$  дорівнює сумі кореляційних функцій аналітичного сигналу компонент моделі Райса вимушених коливань (див. (5.10)). Потужність змін дисперсії  $b_\zeta(t, 0)$  визначається кореляціями квадратур компонент сигналу при нульовому зміщенні  $u = 0$ . Оскільки виникнення кореляції та поява другої гармоніки викликані появою дефекту, то співвідношення

$$\gamma = \frac{|B_1^{(\zeta)}(0)| + R_{22}^c(0) + R_{22}^s(0)}{R_{11}^c(0) + R_{11}^s(0)}$$

можна вибрати як індикатор для виявлення дефекту. Оскільки ця величина враховує зміни в часі характеристик явища, то вона є більш чутливою до росту тріщини, ніж індикатори сформовані на основі амплітуд детермінованих коливань, які припускають, що явище не змінюється на періоді спостереження і беруть усереднену оцінку за цей період [175, 176].

Слід підкреслити, що виділені компоненти вимушених коливань не є незалежними, і тоді класичний метод такий як ЕДМ використовувати не коректно, бо основне припущення з його використання до нестационарних процесів є незалежність власних мод (компонентів) цих процесів.

Тому запропоновано використовувати наступну методичку, яку стисло можна представити такою покроковою послідовністю:

- аналіз спектрального складу рядів за допомогою методів стаціонарних випадкових процесів [4];
- пошук прихованих періодичностей першого порядку та розділення детермінованої та стохастичної частин [87, 102, 177];
- виявлення та аналіз прихованих періодичностей другого порядку [87, 102, 177];
- смугова фільтрація та виділення окремих стохастично модульованих компонентів;

- виділення квадратур за допомогою перетворення Гільберта;
- кореляційний та спектральний аналіз квадратур та їх взаємокореляційний аналіз;
- аналіз аналітичного сигналу.

## 5.2 Аналіз віброцигналу редуктора промислового вітрогенератора

Для аналізу низькочастотної модуляції було розглянуто вібрації в редукторі вітрової турбіни. Сигнал віброприскорення реєструвався протягом 3.35 с. У результаті отримано часовий ряд з 8192 точок, котрий можна представити як ПНВС. Отримана оцінка періоду функції математичного сподівання ряду рівна  $\hat{T} = 427 \cdot 10^{-4} \text{ c}$ , що є близьким значенням до відомого періоду обертання шестерні, визначеного штатним тахогенератором під час відбору сигналу вібрації. Амплітудний спектр детермінованої складової періодичних коливань  $A(k\hat{f}_0) = \left[ (\hat{m}_k^c)^2 + (\hat{m}_k^s)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ , обчислений використовуючи рівняння (5.3), показаний на рис. 5.5. На рис. 5.6 представлена оцінка спектральної густини потужності стохастичної складової сигналу  $\hat{\xi}(t) = \xi(t) - \hat{m}(t)$  в області низьких частот.

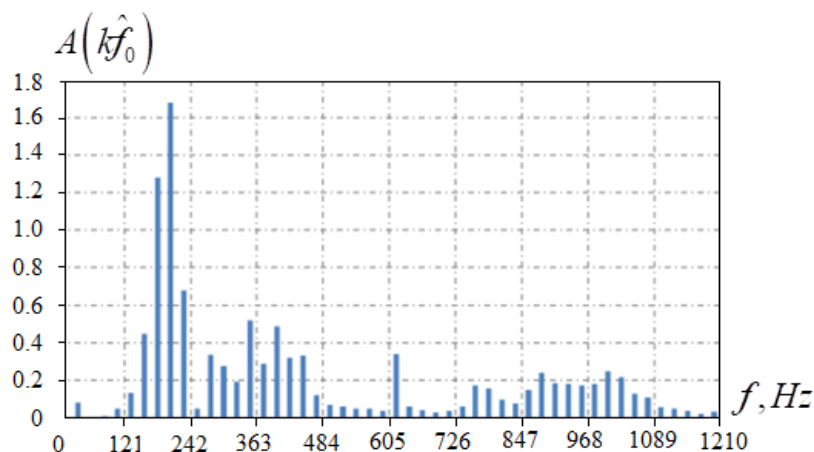


Рисунок 5.5 – Амплітудний спектр детермінованої складової періодичних коливань

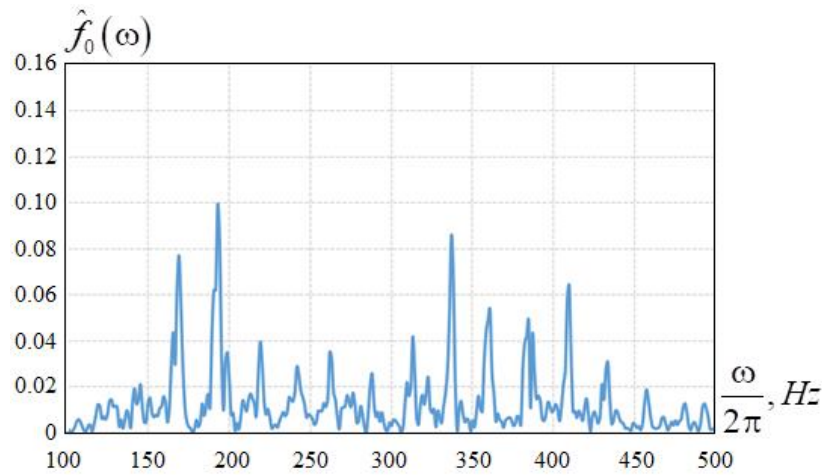


Рисунок 5.6 – Оцінка спектральної густини потужності стохастичної складової

Оцінка  $\hat{m}(t)$  обчислена використовуючи формулу

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{50} [\hat{m}_k^c \cos(k\hat{\omega}_0 t) + \hat{m}_k^s \sin(k\hat{\omega}_0 t)].$$

Як бачимо, спектр потужності має форму гребінок різної амплітуди й ширини. Найбільші значення відповідають точкам частоти яких близькі до частоти обертання шестерні та кратних до неї. Результати обробки показали, що залишковий сигнал  $\overset{\circ}{\xi}(t)$  (стохастична складова) є періодично нестационарним другого порядку.

Отримана оцінка періоду дисперсії збігається з оцінкою періоду функції математичного сподівання з точністю до чотирьох знаків після коми. На рис. 5.7а наведено графік часової залежності дисперсії визначеної наступним чином:

$$\hat{b}_{\xi}(t, 0) = \hat{B}_0^{(\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{15} [\hat{C}_k^{(\xi)}(0) \cos(k\hat{\omega}_0 t) + \hat{S}_k^{(\xi)}(0) \sin(k\hat{\omega}_0 t)],$$

де

$$\hat{B}_0^{(\xi)}(0) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\overset{\circ}{\xi}(nh)]^2, \quad \begin{cases} \hat{C}_k^{(\xi)}(0) \\ \hat{S}_k^{(\xi)}(0) \end{cases} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\overset{\circ}{\xi}(nh)]^2 \begin{cases} \cos(k\hat{\omega}_0 nh) \\ \sin(k\hat{\omega}_0 nh) \end{cases}.$$

На рис. 5.7б показано амплітудний спектр  $V(k\hat{f}_0) = \left[ [\hat{C}_k^{(\xi)}(0)]^2 + [\hat{S}_k^{(\xi)}(0)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ .

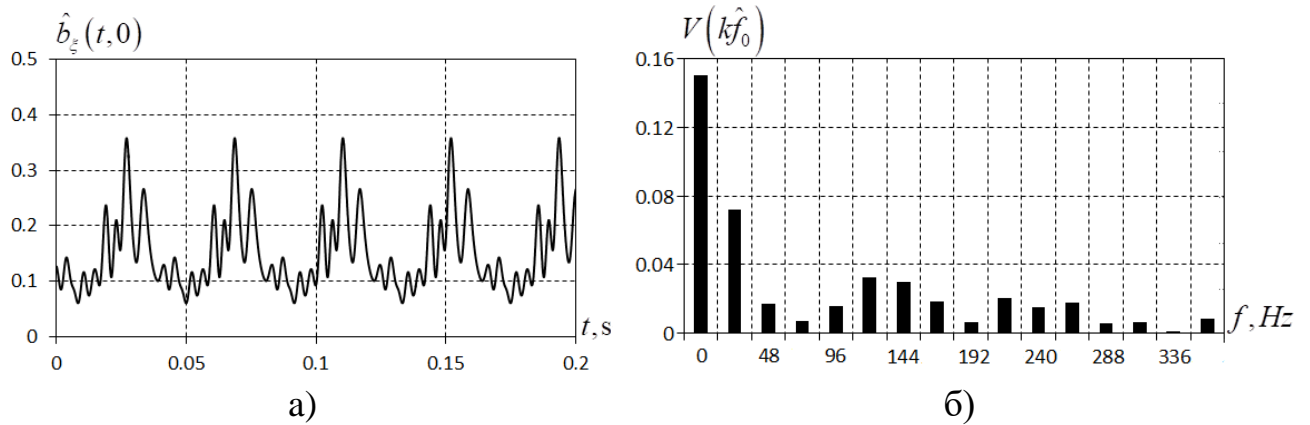


Рисунок 5.7 – Оцінки дисперсії (а) та її амплітудного спектру (б)

З рис. 5.6 видно, що несучі гармоніки ПНВС мають вузькосмугову модуляцію. Для виокремлення кожної модульованої складової використали набір фільтрів з передавальними функціями виду:

$$H_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[ k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right], \\ 0, & \omega \notin \left[ k\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, k\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right]. \end{cases}$$

Оцінки стаціонарного наближення кореляційної функції та спектральної густини потужності були обчислені на основі виразів (5.2) та (5.4). Графіки цих оцінок для восьмої складової (її математичне сподівання було найбільшим) показані на рис. 5.8. Оцінка кореляційної функції має вигляд повільно зникаючих коливань. Оцінка спектральної густини потужності має різкий пік на частоті близькій до частоти восьмої гармоніки, також спостерігався ще один менший пік на частоті близькій до суми частот обертання вала та шестерні (рис. 5.8б). Коливання на цій частоті спостерігається як варіація амплітуди на корелелограмі (рис. 5.8а).

Параметри модуляції цієї компоненти аналізувалися шляхом дослідження кореляційних та спектральних властивостей квадратур, отриманих за формулами:

$$\xi_8^c(nh) = v_8(nh) \cos(8\hat{\omega}_0 nh) + \eta_8(nh) \sin(8\hat{\omega}_0 nh),$$

$$\xi_8^s(nh) = v_8(nh) \sin(8\hat{\omega}_0 nh) - \eta_8(nh) \cos(8\hat{\omega}_0 nh).$$

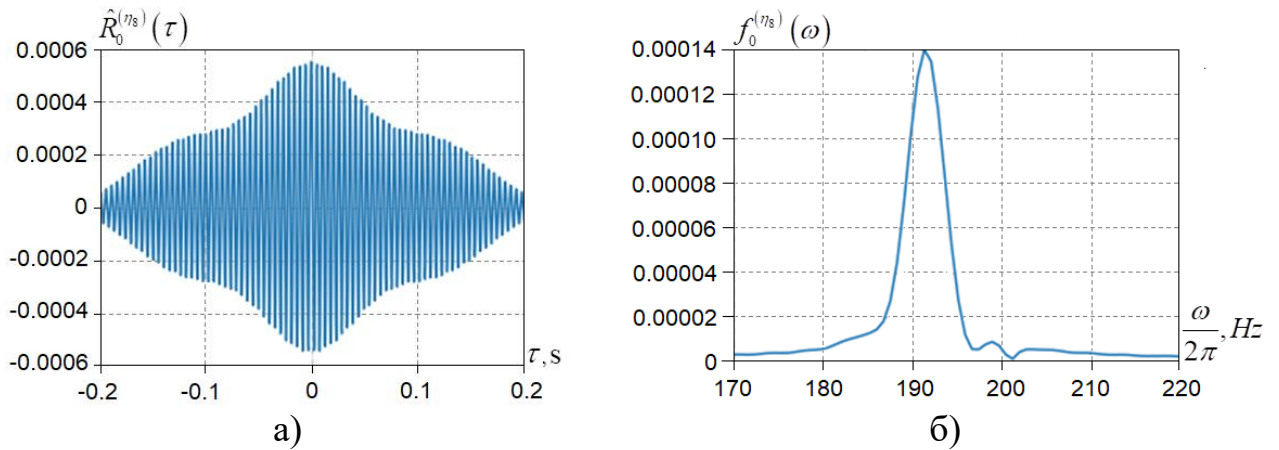


Рисунок 5.8 – Оцінки кореляційної функції (а) та спектральної густини потужності (б) восьмої компоненти

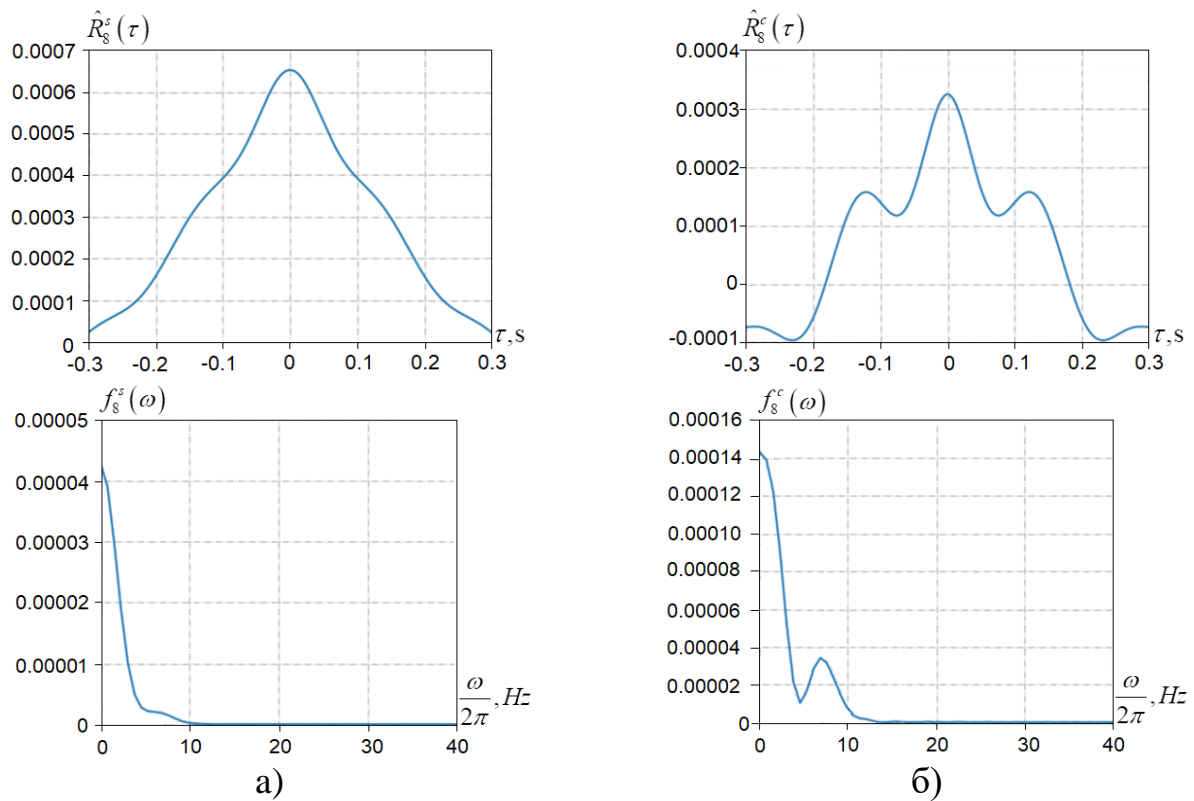


Рисунок 5.9 – Оцінки кореляційної функції та спектральної густини потужності синусної (а) та косинусної (б) квадратури восьмої компоненти

Добре видно, що низькочастотні коливання проявляються у залежностях кореляційної функції косинусної квадратури від часу затримки та залежностях спектральних густин потужності квадратур від частоти (рис. 5.9). З цього випливає, що автокореляційні функції квадратур різні, а це означає, що виділена вузькосмугова компонента є періодично нестационарною другого порядку. Цей висновок також випливає з аналізу залежності функціонала

$$\hat{M}(f) = \left[ \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi_8^2(nh) \cos(16\pi fnh) \right]^2 + \left[ \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi_8^2(nh) \sin(16\pi fnh) \right]^2$$

від тестової частоти  $f$  (рис. 5.10). Ця залежність має чітко визначений пік на частоті, що дорівнює основній частоті ПНВС.

Кореляційна функція виділеної компоненти має форму

$$\hat{b}_{v_8}(u, t) = \hat{B}_0^{(v_8)}(u) + \hat{C}_2^{(v_8)}(u) \cos(32\pi \hat{f}_0 t) + \hat{S}_2^{(v_8)}(u) \sin(32\pi \hat{f}_0 t).$$

Оцінка нульового кореляційного компонента  $\hat{B}_0^{(v_8)}(u)$  показана на рис. 5.8.

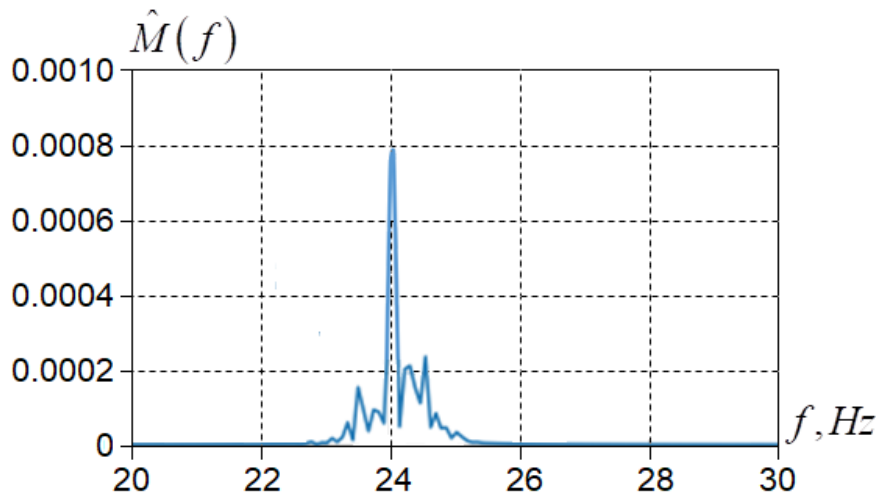


Рисунок 5.10 – Залежність функціонала  $\hat{M}(f)$  від тестової частоти

Оцінки для других кореляційних компонентів

$$\begin{cases} \hat{C}_2^{(v_8)}(jh) \\ \hat{S}_2^{(v_8)}(jh) \end{cases} = \frac{1}{K+1} \sum_{n=0}^K \left[ v_8(nh) v_8((n+j)h) \begin{cases} \cos(16\omega_0 nh) \\ \sin(16\omega_0 nh) \end{cases} \right]$$

також мають форму зникаючих коливань, які схожі на форму коливань нульового кореляційного компонента.

Аналіз решти спектральних складових вібрації у низькочастотній області показав, що їх кореляційні та спектральні структури подібні до розглянутої тут компоненти. Ці компоненти вібрації є вузькосмуговими сигналами ПНВС. Зауважимо, що позаяк ці компоненти є корельованими, то агрегована кореляційна функція низькочастотного сигналу є сумою авто- та взаємкореляційних функцій усіх спектральних складових вібрації. А, оскільки, дисперсія аналітичного сигналу залежна лише від взаємкореляцій

спектральних складових, то потужність її змін в часі не може бути більшою від подвійної величини дисперсії вихідного сигналу.

### 5.3 Дослідження періодичної структури магнітного поля Землі

Отримані вище теоретичні результати були застосовані до даних іншого походження – геофізики, а саме аналізу структури добових зміни вертикальної складової магнітного поля Землі. Вибрана реалізація тривалістю 52 дні магнетометричної станції Барроу, США, крок вибірки даних  $h=1 год$ . Вихідний сигнал був попередньо профільтований для усунення низькочастотних компонент, використовуючи *Band-pass recursive filter* (order 6, *band* [0,003; 0,083]).

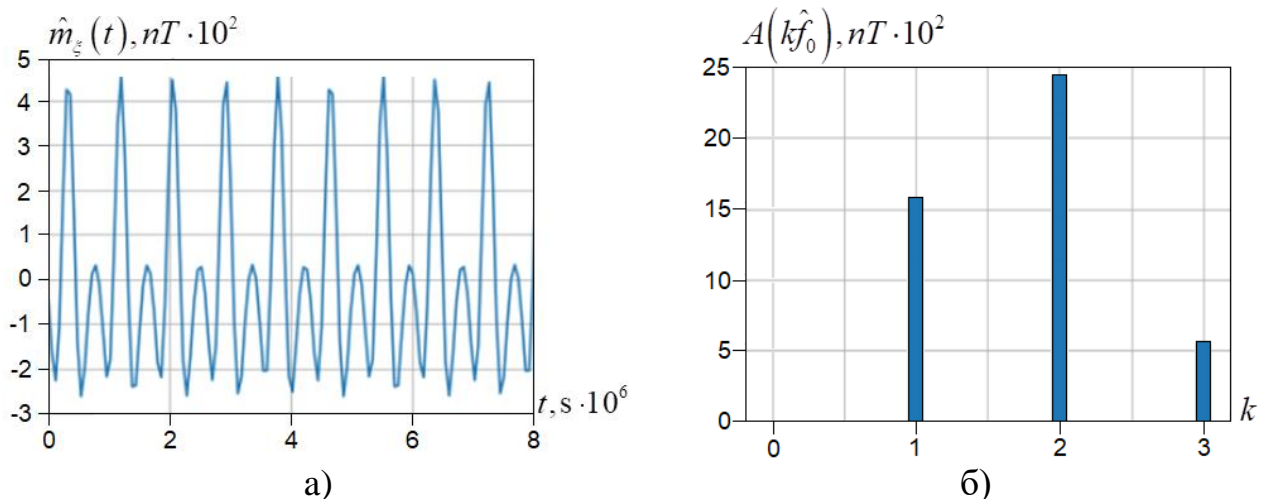


Рисунок 5.11 – Оцінка функції математичного сподівання (а) та її амплітудний спектр (б)

Оцінка функції математичного сподівання наведена на рис. 5.11а, а графік її амплітудного спектру показує, що вона містить гармоніки з періодами: доба; пів доби та третина доби. Оцінка стаціонарного наближення спектральної густини потужності (рис. 5.12) має два чітко розділені піки, що дозволяє представити стохастичну складову цього часового ряду у вигляді двох вузькосмугових випадкових процесів (рівняння (5.7)).

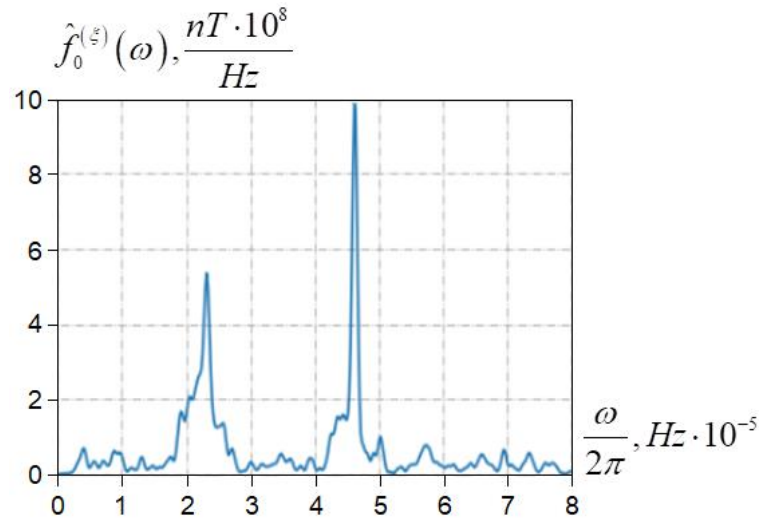


Рисунок 5.12 – Оцінка нульового спектрального компонента

Оцінки дисперсії та її амплітудного спектру представлені на рис. 5.13. Як бачимо, зміни в часі потужності стохастичних коливань визначаються чотирма гармоніками. Друга гармоніка описує часові зміни дисперсії першої випадкової складової, а четверта гармоніка описує часові зміни другої випадкової складової. Перша і третя гармоніки дисперсії виникають у результаті кореляції випадкових компонентів. Тут амплітуда першої гармоніки також включає складову, визначену кореляцією першої та нульової випадкових складових, що містяться у ряді після фільтрації. Випадкові компоненти сигналу були виділені за допомогою смугових фільтрів, для більш детального дослідження структури стохастичної повторюваності магнітного поля Землі. Аналіз результатів показав, що випадкові компоненти є періодично нестационарними.

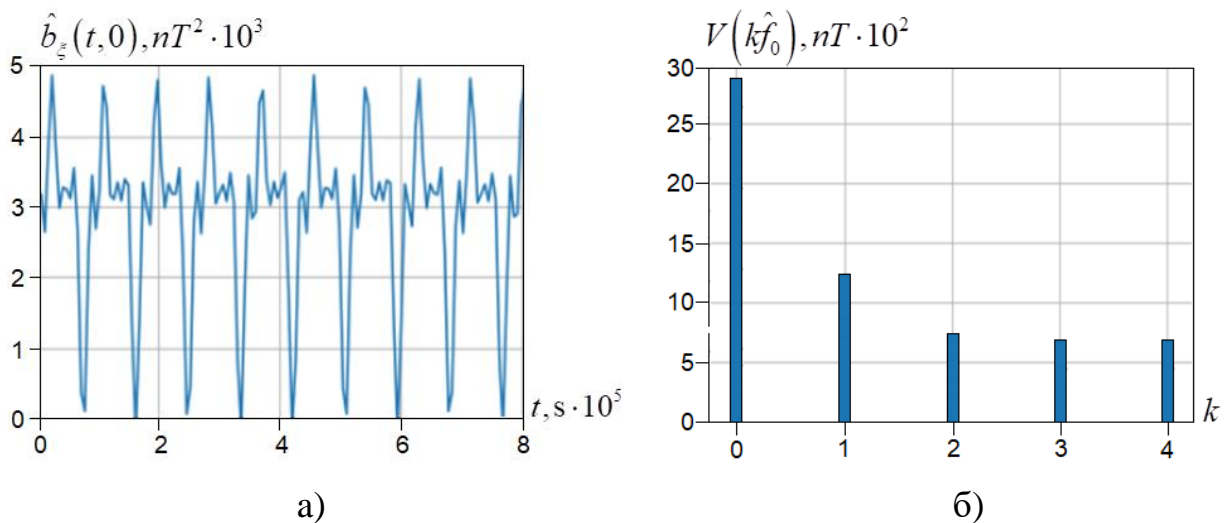


Рисунок 5.13 – Оцінка дисперсії (а) та її амплітудний спектр (б)



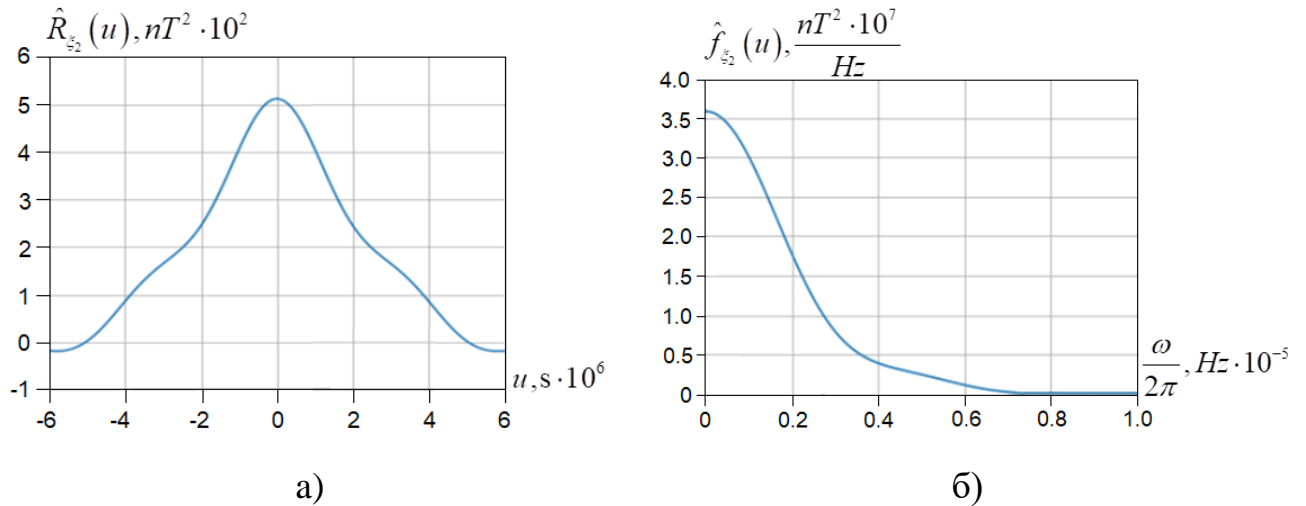


Рисунок 5.14 – Оцінка автокореляційної функції (а) та спектральної густини (б) косинусної квадратури другої компоненти

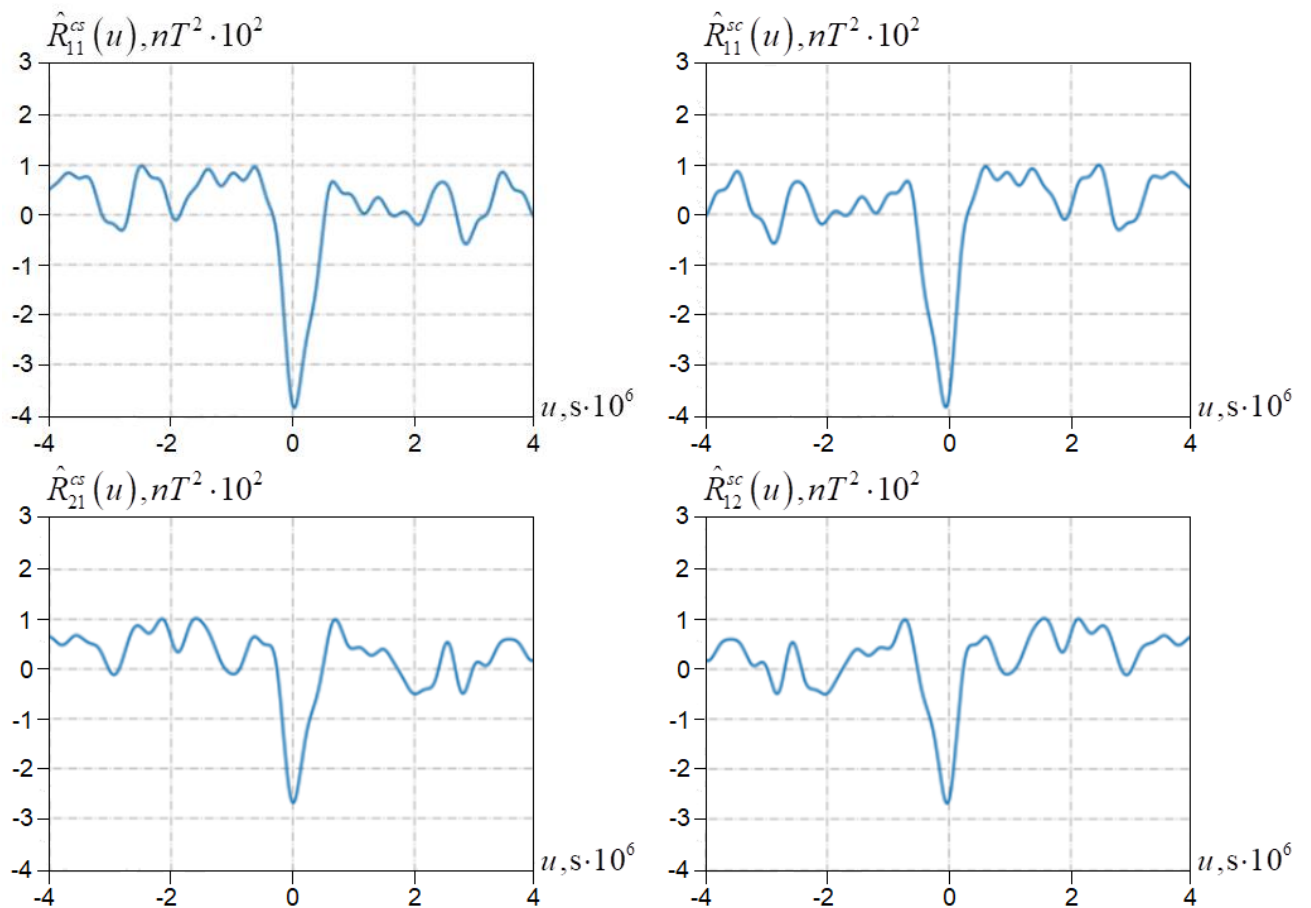


Рисунок 5.15 – Оцінки взаємкореляційних функції квадратур

Використовуючи перетворення Гільберта та вирази (5.5) та (5.6), отримано реалізації для кожної квадратури та проведено їх статистичний аналіз. Було виявлено, що кореляційні функції та спектральні густини потужності квадратур

мають подібні властивості. Кореляційні функції мають вигляд монотонних, швидко зникаючих функцій (рис. 5.14а), спектри яких зосереджені біля нуля (рис. 5.14б). Зауважимо, що значення оцінок для синусної та косинусної квадратур для окремих компонентів різні; це є однією з причин нестационарності компонентів. Другою причиною цього є взаємкореляції синусної та косинусної квадратур (рис. 5.15). Квадратури різних компонент також є корельованими (рис. 5.15).

З розділу 4.1 випливає, що періодичні зміни в часі дисперсії аналітичного сигналу характерні для взаємкореляцій квадратур. Для виявлення цих змін у розглянутому тут випадку використано функціонал

$$M_1(f) = [\hat{C}_1^{(\zeta)}(0, f)]^2 + [\hat{S}_1^{(\zeta)}(0, f)]^2, \quad (5.11)$$

де

$$\begin{cases} \hat{C}_1^{(\zeta)}(0, f) \\ \hat{S}_1^{(\zeta)}(0, f) \end{cases} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} [\xi^{\circ}(nh) + \eta^{\circ}(nh)] \begin{cases} \cos 2\pi fnh \\ \sin 2\pi fnh \end{cases}.$$

Залежність функціонала (5.11) від пробної частоти показана на рис. 5.16. На графіку є чіткий пік на частоті, що відповідає добовому періоду, і це свідчить про періодичну нестационарність аналітичного сигналу.

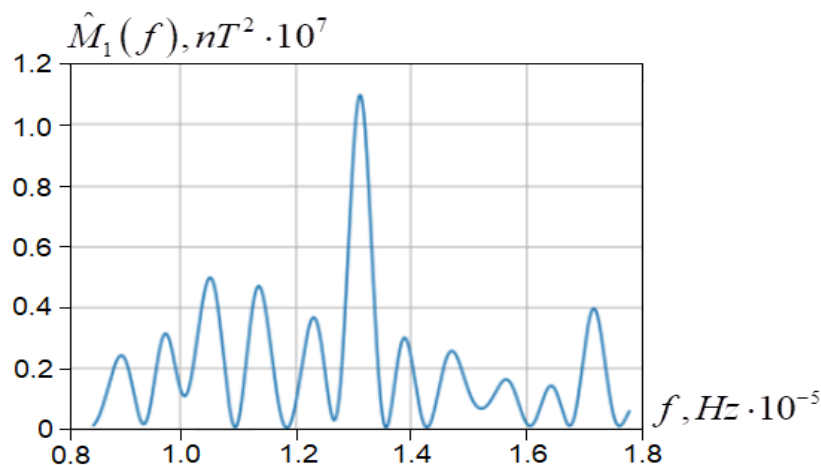


Рисунок 5.16 – Залежність функціонала (5.11) від пробної частоти

Отримана структура добових змін вертикальної складової магнітного поля Землі може бути параметризована та використана для комп'ютерного моделювання поведінки магнітного поля Землі.

#### 5.4. Висновки до розділу 5

1. Представлено та проаналізовано новий підхід до статистичного аналізу вібраційних сигналів, який полягає у розділенні сигналу на смуги частот і оцінюванні квадратур цих смуг, які потім використовуються для побудови параметричної моделі процесу. На основі цього підходу запропоновані нові індикатори, які враховують взаємкореляційні зв'язки виділених стаціонарних компонент, для раннього виявлення дефектів у обертових вузлах. Запропонований підхід застосовано до: аналізу росту тріщини у балці під дією циклічних навантажень; при статистичному аналізі стохастичної складової вібраційного сигналу редуктора промислового вітрогенератора для виявлення дефекту зубчастого колеса на різних етапах його розвитку; для параметризації та комп'ютерного моделювання вертикальної складової магнітного поля Землі.

2. На основі методу декомпозиції розроблено методи аналізу стохастичних модуляцій основних гармонічних складових вібрації, що є результатом пошкодження елементів конструкції. Проаналізовано вплив ширини частотної смуги окремих модуляцій на результати аналізу, а також на основі характеристик модуляцій обґрунтовано діагностичні ознаки для виявлення та типізації дефектів. Проаналізовано вплив параметрів алгоритму обробки та характеристик вхідного сигналу на виділення його стаціонарних компонент. Показано, що накладання спектральних густин модулюючих процесів впливає на точність оцінювання виділених стаціонарних компонент.

Результати розділу 5 опубліковано у наукових працях [3, 4, 8-10, 12, 13].

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано важливе наукове завдання розроблення підходу до аналізу і параметричного моделювання сигналів зі стохастичною повторюваністю, що ґрунтується на представленні ПНВП через стаціонарно зв'язані випадкові процеси, при цьому з використанням перетворення Гільберта розвинуто методи аналізу низькочастотної стохастичної амплітудно-фазової модуляції несучих гармонік періодично нестаціонарних вібраційних сигналів для виявлення характерних особливостей дефектів елементів обертових вузлів, розроблено методи виділення квадратурних складових у випадку вузькосмугової модуляції, окреслені можливості та границі застосування популярного у вібродіагностиці “методу обвідної”.

Одержано такі основні наукові та практичні результати:

1. Вперше показано, що періодично нестаціонарний випадковий сигнал і його Гільберт трансформанта є взаємозв'язаними ПНВП, встановлено зв'язки між кореляційною функцією сигналу та кореляційною функцією Гільберт трансформанти, а також між коефіцієнтами їх Фур'є розкладу, досліджено властивості їх взаємокореляційних функцій та взаємокореляційних компонентів.

Встановлено умови стаціонарності аналітичного сигналу побудованого на основі періодично нестаціонарного випадкового сигналу та його Гільберт трансформанти. Показано, що при їх виконанні нульові кореляційні компоненти сигналу та його Гільберт трансформанти є однаковими, а компоненти вищих порядків відрізняються тільки знаками. Нульові взаємокореляційні компоненти є непарними функціями та мають різні знаки. Вищі взаємокореляційні компоненти є симетричними та пов'язані з вищими кореляційними компонентами сигналу рівністю  $B_k^{(\xi\eta)}(u) = -iB_k^{(\xi)}(u)$ . Кореляційна функція стаціонарного аналітичного сигналу є комплекснозначною, її дійсна та уявна частина є Гільбертовою парою.

2. На основі проведеного аналізу кореляційних та спектральних властивостей перетворення Гільберта однокомпонентного вузькосмугового ПНВП представленого моделлю Райса показано, що спектральні компоненти

сигналу задовольняють умови, за яких аналітичний сигнал є стаціонарним випадковим процесом, тому сума дисперсій квадратурних складових є незмінною в часі, та не може використовуватися як індикатор для виявлення дефектів.

3. Встановлено, що квадратури однокомпонентного вузькосмугового ПНВС є стаціонарно зв'язаними випадковими процесами, а їх авто- та взаємкореляційні функції визначаються як нульовою, так і другою кореляційною компонентою сигналу. Спектральні густини потужності квадратур визначаються нульовою спектральною компонентою сигналу та дійсною частиною другої спектральної компоненти. Взаємспектральна густина квадратур є комплекснозначною, її дійсна частина визначається уявною частиною другої спектральної компоненти, а уявна – різницею між частинами спектру в області додатних та від'ємних частот.

4. Досліджено властивості перетворення Гільберта вузькосмугового багатокомпонентного ПНВП. Показано, що кореляційні компоненти сигналу та його Гільберт трансформанти, порядок яких перевищують число гармонік несучої, відрізняються тільки знаками, а їх взаємкореляційні компоненти є симетричними непарними функціями та визначаються рівністю

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(u) = -iB_k^{(\xi)}(u).$$

Доведено, що аналітичний сигнал є періодично нестаціонарним випадковим процесом за умови корельованості квадратурних складових гармонік різного порядку та отримано формули, що пов'язують його кореляційні компоненти із взаємкореляційними функціями квадратур. Встановлено, спектр амплітуд дисперсії аналітичного сигналу вдвічі вужчий від спектра амплітуд самого сигналу, а величини амплітуд є меншими, оскільки вони не містять в собі амплітуд дисперсії окремих компонент.

5. На основі проведеного аналізу впливу смугової фільтрації на характеристики нестаціонарності сигналу показано, що зменшення ширини смуги фільтрації в області корельованості спектральних складових сигналу приводить як до зменшення числа гармонік кореляційної функції, так і їх амплітуди.

6. На основі проведеного аналізу вимушених коливань балки з втомною тріщиною, під час якого були виділені квадратурні складові вузькосмугових компонент коливань та досліджено їх спектрально-кореляційну структуру було встановлено, що зміни дисперсії в часі таких коливань повністю відображаються у змінах у часі дисперсії аналітичного сигналу. Також встановлено, що зі збільшенням довжини тріщини збільшується як потужність вузькосмугових компонент, так і їх корельованість. Тому, для виявлення тріщин та контролю за їх ростом, доцільно враховувати як зміни середньої потужності коливань, так і зміни в часі спектру амплітуд дисперсії.

7. Досліджено властивості високочастотної модуляції гармонік при обертанні вала редуктора вітрової турбіни. З використанням смугової фільтрації та перетворення Гільберта проведено розділення високочастотних вузькосмугових компонент та виділено їх квадратурні складові. На основі спектрально-кореляційного аналізу останніх показано, що високочастотні компоненти є стаціонарними, однак періодично нестационарно зв'язаними випадковими процесами. Виявлена кореляційна та спектральна структура квадратур дала змогу зробити висновок про те, що високочастотна амплітудна та фазова модуляції, зумовлені резонансними коливаннями, які виникають при ударній взаємодії. Встановлено, що загальний рівень взаємокорельованості високочастотних компонент при наявності дефекту значно перевищує їх середню потужність, тому відіграє вирішальну роль в процесі виявлення дефектів та аналізі їх розвитку.

8. Встановлено, що у випадку вузькосмугової високочастотної амплітудно-фазової модуляції несучих гармонік періодично нестационарного сигналу кореляційна функція даного сигналу та його Гільберт трансформанти є однаковими й тоді так званий квадрат обвідної є випадковим процесом, математичне сподівання якого дорівнює подвоєній дисперсії сигналу та подвійній усередненій за часом потужності сигналу. Це означає, що аналіз обвідної не приносить нових результатів у порівнянні з аналізом самого сигналу, і цей аналіз варто проводити не з використанням перетворення Фур'є, а методами ПНВП.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Lychak O.V.*, The quadrature components of narrowband periodically non-stationary random signals, *Advances in Intelligent Systems and Computing V*, Vol. **1293**, Springer, 2020, p. 696–713, ISBN: 978-3-030-63270-0
- [2] *Javorskyj I.M., Kurapov P.R., Yuzefovych R.M.*, Covariance characteristics of narrowband periodically non-stationary random signals, *Mathematical Modeling and Computing*, 2019, Vol. **6** № **2**, p. 276–288.
- [3] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R.*, Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration stochastic recurrence, *Procedia Structural Integrity*, 2019, Vol. **16**, p. 205–210.
- [4] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kurapov P.*, Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation, *Digital Signal Processing*, 2021, Vol. **116**, 103113.
- [5] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R.*, Model of multicomponent narrow-band periodically non-stationary random signal, *Information extraction and processing*, 2020, **48 (124)**, p. 17–24.
- [6] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R.*, Periodically non-stationary analytic signals and their properties, Proceedings of XIII International Scientific and Technical Conference *Computer Science and Information Technologies (CSIT – 2018)*, Lviv :Lviv Polytechnic National University, 2018, p. 191–194.
- [7] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Semenov P.A.*, The Covariance and Spectral Properties of the Quadrature Components of Narrowband Periodically Non-Stationary Random Signals, *Proceedings of XV International Scientific and Technical Conference Computer Sciences and Information Technologies*, 2020, p. 95–98.
- [8] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P.*, Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field, **2021 IEEE XII**

*International Conference on Electronics and Information Technologies, 2021*, p. 181–185.

- [9] Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Яворський І.М., Аналітичні періодично нестационарні випадкові сигнали у вібродіагностиці, *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / За заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018, Т. 3, с. 41–42.*
- [10] Юзефович Р.М., Яворський І.М., Семенов П.О., Курапов П.Р., Трохим Г.Р., Взаємоспектральний аналіз вібраційних сигналів для виявлення та локалізації дефектів елементів механічних конструкцій, Збірка тез доповідей двадцять другої міжнародної конференції “Сучасні методи та засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики” (до 100-річчя Національної академії наук України), Одеса, 2018, с. 64.
- [11] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Властивості аналітичного сигналу періодично нестационарних випадкових процесів, Праці V науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2018, с. 91–92.
- [12] Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R., Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration stochastic recurrence, Book of Abstract of the 6<sup>th</sup> International Conference *Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity*, Lviv, 2019, p. 93–94.
- [13] Юзефович Р.М., Варивода М.З., Яворський І.М., Курапов П.Р., Аналіз експлуатаційної надійності елементів механічних конструкцій з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, Праці міжнародної науково-технічної конференції “Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової



- освіти*”, Херсон : Херсонський національний технічний університет, 2019, с. 79–81.
- [14] *Курапов П.Р.*, Кореляційні властивості перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, *Proceedings of Young Scientists Conference on Materials Science and Surface Engineering (MSSE-2019)*, Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2019, p. 27–28.
- [15] *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Трохим Г.Р., Курапов П.Р.*, Дисперсія оцінки взаємоспектральної густини періодично корельованих випадкових сигналів, *Праці XIX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2020, с. 116–117.
- [16] *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р.*, Аналіз кореляційних властивостей перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, *Тринадцята міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси” (ІРТК-2020)*, Київ : Національний авіаційний університет, 2020, с. 263–264.
- [17] *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Мацько І.Й., Трохим Г.Р.*, Застосування перетворення Гільберта для аналізу вузькосмугового періодично нестационарного випадкового сигналу, *Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”*, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021, с. 132.
- [18] *Kurapov P., Javorskyj I., Yuzefovych R.*, Application of analytical signal and methods of analysis of periodically non-stationary random processes for diagnosis of rotary mechanisms, *Proceedings of Young Scientists Conference on Materials Science and Surface Engineering (MSSE-2021)*, Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2021, p. 164–167.

- [19] Юзефович Р.М., Личак О.В., Куранов П.Р., Варивода М.З., Яворський І.М., Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “Приладобудування: стан і перспективи”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022, с. 196–198.
- [20] Chatfield C., Xing H., *The Analysis of Time Series: An Introduction with R*, New York: Chapman&Hall, 2019, 395p.
- [21] Yavorskyi I., *Mathematical models and analysis of stochastic oscillation*, Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute, 2013, 803p.
- [22] Драган Я.П., Яворський І.Н. Ритмика морського волнення и подводные акустические сигналы, К.: Наукова думка, 1982, 247 с.
- [23] Драган Я.П., Структура и представление моделей стохастических сигналов, К.: Наукова думка, 1980, 384 с.
- [24] Bendat J., Piersol A., *Random data Analysis and measurement procedures*, John Wiley & Sons, 1986, 540 p.
- [25] Fourier J.B. Joseph, *The Analytical Theory of Heat*, 1822, The University Press translated by Alexander Freeman (1878).
- [26] Lord Christian Huygens, *Horologium Oscillatorium*, 1673, Part 4a Definition 5, translated by Ian Bruce July 2007.
- [27] Shuster A., On lunar and solar periodicities of earthquakes, *A Proceedings of the Royal Society of London*, 1897, Vol. **61**, p. 455–465.
- [28] Shuster A., On the investigation of hidden periodicities with application to supposed 26 day period of meteorological phenomena, *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, 1898, № **3**, p. 13–41.
- [29] Shuster A., On the periodicities of sunspots, *Transactions of the Royal Society of London*, 1906, Series A. Vol. **206**, p. 69–100.
- [30] Гоноровський І.С., Радиотехнические цепи и сигналы, М.:Радио и связь, 1986, 512 с.

- [31] Wiener N., Generalized harmonic analysis, *Acta Mathematica*, 1930, Vol. **55**, p. 117–258.
- [32] Javorskyj I., Leskow J., Kravet I. et al., Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes - Part II :Harmonic series representation, *Signal Processing*, 2011, Vol. **91**, p. 2506–2519.
- [33] Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н., Вероятностная структура сезонной изменчивости температуры воздуха, *Метеорология и гидрология*, 1994, № 2, с. 20–35.
- [34] Свешников А.А., Прикладные методы теории случайных функций, М.: Наука, 1968, 464 с.
- [35] Венцель Е.С., Овчаров Л.А., Теория случайных процессов и ее инженерные приложения, М.: Наука, 1991, 384 с.
- [36] Карлин С., Основы теории случайных процессов, М.: Мир, 1971, 536 с.
- [37] Лозв М., Теория вероятностей, М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 719 с.
- [38] Рытов С.М., Введение в статистическую радиофизику, М.: Наука, 1966, 404 с.
- [39] Рытов С.М., Введение в статистическую радиофизику (ч. 1), М.: Наука, 1976, 495 с.
- [40] Яглом А.М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л.: Гидрометеиздат, 1981, 280 с.
- [41] Грибанов Ю.И., Мальков В.Л., Спектральный анализ случайных процессов, М.: Энергия, 1974, 239 с.
- [42] Яглом А.М., Спектральные представления для различных классов случайных функций, *Труды. IV Всесоюзн. съезда математиков*, М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 250–273.
- [43] Gardner W.A., *Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, New York: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987, 566 p.
- [44] Гладышев Э.Г., Периодически и почти-периодически коррелированные процессы с непрерывным временем, *Теория вероятностей и ее применения*, 1963, Т. 3. Вып. 2., с. 184–189.

- [45] *Харкевич А.А.*, Спектры и анализ, М.: Физматлит, 1962, 134 с.
- [46] *Колмогоров А.Н.*, Статическая теория колебаний с непрерывным спектром, *Юбилейный сборник АН СССР*, ч. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1947, с. 242–249.
- [47] *Колмогоров А.Н.*, Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве, *Бюлл. Моск. ун-та.*, 1941, Вып. 1, с. 1–40.
- [48] *Винер Н.*, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М.: Физматлит, 1963, 256 с.
- [49] *Коронкевич О.І.*, Лінійні динамічні ситеми під дією випадкових сил, *Наукові записки Львівського університету*, 1957, **44**. № 8, с. 175–183.
- [50] *Коронкевич О.І.*, Спектральний розклад періодичних та майже періодичних випадкових функцій, *Доп. АН УРСР. Сер. А.*, 1974, № 2, с. 114–117.
- [51] *Крамер Г., Лидбеттер М.*, Стационарные случайные процессы, М.: Мир, 1969, 398 с.
- [52] *Розанов Ю.А.*, Стационарные случайные процессы, М.: Физматлит, 1963, 284 с.
- [53] *Цветков Э.И.*, Нестационарные случайные процессы и их анализ, М.: Энергия, 1973, 128 с.
- [54] *Цветков Э.И.*, Основы теории статистических измерений, Л.: Энергия, 1978, 128 с.
- [55] *Бриллинджер Д.*, Временные ряды. Обработка данных и теория, М.: Мир, 1980, 536 с.
- [56] *Андерсон Т.*, Статистический анализ временных рядов, М.: Мир, 1976, 755 с.
- [57] *Журбенко И.Г.*, Анализ стационарных и однородных случайных систем, М.: изд-во Моск. ун.-та, 1987, 240 с.
- [58] *Виленкин С.Я.*, Статистическая обработка результатов исследования случайных функций, М.: Энергия, 1979, 320 с.
- [59] *Дженкинс Г., Ваттс Д.*, Спектральный анализ и его приложения, М.: Мир, 1971, Вып. 1, 316 с.; 1972, Вып. 2, 287 с.

- [60] *Марпл С.Л.*, Цифровой спектральный анализ и его приложения, М.: Мир, 1990, 584 с.
- [61] *Blackman R.B., Tukey J.W.*, The measurements of power spectra from the point of view of communications engineering, *Bell Labs Techn. J.*, 1958, Vol. **33**, p. 185–282.
- [62] *Koopmans L.H.*, The Spectral Analysis of Time Series, New York: Academic Press, 1974. 366 p.
- [63] *Jones R.H.*, A Reappraisal of the Period Spectral Analysis, *Technometrics*, Vol. **7** №**4**, 1965, p. 531-542.
- [64] *Javorskyj I., Isayev I.*, Analysis of component estimates of probabilistic characteristic of periodically correlated random processes using their parametric representations, *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1996, Vol. **6**. № **1**, p. 80–81.
- [65] *Яворский И.Н., Кравец И.Б., Исаев И.Ю.*, Параметрическое моделирование периодически коррелированных случайных процессов на основе их представления через стационарные случайные процессы, *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника*, 2006, Т. **49**. № **11**, с. 33–42.
- [66] *Franks L.E.*, Signal Theory, New York: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969, 317 p.
- [67] *Gardner W.A., Franks L.E.*, Characterization of cyclostationary random processes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1975, **21**, p. 4–14.
- [68] *Papoulis A.*, Random modulation: A review, *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 1983, ASSP-**31** № **1**, p. 96–105.
- [69] Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, *Ed. by W.A. Gardner*, New York: IEEE Press, 1994, 504 p.
- [70] *Antoni J.*, Cyclostationarity by examples, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, Vol. **23**, p. 987–1036.
- [71] *Bennet W.R.*, Statistics of regenerative digital transmission, *Bell Labs Techn. J.*, 1958, Vol. **38**. № **6**., p. 1501–1502.

- [72] *Ericson T.*, Modulation by means of linear periodic filtering, in *IEEE Transactions on Information Theory*, 1981, Vol. **27**. № **3**, p. 322–327.
- [73] *Haykin S.*, Adaptive Filter Theory, Prentice–Hall: New Jersey, 1996, 990 p.
- [74] *Strom T. and Signell S.*, Analysis of periodically switched linear circuits, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. **24** № **10**, p. 531–541, October 1977.
- [75] *Yuan F. and Opal A.*, Noise and sensitivity analysis of periodically switched linear circuits in frequency domain, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. **47** № **7**, p. 986–998, July 2000.
- [76] *Ferrara E. and Widrow B.*, The time-sequenced adaptive filter, in *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. **29** № **3**, p. 679–683, June 1981.
- [77] *Xia Y., Xiang M., Li Z. and Mandic D.P.*, Adaptive Learning Methods for Nonlinear System Modeling, Butterworth-Heinemann, 2018, p. 267–288.
- [78] *García-Vega S., Álvarez-Meza A.M., Castellanos-Dominguez G.*, Time-Series Prediction Based on Kernel Adaptive Filtering with Cyclostationary Codebooks. In: *Paredes, R., Cardoso, J., Pardo, X. (eds) Pattern Recognition and Image Analysis*, 2015, Lecture Notes in Computer Science, Vol. **9117**, Springer, Cham.
- [79] *Mirasierra V., Vergara-Dietrich D., Limon D.*, Real-Time Optimization of Periodic Systems: A Modifier-Adaptation Approach, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. **53** № **2**, 2020, p. 1690–1695.
- [80] *Zhang Y., Peng K., Wang X. and Song J.*, Performance Analysis and Code Optimization of IDMA With 5G New Radio LDPC Code, in *IEEE Communications Letters*, Vol. **22** № **8**, p. 1552–1555, Aug. 2018.
- [81] *IEEE Standard - Information Technology-Telecommunications and information exchange between systems-Wireless Regional Area Networks-Specific requirements-Part 22: Cognitive Wireless RAN MAC and PHY specifications: Policies and Procedures for Operation in the Bands that Allow Spectrum Sharing where the Communications Devices May Opportunistically Operate in*

- the Spectrum of Primary Service*, in IEEE Std 802.22-2019 (Revision of IEEE Std 802.22-2011), p.1-1465, 5 May 2020.
- [82] Ahn S., Kim K., Myung S., Park S. and Yang K., Comparison of Low-Density Parity-Check Codes in ATSC 3.0 and 5G Standards, in *IEEE Transactions on Broadcasting*, Vol. **65** № **3**, p. 489-495, Sept. 2019.
- [83] Gardner W.A. and Spooner C.M., Signal interception: performance advantages of cyclic-feature detectors, in *IEEE Transactions on Communications*, Vol. **40** № **1**, p. 149-159, Jan. 1992.
- [84] Gardner W.A., Signal interception: a unifying theoretical framework for feature detection, in *IEEE Transactions on Communications*, Vol. **36** № **8**, p. 897–906, Aug. 1988.
- [85] Capdessus C., Sidahmed M., Lacoume J.L., Cyclostationary processes: application in gear faults early diagnosis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2000, Vol. **14**(3), p. 371–385.
- [86] Dalpiaz G., Rivola A., Rubini R., Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2000, Vol. **14** (3), p. 387–412.
- [87] Antoni J., Bonnardot F., Raad A., Badaoui El., Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2004, Vol. **18**, p. 1285–1314.
- [88] Antoni J., Blind separation of vibration components: principles and demonstrations, *Mechanical System and Signal Processing*, 2005, Vol. **19**, p. 1166–1180.
- [89] Bonnardota F., Randall R.B., Guilleta F., Extraction of second-order cyclostationary sources – Application to vibration analysis, *Mechanical System and Signal Processing*, 2005, Vol. **19**, p. 1230–1244.
- [90] Zacksenhouse M., Braun S., Feldman M., Toward helicopter gearbox diagnostics from a small number examples, *Mechanical System and Signal Processing*, 2000, Vol. **14**. (4), p. 523–543.

- [91] *Hinich M.J.*, Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1982, Vol. ASSP-30 № 5, p. 747–750.
- [92] *Yeung G.K., Gardner W.A.*, Search-efficient methods of detection of cyclostationary signals, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, Vol. 44, № 5, p. 1214–1223.
- [93] *Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Santucci S., Marchesoni F.*, Extraction of periodic signals from a noise background, *Physics Letters A*, 1989, Vol. 142, p. 59–62.
- [94] *Shean-Tsong Chiu.*, Detecting periodic components in a white Gaussian time series, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B. Methodological*, 1989, 51 (2), p. 249–259.
- [95] *Giannakis G.B., Zhou G.*, Harmonics in multiplicative and additive noise: Parameter estimation using cyclic statistics, *IEEE Trans. Signal Process*, 1995, Vol. 43, p. 2217–2221.
- [96] *Pelkowitz L.*, Frequency domain analysis of wraparound error in fast convolution algorithms, in *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 29, № 3, p. 413–422, June 1981.
- [97] *SAelva J.*, Interpolation of Bounded Bandlimited Signals and Applications, in *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 54 № 11, p. 4244–4260, Nov. 2006.
- [98] *Gholami A. and Sacchi M.D.*, A Fast and Automatic Sparse Deconvolution in the Presence of Outliers, in *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 50 № 10, p. 4105–4116, Oct. 2012.
- [99] *Johnson W.K.*, The Dynamic Pneumocardiogram: An Application of Coherent Signal Processing to Cardiovascular Measurement, in *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. BME-28 № 6, p. 471–475, June 1981.
- [100] *Barnett T.*, Statistical Prediction of North American Air Temperatures from Pacific Predictors, *Monthly Weather Review*, 109, 1981.



- [101] *Hasselmann K., Barnett T.*, Techniques of Linear Prediction for Systems with Periodic Statistics, *Journal of Atmospheric Sciences*, **38**, p. 2275–2283, 1981.
- [102] *Gardner W.A.*, Rice's representations for cyclostationary processes, *IEEE Trans. Comm.* – 1987, Vol. COM–**35**, p. 74–78.
- [103] *Gardner W.*, Spectral Correlation of Modulated Signals: Part I - Analog Modulation, in *IEEE Transactions on Communications*, Vol. **35** № **6**, p. 584–594, June 1987.
- [104] *Gardner W., Brown W. and Chen Chih-Kang*, Spectral Correlation of Modulated Signals: Part II - Digital Modulation, in *IEEE Transactions on Communications*, Vol. **35** № **6**, p. 595–601, June 1987.
- [105] *Spooner C.M., Chen C. and Gardner W.A.*, Maximum likelihood two-sensor detection and TDOA estimation for cyclostationary signals, *Six<sup>th</sup> Multidimensional Signal Processing Workshop*, 1989, p. 119–120.
- [106] *Gardner W.A. and Chen C.*, Interference-tolerant time-difference-of-arrival estimation for modulated signals, in *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. **36** № **9**, p. 1385–1395, Sept. 1988.
- [107] *Bennett W.R.*, Statistics of regenerative digital transmission, in *The Bell System Technical Journal*, Vol. **37** № **6**, p. 1501–1542, Nov. 1958.
- [108] *Papoulis A.* Probability, Random Variables and Stochastic Processes, New York: Mc. Grow-Hill, 1965, 583 p.
- [109] *Гладышев Е.Г.*, О периодически коррелированных случайных последовательностях, *Докл. АН СССР*, 1961, **137** № **5**, с. 2236–2239.
- [110] *Драган Я.П.*, О периодически коррелированных случайных процессах и системах с периодически изменяющимися параметрами, *Отбор и передача информации*, 1969, № **22**, с. 22–33.
- [111] *Драган Я.П.*, О представлении периодически коррелированного случайного процесса через стационарные компоненты, *Отбор и передача информации*, 1975, № **45**, с. 7–20.

- [112] *Войчишин К.С., Драган Я.П.,* О простой стохастической модели естественных ритмических процессов, *Отбор и передача информации*, 1971, № 29, с. 7–15.
- [113] *Jones R., Brelsford W.,* Time series with periodic structure, *Biometrika*, 1967, Vol. 54 № 3-4, p. 403–408.
- [114] *Brelsford W., Jones R.,* Estimating probabilities, *Monthly Weather Review*, 95(8), p. 570–576. 1967.
- [115] *Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н.,* Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов, Л.: Гидрометеиздат, 1987, 320 с.
- [116] *Стратонович Р.Л.,* Избранные вопросы по теории флуктуаций в радиотехнике, М.: Сов. радио, 1961, 559 с.
- [117] *Гудзенко Л.И.,* О периодически нестационарных процессах, *Радиотехника и электроника*, 1959, Т. 4. № 6, с. 1062–1064.
- [118] *Гудзенко Л.И.,* Обобщение эргодической теоремы на нестационарные случайные процессы, *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 1961, Т. 4. № 2, с. 265–274.
- [119] *Ogura H.,* Spectral representation of a periodic nonstationary random process, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1971, IT. 17. № 2, p. 143–149.
- [120] *Яворський І.М., Михайлишин В.Ю.,* Параметричні моделі стохастичних коливань та методи їх статистичної обробки, *Праці І-ої Всеукраїнської міжнародної конференції “Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів” (“УкрОБРАЗ 92”)*, Київ, 1992, с. 52–54.
- [121] *Исаев І.Ю., Панасюк О.М., Яворський І.М.,* Параметричні моделі стохастичної повторюваності, *Праці 4-ої Укр. конф. з автоматичного керування “Автоматика–1997”*, Черкаси: Черк. інж. техн.ін-т, 1997, с. 117–118.
- [122] *Jaworski I., Drzycimski Z., Majewski J., Zakrzewski Z.,* Własności korelacyjne i widmowe niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych, *Kwartalnik Elektrotechniki i Telekomunikacji*, 1998, Z. 2, S. 155–192.

- [123] *Мирский Г.Л.*, Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, М.: Энергия, 1967, 432 с.
- [124] *Драган Я.П.*, О спектральных свойствах периодически коррелированных случайных процессов, *Отбор и передача информации*, 1971, № **30**, с. 16–24.
- [125] *Hurd H.L.*, An investigation of periodically correlated stochastic processes, *PhD dissertation*, Duke University department of Electrical Engineering, 1969.
- [126] *Hurd H.L.*, Periodically correlated processes with discontinuous correlation functions, *Theory Probab. Appl.*, 1974, p. 834–838.
- [127] *Hurd H.L.*, Representation of strongly harmonizable periodically correlated random processes and their covariances, *J. Multivariate Anal.*, 1989, **29**, p. 53–67.
- [128] *Hurd H.L.*, Correlation theory of almost periodically correlated processes, *J. Multivariate Anal.*, 1991, **37**, p. 24–45.
- [129] *Hurd H.L.*, Almost periodically unitary stochastic processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 1992, **43**, p. 99–113.
- [130] *Hurd H.L., Leskow J.*, Estimation of the Fourier coefficient functions and their spectral densities for phi-mixing almost periodically correlated processes, *Stat. Prob. Lett.*, 1992, **14**, p. 299–306.
- [131] *Hurd H.L., Leskow J.*, Strongly consistent and asymptotically normal estimation of the covariance for almost periodically correlated processes, *Stat. Decisions.*, 1992, **10**, p. 201–225.
- [132] *Dehay D., Hurd H.L.*, Representation and estimation for periodically and almost periodically correlated random processes *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing (Chapter 6)*, New York: IEEE Press, 1994, p. 295–326.
- [133] *Hurd H.L., Miamee A.*, Periodically Correlated Random Sequences. Spectral Theory and Practice, New Jersey: Wiley-Interscience, 2007, 353 p.
- [134] *Линник Ю.В.*, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М.: Физматлит, 1962, 350 с.

- [135] Javorskyj I., Mykhaylyshyn V., Zabolotnyj O., Least squares method for statistical analysis of polyrhythmic rhythmic, *Appl. Math. Let.*, 2003, **16**, p. 1217–1222.
- [136] Javorskyj I., Dzeryn O., Yuzefovych R., Analysis of mean function discrete LSM-estimator for biperiodically nonstationary random signal, *Mathematical Modeling and Computing*, 2019, **6**, p. 44–57.
- [137] Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., The least square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals, *Digital Signal Processing: A Review Journal*, 2021, 103333.
- [138] Яворский И.Н., Исаев И.Ю., Компонентный анализ временных рядов с ритмической структурой, *Известия Вузов. Радиоэлектроника*, 1995, № 1, с. 34–45.
- [139] Исаев И.Ю., Яворский И.Н., Компонентный спектральный анализ сигналов со стохастической повторяемостью, *Проблемы управления и информатики*, 1996, № 2, с. 104–112.
- [140] Исаев И.Ю., Яворский И.Н., Спектральный анализ временных рядов с ритмической структурой, *Проблемы управления и информатики*, 1998, № 2, с. 115–122.
- [141] Javorskyj I., Isayev I., Zakrzewski Z., Brooks S., Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes, *Signal Processing*, 2007, Vol. **87**, p. 13–32.
- [142] Javorskyj I., Isayev I., Majewski J., Yuzefovych R., Component covariance analysis for periodically correlated random processes, *Signal Processing*, 2010, Vol. **90**, p. 1083–1102.
- [143] Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Trokhym G., and Semenov P., The coherent and component estimation of covariance invariants for vectorial periodically correlated random processes and its application, in *Applied Condition Monitoring 16*: Springer Nature, 2020, p. 56–91.
- [144] Bendat J.S., The Hilbert transform and applications to correlation measurements, Denmark: Brüel&Kjær, 1985.

- [145] *Hahn S.L.*, Hilbert transform in signal processing, Artech House, 1996.
- [146] *Vakman D.*, Signal, oscillations, and waves, Boston, London: Artech House, 1998.
- [147] *King F.W.*, Hilbert transforms: Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge: Cambridge, 2009.
- [148] *Feldman M.*, Hilbert transform applications in mechanical vibration, John Wiley, 2011.
- [149] *Huang N.E., Shen Z., Long S.R, et al.*, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, London: *Proceedings of the Royal Society of London*, 1998, Series A 454, p. 903–995.
- [150] *Huang N.E., Wu Z.*, A review on Hilbert-Huang transform: Method and its applications to geophysical studies, *Reviews of Geophysics*, 2008, Vol. **46**, p. 1–23.
- [151] *Feldman M.*, Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, Vol. **22(3)**, p. 509–519.
- [152] *Feldman M.*, Hilbert transform in vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, Vol. **25(3)**, p. 735–801.
- [153] *Li Q., Wang H.*, A research review of Hilbert-Huang transform used for rolling bearing fault diagnosis, *Applied Mechanics and Materials*, 2013, Vol. **397–400**, p. 2152–2155.
- [154] *Gardner W.A.*, Introduction to random processes with applications to signals and systems, New York: Macmillan, 1985.
- [155] *Hurd H.L., Miamee A.*, Periodically correlated random sequences: Spectral theory and practice, New York: Wiley, 2007.
- [156] *Antoni J.*, Cyclostationary by examples, *Mechanical System and Signal Processing*, 2009, Vol. **23**, p. 987–1036.
- [157] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Kravets I., Matsko I.*, Methods of periodically correlated random processes and their generalizations, in *Cyclostationarity:*

- Theory and methods: Lecture Notes in Mechanical Engineering* (Chaari F., Leskow J., Sanches-Ramirez A.(Eds.)), 2014, New York: Springer, p. 73–93.
- [158] Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kravets I., The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena, in: Chaari F., Leskow J., Napolitano A., Zimroz R., Wylomanska A., Dudek A. (eds.) *Cyclostationarity: Theory and Methods – II. CSTA 2014. Applied Condition Monitoring* **3**, 2015, Springer. Cham, p. 55–88.
- [159] Gardner W.A., Napolitano A., Paural L., Cyclostationarity: Half century of research, *Signal Processing*, 2006, Vol. **86**, p. 639–697.
- [160] Napolitano A., Cyclostationarity: New trends and applications, *Signal Processing*, 2016, Vol. **120**, p. 385–408.
- [161] Javorskyi I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R., Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, Vol. **83**, p. 406–438.
- [162] Matsko I., Javorskyj I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z., Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, Vol. **104**, p. 242–263.
- [163] Napolitano A., *Cyclostationarity Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations*, Elsevier, Academic Press, 2020.
- [164] Ho D., Randall R.B., Optimization of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2000, Vol. **14(5)**, p. 763–788.
- [165] Randall R.B., Antoni J., Chobsaard S., The relation between spectral correlation and envelope analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2001, Vol. **15(5)**, p. 945–962.
- [166] Antoni J., Cyclic spectral analysis of rolling-element bearing signals: Facts and fictions, *Journal of Sound and Vibration*, 2007, Vol. **304**, 497–529.
- [167] Randall R.B., Antoni J., Rolling element bearing diagnostics – A tutorial, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, Vol. **25**, p. 485–520.

- [168] *Patel V.N., Tandon N., Pandey R.K.*, Defect detection in deep groove ball bearing in presence of external vibration using envelope analysis and Duffing oscillator, *Measurement*, 2012, Vol. **45(5)**, p. 960–970.
- [169] *Konstantin-Hansen H.*, Envelope analysis for diagnostics of local faults in rolling element bearings, *Brüel&Kjær Application Note BO 0501*, 2003.
- [170] *Antoni J., Randall R.B.*, A stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearings with localized faults, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2003, Vol. **125(3)**, p. 282–289.
- [171] *Shevgunov T., Guschina O., Kuznetsov Yu.*, Cyclostationary Approach to the Analysis of the Power in Electric Circuits under Periodic Excitations, *Appl. Sci.*, 2021, Vol. **11(20)**, 9711.
- [172] *McFadden P.D., Smith J.D.*, Vibration Monitoring of Rolling Element Bearings by the High Frequency Resonance Technique – a Review, *Tribol. Int.*, 1984, Vol. **17(1)**, p. 3–10.
- [173] *Mykhailyshyn V., Javorskyj I., Vasylyna Ya., Drabych O., Isaev I.*, Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problems of diagnostics of machines and structures, *Mater. Sci.*, 1997, Vol. **33**, p. 655–672.
- [174] *McCormick A.C., Nandi A.K.*, Cyclostationarity in rotating machine vibrations, *Mech. Syst. Signal Process*, 1998, Vol. **12(2)**, p. 225–242.
- [175] *Capdessus C., Sidahmed M., Lacoume J.L.*, Cyclostationary processes: Application in gear fault early diagnostics, *Mech. Syst. Signal Process*, 2000, Vol. **14(3)**, p. 371–385.
- [176] *Antoniadis I., Glossiotis G.*, Cyclostationary analysis of rolling-element bearing vibration signals, *J. Sound Vib*, 2001, Vol. **248(5)**, p. 829–845.
- [177] *Borghesani P., Pennacchi P., Ricci R., Chatterton S.*, Testing second order cyclostationarity in the squared envelope spectrum of non-white vibration signals, *Mech. Syst. Signal Process*, 2013, Vol. **40**, 38–55.

- [178] Wang H., Early detection of gear tooth cracking using the resonance demodulation technique, *Mech. Syst. Signal Process*, 2001, Vol. **15(5)**, p. 887–903.
- [179] Obuchowski J., Wylomańska A., Zimroz R., Selection of informative frequency band in local damage detection in rotating machinery, *Mech. Syst. Signal Process*, 2014, Vol. **48**, 138–152.
- [180] Antoni J., The spectral kurtosis: a useful tool for characterising non-stationary signals, *Mech. Syst. Signal Process*, 2006, Vol. **20**, 282–307.
- [181] Antoni J., Randall R.B., Spectral kurtosis: application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotary machines, *Mech. Syst. Signal Process*, 2013, Vol. **35**, p. 176–199.
- [182] Wang D., Tse P.W., Tsui K.L., An enhanced Kurtogram method for fault diagnosis of rolling element bearings, *Mech. Syst. Signal Process*, 2013, Vol. **35**, p. 176–199.
- [183] Barszcz T., Jabłoński A., A novel method for the optimal band selection for vibration signal demodulation and comparison with the Kurtogram, *Mech. Syst. Signal Process*, 2011, Vol. **25(1)**, p. 431–451.
- [184] Abboud D., Elbadaoui M., Smith W.A., Randall R.B., Advanced bearing diagnostics: A comparative study of two powerful approaches, *Mech. Syst. Signal Process*, 2019, Vol. **114(1)**, p. 604–627.
- [185] Borghesani P., The envelope-based cyclic periodogram, *Mech. Syst. Signal Process*, 2015, Vol. **58–59**, p. 245–270.
- [186] Abboud D., Antoni J., Sieg-Zieba S., Eltabach M., Envelope analysis of rotating machine vibrations in variable speed conditions: A comprehensive treatment, *Mech. Syst. Signal Process*, 2017, Vol. **84**, p. 200–226.
- [187] Wang D., Zhao X., Kou L-L., Qin Y., Zhao Y., Tsui K-L., A simple and fast guide-line for generating enhanced/squared envelope spectra from spectral coherence for bearing fault diagnosis, *Mech. Syst. Signal Process*, 2019, Vol. **122**, p. 754–768.



- [188] *Peeters C., Antoni J., Helsen J.*, Blind filters based on envelope spectrum sparsity indicators for bearing and gear vibration-based condition monitoring, *Mech. Syst. Signal Process*, 2020, Vol. **138**, 106556.
- [189] *Sawalhi N., Randall R.B., Endo H.*, The enhancement of fault detection and diagnosis in rolling element bearings using minimum entropy deconvolution combined with spectral kurtosis, *Mech. Syst. Signal Process*, 2007, Vol. **21(6)**, p. 2616–2633.
- [190] *Ballot Buys*, Les changements périodiques de température: dépendants de la nature du Soleil et de la Lune, mis en rapport avec le pronostic du temps, déduits d'observations neerlandaises de 1729 à 1846, Kemink: Utrecht, 1847.
- [191] *Kay S.M.*, Modern Spectral Estimation: Theory and Application, New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- [192] *Randall R.B., Sawalhi N., Coats M.*, A comparison of methods for separation of deterministic and random signals, *Int. J. Condition Monitoring*, 2011, Vol. **1(1)**, p. 11–19.
- [193] *Borghesani P., Pennacchi P., Randall R.B., Sawalhi N., Ricci R.*, Application of cepstrum pre-whitening for the diagnosis of bearing faults under variable speed conditions, *Mech. Syst. Signal Process*, 2013, Vol. **36(2)**, p. 370–384.

## ДОДАТКИ

**Додаток А** Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

### **Розділ колективної монографії**

- [1] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Lychak O.V., The quadrature components of narrowband periodically non-stationary random signals, Advances in Intelligent Systems and Computing V, Vol. 1293, Springer, 2020, p. 696–713, ISBN: 978-3-030-63270-0*

### **Статті, які включені до наукометричних баз даних:**

- [2] *Javorskyj I.M., Kurapov P.R., Yuzefovych R.M., Covariance characteristics of narrowband periodically non-stationary random signals, Mathematical Modeling and Computing, 2019, Vol. 6 № 2, p. 276–288.*
- [3] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R., Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration stochastic recurrence, Procedia Structural Integrity, 2019, Vol. 16, p. 205–210.*
- [4] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kurapov P., Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation, Digital Signal Processing, 2021, Vol. 116, 103113.*

### **Стаття у науковому фаховому виданні України**

- [5] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Model of multicomponent narrow-band periodically non-stationary random signal, Information extraction and processing, 2020, 48 (124), p. 17–24.*

*Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

### **Публікації в матеріалах конференцій:**

- [6] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Periodically non-stationary analytic signals and their properties, Proceedings of XIII International Scientific and Technical Conference Computer Science and Information Technologies (CSIT – 2018), Lviv :Lviv Polytechnic National University, 2018, p. 191–194.*

- [7] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Kurapov P.R., Semenov P.A., The Covariance and Spectral Properties of the Quadrature Components of Narrowband Periodically Non-Stationary Random Signals, Proceedings of XV International Scientific and Technical Conference Computer Sciences and Information Technologies, 2020, p. 95–98.*
- [8] *Javorskyj I., Yuzefovych R., Lychak O., Kurapov P., Hilbert Transform for Analysis of Daily Changes of the Earth Magnetic Field, 2021 IEEE XII International Conference on Electronics and Information Technologies, 2021, p. 181–185.*
- [9] *Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Яворський І.М., Аналітичні періодично нестационарні випадкові сигнали у вібродіагностиці, Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / За заг. ред. А. М. Самойленка та Р. М. Кушніра [Електронний ресурс]: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2018, Т. 3, с. 41–42.*
- [10] *Юзефович Р.М., Яворський І.М., Семенов П.О., Курапов П.Р., Трохим Г.Р., Взаємоспектральний аналіз вібраційних сигналів для виявлення та локалізації дефектів елементів механічних конструкцій, Збірка тез доповідей двадцять другої міжнародної конференції “Сучасні методи та засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики” (до 100-річчя Національної академії наук України), Одеса, 2018, с. 64.*
- [11] *Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Властивості аналітичного сигналу періодично нестационарних випадкових процесів, Праці V науково-технічної конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2018, с. 91–92.*
- [12] *Javorskyj I.M., Yuzefovych R.M., Semenov P.O., Kurapov P.R., Analysis of rotary mechanism fault features on the base of the spectral structure for vibration*

- stochastic recurrence, Book of Abstract of the 6<sup>th</sup> International Conference *Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity*, Lviv, 2019, p. 93–94.
- [13] Юзефович Р.М., Варивода М.З., Яворський І.М., Курапов П.Р., Аналіз експлуатаційної надійності елементів механічних конструкцій з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, Праці міжнародної науково-технічної конференції “*Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти*”, Херсон : Херсонський національний технічний університет, 2019, с. 79–81.
- [14] Курапов П.Р., Кореляційні властивості перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, Proceedings of Young Scientists Conference on *Materials Science and Surface Engineering (MSSE-2019)*, Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2019, p. 27–28.
- [15] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Трохим Г.Р., Курапов П.Р., Дисперсія оцінки взаємоспектральної густини періодично корельованих випадкових сигналів, Праці XIX Міжнародної науково-технічної конференції “*Приладобудування: стан і перспективи*”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2020, с. 116–117.
- [16] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Аналіз кореляційних властивостей перетворення Гільберта періодично нестационарного випадкового сигналу, Тринадцята міжнародна науково-практична конференція “*Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси*” (ПРТК-2020), Київ : Національний авіаційний університет, 2020, с. 263–264.
- [17] Яворський І.М., Юзефович Р.М., Курапов П.Р., Мацько І.Й., Трохим Г.Р., Застосування перетворення Гільберта для аналізу вузькосмугового періодично нестационарного випадкового сигналу, Праці XX Міжнародної науково-технічної конференції “*Приладобудування: стан і перспективи*”,

Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2021, с. 132.

- [18] *Kurapov P., Javorskyj I., Yuzefovych R.*, Application of analytical signal and methods of analysis of periodically non-stationary random processes for diagnosis of rotary mechanisms, Proceedings of Young Scientists Conference on Materials Science and Surface Engineering (**MSSE-2021**), Lviv: Karpenko Physico-mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 2021, p. 164–167.
- [19] *Юзефович Р.М., Личак О.В., Курапов П.Р., Варивода М.З., Яворський І.М.*, Дослідження технічного стану механізмів з використанням методів періодично корельованих випадкових процесів, Праці XXI Міжнародної науково-технічної конференції “*Приладобудування: стан і перспективи*”, Київ : Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 2022, с. 196–198.

Основні положення та результати роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних та всеукраїнських конференціях: науково-технічній конференції “*Сучасні проблеми механіки та математики*”, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2018); 22-й міжнародній науково-технічній конференції “*Сучасні методи та засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики*”, Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України (Одеса, 2018); 13-й міжнародній науково-технічній конференції “*Computer Sciences and Information Technologies*” (CSIT), Національний університет “Львівська політехніка” (Львів, 2018); науково-технічній конференції “*Обчислювальні методи і системи перетворення інформації*”, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2018); 6-й міжнародній науково-технічній конференції “*Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity*”, Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2019); 10-й міжнародній науково-технічній конференції “*Теоретичні та практичні проблеми в обробці*

матеріалів тиском і якості фахової освіти”, Херсонський національний технічний університет (Херсон, 2019); міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених “*Materials Science and Surface Engineering*” (MSSE), Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2019); 19-ій, 20-ій та 21-ій міжнародній науково-технічній конференції “*Приладобудування: стан і перспективи*”, Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського (Київ, 2020, 2021, 2022); 13-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси*”, Національний авіаційний університет (Київ, 2020); 15-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Computer Sciences and Information Technologies*” (CSIT), Національний університет “Львівська політехніка” (Львів, 2020); 12-ій міжнародній науково-практичній конференції “*Electronics and Information Technologies*” (ELIT), IEEE (Львів, 2021); міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених “*Materials Science and Surface Engineering*” (MSSE-2021), Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2021). Наукові результати дисертаційної роботи також доповідались та обговорювались на наукових семінарах кафедри прикладної математики Національного університету “Львівська політехніка” (2018-2021 рр.).

## Додаток Б Акти впровадження

## Б.1

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор  
Фізико-механічного інституту  
ім. Г.В. Карпенка НАН України



З.Т. НАЗАРЧУК  
2019р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор  
ТОВ "ПОРТТЕХЕКСПЕРТ"



П.О. СЕМЕНОВ  
"Завіс" 2019р.

## АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

Даний акт складено представниками

Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України: зав. лабораторією вібродіагностики, д.т.н., ст. наук спів., Р.М. Юзефовичем; пров. наук спів., д. ф.-м. н., проф. І.М. Яворським; інж. 2 кат. П.Р. Кураповим, та  
ТОВ "ПОРТТЕХЕКСПЕРТ": директором, к.т.н. П.О. Семеновим, експертом технічним Ю.В. Дімченко фахівцем з неруйнівного контролю 2 рівня К.О. Старостенко,

про те, що в 2019 р. під час визначення технічного стану приводу стрілового конвеєру суднонавантажувальної машини 18СП-1 інв.№ 000100 (ТОВ «ПІС-РУДА», с. Визирка, Одеська обл.) було використано властивості перетворення Гільберта до багатокомпонентного періодично нестаціонарного вібраційного сигналу, застосовано методи виділення його квадратурних складових і визначено ті кореляційні та спектральні характеристики, які дозволяють виявити тип дефектів обертових вузлів досліджуваного механізму.

Цей акт засвідчує практичну цінність розроблених методів виділення квадратурних складових багатокомпонентного періодично нестаціонарного вібраційного сигналу, що визначають кореляційні та спектральні характеристики, які дозволяють виявити тип дефектів обертових вузлів досліджуваних механізмів.

Від  
Фізико-механічного інституту  
ім. Г.В. Карпенка НАН України

зав. лабораторією вібродіагностики  
д.т.н., ст. наук співр.

 Р.М. Юзефович

пров. наук співр.,  
д. ф.-м. н., проф.

 І.М. Яворський

інж. 2 кат.

 П.Р. Курапов

Від  
ТОВ "ПОРТТЕХЕКСПЕРТ"

експерт технічний



Ю.В. Дімченко

фахівець з неруйнівного контролю



К.О. Старостенко

## Б.2

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор  
Фізико-механічного інституту  
ім. Г.В. Карпенка НАН України



З.Т. НАЗАРЧУК

« 28 » 10 2020 р.



ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор  
Спеціалізованого ремонтного підприємства  
ТОВ «ПТМ РЕСУРС»:



Н.Г. Павлін

2020 р.

## АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

Даний акт складено представниками:

Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України: зав. відділу методів і засобів відбору та обробки діагностичних сигналів, д.т.н., ст. наук. співр., Р.М. Юзефовичем; пров. наук. співр., д. ф.-м. н., проф. І.М. Яворським; к.т.н., ст. наук. співр., О.В. Личаком; інж. 2 кат. П.Р. Кураповим

та представниками

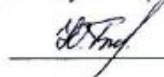
Спеціалізованого ремонтного підприємства ТОВ «ПТМ-РЕСУРС»: директором Н.Г. Павлін, технічним директором А.В. Поперечним про те, що

в 2020 р. під час ремонту складського козлового контейнерного перевантажувача проводились дослідження з визначення технічного стану механізму головного підйому вантажу, при якому використано властивості перетворення Гільберта до багатокомпонентного періодично нестационарного вібраційного сигналу, застосовано методи виділені його квадратурних складових і визначено ті кореляційні та спектральні характеристики, які дозволяють виявити тип дефектів обертових вузлів досліджуваного механізму.

Цей акт засвідчує практичну цінність розроблених методів виділення квадратурних складових багатокомпонентного періодично нестационарного вібраційного сигналу, що визначають кореляційні та спектральні характеристики, які дозволяють виявити тип дефектів обертових вузлів досліджуваних механізмів.

Від  
Фізико-механічного інституту  
ім. Г.В. Карпенка НАН України

зав. відділу  
д.т.н., ст. наук. співр.



Р.М. Юзефович

пров. наук. співр.,  
д. ф.-м. н., проф.



І.М. Яворський

к.т.н., ст.н.с.



О.В. Личак

інж. 2 кат.



П.Р. Курапов

Від  
ТОВ «ПТМ-РЕСУРС»

технічний директор



А.В. Поперечний



## Б.3

**"РЕМТЕХМОРПОРТ" ТОВ**

Україна, 65009, м. Одеса, Фонтанська дорога, 9 Б  
 тел./факс (048) 714-05-18  
 Р/р UA263281680000000026006243851  
 в ПАТ "МТБ Банк" м. Черноморськ  
 МФО 328168 код ЄДРПОУ 33017330  
 Email: rtmp@rtmp.odessa.ua

**"РЕМТЕХМОРПОРТ" ООО**

Україна, 65009, г. Одесса, Фонтанская дорога, 9 Б  
 тел./факс (048) 714-05-18  
 Р/с UA263281680000000026006243851  
 в ПАО "МТБ Банк" г. Черноморск  
 МФО 328168 код ЄДРПОУ 33017330  
 Email: rtmp@rtmp.odessa.ua

вих. № 98 від 07.09.2021 р.

**Фізико-механічний інститут  
 ім. Г.В. Карпенка НАН України, м. Львів**

**АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ**

Даний акт складено представниками ТОВ "РЕМТЕХМОРПОРТ": директором В.В. Лешков'ят, технічним директором В.В. Краснянським та керівником проектно-конструкторського відділу Ю.Ф. Гроздя про те, що в 2021 році у результаті визначення технічного стану приводів механізмів стрілового конвеєра та підйому стріли судноавантажувальної машини СПМ-1200У1 інв. 3703, що належить ТОВ «Укрелеваторпром» (Одеський МТП), використано властивості перетворення Гільберта до багатокомпонентного періодично нестаціонарного вібраційного сигналу, застосовано методи виділення його квадратурних складових для отримання кореляційних та спектральних характеристик, які дозволяють виявляти типи дефектів обертових вузлів досліджуваних приводів механізмів.

Цей акт засвідчує практичну цінність розроблених методів виділення квадратурних складових багатокомпонентного періодично нестаціонарного вібраційного сигналу, що дозволяють виявляти типи дефектів обертових вузлів механізмів портового перевантажувального обладнання.

Директор

Технічний директор

Керівник проектно-конструкторського відділу



В.В. Лешков'ят

В.В. Краснянський

Ю.Ф. Гроздя



## Додаток В Означення та властивості перетворення Гільберта

Перетворенням Гільберта  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  дійснозначного сигналу  $\xi(t)$  визначеного в часовій області, називається визначений в часовій області дійснозначний сигнал  $\eta(t)$  такий, що сигнал  $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$  є аналітичним. Перетворенням Фур'є  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  сигналу  $\xi(t)$  є комплекснозначна функція  $X(t)$ , визначена у частотній області. Можна розрахувати модуль  $A(t)$  і аргумент  $\theta(t)$  сигналу  $\zeta(t)$ , при тому  $A(t)$  є обвідною функції  $\xi(t)$ , а  $\theta(t)$  – миттєвою фазою  $\xi(t)$ .

Перетворення Гільберта довільного процесу можна означити трьома різними еквівалентними способами. Зауважимо, що у прикладних задачах переважно всі інтеграли, що використанні нижче існують в сенсі головного значення.

### 1-й спосіб означити перетворення Гільберта. Означення через згортку

$$\eta(t) = \mathcal{H}\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\xi(u)}{t-u} du \quad (\text{В.1})$$

у формулі (В.1) інтеграл розуміється в сенсі головного значення.

Сигнал  $\eta(t)$ , який отримали в результаті дії перетворення Гільберта на сигнал  $\xi(t)$  будемо називати Гільберт трансформантою сигналу  $\xi(t)$ . Таким чином, перетворенням Гільберта будемо називати оператор  $\mathcal{H}\{\cdot\}$ , а Гільберт трансформантою сигнал  $\eta(t)$ . Також  $\eta(t)$  є згорткою сигналу  $\xi(t)$  і передавальної функції перетворення Гільберта  $\frac{1}{\pi t}$  тобто

$$\eta(t) = \xi(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (\text{В.2})$$

де \* символ оператора згортки.

**2-й спосіб означити перетворення Гільберта. Означення через зсув по фазі на  $\frac{\pi}{2}$**

Нехай  $\tilde{X}(f)$  є Фур'є образ сигналу  $\eta(t)$  тоді виконується наступне:

$$\tilde{X}(f) = \mathcal{F}\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(t)e^{-i\omega t}] dt. \quad (\text{B.3})$$

Із формули (B.2) слідує, що Фур'є образ Гільберт трансформанти  $\tilde{X}(f)$  дорівнює Фур'є образу сигналу  $\xi(t)$ , помноженому на Фур'є образ функції  $\frac{1}{\pi t}$ .

Фур'є образ функції  $\frac{1}{\pi t}$  має вигляд

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \begin{cases} -i, & f > 0; \\ 0, & f = 0; \\ i, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Тому формула (B.2) описує трансформацію сигналу  $\xi(t)$  системою з частотною характеристикою  $-i \operatorname{sgn}(f)$  і еквівалентна формулі

$$\tilde{X}(f) = [-i \operatorname{sgn}(f)] X(f). \quad (\text{B.5})$$

Зауважимо, що ця комплекснозначна функція  $\tilde{X}(f)$  не є перетворенням Гільберта комплекснозначної функції  $X(f)$ . Фур'є образ Гільберт трансформанти  $\eta(t)$  та сигнал  $\eta(t)$  пов'язані між собою співвідношенням

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{X}(f)e^{i\omega t}] dt, \quad (\text{B.6})$$

тобто  $\eta(t)$  можна отримати подіавши оберненим перетворенням Фур'є  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  на  $\tilde{X}(f)$ .

Фур'є образ виразу  $-i \operatorname{sgn}(f)$  можна представити як:

$$K(f) = \mathcal{F}\{-i \operatorname{sgn}(f)\} = \begin{cases} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}, & f > 0; \\ 0, & f = 0; \\ e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Тобто буде виконуватися наступне

$$K(f) = |K(f)| e^{-i\varphi_K(f)}, \quad (\text{B.8})$$

де

$$\varphi_K(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & f > 0; \\ 0, & f = 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Отже,  $K(f)$  задає систему, яка зсуває вхідний сигнал на  $\frac{\pi}{2}$  і виконується:

$$|K(f)| = 1, \quad (\text{B.10})$$

Якщо використати, що

$$X(f) = |X(f)| e^{-i\varphi_X(f)}, \quad (\text{B.11})$$

то можна отримати наступне

$$\tilde{X}(f) = |\tilde{X}(f)| e^{-i\varphi_{\tilde{X}}(f)} = |X(f)| e^{-i[\varphi_{\tilde{X}}(f) + \varphi_K(f)]}, \quad (\text{B.12})$$

Отже, якщо подіяти перетворенням Гільберта на сигнал  $\xi(t)$ , то його модуль  $|X(f)|$  не поміняється, а аргумент  $\varphi_{\tilde{X}}(f)$  зміниться на  $\varphi_{\tilde{X}}(f) + \varphi_K(f)$ , де  $\varphi_K(f)$  означено по формулі (B.9), тобто

$$\varphi_{\xi}(f) \rightarrow \begin{cases} \varphi_{\xi}(f) + \frac{\pi}{2}, & f > 0; \\ \varphi_{\xi}(f) + 0, & f = 0; \\ \varphi_{\xi}(f) - \frac{\pi}{2}, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Іншими словами, оператор  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  залишає модуль сигналу на який діє незмінним, а фазу зсуває на  $\frac{\pi}{2}$  в області позитивних частот і на  $-\frac{\pi}{2}$  в області негативних частот, як проілюстровано на Рисунку В.1.

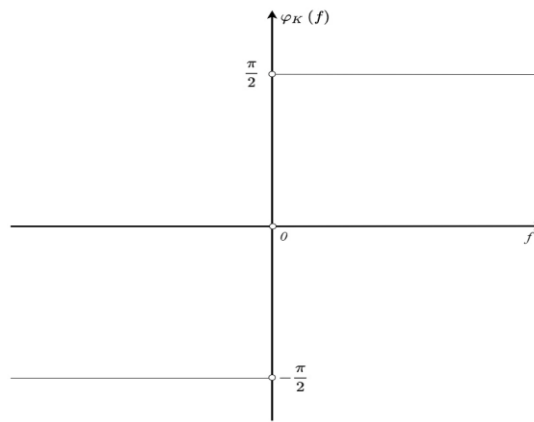


Рисунок В.1

***3-й спосіб означити перетворення Гільберта. Означення через уявну частину аналітичного сигналу***

Третій спосіб означити перетворення Гільберта базується на введенні *аналітичного сигналу*  $\zeta(t)$ , даний спосіб дозволяє обчислювати  $\eta(t)$  по  $\zeta(t)$ , використовуючи наступне співвідношення

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t). \quad (\text{B.14})$$

Також аналітичний сигнал можна записати, як

$$\zeta(t) = A(t)e^{i\theta(t)}, \quad (\text{B.15})$$

де  $A(t)$  називається *обвідною* сигналу  $\xi(t)$ , а  $\theta(t)$  називається *миттєвою фазою* сигналу  $\xi(t)$ . У представленні через  $\xi(t)$  та  $\eta(t)$  для обвідної та миттєвої фази будуть виконуватися наступні рівності:

$$A(t) = \sqrt{[\xi^2(t) + \eta^2(t)]}, \quad (\text{B.16})$$

$$\theta(t) = \text{arctg} \left( \frac{\eta(t)}{\xi(t)} \right) = 2\pi f_0(t). \quad (\text{B.17})$$

Тоді *миттєву частоту*  $f_0(t)$  можна знайти як

$$f_0(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right). \quad (\text{B.18})$$

Нехай  $Z(f)$  Фур'є образ аналітичного сигналу, який отримали подіявши перетворенням Фур'є на сигнал  $\zeta(t)$ , тоді буде виконуватися наступне

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathcal{F} \{ \zeta(t) \} = \mathcal{F} \{ \xi(t) + i\eta(t) \} = \\ &= \mathcal{F} \{ \xi(t) \} + i \mathcal{F} \{ \eta(t) \} = X(f) + i\tilde{X}(f). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Подіявши оберненим перетворенням Фур'є на  $Z(f)$ , отримаємо

$$\zeta(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ Z(f) \} = \xi(t) + i\eta(t). \quad (\text{B.20})$$

З формули (B.20) отримаємо наступне

$$\eta(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ Z(f) \} = \text{Im} \{ \zeta(t) \}. \quad (\text{B.21})$$

### **Обчислення Гільберт трансформанти**

Зауважимо, що із формули (B.5) випливає наступна рівність

$$X(f) = [i \text{sgn}(f)] \tilde{X}(f),$$

і використаємо її для того, щоб обчислити  $Z(f)$ . Тому формулу (B.19) можна представити у наступному вигляді

$$Z(f) = [1 + \operatorname{sgn}(f)]X(f) = K_1(f)X(f), \quad (\text{B.22})$$

де

$$K_1(f) = \begin{cases} 2, & f > 0; \\ 1, & f = 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Таким чином, отримати  $Z(f)$  із  $\xi(t)$  дуже просто. Треба обчислити  $Z(f)$  для всіх  $f$ , а потім використати рівність

$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0; \\ X(f), & f = 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

Тоді обернене перетворення Фур'є від  $Z(f)$  дасть  $\zeta(t)$ , при тому  $\eta(t) = \operatorname{Im}\{\zeta(t)\}$ . Саме так рекомендують обчислювати Гільберт трансформанту у [24, 144]. З формул (B.5, B.6, B.22) випливають наступні рівності:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \int_0^{\infty} [X(f) e^{i2\pi ft}] df \right\}, \\ \eta(t) &= \operatorname{Im} \left\{ 2 \int_0^{\infty} [X(f) e^{i2\pi ft}] df \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

З формул (B.25) отримано дискретні формули  $[n = 0, 1, 2, \dots, N-1]$ :

$$\begin{aligned} \xi(n\Delta t) &= 2\Delta f \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N/2} \left[ X(k\Delta f) e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \right] \right\} + X_0\Delta f, \\ \eta(n\Delta t) &= 2\Delta f \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{N/2} \left[ X(k\Delta f) e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

де множник  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ , а величина  $X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$ .

Зауважимо, що для того щоб отримати сигнал  $\xi(n\Delta t)$  та його Гільберт трансформанту  $\eta(n\Delta t)$ , достатньо знайти значення величин спектру  $X(k\Delta f)$  для  $k=i$ ,  $i = \overline{0, N/2}$ , тобто максимальна частота, яку необхідно обчислити відповідає частоті Найквіста []. Обвідну сигналу  $\xi(t)$  тоді можна означити, як

$$A_{\xi}(n\Delta t) = \sqrt{[\xi^2(n\Delta t) + \eta^2(n\Delta t)]}.$$

### ***Властивості перетворення Гільберта***

Перетворення Гільберта володіє рядом корисних властивостей. Використанні у цій роботі наведемо нижче.

Нехай  $\tilde{\xi}_1(t) = \mathcal{H}\{\xi_1(t)\}$ ,  $\tilde{\xi}_2(t) = \mathcal{H}\{\xi_2(t)\}$  відповідно перетворення Гільберта від функцій  $\xi_1(t)$  та  $\xi_2(t)$ , а  $X_1(f)$  та  $X_2(f)$  їх Фур'є образи відповідно.

#### *Властивість 1. Лінійність:*

Перетворення Гільберта є лінійним оператором [24, 114], тоді властивість лінійності оператора  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  буде мати вигляд:

$$\mathcal{H}\{a_1\xi_1(t) + a_2\xi_2(t)\} = a_1\mathcal{H}\{\xi_1(t)\} + a_2\mathcal{H}\{\xi_2(t)\} \quad (\text{B.27})$$

для довільних констант  $a_1, a_2$  і довільних функцій  $\xi_1(t), \xi_2(t)$ .

#### *Властивість 2. Інваріантність для сигналу з 0-ю постійною компонентою*

Під *інваріантністю* будемо розуміти, що модулі Фур'є образу  $|X(f)|$  сигналу  $\xi(t)$  та модулі Фур'є образу  $|\tilde{X}(f)|$  Гільберт трансформанти  $\eta(t)$  є рівними. Отже, використовуючи В.12 та В.26, отримаємо, що спектр сигналу  $\xi(t)$  та спектр сигналу  $\eta(t)$  є рівними  $\{X(k\Delta f)\} \cong \{\tilde{X}(k\Delta f)\}$  з точністю до  $10^{-16}$ , цей результат перевірений для формули В.26 на імітаційних сигналах, тоді коли постійна компонента (нульова частота,  $X_0$ ) сигналу  $\xi(t)$  дорівнює нулеві.



## Додаток Г Програмний код розроблених модулів

**Г.1** *Короткий опис: модуль симулювання сигналів із заданими спектрально-кореляційними характеристиками, середовище: Microsoft Visual Studio 2017 Enterprise, мова: C#, encoding: UTF-8.*

Метод рекурентних диференціальних рівнянь (МРДР) використовують для лінійного перетворення ряду незалежних нормально розподілених випадкових величин  $x(n)$  до часового ряду  $\xi(n)$  з заданою автокореляційною функцією  $B(n)$ . Тоді лінійний оператор перетворення може бути записаний як:

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^l a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^m b_k \xi(n-k) \quad (\text{Г.1})$$

Від форми автокореляційної функції  $B(n)$  залежить значення параметрів  $l, m$  і величина вагових коефіцієнтів  $a_k, b_k$  у формулі (Г.1).

### Особливості МРДР:

1. МРДР може бути використаний тоді коли спектральна густина потужності ряду  $\xi(n)$  має обмежену кількість піків та може бути записана у раціональній формі

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} dt = \frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)}.$$

2. МРДР немає систематичної похибки.

### Реалізація МРДР:

Генерується часовий ряд з автокореляційною функцією  $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ , згідно такого алгоритму:

$$\begin{aligned} \xi(n) &= a_0 x(n) + b_1 \xi(n-1), \\ \rho &= e^{-\alpha\Delta t}, \Delta t = 1, a_0 = \sigma\sqrt{1-\rho^2}, b_1 = \rho. \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

Сигнал  $\xi(n)$  верифікують мінімізуючи функціонал:

$$\delta(\alpha, U_m) = \int_0^{U_m} [\hat{B}(\tau) - \sigma^2 e^{-\hat{\alpha}\tau}]^2 d\tau, \quad \alpha - \Delta\alpha \leq \hat{\alpha} \leq \alpha + \Delta\alpha,$$

де  $U_m$  – точка усічення кореляційної функції  $\hat{B}(\tau)$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт зникання кореляційної функції,  $\sigma^2 = B(0)$  – дисперсія ряду  $\xi(n)$

Для обчислень дискретизуємо та нормалізуємо функціонал  $\delta(\alpha, U_m)$ , а саме:

$$\delta^*(\alpha, U_m) = \frac{\sum_{\tau=0}^{U_m} [\hat{B}(\tau) - \sigma^2 e^{-\hat{\alpha}\tau}]^2}{\sigma^4 U_m}, \quad \alpha(1 - 0.02i) \leq \hat{\alpha} \leq \alpha(1 + 0.02i), \quad i = \overline{0, 50}.$$

Нерівність

$$\delta^*(\alpha, U_m) \leq 0,0001$$

задає критерій перевірки необхідності виконання повторної генерації часового ряду. Якщо вона виконується, то сигнал згенеровано правильно із гранично допустимою похибкою між  $B(\tau)$  та  $\hat{B}(\tau)$  в 1%, якщо ні, то виконуються 200 генерацій із яких вибирається та в якій величина  $\delta^*(\alpha, U_m)$  є найменшою. Необхідність проведення повторних генерацій часового ряду пов'язана з тим, що на цифрових обчислювальних машинах можна отримати тільки квазінормальний розподіл.

**Вихідний код:**

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;
using Approximation.Tools;
using Approximation.Signal;
using Approximation.Signal.Modeling.Stationary;
using Approximation.Signal.Parameters.Statistics.Stationar.Ergodic;
using Approximation.Signal.Modeling;

namespace Approximation.Function_Form
{
    public partial class Recur_Diff_Equations : Form
    {
```

```

private static string formname = "Recur_Diff_Equations";
private double[] xi_buffer;

public Recur_Diff_Equations()
{
    InitializeComponent();
}

private void button_OK_Click(object sender, EventArgs e)
{
    if (tb_dispersion_rde.Text != ""
        && tb_omega_s_rde.Text != ""
        && tb_duration_rde.Text != ""
        && tb_tau_rde.Text != "")
    {
        double[] xi = generate_xi();

        int tau_ = int.Parse(tb_tau_rde.Text);
        double dispersion_ = Convert.ToDouble(tb_dispersion_rde.Text);
        double omega_s_ = Convert.ToDouble(tb_omega_s_rde.Text);
        string windowname = WindowManager.CheckWindowName(formname);
        string[] signalnames = { "Simulation exp", "Corelation function" };
        ///
        VerifecationAlpha chck = new VerifecationAlpha(xi,
                                                    int.Parse(tb_tau_rde.Text),
                                                    Convert.ToDouble(tb_dispersion_rde.Text),
                                                    Convert.ToDouble(tb_omega_s_rde.Text));

        int iterationLimit = 200;
        int i = 0;
        //double limitError = 0.0004;
        double limitError = omega_s_ * omega_s_ *
Math.Log10(int.Parse(tb_duration_rde.Text))/(dispersion_ * dispersion_);
        double real_alpha = 0.0;
        double minError = chck.Check();
        VerifecationAlpha optimalVerification = chck;
        chck.CalcEstimation_error();
        while (i <= iterationLimit)
        {
            double currentError = chck.Check();
            if (currentError < limitError)
            {
                xi_buffer = xi;
                real_alpha = chck.Return_real_alpha;
                break;
            }
            if (minError > currentError) {
                minError = currentError;
                optimalVerification = chck;
                xi_buffer = xi;
                real_alpha = chck.Return_real_alpha;
            }
            xi = generate_xi();
            chck = new VerifecationAlpha(xi,
                                        int.Parse(tb_tau_rde.Text),
                                        Convert.ToDouble(tb_dispersion_rde.Text),
                                        Convert.ToDouble(tb_omega_s_rde.Text));
            chck.CalcEstimation_error();

            i++;
        }
        string a = "limitError" + limitError.ToString() + "\nminError" +
minError + "\ni" + i;
        MessageBox.Show(a, "Error");
        MessageBox.Show(chck.Return_real_alpha.ToString(), "alpha");
        label4.Text = chck.Return_real_alpha.ToString();
        label4.Text = real_alpha.ToString();
        xi = xi_buffer;
        MessageBox.Show(xi_buffer[0].ToString(), "");

        Dictionary_Push pushdiff = new Dictionary_Push();

```

```

pushdiff.pushD(windowname + signalnames[0], signalnames[0], xi_buffer);

ISignal signa81 = SignalStorage.Get(windowname + signalnames[0]);
double[] data = signa81.GetData();
double[] data2 = xi_buffer;

Chart_Build d_recur1 = new Chart_Build(windowname);
d_recur1.Show();
d_recur1.show_charts(windowname + signalnames[0]);

if (chck_verification.Checked == true)
{
    label3.Text = optimalVerification.ResultBool.ToString();
    Dictionary_Push push2 = new Dictionary_Push();
    push2.pushDD(windowname + "Verification", "Verifecation",
optimalVerification.ReturnEstimation_error);

    Chart_Build pushverchart = new Chart_Build(windowname);
    pushverchart.ChartProperties();
    pushverchart.Show();
    pushverchart.show_charts2(0, windowname + "Verification");
}
}

private double[] generate_xi()
{
    double dispersion_ = Convert.ToDouble(tb_dispersion_rde.Text);
    double omega_s_ = Convert.ToDouble(tb_omega_s_rde.Text);
    int duration_ = int.Parse(tb_duration_rde.Text);

    var rde_ss = new ReccurentDiffEquations2(duration_, dispersion_, omega_s_);
    ISignal xi_signal = rde_ss.Xi();

    double[] xi_data = xi_signal.GetData(); //omega_s_o*delta(t)
    return xi_data;
}

private void btn_autofill_Click(object sender, EventArgs e)
{
    tb_dispersion_rde.Text = "5";
    tb_omega_s_rde.Text = "0.05";
    tb_tau_rde.Text = "100";
    tb_duration_rde.Text = "20000";
}

private void btn_teor_exp_cor_Click(object sender, EventArgs e)
{
    if (tb_dispersion_rde.Text != ""
        && tb_omega_s_rde.Text != ""
        && tb_duration_rde.Text != ""
        && tb_tau_rde.Text != "")
    {
        int tau_ = int.Parse(tb_tau_rde.Text);
        double dispersion_ = Convert.ToDouble(tb_dispersion_rde.Text);
        double omega_s_ = Convert.ToDouble(tb_omega_s_rde.Text);
        int duration_ = int.Parse(tb_duration_rde.Text);

        double[] simulation_teor = new double[tau_];

        for (int tau = 0; tau < tau_; ++tau)
        {
            simulation_teor[tau] = Math.Pow(dispersion_, 2) * Math.Exp(-(omega_s_) *
tau);
        }
        Dictionary_Push pushdiff = new Dictionary_Push();

        double[] data_ss = CorelationFn_Ergodic.GetCorelationData(xi_buffer, tau_,
1);

        string windowname = WindowManager.CheckWindowNameZedgraph(formname);

```

```

Dictionary<string, string> Zedgraph_params = new Dictionary<string, string>
{
    {"XAxis.Title.Text", "U, c"},
    {"YAxis.Title.Text", "Автокореляційні ф-ції, у.о."},
    {"Title.Text", "Теоретична і експериментальна автокореляційна ф-
ція"}
};

pushdiff.pushD(windowname + "Corelation function", "Corelation function",
data_ss);
pushdiff.pushD(windowname + "Simulation teor", "Simulation teor",
simulation_teor);

Chart_Zedgraph d_recur2 = new Chart_Zedgraph(windowname);
d_recur2.Show();
d_recur2.show_charts(Zedgraph_params, windowname + "Simulation teor",
windowname + "Corelation function");
}

}

private void pictureBox2_Click(object sender, EventArgs e)
{
}

private void Recur_Diff_Equations_Load(object sender, EventArgs e)
{
}
}
}
}

```

**Г.2** *Короткий опис: модуль для обчислення Гільберт трансформанти, середовище: Microsoft Visual Studio 2017 Enterprise, мова: C#, encoding: UTF-8.*

### Вихідний код:

```

using System;
using Leolib.Math.Number.Complex;
using Approximation.Signal_Parameters.Statistics.Stationar.Ergodic;
namespace Approximation
{
    class GilbertTransform
    {
        private double[] signal;
        private double[] result;
        private double[] envelope;
        public double[] Result
        {
            get { return result; }
        }
        public double[] Envelope
        {
            get { return envelope; }
        }
        public GilbertTransform(double[] inputSignal)
        {
            signal = inputSignal;
            int lenght = signal.GetLength(0);
            double measure = Measure_Ergodic.GetMesure(signal);
            for (int i = 0; i < lenght; ++i)
            {
                signal[i]= signal[i] - measure;
            }
        }
    }
}

```

```

public void CalcTransform()
{
    CenteredProcess centeredProcess = new CenteredProcess(signal, 100);
    centeredProcess.CalcMeasure();
    if (!centeredProcess.IsStationaty)
    {
        centeredProcess.Calculate();
        signal = centeredProcess.Result;
        // процентрувати процес
    }
    int lenght = signal.GetLength(0);
    result = new double[lenght];
    ComplexDouble[] cArray = new ComplexDouble[lenght];
    for (int i = 0; i < lenght; ++i)
    {
        cArray[i] = signal[i];
    }
    Fft.Transform(cArray, true);
    for (int i = 0; i < lenght; ++i)
    {
        //if (i > (lenght + 1) / 2) // recommended
        if (i < (lenght + 1) / 2) // ???
        {
            //cArray[i] *= 2;
            cArray[i].Im = 2 * cArray[i].Im;
            cArray[i].Re = 2 * cArray[i].Re;
        }
        else
        {
            //cArray[i] = 0d;
            cArray[i].Im = 0.0;
            cArray[i].Re = 0.0; //занулюєм відємні частоти
        }
    }
    cArray[lenght / 2].Im = cArray[lenght / 2].Im;
    cArray[lenght / 2].Re = cArray[lenght / 2].Re;
    Fft.Transform(cArray, false);
    for (int i = 0; i < lenght; ++i)
    {
        result[i] = cArray[i].Im / lenght;
    }
}
public void CalcEnvelope()
{
    int lenght = signal.GetLength(0);
    envelope = new double[lenght];
    if (result.Length == lenght)
    {
        for (int i = 0; i < lenght; ++i)
        {
            envelope[i] = Math.Sqrt(result[i] * result[i] + signal[i] * signal[i]);
        }
    }
}
}
}
}
}
}

```

**Г.3** *Короткий опис: модуль для обчислення кореляційних характеристик ПНВС когерентним методом, середовище: Microsoft Visual Studio 2017 Enterprise, мова: C#, encoding: UTF-8.*

**Вихідний код:**

```

using Approximation.Signal;
using System;
using System.Collections.Generic;

```

```

using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using LeoLib.Math.Number.Complex;
namespace Approximation
{
    public class Cogherent
    {
        /// <summary>
        /// h=1
        /// </summary>
        private double[] signal; //вхідний сигнал
        private int N_periods_quantity;
        private int T_period_lenght;
        private bool isStationary = true;
        private double[] estimation_amplitude_measure; //оцінка амплітуди мат.сподіванняня
        private double[] estimation_measure_sin;
        private double[] estimation_measure_cos;
        private double estimation_measure_0;
        private double[] estimation_measure_koefficient;
        private double[] measure;
        private double[] measure_teor;
        private double[] measure_teor_sincos;
        private int k1_components;
        private int k2_components;
        private double a;
        private int Um;
        private double[,] corelation_est_data;
        private double[] corelation_est_0;
        private double[,] corelation_est_sin;
        private double[,] corelation_est_cos;
        private double[,] corelation_est_amp;
        public Cogherent(string Signal_key,
            int N_periods_quantity_input,
            int T_period_lenght_input,
            int k1_components_input,
            int k2_components_input,
            double a_input,
            int um_input)
        {
            ISignal signal_get = SignalStorage.Get(Signal_key);
            signal = signal_get.GetData(); ;
            N_periods_quantity = N_periods_quantity_input;
            T_period_lenght = T_period_lenght_input;
            k1_components = k1_components_input;
            k2_components = k2_components_input;
            a = a_input;
            Um = um_input;
        }
        public double[] Estimation_amplitude_measure
        {
            get { return estimation_amplitude_measure; }
        }
        public double[] Estimation_measure_sin
        {
            get { return estimation_measure_sin; }
        }
        public double[] Estimation_measure_cos
        {
            get { return estimation_measure_cos; }
        }
        public double Estimation_measure_0
        {
            get { return estimation_measure_0; }
        }
        public double[] Measure
        {
            get { return measure; }
        }
        private ComplexDouble[] estimation_measure_complex_koefficient;
        private ComplexDouble[] measureComplex;
    }
}

```

```

public ComplexDouble[] MeasureComplex
{
    get { return measureComplex; }
}
public double[] Estimation_measure_koefficient
{
    get { return estimation_measure_koefficient; }
}
public double[] MeasureTeor
{
    get { return measure_teor; }
}
public double[] Measure_teor_sincos
{
    get { return measure_teor_sincos; }
}
public bool IsStationaty
{
    get { return isStationary; }
}
public double[] Corelation_est_0
{
    get { return corelation_est_0; }
}
public double[,] Corelation_est_data
{
    get { return corelation_est_data; }
}
public double[,] Corelation_est_sin
{
    get { return corelation_est_sin; }
}
public double[,] Corelation_est_cos
{
    get { return corelation_est_cos; }
}
public double[,] CalcCorelation_est_amp
{
    get { return corelation_est_amp; }
}
public void CalcMeasure()
{
    measure = new double[T_period_lenght];
    for (int j = 0; j < T_period_lenght; ++j)
    {
        for (int i = 0; i < N_periods_quantity - 1; ++i)//один резервується
N_periods_quantity - 2
        {
            measure[j] += signal[j + i * T_period_lenght];
        }
        measure[j] /=( N_periods_quantity-1);
    }
}
public void CalcMeasureTeor()
{
    measure_teor = new double[T_period_lenght];
    for (int j = 0; j < T_period_lenght; ++j)
    {
        measure_teor[j] = a * Math.Cos(j * 2 * Math.PI / T_period_lenght);
    }
}

public void CalcMeasure_teor_sincos()
{
    measure_teor_sincos = new double[T_period_lenght];
    double PiMultiplayr = 2 * Math.PI / T_period_lenght;

    for (int j = 0; j < T_period_lenght; ++j)
    {
        for (int k = 0; k <= k1_components; ++k)
        {

```



```

        measure_teor_sincos[j] += estimation_measure_cos[k] *
Math.Cos(k * j * 2 * Math.PI / T_period_lenght) +
        estimation_measure_sin[k] * Math.Sin(k * j * 2 * Math.PI /
T_period_lenght);
    }
    measure_teor_sincos[j] += estimation_measure_0;
}
}

public void Calc_estimation_measure_koefficient()
{
    int length = signal.GetLength(0);

    estimation_measure_koefficient = new double[k1_components];

    for (int k = 0; k < k1_components; ++k)
    {
        for (int i = 0; i < T_period_lenght - 1; ++i)
        {
            estimation_measure_koefficient[k] += Measure[i] *
Math.Exp(N_periods_quantity);
        }
        measure[k] /= T_period_lenght;
    }
}

public void Calc_estimation_measure_complex_koefficient()
{
    int length = signal.GetLength(0);

    estimation_measure_complex_koefficient = new
ComplexDouble[k1_components];

    for (int k = 0; k < k1_components; ++k)
    {
        for (int i = 0; i < T_period_lenght - 1; ++i)
        {
            estimation_measure_complex_koefficient[k] +=
            Measure[i] * (ComplexDouble.I * 2 *
Math.PI).Exp<ComplexDouble>());
        }
        measure[k] /= T_period_lenght;
    }
    //estimation_measure_complex_koefficient[0].Abs;
    //estimation_measure_complex_koefficient[0].Re;
}

public void CalcMeasure_0()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    for (int j = 0; j < lenght; ++j)
    {
        estimation_measure_0 += signal[j];
    }
    estimation_measure_0 /= lenght;
}

public void CalcMeasure_sin()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    estimation_measure_sin = new double[k1_components + 1]; //T_period_lenght
    double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    estimation_measure_sin[0] = 0;
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        //for (int n = 0; n < lenght - 1; ++n)??
        for (int n = 0; n < lenght; ++n)??
        {
            estimation_measure_sin[k] += 2 * signal[n] * Math.Sin(pi_multyplaer *
(k) * n);
        }
        estimation_measure_sin[k] /= lenght;
    }
}

```

```

}
internal void CalcMeasure_teor_sincos()
{
    throw new NotImplementedException();
}
public void CalcMeasure_cos()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    estimation_measure_cos = new double[k1_components + 1]; //T_period_lenght
    double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    estimation_measure_cos[0] = 0;
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        //for (int n = 0; n < lenght - 1; ++n)??
        for (int n = 0; n < lenght; ++n)??
        {
            estimation_measure_cos[k] += 2 * signal[n] * Math.Cos(pi_multyplaer *
(k) * n);
        }
        estimation_measure_cos[k] /= lenght;
    }
}
public void CalcEstimation_amplitude_measure()
{
    estimation_amplitude_measure = new double[k1_components + 1];
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        estimation_amplitude_measure[k] = Math.Sqrt(estimation_measure_cos[k] *
estimation_measure_cos[k] + estimation_measure_sin[k] * estimation_measure_sin[k]);
    }
}
/// <summary>
///
/// </summary>
public void Corelation_Estimate()
{
    corelation_est_data = new double[T_period_lenght, Um];
    for (int z = 0; z < T_period_lenght; ++z)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            for (int n = 0; n < N_periods_quantity - 1; ++n)
            {
                corelation_est_data[z, j] +=
                    (signal[z + n * T_period_lenght] - measure[z]) *
                    (signal[j + z + n * T_period_lenght] - measure[(j + z) %
T_period_lenght]);
            }
            corelation_est_data[z, j] /= (double)(N_periods_quantity-1);??
        }
    }
}
public void Corelation_Estimate_0()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity - Um;
    corelation_est_0 = new double[Um];
    for (int j = 0; j < Um; ++j)
    {
        for (int n = 0; n < lenght; ++n)
        {
            corelation_est_0[j] += ((signal[n] - measure[n % T_period_lenght]) *
                (signal[j + n] - measure[(n + j) % T_period_lenght]));
        }
        corelation_est_0[j] /= (lenght);
    }
}
public void Corelation_Estimate_sin()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity - Um;
    double normMultiplayer = 2.0 / (double)lenght;
    corelation_est_sin = new double[k2_components, Um];
}

```

```

double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / (double)T_period_length;
for (int k = 0; k < k2_components; k++)
{
    for (int j = 0; j < Um; ++j)
    {
        for (int n = 0; n < lenght; ++n)
        {
            corelation_est_sin[k, j] +=
                ((signal[n] - measure[n % T_period_length]) *
                 (signal[n + j] - measure[(n + j) % T_period_length])) *
                Math.Sin(pi_multyplaer * n * (k + 1));
        }
        corelation_est_sin[k, j] *= normMultiplayer;
    }
}

public void Corelation_Estimate_cos()
{
    int lenght = T_period_length * N_periods_quantity - Um;
    double normMultiplayer = 2.0 / (double)lenght;
    corelation_est_cos = new double[k2_components, Um];
    double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / (double)T_period_length;
    for (int k = 0; k < k2_components; k++)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            for (int n = 0; n < lenght; ++n)
            {
                corelation_est_cos[k, j] +=
                    ((signal[n] - measure[n % T_period_length]) *
                     (signal[n + j] - measure[(n + j) % T_period_length])) *
                    Math.Cos( pi_multyplaer * n * (k + 1));
            }
            corelation_est_cos[k, j] *= normMultiplayer;
        }
    }
}

public void Corelation_est_amp(double[,] corelation_est_sin, double[, ]
corelation_est_cos)
{
    corelation_est_amp = new double[k2_components, Um];
    for (int k = 0; k < k2_components; ++k)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            corelation_est_amp[k, j] = Math.Sqrt(
                corelation_est_sin[k, j] * corelation_est_sin[k, j] +
                corelation_est_cos[k, j] * corelation_est_cos[k, j]
            );
        }
    }
}
}
}
}
}
}

```

**Г.4** *Короткий опис: модуль для обчислення кореляційних характеристик ПНВС компонентним методом, середовище: Microsoft Visual Studio 2017 Enterprise, мова: C#, encoding: UTF-8.*

#### **Вихідний код:**

```

using Approximation.Signal;
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

```

```

using LeoLib.Math.Number.Complex;
namespace Approximation
{
    public class Component
    {
        /// <summary>
        /// h=1
        /// </summary>
        private double[] signal; //вхідний сигнал
        private int N_periods_quantity;
        private int T_period_lenght;
        private bool isStationary = true;
        private double[] estimation_amplitude_measure; //оцінка амплітуди мат.сподівання
        private double[] estimation_measure_sin;
        private double[] estimation_measure_cos;
        private double estimation_measure_0;
        private double[] estimation_measure_koefficient;
        private double[] measure;
        private double[] measure_teor;
        private double[] measure_teor_sincos;
        private int k1_components;
        private int k2_components;
        private double a;
        private int Um;
        private double[,] corelation_est_data;
        private double[] corelation_est_0;
        private double[,] corelation_est_sin;
        private double[,] corelation_est_cos;
        private double[,] corelation_est_amp;
        public Component(string Signal_key,
            int N_periods_quantity_input,
            int T_period_lenght_input,
            int k1_components_input,
            int k2_components_input,
            double a_input,
            int um_input)
        {
            ISignal signal_get = SignalStorage.Get(Signal_key);
            signal = signal_get.GetData(); ;
            N_periods_quantity = N_periods_quantity_input;
            T_period_lenght = T_period_lenght_input;
            k1_components = k1_components_input;
            k2_components = k2_components_input;
            a = a_input;
            Um = um_input;
        }
        public double[] Estimation_amplitude_measure
        {
            get { return estimation_amplitude_measure; }
        }
        public double[] Estimation_measure_sin
        {
            get { return estimation_measure_sin; }
        }
        public double[] Estimation_measure_cos
        {
            get { return estimation_measure_cos; }
        }
        public double Estimation_measure_0
        {
            get { return estimation_measure_0; }
        }
        public double[] Measure
        {
            get { return measure; }
        }
        private ComplexDouble[] estimation_measure_complex_koefficient;
        private ComplexDouble[] measureComplex;
        public ComplexDouble[] MeasureComplex
        {
            get { return measureComplex; }
        }
    }
}

```

```

}
public double[] Estimation_measure_koefficient
{
    get { return estimation_measure_koefficient; }
}
public double[] MeasureTeor
{
    get { return measure_teor; }
}
public double[] Measure_teor_sincos
{
    get { return measure_teor_sincos; }
}
public bool IsStationaty
{
    get { return isStationary; }
}
public double[] Corelation_est_0
{
    get { return corelation_est_0; }
}
public double[,] Corelation_est_data
{
    get { return corelation_est_data; }
}
public double[,] Corelation_est_sin
{
    get { return corelation_est_sin; }
}
public double[,] Corelation_est_cos
{
    get { return corelation_est_cos; }
}
public double[,] CalcCorelation_est_amp
{
    get { return corelation_est_amp; }
}
public void CalcMeasure()
{
    measure= new double[T_period_lenght];
    double PiMultiplayr = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    for (int j = 0; j < T_period_lenght; ++j)
    {
        for (int k = 0; k <= k1_components; ++k)
        {
            T_period_lenght) + estimation_measure_cos[k] * Math.Cos(k * j * 2 * Math.PI /
            T_period_lenght);
            estimation_measure_sin[k] * Math.Sin(k * j * 2 * Math.PI /
            T_period_lenght);
        }
        measure[j] += estimation_measure_0;
    }
}
public void CalcMeasureTeor()
{
    measure_teor = new double[T_period_lenght];
    for (int j = 0; j < T_period_lenght; ++j)
    {
        measure_teor[j] = a * Math.Cos(j * 2 * Math.PI / T_period_lenght);
    }
}
public void CalcMeasure_0()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    for (int j = 0; j < lenght; ++j)
    {
        estimation_measure_0 += signal[j];
    }
    estimation_measure_0 /= lenght;
}
public void CalcMeasure_sin()

```

```

{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    estimation_measure_sin = new double[k1_components + 1]; //T_period_lenght
    double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    estimation_measure_sin[0] = 0;
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        for (int n = 0; n < lenght - 1; ++n)
        {
            estimation_measure_sin[k] += 2 * signal[n] * Math.Sin(pi_multyplaer *
(k) * n);
        }
        estimation_measure_sin[k] /= lenght;
    }
}
public void CalcMeasure_cos()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity;
    estimation_measure_cos = new double[k1_components + 1]; //T_period_lenght
    double pi_multyplaer = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    estimation_measure_cos[0] = 0;
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        for (int n = 0; n < lenght - 1; ++n)
        {
            estimation_measure_cos[k] += 2 * signal[n] * Math.Cos(pi_multyplaer *
(k) * n);
        }
        estimation_measure_cos[k] /= lenght;
    }
}
public void CalcEstimation_amplitude_measure()
{
    estimation_amplitude_measure = new double[k1_components + 1];
    for (int k = 1; k <= k1_components; ++k)
    {
        estimation_amplitude_measure[k] = Math.Sqrt(estimation_measure_cos[k] *
estimation_measure_cos[k] + estimation_measure_sin[k] * estimation_measure_sin[k]);
    }
}
/// <summary>
///
/// </summary>
public void Corelation_Estimate()
{
    corelation_est_data = new double[T_period_lenght, Um];
    double PiMultiplayr = 2 * Math.PI / T_period_lenght;
    for (int z = 0; z < T_period_lenght; ++z)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            for (int k = 0; k < k2_components; ++k)
            {
                corelation_est_data[z, j] += corelation_est_cos[k, j] *
Math.Cos((k+1) * z * PiMultiplayr) +
T_period_lenght);
                corelation_est_data[z, j] += corelation_est_sin[k, j] * Math.Sin((k+1) * z * 2 * Math.PI /
T_period_lenght);
            }
            corelation_est_data[z, j] += corelation_est_0[j]; //?
        }
    }
}
public void Corelation_Estimate_0()
{
    int lenght = T_period_lenght * N_periods_quantity - Um;
    corelation_est_0 = new double[Um];
    for (int j = 0; j < Um; ++j)
    {
        for (int n = 0; n < lenght - 1; ++n)
        {
            corelation_est_0[j] += ((signal[n] - measure[n % T_period_lenght]) *

```

```

        (signal[j + n] - measure[(n + j) % T_period_length]));
    }
    correlation_est_0[j] /= (length);
}
}
public void Correlation_Estimate_sin()
{
    int length = T_period_length * N_periods_quantity - Um;
    double normMultiplier = 2.0 / (double)length;
    correlation_est_sin = new double[k2_components, Um];
    double pi_multylaer = 2 * Math.PI / (double)T_period_length;
    for (int k = 0; k < k2_components; k++)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            for (int n = 0; n < length - 1; ++n)
            {
                correlation_est_sin[k, j] +=
                    (signal[n] - measure[n % T_period_length]) *
                    (signal[n + j] - measure[(n + j) % T_period_length]) *
                    Math.Sin(pi_multylaer * n * (k + 1));
            }
            correlation_est_sin[k, j] *= normMultiplier;
        }
    }
}
public void Correlation_Estimate_cos()
{
    int length = T_period_length * N_periods_quantity - Um;
    double normMultiplier = 2.0 / (double)length;
    correlation_est_cos = new double[k2_components, Um];
    double pi_multylaer = 2 * Math.PI / (double)T_period_length;
    for (int k = 0; k < k2_components; k++)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            for (int n = 0; n < length - 1; ++n)
            {
                correlation_est_cos[k, j] +=
                    (signal[n] - measure[n % T_period_length]) *
                    (signal[n + j] - measure[(n + j) % T_period_length]) *
                    Math.Cos(pi_multylaer * n * (k + 1));
            }
            correlation_est_cos[k, j] *= normMultiplier;
        }
    }
}
public void Correlation_est_amp(double[,] correlation_est_sin, double[,]
correlation_est_cos)
{
    correlation_est_amp = new double[k2_components, Um];
    for (int k = 0; k < k2_components; ++k)
    {
        for (int j = 0; j < Um; ++j)
        {
            correlation_est_amp[k, j] = Math.Sqrt(
                correlation_est_sin[k, j] * correlation_est_sin[k, j] +
                correlation_est_cos[k, j] * correlation_est_cos[k, j]
            );
        }
    }
}
}
}
}
}

```