

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

*Кваліфікаційна наукова праця  
на правах рукопису*

**Майструк Павло Володимирович**

УДК 621.01

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**СИНТЕЗ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ МІЖРЕЗОНАНСНИХ  
КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН З  
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ**

Галузь знань 13 – Механічна інженерія

131 – Прикладна механіка

Подається на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних наукових досліджень. Використані ідеї та результати інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ Майструк Павло Володимирович

Науковий керівник:

Ланець Олексій Степанович,  
доктор технічних наук, професор

Львів 2023

## АНОТАЦІЯ

*Майструк Павло Володимирович.* Синтез дискретно-континуальних міжрезонансних коливальних систем вібраційних машин з електромагнітним приводом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD) за спеціальністю 131 – Прикладна механіка. Національний університет «Львівська політехніка», Міністерство освіти та науки України, Львів – 2023.

Враховуючи необхідність впровадження енергоефективних технології в галузі машинобудування, у вступі обґрунтовано актуальність подальших наукових досліджень під час створення високоефективного вібраційного технологічного обладнання. Поширені одно- та двомасові механічні коливальні системи (МКС) не дозволяють максимально реалізувати динамічний потенціал вібраційних машин. Існуючі тримасові вібраційні машини, що здатні працювати у високоефективних міжрезонансних режимах роботи, мають низку недоліків, пов'язаних з їх реалізацією в якості промислового обладнання. Встановлено, що дослідження, проектування та впровадження нових високоефективних конструкцій вібраційних машин, створення нових методів їх розрахунку є актуальною проблематикою наукових досліджень в галузі вібраційної техніки, для вирішення якої в дисертаційній роботі було сформовано мету та завдання подальших теоретичних та експериментальних досліджень.

Для пошуку перспективних рішень в сфері впровадження високоефективних вібраційних машин, було проведено аналіз сучасних тенденцій розвитку вібраційного технологічного обладнання, зокрема порівняно одномасові, двомасові, псевдотримасові та тримасові міжрезонансні МКС. Описано їх конструкції та режими роботи при експлуатації в промисловості. Вкотре доведено, що тримасові міжрезонансні МКС є найбільш придатними структурами для реалізації високоефективних режимів роботи вібраційних машин.

Проаналізовано існуючі тримасові вібраційні машини з найпоширенішими типами приводу: інерційним, кривошипно-шатунним та електромагнітним. На основі огляду конструкції та принципу роботи високоефективного тримасового міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом, що поєднує одночасно дискретну та континуальну структури, відзначено перспективність запропонованої гібридної МКС. Поряд з тим, виокремлено деякі недоліки використання кривошипно-шатунних механізмів в якості приводу вібраційних машин, серед яких наявність рухомих з'єднань, що зменшують надійність даних конструкцій, та складність процесу запуску даного типу вібраційного технологічного обладнання. Визначено, що використання тримасових міжрезонансних вібраційних машин з інерційним приводом також має низку недоліків, зокрема складність входу в міжрезонансну зону коливань та неможливість отримати надлегку реактивну масу для забезпечення високої енергоефективності функціонування. Розглянуто існуючі зразки тримасових вібраційних машин з електромагнітним приводом та обґрунтовано доцільність використання даного типу приводу для реалізації високоефективних режимів роботи.

На основі аналізу літературних джерел сформовано ідею подальших дисертаційних досліджень, що полягає у застосуванні континуальних ділянок з розподіленими параметрами в дискретних МКС вібраційних машин з електромагнітним приводом. Гіпотеза, що забезпечує реалізацію даної ідеї, зводиться до введення в дискретну МКС континуальної ділянки у вигляді пластини, яка володіє малими інерційними та жорсткісними параметрами, що дозволить електромагнітному приводу ефективно збурювати дану систему.

В якості першого етапу опису дискретно-континуальної МКС вібраційного столу з електромагнітним приводом, було сформовано еталонну дискретну модель тримасової МКС. Встановлено інерційно-жорсткісні та силові параметри еталонної дискретної тримасової системи, визначено її енергоефективність у порівнянні з двомасовою МКС. Отримано графіки амплітудно-частотних характеристик дискретних МКС.

Згідно запропонованої концепції побудови дискретно-континуальної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом, розроблено принципову схему дискретно-континуальної міжрезонансної МКС та запропоновано конструктивне рішення кріплення континуальної ділянки в проміжній масі. Сформовано розрахункову схему кріплення пластини. Пластина є симетрично закріплена за допомогою чотирьох шарнірних опор, що розташовані по її периметру. При цьому континуальну ділянку можна поділити на два крила та середину. Запропоновані умови закріплення пластини та розрахунок її параметрів, а саме першої власної частоти коливань, не були описані в літературних джерелах. Тому одним з основних завдань даних дисертаційних досліджень було розроблення методології розрахунку першої власної частоти коливань пластини, як континуальної ділянки, для її ефективного поєднання з дискретною моделлю міжрезонансної МКС. Для цього було запропоновано чотири методи розрахунку власної частоти коливань континуальної ділянки.

Перший метод полягав у використанні функцій Крилова для розрахунку першої власної частоти коливань пластини, спрощеної до стержня. Згідно даного методу припускалося, що прогин пластини, а точніше стержня, здійснюватиметься тільки по одній координаті. Для цього стержень було поділено на три ділянки та для кожної з них сформовано рівняння прогину, що враховували граничні умови закріплення. Було сформовано систему з чотирьох рівнянь та знайдено визначник частотної матриці, яка складена виходячи з даної системи.

Для перевірки отриманих значень власної частоти коливань було використано другий метод – метод скінченних елементів. За допомогою даного методу підтверджено значення першої власної частоти коливань пластини. Виявлено, що при даному методі закріплення пластини, вона, прогинаючись, утворює поверхню гіперболоїда.

Для розрахунку власної частоти коливань пластини та її прогинів було запропоновано третій метод, що полягав у застосуванні методу Релея-Рітца з використанням гармонійних та балочних функцій Крилова по двох координатах та введені в розрахунки значення збурювальної сили електромагнітів. Внаслідок

даного методу знайдено також реакції в місцях шарнірного закріплення пластини.

Також запропоновано четвертий метод розрахунку першої власної частоти коливань пластини за допомогою методу Релея-Рітца з припущенням, що її прогин відбувається по гіперболоїдній поверхні. Для опису рівняння руху пластини використано загальне рівняння гіперболоїда. Таким методом знайдено значення потенціальної енергії прогину пластини та відношення кінетичної енергії до квадрату колової частоти при прогині.

Спрощуючи пластину до стержня, розраховано центр швидкостей його ділянок, зведену масу та жорсткість, параметри якого повністю узгодилися з параметрами дискретної МКС.

Враховуючи визначені параметри дискретної системи та континуальної ділянки, було сформовано математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної МКС. Для цього в систему рівнянь, що необхідна для встановлення амплітуд коливань активної та проміжної мас, було введено реакції в опорах. Побудовано амплітудно-частотну характеристику дискретно-континуальної міжрезонансної МКС. Досліджено полічастотність дискретно-континуальної системи, а саме отримано графік залежності прогинів пластини від частоти коливань системи та графік амплітудно-частотної характеристики даної системи на широкому діапазоні частот, де виявлено безліч резонансних піків.

Конструкторська частина дисертаційних досліджень присвячена опису запропонованої конструкції дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом, розрахунку жорсткості системи резонансних пружних вузлів, континуальної ділянки на міцність та розрахункам параметрів електромагнітного приводу і процесів, що в ньому відбуваються.

Спроектовано твердотілу модель дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом, інерційно-жорсткісні параметри якого узгоджені із розробленою математичною моделлю дискретно-континуальної міжрезонансної МКС, що дозволяє даній конструкції реалізовувати значний динамічний потенціал таких структур.

Проведено розрахунок резонансних пружних елементів МКС вібраційного столу для забезпечення необхідних енергоефективних режимів роботи вібраційною машиною.

Враховуючи необхідність забезпечення надлегкої реактивної маси при реалізації дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин, пластина має бути відносно невеликих розмірів та витримувати при цьому значні навантаження. Тому необхідною умовою при проектуванні вібраційного столу є розрахунок на міцність пластини, що є реактивною масою. При розрахунку на міцність пластини, використовуючи рівняння Нав'є, сформовано функцію розподілу згинальних моментів, що діють на пластину, а також нормальних напружень на її поверхні. Використовуючи функції Крилова, отримано рівняння для знаходження згинальних моментів та напружень у довільній точці ділянок досліджуваної континуальної ділянки. Побудовано схеми згинальних моментів та поперечних напружень пластини по її довжині.

Досліджено часові залежності руху коливальних мас вібраційної машини з врахуванням процесів, що протікають в електромагнітному вібробуджувачі, зокрема отримано графіки залежності сили струму та збурювальної сили електромагнітів від часу. Проведено аналіз процесів, що протікають у тривимірному магнітному полі електромагнітного приводу вібраційного столу. Розраховано та візуально відображено збурювальну силу електромагнітного приводу, яка діє на пластину, густину магнітного потоку в електромагніті, інтенсивність магнітного поля та густину струму в котушках електромагнітного приводу вібраційного столу.

Проведено та описано експериментальні дослідження дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. Зокрема, з метою підтвердження правильності вибору структурної схеми вібраційної машини та адекватності запропонованої математичної моделі для її розрахунку та моделювання, було проведено експериментальні дослідження руху робочого органу з використанням датчика акселерометра/гіроскопа. Було встановлено амплітуду коливань робочого органу на вимушеній частоті та

значення власних частот коливань експериментального зразка вібраційного столу. Дані експериментальні дослідження дозволили встановити факт відповідності фактичного режиму роботи дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом із закладеними в ході проектування даного обладнання значеннями параметрів. Встановлено експлуатаційну характеристику вібраційного столу, а саме максимальне значення маси завантаження робочого органу, що необхідно для майбутнього впровадження даного типу вібраційних машин.

З метою забезпечення максимально можливих динамічних підсилень коливань в міжрезонансній МКС, було запропоновано оптимізувати форму пластини, що виконує роль континуальної ділянки. Для цього було розглянуто базову прямокутну пластину, а також альтернативні варіанти пластин із змінним поперечним перерізом, а саме параболічну впуклу пластину, параболічну випуклу пластину, Х-подібну та ромбоподібну пластини. Запропоновано методику знаходження залежності напруги живлення, при якій відбувається вібраційне підкидання наважок різних мас на робочому органі вібраційного стола для кожної із запропонованих пластин, від маси наважок.

Базуючись на проведених розрахунках континуальної ділянки, дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини та електромагнітного приводу, а також на запропонованій конструкції вібраційної машини, було узагальнено конструктивні параметри міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом.

На основі проведених у дисертаційній роботі теоретичних та експериментальних досліджень було сформовано узагальнений алгоритм розрахунку інерційно-жорсткісних, силових та частотних параметрів дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційного столу з електромагнітним приводом, що необхідно при впровадженні такого типу обладнання у промислове виробництво.

**Ключові слова:** дискретно-континуальна МКС, континуальна ділянка, вібраційний стіл, міжрезонансний режим роботи, електромагнітний привід, власна частота коливань.

## ABSTRACT

*Maistruk Pavlo Volodymyrovych.* Synthesis of discrete-continuous inter-resonance oscillating system of the vibrating machines with an electromagnetic drive. – Qualifying scientific hearing on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of an educational and scientific degree of the doctor of philosophy (PhD) on a specialty 131 – Applied mechanics. Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv – 2023.

Taking into account the need to introduce energy-efficient technologies in the field of mechanical engineering, the introduction substantiates the relevance of further scientific research during the creation of highly efficient vibrating technological equipment. Common single- and two-mass mechanical oscillating system (MOS) do not allow the maximum realization of the dynamic potential of vibrating machines. Existing three-mass vibrating machines capable of operating in highly efficient inter-resonance modes of operation have a number of disadvantages associated with their implementation as industrial equipment. It has been established that the research, design, and implementation of new highly efficient designs of vibrating machines, and the creation of new methods of their calculation is an actual issue of scientific research in the field of vibration technology, for the solution of which the aim and task of further theoretical and experimental research were formed in the dissertation.

In order to find promising solutions in the field of implementation of high-efficiency vibrating machines, an analysis of modern trends in the development of vibrating technological equipment was carried out, in particular, single-mass, two-mass, pseudo-three-mass and three-mass inter-resonance MOS were compared. Their designs and modes of operation during operation in the industry are described. It has been proven once again that three-mass inter-resonance MOS are the most suitable structures for the implementation of highly effective modes of operation of vibrating machines.

The dissertation analyzed the existing three-mass vibration machines with the most common types of drive: inertial, crank, and electromagnetic. Based on a review



of the design and principle of operation of a highly efficient three-mass inter-resonance vibrating conveyor-separator with a crank mechanism combining both discrete and continuous structures, the promising nature of the proposed hybrid MOS was noted.

At the same time, some disadvantages of using crank mechanisms as a drive of vibrating machines are highlighted, including the presence of movable joints that reduce the reliability of these structures, and the complexity of the process of starting this type of vibrating technological equipment. It was determined that the use of three-mass inter-resonance vibration machines with an inertial drive also has a number of disadvantages, in particular, the difficulty of entering the inter-resonance zone of oscillations and the impossibility of obtaining an ultra-light reactive mass to ensure high energy efficiency of operation. The existing samples of three-mass vibrating machines with an electromagnetic drive are considered and the feasibility of using this type of drive for the implementation of highly efficient modes of operation is substantiated.

Based on the analysis of literary sources, the idea of further dissertation research was formed, which consists of the application of continuous members with distributed parameters in discrete MOS of vibrating machines with an electromagnetic drive. The hypothesis that ensures the implementation of this idea comes down to the introduction of a continuous member in the form of a plate into a discrete MOS, which has small inertial and stiffness parameters and allows the electromagnetic drive to effectively disturb this system.

As the first stage of the description of the discrete-continuous MOS of the vibrating table with an electromagnetic drive, a reference discrete model of the three-mass MOS was formed. The inertial, stiffness, and power parameters of the reference discrete three-mass system were established, and its energy efficiency was determined in comparison with the two-mass MOS. Graphs of amplitude-frequency characteristics of discrete oscillatory systems were obtained.

According to the proposed concept of designing a discrete-continuous MOS of a vibrating machine with an electromagnetic drive, a schematic diagram of a discrete-continuous inter-resonance MOS was developed and proposed a constructive solution

for fastening the continuous member in the intermediate mass. A calculation scheme for fixing the plate has been created. The plate is symmetrically fixed with the help of four hinged supports located along its perimeter. At the same time, the continuous member can be divided into two consoles and the middle. The proposed conditions for fixing the plate and the calculation of its parameters, namely the first natural frequency of oscillations, were not described in the literature. Therefore, one of the main tasks of these dissertation studies was the development of a methodology for calculating the first natural frequency of oscillations of the plate, as a continuous member, for its effective combination with a discrete model of the inter-resonance MOS. For this, four methods of calculating the natural frequency of oscillations of a continuous member were proposed.

The first method consisted of the use of Krylov functions to calculate the first natural frequency of oscillations of a plate simplified to a rod. According to this method, it was assumed that the deflection of the rod will be carried out only along one coordinate. For this purpose, the rod was divided into three sections. For each of them, taking into account the limiting conditions of fastening, the deflection equation was formed. A system of four equations was formed and found the determinant of the frequency matrix.

The second method was used to check the obtained values of the natural frequency of oscillations - the finite elements method. Using this method, the value of the first natural frequency of oscillations of the plate was confirmed. It was also found that this method of fixing the plate causes it forms the surface of a hyperboloid while bending.

A third method was proposed to calculate the natural frequency of oscillations of the plate and its deflections, which consisted of the application of the Rayleigh-Ritz method using harmonic and Krylov's beam functions along two coordinates and the values of the electromagnetic disturbance force entered into the calculations. As a result of this method, reactions were also found in places where the plate is hinged.

A fourth method of calculating the first natural frequency of oscillations of the plate consists of using the Rayleigh-Ritz method with the assumption that its deflection occurs along a hyperboloid surface. To describe the equation of motion of the plate

were used the general equation of the hyperboloid. With this method, the value of the plate deflection potential energy and the ratio of the kinetic energy to the square of the circular frequency during deflection were found.

Simplifying the plate to a rod, the center of velocities of its sections, the total mass, and stiffness were calculated, the parameters of which fully agreed with the parameters of the discrete MOS.

Taking into account the determined parameters of the discrete system and the continuous member, a mathematical model of the discrete-continuous inter-resonance MOS was formed. For this, the reactions in resistances were introduced into the system of equations, which is necessary to establish the amplitudes of oscillations of the active and intermediate masses. The amplitude-frequency characteristic of the discrete-continuous inter-resonance MOS is constructed. The multi-frequency of the discrete-continuous system was studied, namely, a graph of the dependence of plate deflections on the frequency of oscillations of a system and a graph of the amplitude-frequency characteristic of this system over a wide frequency range, were obtained.

The design part of the dissertation studies is devoted to the description of the proposed design of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table with an electromagnetic drive, the calculation of the stiffness of the system of resonant elastic elements, the strength of the continuous member, and the calculations of the parameters of the electromagnetic drive and the processes that take place in it.

A solid model of a discrete-continuous inter-resonance vibrating table with an electromagnetic drive has been designed, whose inertia-stiffness parameters are consistent with the developed mathematical model of a discrete-continuous inter-resonance MOS, which allows this design to realize the significant dynamic potential of such oscillating structures.

The calculation of resonant elastic elements of the MOS of the vibrating table was carried out to ensure the necessary energy-efficient modes of operation of the vibrating machine.

Taking into account the need to provide an ultra-light reactive mass when implementing discrete-continuous inter-resonance vibrating machines, the plate should

be relatively small in size and withstand significant loads. Therefore, a prerequisite for designing a vibrating table is the calculation of the strength of the plate, which is a reactive mass. When calculating the strength of the plate, using the Navier equation, a function of the distribution of bending moments acting on the plate, as well as normal stresses on its surface, was formed. Using Krylov's functions, equations were obtained for finding bending moments and stresses at an arbitrary point of the sections of the studied continuous member. Diagrams of bending moments and transverse stresses of the plate along its length are constructed.

The time dependences of the movement of the oscillating masses of the vibrating machine were studied, taking into account the processes taking place in the electromagnetic vibration exciter, in particular, the graphs of the dependence of the current and disturbing force of electromagnets on time were obtained. An analysis of the processes taking place in the three-dimensional magnetic field of the electromagnetic drive of the vibrating table was carried out. The disturbance force of the electromagnetic drive acting on the plate, the magnetic flux density in the electromagnet, the intensity of the magnetic field, and the current density in the coils of the electromagnetic drive of the vibrating table are calculated and visually displayed.

Experimental studies of a discrete-continuous inter-resonance vibrating table with an electromagnetic drive have been conducted and described. In particular, in order to confirm the correctness of the selection of the structural scheme of the vibrating machine and the adequacy of the proposed mathematical model for its calculation and modeling, experimental studies of the movement of the working body using an accelerometer/gyroscope sensor were conducted. The amplitude of oscillations of the working body at the forced frequency and the value of natural frequencies of oscillations of the experimental sample of the vibrating table were determined. These experimental studies made it possible to establish the fact of compliance of the actual mode of operation of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table with an electromagnetic drive with the parameter values established during the design of this equipment. The operational characteristics of the vibrating table, namely the maximum

value of the loading mass of the working body, which is necessary for the future implementation of this type of vibrating machine, have been established.

In order to ensure the maximum possible dynamic amplification of oscillations in an inter-resonance oscillatory system, it was proposed to optimize the shape of the plate, which acts as a continuous section. For this, a basic rectangular plate was considered, as well as alternative variants of plates with variable cross-sections, namely parabolic convex plate, parabolic convex plate, and X-shaped and diamond-shaped plates. A method of finding the dependence of the power supply voltage, during which there is a vibrational tossing of weights of different masses on the working body of the vibrating table for each of the proposed plates, on the weight of the weights, is proposed.

Based on the calculations of the continuous member, the discrete-continuous inter-resonance MOS of the vibrating machine and the electromagnetic drive, as well as the proposed design of the vibrating machine, the design parameters of the inter-resonance vibrating table with an electromagnetic drive were summarized.

On the basis of the theoretical and experimental research carried out in the dissertation, a generalized algorithm for calculating the inertia-stiffness, force, and frequency parameters of the discrete-continuous inter-resonant MOS of the vibrating table with an electromagnetic drive, which is necessary for the introduction of this type of equipment into industrial production, was formed.

**Keywords:** discrete-continuous oscillating system, continuous member, vibrating table, inter-resonance mode of operation, electromagnetic drive, the natural frequency of oscillations.

## СПИСОК ОСНОВНИХ ОПУБЛІКОВАНИХ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЙНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ НАУКОВИХ ПРАЦЬ

*Наукові праці, у яких опубліковано основні наукові результати*

1. Ланець О. С., Майструк П. В., Боровець В. М., Майструк В. В., Качмар Р. Я. Формування високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи вібраційної машини з електромагнітним приводом. Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні». – 2021. – Вип. 55, С. 62–75.
2. Maistruk P., Lanets O., Stupnytskyu V. Approximate Calculation of the Natural Oscillation Frequency of the Vibrating Table in Inter-Resonance Operation Mode. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*. – 2021. – Vol. 71(2), Pp. 151 – 166.
3. Lanets Oleksii, Maistruk Pavlo, Maistruk Volodymyr, Derevenko Iryna. Approximate calculation of natural frequencies of oscillations of the plate with variable cross-section of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*. – 2022. – Vol. 8(2), Pp. 41 – 50.
4. Maistruk Pavlo, Lanets Oleksii, Maistruk Volodymyr, Derevenko Iryna. Establishment of the natural frequency of oscillations of the two-dimensional continuous member of the vibrating table. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 52(2022), Pp. 199-214.
5. Lanets O., Kachmar R., Maistruk P., Derevenko I., Hordieiev A. Approximate calculation of natural frequencies of oscillations of the diamond-shaped plates of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2023. – Vol. 1277, Pp. 1–7.

6. Ланець О. С., Майструк П. В., Майструк В. В., Деревенько І. А. Тримасова коливальна система. Патент на корисну модель 153676 Україна, опуб. 09. 08. 2023.

*Наукові праці апробаційного характеру та праці,  
у яких опубліковано додаткові наукові результати*

7. Майструк П. В. Розрахунок власної частоти коливань континуальних ділянок при створенні міжрезонансних вібростолів // Експлуатаційна та сервісна інженерія: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (Харків, 27–28 травня 2020 р.), Харків. – С. 27 – 29.

8. Ланець О. С., Майструк П. В. Розрахунок центра швидкостей ділянок стержня як реактивної маси дискретно-континуальної міжрезонансної вібростолу з електромагнітним приводом // Потураєвські читання: тези XIX Всеукраїнської науково-технічної конференції (Дніпро, 22 квітня 2021р.), Дніпро. – С. 33–34.

9. Майструк П. В. Вплив геометричних розмірів пружної пластини зі складними граничними умовами кріплення на її першу власну частоту коливань // Потураєвські читання: тези XIX Всеукраїнської науково-технічної конференції (Дніпро, 22 квітня 2021р.), Дніпро. – С. 35.

10. Ланець О. С., Майструк П. В., Майструк В. В., Деревенько І. А. Оптимізація форми та підбір розмірів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібростолу // Енергоощадні машини і технології: тези III міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 17 – 19 травня 2022 року), Київ. – С. 50 – 54.

11. Майструк П. В. Розрахунок зведених інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібростолу з електромагнітним приводом // Вібрації в техніці та технологіях: тези XIX Міжнародної науково-технічної конференції, (Київ, 23 – 25 травня 2023 року), Київ. – С. 20 – 23.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ТЛУМАЧЕНЬ .....	21
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ .....	22
ВСТУП .....	33
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ І ПОШУК</b>	
<b>ПЕРСПЕКТИВНИХ СТРУКТУР ДЛЯ УДОСКОНАЛЕННЯ</b>	
<b>МІЖРЕЗОНАНСНИХ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН .....</b>	<b>40</b>
1.1. Визначення структур, найбільш придатних для реалізації	
високоєфективних режимів роботи вібраційних машин .....	40
1.1.1. Одномасові МКС .....	41
1.1.2. Двомасові МКС .....	43
1.1.3. Псевдо тримасові МКС на базі динамічного гасника .....	46
1.1.4. Тримасові міжрезонансні МКС .....	48
1.2. Виявлення недоліків існуючих тримасових міжрезонансних	
вібраційних машин. Обґрунтування раціональності вибору електро-	
магнітного приводу в міжрезонансних вібраційних машинах .....	50
1.2.1. Аналіз конструкцій тримасових машин з кривошипно-	
шатунним механізмом. Виявлення недоліків, пов'язаних з їх	
проектуванням та експлуатацією.....	50
1.2.2. Проблемні питання, пов'язані з проектуванням тримасових	
МКС з інерційним приводом .....	56
1.2.3. Аналіз тримасових міжрезонансних вібраційних машин з	
електромагнітним приводом .....	66
1.3. Формування ідеї та гіпотези подальших досліджень .....	76
1.4. Висновки до першого розділу .....	80
<b>РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ ПАРАМЕТРІВ</b>	
<b>ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ МКС НА БАЗІ</b>	



ЕТАЛОННОЇ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ .....	82
2.1. Структура та математична модель еталонної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом .....	82
2.2. Обґрунтування конструктивних та інерційно-жорсткісних пара- метрів еталонної тримасової МКС .....	87
2.3. Висновки до другого розділу .....	95
 РОЗДІЛ 3. РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ КОНТИНУАЛЬНОЇ ДІЛЯНКИ ТА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ МКС ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ .....	
3.1. Структура дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини .....	97
3.2. Розрахунок власної частоти пластини з використанням функцій Крилова .....	100
3.3. Розрахунок власної частоти пластини за допомогою методу скінченних елементів в програмному продукті ANSYS Workbench.....	107
3.4. Розрахунок власної частоти пластини методом Релея-Рітца з використанням гармонійних та балочних функцій.....	111
3.5. Розрахунок власної частоти пластини методом Релея-Рітца з припущенням, що її прогин відбувається по гіперболоїдній поверхні.....	127
3.6. Зведені маса та жорсткість стержня .....	130
3.6.1. Розрахунок точок зведення швидкостей ділянок стержня .....	130
3.6.2. Розрахунок зведених мас та жорсткостей стержня .....	133
3.7. Математична модель дискретно-континуальної МКС.....	136

	18
3.8. Висновки до третього розділу .....	140
<b>РОЗДІЛ 4. КОНСТРУКТИВНЕ РОЗРОБЛЕННЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО ВІБРАЦІЙНОГО СТОЛА З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ .....</b>	<b>144</b>
4.1. Твердотіла модель вібраційного столу з електромагнітним приводом.....	144
4.2. Розрахунок системи резонансних пружних елементів МКС вібраційного столу .....	148
4.3. Розрахунок континуальної ділянки вібраційного столу на міцність ..	153
4.4. Розроблення та моделювання електромагнітного приводу вібраційного столу.....	157
4.4.1. Дослідження часових залежностей руху коливальних мас з врахуванням процесів, що протікають в електромагнітному вібробуджувачі.....	157
4.4.2 Числові розрахунки тривимірного магнітного поля електромагнітного приводу вібраційного столу .....	166
4.5. Висновки до четвертого розділу .....	170
<b>РОЗДІЛ 5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО ВІБРАЦІЙНОГО СТОЛА З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ. ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ПЛАСТИНИ...</b>	<b>173</b>
5.1. Постановка експериментальних досліджень дискретно- континуального міжрезонансного вібраційного столу.....	173
5.2. Встановлення амплітуди коливань системи на вимушеній частоті. Дослідження руху робочого органу з використанням датчика акселерометра/гіроскопа .....	175

	19
5.3. Встановлення частоти власних коливань системи.....	177
5.4. Робота вібраційного столу при завантаженні. Встановлення додаткових переваг міжрезонансних систем з електромагнітним приводом .....	181
5.5. Оптимізація форми та підбір розмірів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу.....	182
5.5.1. Методика проведення експериментальних досліджень .....	182
5.5.2. Результати експериментів та їх аналіз .....	190
5.6. Узагальнення результатів теоретичних та експериментальних досліджень, проведених в дисертаційній роботі. Алгоритм розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом .....	192
5.7. Висновки до п'ятого розділу .....	199
ВИСНОВКИ .....	201
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	207
ДОДАТКИ .....	226
Додаток А. Акт впровадження результатів наукових досліджень .....	227
Додаток В. Дискретна модель тримасової МКС .....	230
Додаток С. Дискретна модель двомасової МКС .....	233
Додаток D. Математична модель вільних коливань пластини, спрощеної до стержня. Перша власна частота коливань стержня .....	235
Додаток Е. Розрахунок власної частоти пластини з використанням балочних функцій по двох координатах .....	239
Додаток F. Розрахунок власної частоти пластини наближеним методом Релея-Рітца з використанням загального рівняння гіперболоїда .....	248

Додаток G. Встановлення точки зведення, зведеної маси та зведеної жорсткості континуальної ділянки .....	250
Додаток H. Дискретно-континуальна модель міжрезонансної МКС .....	255
Додаток I. Прогин континуальної ділянки при різних частотах збурення в складі дискретно-континуальної міжрезонансної МКС .....	263
Додаток J. Розрахунок на міцність континуальної ділянки вібраційного стола з електромагнітним приводом .....	269
Додаток K. Дослідження процесів, що протікають в електромагнітному приводі .....	273

## ПЕРЕЛІК ТЛУМАЧЕНЬ ТЕХНІЧНИХ ТЕРМІНІВ

*Гібридна система* – це система, що поєднує в собі фізичні об’єкти з різними властивостями.

*Дискретна система* – це коливальна система, що містить лише тверді (недеформівні) тіла, які сполучені між собою пружними елементами.

*Континуальна ділянка* – це однорідне та неперервне еластичне тіло із розподіленими параметрами, що володіє як інерційними, так і жорсткісними властивостями. Континуальна ділянка може бути пластиною, стержнем тощо.

*Дискретно-континуальна система* – це коливальна система, яка складається із дискретної МКС та введеної в неї континуальної ділянки.

*Еталонна коливальна система* – це тримасова міжрезонансна дискретна МКС, яка володіє параметрами динамічного підсилення коливань дискретно-континуальної системи і є її прототипом.

*Міжрезонансна коливальна система* – це тримасова коливальна система, робоча зона коливань якої знаходиться в проміжку між двома близькими резонансними піками і володіє значними підсиленнями коливань, забезпечуючи високу енергоефективність функціонування.

*Надлегка маса* – це реактивна маса тримасової МКС, інерційні параметри якої є значно менші за інерційні параметри інших коливальних мас (зокрема активної та проміжної).

*Надмала жорсткість* – це жорсткість, яка притаманна континуальній ділянці дискретно-континуальної системи та є значно меншою за решту жорсткісних параметрів даної системи.

*МКС* – механічна коливальна система.

### ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Позначення	Опис	Розмірність
$A, B$	постійні у рівняннях прогинів	[–]
$a, b, c$	параметри гіперболоїда, що використовується для знаходження першої власної частоти коливань пластини	[–]
$A_m$	відносна максимальна амплітуда коливань між пластиною та електромагнітом	[ $m$ ]
$a_m, b_m$	ширина полюсів магнітопроводу	[ $m$ ]
$b_c$	товщина робочої ділянки резонансного пружного елемента	[ $m$ ]
$b_n$	товщина пластини	[ $m$ ]
$c$	жорсткість пружного елемента, який з'єднує активну та реактивну маси вібраційних машин, побудованих на основі одно- та двомасової МКС	[ $H / m$ ]
$c_{12}, c_{23}$	жорсткість пружних елементів, які з'єднують відповідно активну з проміжною та проміжну з реактивною масами тримасової МКС	[ $H / m$ ]
$c_{i1}, c_{i2}$	жорсткість робочої ділянки резонансного пружного елемента	[ $H / m$ ]
$c_{is}, c_{i3}$	жорсткість пружних елементів, які з'єднують МКС з фундаментом (віброізолятори)	[ $H / m$ ]

$c_{Imp}$	зведена жорсткість континуальної ділянки	$[H / m]$
$c_{Imp1}, c_{Imp2}$	частки зведених жорсткостей від прогину стержня відповідно на першій та другій ділянках	$[H / m]$
$c_{Imp1t}, c_{Imp2t}$	частки зведених жорсткостей від зміщення в шарах стержня відповідно на першій та другій ділянках	$[H / m]$
$D$	коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань	$[-]$
$D_1$	визначник матриці коефіцієнтів для системи диференціальних рівнянь руху за лінійними координатами	$[-]$
$D_2$	Додатковий множник, що використовується для знаходження амплітудного значення сили збурення тримасової МКС	$[-]$
$D_f$	множник, що використовується для знаходження енергій прогину пластини	$[-]$
$E$	модуль пружності I роду	$[Па]$
$F_0, F$	амплітудне значення сили збурення МКС (з різними типами приводів)	$[H]$
$F_{02}, F_{03}$	відповідно амплітудні значення збурювальних сил для двомасової та еталонної дискретної тримасової МКС	$[H]$
$F_{mag1}, F_{mag2}$	магніторушійна сила, яка затрачається в повітряному робочому проміжку між осердям з котушкою $i$	$[H]$

	якорем відповідно першого та другого електромагніту	
$g$	прискорення вільного падіння	$[m / c^2]$
$G$	модуль пружності II роду	$[Па]$
$G_1, G_2$	провідність полюсів магнітопроводу	$[Гн]$
$G_c$	базисна функція прогину консолі пластини по двох координатах	$[-]$
$G_m$	базисна функція прогину середини пластини по двох координатах	$[-]$
$G_{mag}$	сумарна провідність робочого повітряного проміжку між осердям з котушкою і якорем вібробуджувача	$[Гн]$
$G_{mag1}, G_{mag2}$	провідність робочого повітряного проміжку між осердям з котушкою і якорем вібробуджувача на першому та другому полюсах	$[Гн]$
$h$	ширина пластини	$[м]$
$h_c$	ширина резонансного пружного елемента	$[м]$
$i$	сила струму, що протікає в котушці електромагніту	$[А]$
$J_z$	момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії перерізу	$[м^4]$
$K, P, \Phi$	відповідно: кінетична та потенціальна енергії, функція розсіювання МКС	$[Дж]$



$K_1, K_2, K_3$	кінетичні енергії відповідно активної, проміжної та реактивної коливальних мас	[Дж]
$K_c, K_m$	кінетичні енергії прогину відповідно консолі та середини пластини	[Дж]
$k_f$	коефіцієнт заземлення пружних елементів	[-]
$K_H, P_H$	Кінетичні та потенціальна енергії прогину пластини по поверхні гіперболоїда	[Дж]
$k_p$	коефіцієнт втрат, що враховує потоки випуклості електромагнітного поля	[-]
$k_{sc}$	коефіцієнт концентрації напружень	[-]
$k_y$	коефіцієнт, що залежить від форми поперечного прямокутного перерізу пластини	[-]
$\tilde{k}_\lambda$	додаткове динамічне підсиленням коливань для тримасових систем з інерційним збуренням	[-]
$L$	довжина пластини	[м]
$L_1, L_2, L_3$	довжини ділянок пластини	[м]
$L_f$	відстань від лівого кінця пластини до точки прикладання сили	[м]
$L_m$	індуктивність котушки електромагніту	[Гн]
$l_{\min}$	мінімально необхідна довжина робочої ділянки пружного елемента	[м]
$M, M_{кр}$	крутний момент, що виникає при згині пластини	[Н / м]

$m_1, m_2, m_3$	інерційні параметри відповідно активної, проміжної та реактивної мас тримасової МКС ( $m_2$ може позначати інерційний параметр реактивної маси двомасової МКС)	[кг]
$m_f$	маса фундаменту	[кг]
$m_{imp}$	зведена маса континуальної ділянки	[кг]
$m_{imp1}, m_{imp2}$	частки зведеної маси від лінійного переміщення стержня відповідно на першій та другій ділянках	[кг]
$m_{imp1s}, m_{imp2s}$	частки зведеної маси від провертання стержня відповідно на першій та другій ділянках	[кг]
$m_{rm}$	маса погонного метру пластини (стержня)	[кг / м]
$m_{vib}$	маса мотора-вібратора (для вібраційних машин з інерційним приводом)	[кг]
$N$	потужність приводу вібраційної машини	[Вт]
$N_s$	змінна, що використовується при експериментальному визначенні частот коливань та показує скільки одиниць по осі абсцис відповідають часу 1 с	[1 / с]
$P_c, P_m$	потенціальні енергії прогину відповідно консолі та середини пластини	[Дж]
$P_{cr}$	поперечна сила, що діє в довільному перерізі пластини, стержня, балки тощо	[Н]

$P_{ts}$	тестове зусилля, яким навантажується резонансний пружний елемент	[Н]
$Q_{y_i}$	збурювальне зусилля за незалежними узагальненими координатами	[Н]
$R$	опір котушки електромагніту	[Ом]
$R_1, R_2$	відповідно реакції сил в лівій та правій опорах пластини	[Н]
$S_i, T_i, U_i, V_i$	функції Крилова	[–]
$S_{1m}, S_{2m}$	площа полюсів магнітопроводу	[м <sup>2</sup> ]
$t$	час	[с]
$T_p, T_{p1}, T_{p2}$	період коливань робочого органу вібраційної машини в одиницях осі абсцис, що використовується при експериментальному визначенні частот коливань (відповідно вимушеної та двох резонансних)	[–]
$U$	напруга, що протікає в електромагніті	[В]
$w_1, w_2, w_3, w_4$	прогини відповідно 1 – 4 ділянок пластини	[м]
$W_c$	прогин консолі пластини вздовж осі $Oz$	[м]
$W_H$	прогин пластини по поверхні гіперболоїда	[м]
$w_l, w_m, w_r$	прогини відповідно лівої, середньої та правої ділянок пластини	[м]

$W_m$	прогин середини пластини вздовж осі $Oz$	[ $m$ ]
$x, y, z$	осі абсолютної системи координат	[ $-$ ]
$x_b, y_b, z_b$	осі відносної системи координат	[ $-$ ]
$X_{lmp1}, X_{lmp2}$	точки зведення пластини відповідно на першій та другій ділянках	[ $m$ ]
$X_{lmp12}$	точка зведення пластини на лівій половині	[ $m$ ]
$Y_1$	амплітуда коливань активної маси	[ $m$ ]
$Y_2$	амплітуда коливань реактивної маси двомасових МКС або проміжної маси тримасової МКС	[ $m$ ]
$Y_3$	амплітуда коливань реактивної маси тримасової МКС	[ $m$ ]
$Y_{rel}$	відносна амплітуда коливань	[ $m$ ]
$Z, \Xi, \Theta, O, \Lambda_m, N_m, \Phi_m$	Доданки, що використовуються для опису закону зміни сили струму, що протікає в котушці електромагніту	[ $-$ ]
$\tilde{z}_{res}, z_{res}$	резонансні налагодження МКС відносно відповідно першої та другої власних частот	[ $-$ ]
$\alpha$	кут, що відображає відкривання тиристором напруги на затискачах обмотки вібробуджувача з запізненням	[ $rad$ ]
$\beta, \gamma, \theta, \kappa$	відношення довжин ділянок пластини до її загальної довжини	[ $-$ ]

$\Delta$	визначник частотної матриці для розрахунку першої власної частоти пластини (стержня) за допомогою функцій Крилова	$[-]$
$\delta_0, \Delta_a$	величина зведеного повітряного проміжку між статором і осердям електромагніту	$[м]$
$\delta_c$	величина прогину резонансного пружного елемента під дією тестового зусилля	$[м]$
$\delta A_{py_i}$	елементарні роботи збудовального зусилля на елементарних переміщеннях МКС, викликані приростом узагальнених координат	$[Дж]$
$\varepsilon$	зміщення пластини по осі $Oy$ відносно абсолютної системи координат	$[м]$
$\zeta$	приведена частка жорсткості	$[-]$
$\eta$	ККД приводу	$[-]$
$\Lambda$	коефіцієнт співвідношення власних колових частот системи	$[-]$
$\mu$	коефіцієнт Пуассона	$[-]$
$\mu_{12}, \mu_{23}$	дисипація енергії у пружних елементах, які з'єднують відповідно активну з проміжною та проміжну з реактивною масами тримасової МКС	$[Н \cdot с / м]$
$\mu_{is}$	коефіцієнт в'язкого опору у віброізоляторах	$[Н \cdot с / м]$
$\mu_l$	коефіцієнт в'язкого опору середовища завантаження	$[Н \cdot с / м]$

$H$	додатковий множник, що використовується для знаходження жорсткості пружного елемента	$[-]$
$\nu_f$	циклічна частота вимушених коливань	$[Гц]$
$\nu_{fe}$	експериментально визначена циклічна частота вимушених коливань	$[Гц]$
$\nu_{ne1}, \nu_{ne2}$	експериментально визначені циклічні частоти власних коливань вібраційної машини	$[Гц]$
$\nu_{nF}$	власна циклічна частота коливань пластини, знайдена за допомогою методу скінченних елементів	$[Гц]$
$\nu_{nH}$	власна циклічна частота коливань пластини, яка прогинається по поверхні гіперболоїда	$[Гц]$
$\nu_{nK}$	власна циклічна частота коливань пластини (стержня), знайдена за допомогою функцій Крилова	$[Гц]$
$\nu_{nR}$	власна циклічна частота коливань пластини з прогином по двох координатах визначена методом Релея-Рітца	$[Гц]$
$\xi$	коефіцієнт, що використовується у функціях Крилова	$[-]$
$\xi_m$	кут зсуву фаз між переміщенням та зусиллям	$[рад]$
$\rho$	питома маса (густина)	$[кг / м^3]$
$\sigma$	напруження згину пластини (загальне позначення)	$[Па]$
$\sigma_1, \sigma_2$	напруження згину пластини на ділянках 1 та 2	$[Па]$

$[\sigma_{-1}]$	допустиме напруження на згин для матеріалу пластини	$[Па]$
$\sigma_{c \max}$	максимальні напруження, що виникають у резонансному пружному елементі	$[Па]$
$\sigma_{\max}$	максимальне напруження на згин в пластині	$[Па]$
$\phi$	кількість витків котушки електромагніту	$[-]$
$\Phi_{nom}$	магнітний потік	$[Вб]$
$\chi_{imp12}$	прогин пластини у точці центру швидкостей лівої половини	$[м]$
$\Omega, \omega$	колова частота коливань (загальне позначення)	$[рад / с]$
$\Omega_f, \omega_f$	вимушена колова частота коливань системи (загальне позначення)	$[рад / с]$
$\omega_{imp}$	власну частоту пластини, виходячи з параметрів зведених маси та жорсткості	$[рад / с]$
$\Omega_n, \omega_n,$ $\Omega_e, \omega_e$	власна колова частота коливань системи (загальне позначення)	$[рад / с]$
$\Omega_{n1}, \Omega_{n2},$ $\Omega_{n3}, \Omega_{e1},$ $\Omega_{e2}, \Omega_{e3}$	відповідно перша, друга та третя власні колові частоти коливань тримасової системи	$[рад / с]$
$\omega_{ndc1}, \omega_{ndc2}$	власні колові частоти коливань дискретно-континуальної міжрезонансної МКС	$[рад / с]$

$\omega_{nF}$	власна колова частота коливань пластини, знайдена за допомогою методу скінченних елементів	$[рад / с]$
$\omega_{nK} \omega_{nF}$	власна колова частота коливань пластини (стержня), знайдена за допомогою функцій Крилова	$[рад / с]$
$\omega_{nR}$	власна колова частота коливань пластини з прогином по двох координатах визначена методом Релея-Рітца	$[рад / с]$
$\omega_p$	парціальна частота реактивної маси МКС	$[рад / с]$



## ВСТУП

На сьогоднішній день вібраційне технологічне обладнання широко застосовується в багатьох сферах промисловості. Враховуючи простоту реалізації конструктивних рішень, різноманітність сфер використання та можливість забезпечення необхідної технологічної якості виробничих процесів, вібраційна техніка стрімко набула популярності на виробництвах. Саме тому існує потреба у розвитку даного напрямку, що включає як удосконалення існуючих видів вібраційного обладнання, так і впровадження нових структур.

Серед різноманіття вібраційної техніки найбільш поширеними є вібраційні машини, спроектовані на основі одно- та двомасових резонансних МКС. В якості приводу вібраційного обладнання найчастіше використовуються інерційний, кривошипно-шатунний та електромагнітний приводи. Комбінації із вищезгаданих МКС та типів приводу можуть задовільнити практично усі потреби виробництва, пов'язані із застосуванням в ньому вібраційної техніки.

Кожен вид вібраційних машин має свої переваги та недоліки. Якщо, наприклад, порівнювати між собою одно- та двомасові вібраційні машини, простоту конструктивної реалізації, і, як наслідок, дешевизну перших може нівелювати можливість застосування ефективніших резонансних режимів роботи другими. Це стосується і застосування різних типів приводу вібраційних машин.

Досить часто використання переваг деякої МКС пов'язане із використанням певного типу приводу у вібраційних машинах, спроектованих на її основі. Так, наприклад, одномасові вібраційні машини у переважній більшості отримують силове збурення від інерційного приводу. Поширеними також є тримасові вібраційні машини з електромагнітним приводом тощо.

Проектування вібраційного технологічного обладнання спонукає враховувати велику кількість факторів, які впливають на роботу даних вібраційних систем. Тому існує простір для знаходження нових властивостей

МКС, в основному багатомасових, що може сприяти якісному та кількісному покращенню процесів, в яких використовуються вібраційні машини.

Отже, дослідження, проектування та впровадження нових конструкцій вібраційних машин, створення нових методів їх розрахунку, є одним із найперспективніших напрямків наукових дослідження в галузі машинобудування.

**Актуальність роботи.** Важливим аспектом розвитку машинобудівної промисловості в цілому та вібраційного технологічного обладнання зокрема є впровадження нових енергоефективних рішень. Вдосконаленню підлягають усі без виключення етапи промислового виробництва: від планування логістичних маршрутів до впровадження якісно нових конструктивних рішень при проектуванні технологічного обладнання, застосування нових класів технологічних машин.

Що стосується вібраційного технологічного обладнання, відбувається покращення різноманітних аспектів проектування та експлуатації вібраційних машин. Деякі промислові підприємства та наукові інституції приділяють значну увагу покращенню надійності вібраційних машин та їх вузлів, інші займаються вдосконаленням технологічних параметрів даного типу обладнання. Перспективним є і напрям по створенню енергоефективного вібраційного технологічного обладнання. Існуючі одно- та двомасові вібраційні машини, що працюють здебільшого у дорезонансних та зарезонансних режимах, не здатні досягти високої енергоефективності функціонування. Їхня поширеність зумовлена, в основному, простотою конструкцій та можливістю легкого переналаштування. Однак існують і тримасові вібраційні машини, що здатні працювати у високоефективних міжрезонансних режимах роботи. Дані вібраційні машини можуть мати значно нижче споживання електроенергії у порівнянні з одно- та двомасовими, виконуючи при цьому однакові технологічні завдання.

Незважаючи на істотні переваги в енергоефективності використання, впровадження тримасових вібраційних машин у промислове виробництво має

низку недоліків. Дані системи мають складніші конструкції, які потребують більших витрат ресурсів на проектування, виробництво та експлуатацію. Існуючі методи розрахунку та проектування класичних дискретних тримасових міжрезонансних МКС, як структур для реалізації вібраційних машин, не дозволяють усунути вагомі недоліки для їх широкого використання у промисловості.

Саме тому розвиток методології створення високоефективних міжрезонансних вібраційних машин, в яких будуть усунені недоліки, що унеможливають широке впровадження в промисловість такого типу обладнання, є перспективною та актуальною науково-прикладною задачею в галузі машинобудування.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Наукові дослідження, запропоновані в дисертаційній роботі, узгоджено із Законом України про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки (Відомості Верховної Ради України (ВВР), 2001, № 48, ст. 253 (із змінами, внесеними згідно із Законом № 2859-IX від 12.01.2023)), де у статті 3 енергетику та енергоефективність визначено одними з пріоритетних напрямів розвитку науки і техніки на період до 2023 року в Україні.

**Мета роботи** полягає у розробленні методології створення міжрезонансних вібраційних машин, що є надійні та здатні реалізовувати високоефективні режими роботи.

Для досягнення вище сформованої мети дисертаційних досліджень поставлено наступні задачі, які необхідно розв'язати:

1. Проведення аналізу сучасного стану та пошук перспективних структур для удосконалення міжрезонансних вібраційних машин, що володіють високим динамічним потенціалом, здатні легко входити в міжрезонансну зону, реалізуючи енергоефективні режими роботи.

2. Формування принципової схеми такої МКС вібраційної машини, що апріорі мала б володіти вище згаданими перевагами.

3. Розроблення методології синтезу частотних та інерційно-жорсткісних параметрів МКС. Формування повноцінної математичної моделі вибраної МКС. Встановлення адекватності математичної моделі, її ефективності, формування висновків про ймовірну роботоздатність запропонованої МКС, здатної реалізувати високоефективну міжрезонансну вібраційну машину.

4. Конструктивне розроблення тривимірної моделі міжрезонансної вібраційної машини. Розрахунок на міцність найбільш навантажених вузлів вібраційної машини. Дослідження часових залежностей руху коливальних мас запропонованої вібраційної машини з врахуванням параметрів запропонованого приводу.

5. Проведення експериментальних досліджень на лабораторному зразку міжрезонансної вібраційної машини. Оптимізація параметрів вібраційної машини для досягнення максимальної енергоефективності. Узагальнення результатів теоретичних та експериментальних досліджень та розроблення алгоритму розрахунку міжрезонансної вібраційної машини для впровадження її в промислове виробництво.

**Об'єкт дослідження** – коливальні процеси вібраційної машини в міжрезонансних режимах роботи.

**Предмет дослідження** – структура коливальної системи міжрезонансної вібраційної машини, математичні моделі коливальної системи та її вузлів, амплітудно-частотні характеристики коливальної системи, аналітичні залежності для встановлення її конструктивних та технологічних параметрів.

**Методи досліджень.** За основу для теоретичних досліджень МКС вібраційних машин було взято теорію механічних коливань. Для формування дискретних моделей МКС вібраційних машин з електромагнітним приводом було використано узагальнені рівняння Лагранжа II роду, що були сформовані за допомогою методу Д'Аламбера. Розрахунок параметрів континуальної ділянки, зокрема знаходження її власних частот коливань, прогинів, значень зведеної маси та жорсткості здійснювався з використанням функцій Крилова, методу Релея-Рітца, методу скінченних елементів в модулі Modal програмного продукту

ANSYS Workbench. Синтез континуальної ділянки в дискретну модель вібраційного столу здійснювався за допомогою внесення реакцій опор, що діють на континуальну ділянку, в математичну модель гібридної МКС, яка дозволила встановити амплітудно-частотні характеристики коливань активної та проміжної мас. Побудова твердотілої моделі міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом та розрахунок жорсткості системи резонансних пружних вузлів здійснювалися в програмному продукті SOLIDWORKS. Дослідження тривимірного магнітного поля електромагнітів проводилось в модулі Magnetostatic програмного продукту ANSYS Workbench. Експериментальні дослідження здійснювалися з використанням вимірювального обладнання, а саме – датчика акселерометра/гіроскопа MPU-6050, під'єданого до мікроконтролера Arduino Uno, який синхронізовувався з персональним комп'ютером за допомогою програмного забезпечення Arduino IDE. Для оптимізації форми та розмірів континуальної ділянки застосовувались емпіричні методи досліджень. Аналітичні та чисельні розрахунки, представлені в дисертаційній роботі, проводилися в програмному продукті MathCAD.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в подальшому розвитку методології створення дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного технологічного обладнання, а саме у розробленні нових підходів до розрахунку, математичного моделювання та проектування таких гібридних коливальних систем на базі електромагнітного приводу. Для цього було вперше:

- розроблено методики розрахунку власної частоти коливань континуальної ділянки у вигляді шарнірно опертої у чотирьох точках по периметру пластини з використанням балочних функцій Крилова за двома координатами та рівняння поверхні гіперболоїда, встановлення частот для яких здійснювався за допомогою методу Релея-Рітца;

- запропоновано математичну модель вимушених коливань дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом, де відображення континуальної ділянки відбувається через одночасне

введення збурювальної сили електромагнітних віброзбудувачів та реакцій в її опорах, що дозволило системі адекватно відображати її реальну полічастотність;

- за допомогою емпіричних методів досліджень, проведено оптимізацію форми та розмірів континуальної ділянки для досягнення максимальної енергоефективності функціонування дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом, де встановлено переваги ромбоподібних пластин.

**Практичне значення** отриманих у дисертаційній роботі результатів полягає в розробці ефективних методик розрахунку та проектування міжрезонансних дискретно-континуальних вібраційних машин з електромагнітним приводом. Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес кафедри “Робототехніка та інтегровані технології машинобудування” (РІТМ) Національного університету “Львівська політехніка” для здобувачів рівня вищої освіти магістр за спеціалізацією 8.131.00.01 “Роботомеханічні системи та комплекси” (спеціальність 131 “Прикладна механіка”) (Додаток А).

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та практичні результати, що представлені до захисту, отримано автором самостійно. Особистий внесок здобувача в роботах, що опубліковані в співавторстві, полягає у наступному: [1] – формування структурної схеми дискретної тримасової механічної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом. Розрахунок амплітудно-частотної характеристики тримасової міжрезонансної МКС; [2] – розроблення розрахункової схеми кріплення пластини. Розрахунок власної частоти коливань пластини за допомогою методу скінченних елементів, апробація методики розрахунку власної частоти пластини за допомогою методу Релея–Рітца з використанням загального рівняння гіперболоїда; [3, 5] – розроблення методології, формування розрахункових схем та проведення розрахунку першої власної частоти коливань пластини із змінним поперечним перерізом; [4] – розрахунок власної частоти коливань пластини з використанням балочних функцій по двох координатах. Проведення експериментальних досліджень для

перевірки точності отриманих результатів; [6] – опис формули, принципу роботи та формування принципової схеми тримасової МКС; [8] – формування розрахункових схем, проведення розрахунку центра швидкостей ділянок пластини, спрощеної до стержня; [10] – розроблення методології та розрахунок власних частот континуальних ділянок.

**Апробація результатів роботи.** Отримані під час проведення дисертаційних досліджень наукові результати були представлені на Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Експлуатаційна та сервісна інженерія», (Харків, 2020 р.), ХІХ Всеукраїнській науково-технічній конференції «Потураївські читання», (м. Дніпро, 2021 р.), ІІІ Міжнародній науково-практичній конференції «Енергоощадні машини і технології», (м. Київ, 2022 р.), Міжнародній науково-теоретичній конференції «Моделювання і комп'ютерний інжиніринг в машинобудуванні», (м. Львів, 2022 р.), ХІХ Міжнародній науково-технічній конференції «Вібрації в техніці та технологіях», (м. Київ, 2023 р.).

**Публікації.** За темою дисертаційних досліджень опубліковано 11 наукових праць: 2 статті у фахових виданнях України, серед них 1 стаття у виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази даних Index Copernicus International, і 3 статті в періодичних виданнях інших держав, з них 2 статті, що включені до міжнародної бази даних SCOPUS; 1 патент на корисну модель; 5 тез доповідей, представлених на міжнародних наукових конференціях.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації; змісту; переліку тлумачень; переліку умовних позначень; вступу; п'ятьох розділів; висновків; списку використаних джерел з 165 найменувань на 19 сторінках; 11 додатків на 53 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 279 сторінок. Основна частина дисертації займає 225 сторінок, у тому числі 174 сторінки основного тексту, містить 103 рисунки та 4 таблиці.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ І ПОШУК ПЕРСПЕКТИВНИХ СТРУКТУР ДЛЯ УДОСКОНАЛЕННЯ МІЖРЕЗОНАНСНИХ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН

*Підтверджено, що сучасні тенденції розвитку високоефективного вібраційного технологічного обладнання передбачають реалізацію міжрезонансних режимів роботи. Обґрунтовано переваги тримасових структур вібраційних машин як найбільш придатних для роботи у високоефективних міжрезонансних режимах. Зокрема, зосереджено увагу на перспективах використання надлегкої реактивної маси, як континуальної ділянки, в складі дискретно-континуальних МКС вібраційних машин. Виявлено недоліки існуючих типів міжрезонансних вібраційних машин та запропоновано методи їх вдосконалення. Встановлено, що використання електромагнітів в якості приводу для даного вібраційного обладнання є найбільш доцільним.*

#### **1.1. Визначення структур, найбільш придатних для реалізації високоефективних режимів роботи вібраційних машин**

Сучасні тенденції розвитку промисловості вимагають створення енергоощадного обладнання, що дозволяє зменшити собівартість виготовлення продукту. Не винятком є і вібраційна техніка. Базові принципи та методики розрахунку енергоефективного вібраційного технологічного обладнання були розроблені видатними українськими вченими В. О. Повідайлом [76, 77], В. М. Потураєвим [79], П. С. Берником [6 – 11], В. П. Франчуком [89] та ін. Сучасні розробки в галузі вібраційної техніки представили такі вчені, як О. В. Гаврильченко [16, 17], І. І. Назаренко [66 – 72], Р. І. Сілін [80 – 84], Є. В. Харченко [90, 91, 123], О. С. Ланець [38 – 54, 130], А. І. Гордєєв [19], М. П. Ярошевич [99, 100, 162–164], В. М. Гурський [21 – 24, 112], В. Г. Топільницький [87, 88], В. М. Корендій [34, 35, 125, 126] та ін.



У своїх розробках ці та багато інших вчених застосовували вібраційні машини для виконання складних технічних завдань у багатьох галузях промисловості [25, 29, 74, 86, 140, 156]: від покращення механічних властивостей матеріалів шляхом віброущільнення [16, 36, 73, 95, 116] до транспортування деталей [28, 97, 98, 102, 109, 149] та гідрокавітаційного впливу на склад і властивості води [3, 4]. Поширеними є віброударні системи [5, 23, 96, 150] тощо. Це показує, наскільки актуальними та перспективними є вібраційні технології.

Основним показником, що характеризує технологічну ефективність вібраційного обладнання різних типів є величина амплітуди коливань робочого органу на частоті вимушених коливань за деякого значення сили збурення. Одним із шляхів покращення енергоефективності вібраційної техніки є мінімізація затрат потужності в приводі для досягнення необхідних амплітуд коливань робочого органу.

Незалежно від конструкції, типу приводу та технологічного призначення, вібраційні машини поділяються між собою за кількістю коливальних мас. На практиці використовуються та проектуються вібраційні машини, що мають не більше трьох коливальних мас. Отож, для аналізу конструкцій вібромашини поділяють за кількістю коливальних мас (одно-, дво- та тримасові вібромашини).

### 1.1.1. Одномасові МКС

Колівальна маса, яка встановлена на пружних елементах або підвішена на них, створює одномасову МКС. Варто зазначити, що поняття “одномасовості” конструкцій згідно теорії, а саме третього закону Ньютона, не існує [41]. Для забезпечення руху однієї коливальної маси потрібна інша маса для протидії. Для того, щоб привести в рух робочий орган вібраційної машини, що позначений як активна маса  $m_1$ , необхідна друга реактивна маса, якою в даному випадку є фундамент  $m_f$  (рис. 1.1). Резонансна пружна система, що з'єднує колівальну масу  $m_1$  з фундаментом  $m_f$ , позначена  $c$ . Дисипація енергії при роботі МКС

позначена  $\mu$ . Амплітудне значення сили збурення  $F_0$ . Величина переміщення активної маси позначена  $Y_1$ . Розрахувати таку конструкцію можна за двомасовою МКС. Зважаючи на надвеликі інерційні значення  $m_f$ , а також не враховуючи дисипацію енергії, спрощений розрахунок жорсткості  $c$  резонансної пружної системи набуде вигляду [39, 46, 76]:

$$c = m_1 \left( \frac{\omega_f}{z_{res}} \right)^2, \quad (1.1)$$

де  $\omega_f$  – частота вимушених коливань;  $z_{res}$  – резонансне налагодження МКС, що показує відношення вимушеної частоти коливань до власної [46].

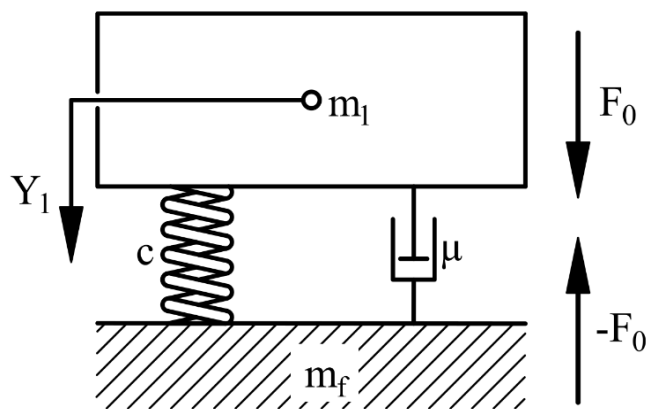


Рис. 1.1. Одномасова МКС

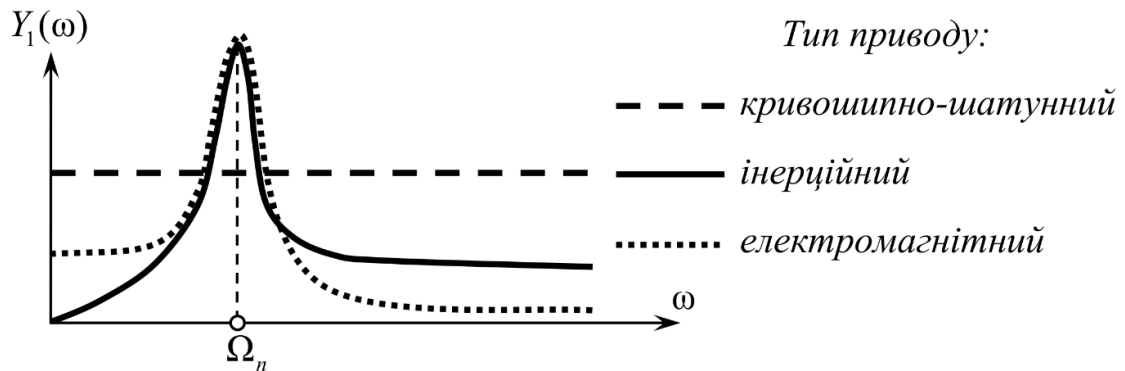
З рис. 1.1 можна представити диференціальне рівняння руху одномасової МКС у вигляді:

$$m_1 \ddot{y}(t) + cy(t) + \mu \dot{y}(t) = F_0 \sin(\omega_f t). \quad (1.2)$$

Аналітичний вираз для вимушених коливань маси  $m_1$  набуде вигляду [46]:

$$y(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m_1 \omega_f^2)^2 + (\mu \omega_f)^2}} \sin \left( \omega_f t - \text{atan} \left( \frac{\mu \omega_f}{c - m_1 \omega_f^2} \right) \right). \quad (1.3)$$

Схематичне відображення амплітудно-частотних характеристик одномасових МКС з інерційним, кривошипно-шатунним та електромагнітним приводами представлено на рис. 1.2.



*Рис. 1.2. Амплітудно-частотні характеристики одномасових МКС з різними типами приводу*

З рис. 1.2 видно, що одномасові МКС можуть утворити лише один резонансний пік на власній частоті коливань  $\Omega_n$ . Реалізація одномасового вібраційного обладнання з електромагнітним і кривошипно-шатунним приводами загалом, а також інерційних одномасових вібраційних машин в дорезонансній зоні коливань є недоцільною, оскільки у таких випадках спостерігається повна передача динамічного навантаження на фундамент [46]. При цьому вібраційні машини з інерційним приводом можуть працювати тільки в зоні коливань на частотах більших за власну. Це зумовлене наявністю у них дебалансу, який відіграє роль другої коливальної маси.

Враховуючи відсутність резонансного режиму для одномасових конструкцій вібраційних машин, такі схеми не є перспективними.

### 1.1.2. Двомасові МКС

Двомасові МКС існують в різноманітних конструктивних виконаннях, проте їх всіх можна узагальнити структурною схемою, зображеною на рис. 1.3, а.

Особливістю такої МКС є введення другої рухомої маси  $m_2$  із співмірним до активної маси значенням інерційного параметра та переміщенням  $Y_2$ . Наявність двох коливальних мас надає низку істотних переваг, зокрема кращі технічні характеристики МКС та можливість використання віброізоляційних пружних систем із низькою жорсткістю  $c_{is}$ , які дозволяють майже повністю усунути передачу вібрацій на фундамент.

Систему диференціальних рівнянь руху двомасової МКС можна представити у вигляді [46]:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) + c_{12}(y_1(t) - y_2(t)) + c_{is} y_1(t) + \mu_{12}(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + \mu_{is} \dot{y}_1(t) = -F_0 \sin(\omega_f t); \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + c_{12}(y_2(t) - y_1(t)) + \mu_{12}(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) = F_0 \sin(\omega_f t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Закони руху для активної та реактивної коливальних мас можна визначити з рівнянь [46]:

$$y_1(t) = -\frac{F_0 m_2 \omega_f^2}{(c_{12} + c_{is} - m_1 \omega_f^2)(c_{12} - m_2 \omega_f^2) - c_{12}^2} \sin(\omega_f t); \quad (1.5)$$

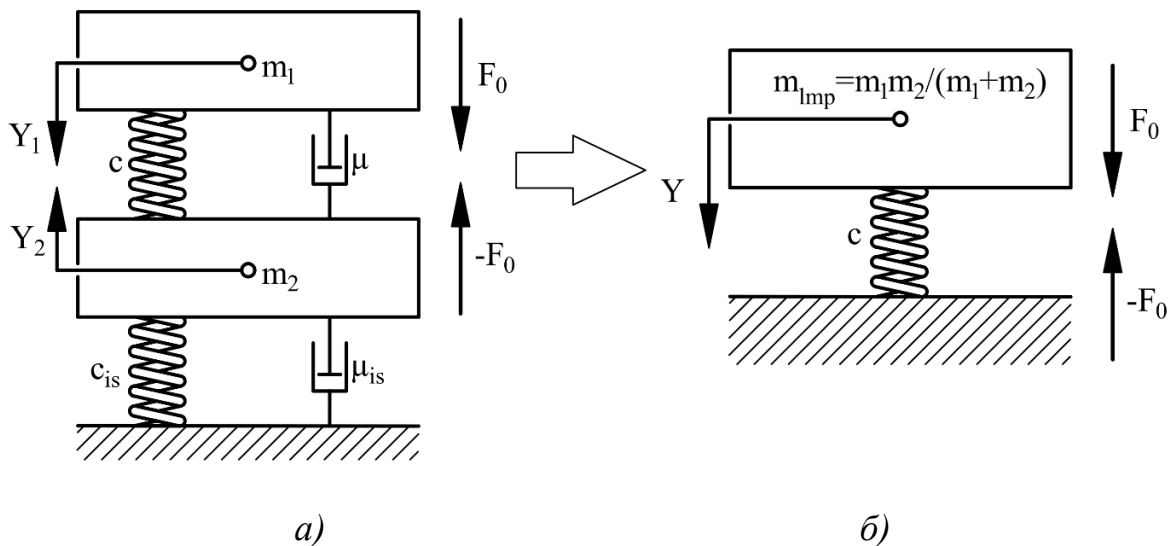
$$y_2(t) = -\frac{F_0 (c_{is} - m_1 \omega_f^2)}{(c_{12} + c_{is} - m_1 \omega_f^2)(c_{12} - m_2 \omega_f^2) - c_{12}^2} \sin(\omega_f t). \quad (1.6)$$

Розрахунок двомасових конструкцій можна звести до одномасових МКС (рис. 1.3, б) [46, 76].

З рис. 1.3 можна помітити, що інерційний параметр спрощеної коливальної маси відрізняється від значення активної маси. В даному випадку розраховується зведена маса, що становить:

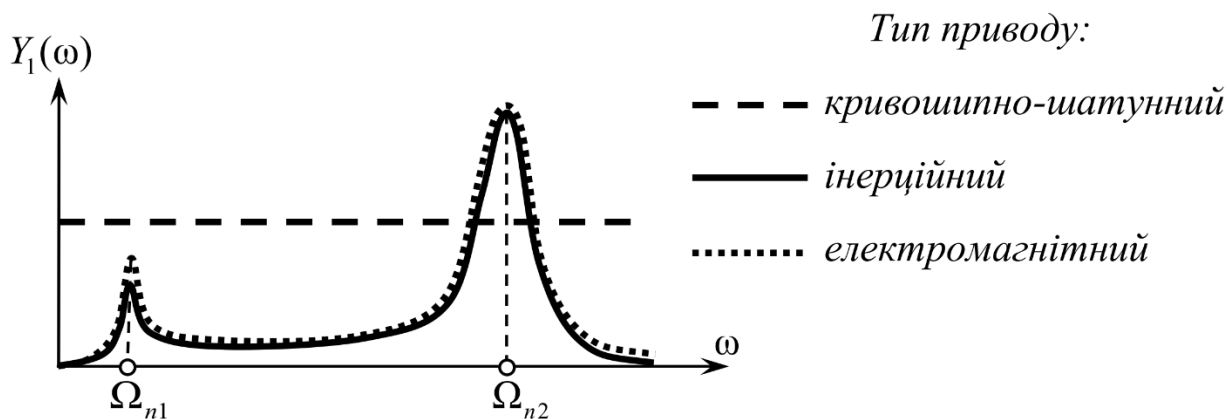
$$m_{imp} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.7)$$

Амплітудно-частотні характеристики двомасових МКС з інерційним, кривошипно-шатунним та електромагнітним приводами (рис. 1.4) вказують на наявність ще одного резонансного піку на частоті  $\Omega_{n1}$ , спричиненого віброізоляторами.



**Рис. 1.3.** Двомасова МКС:

*а – принципова схема; б – схема, зведена до одномасової*



**Рис. 1.4.** АЧХ двомасових МКС

Співставивши одно- та двомасові МКС, можна зробити висновок, що останні безумовно переважають за технічними характеристиками, зокрема завдяки тому, що робочий орган двомасових вібраційних машин стійкіший до завантаження. Двомасові МКС досить широко використовуються у різних типах вібраційного технологічного обладнання [145]. На відміну від одномасових вібраційних машин, двомасові можуть реалізовуватись на будь-якому типі приводу та використовувати резонансні режими роботи. Можна було б вважати двомасові МКС доскональними конструкціями, проте, порівняно з існуючими

тримасовими вібраційними машинами, двомасові не здатні сповна реалізувати динамічний потенціал та забезпечити максимальну енергоефективність.

### 1.1.3. Псевдо тримасові МКС на базі динамічного гасника

Удосконаленням двомасових МКС можна вважати конструкцію, в якій введена третя (проміжна) маса  $m_3$  (рис. 1.5). Проміжна маса кріпиться до умовно нерухомих точок на резонансному пружному елементі, таким чином розбиваючи його на два незалежних пружних вузли із жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$ . У такій конструкції силове збурення прикладається до проміжної маси  $m_2$ . Активна маса  $m_1$ , отримуючи кінематичне збурення від проміжної, виконує функцію її вузькочастотного динамічного гасника коливань. Варто зазначити, що дану МКС не можна вважати повноцінно тримасовою, оскільки її розрахунок зводиться до еквівалентного за двома одномасовими схемами. Таке компонування подібне до двомасової схеми, в якій кріплення відбувається до умовно нерухомих точок на пружинах.

Для такої псевдо тримасової МКС, зображеної на рис. 1.5, а, можна сформулювати наступну систему диференціальних рівнянь руху:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1(t) + c_{12}(y_1(t) - y_2(t)) + c_{13} y_1(t) + \mu_{12}(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + \mu_{13} \dot{y}_1(t) + \mu_{14} \dot{y}_1(t) = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + c_{12}(y_2(t) - y_1(t)) + c_{23}(y_2(t) - y_3(t)) + \mu_{12}(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + \\ \quad + \mu_{23}(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_3(t)) = F_0 \sin(\omega_f t); \\ m_3 \ddot{y}_3(t) + c_{23}(y_3(t) - y_2(t)) + \mu_{23}(\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t)) = -F_0 \sin(\omega_f t). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Закони руху коливальних мас псевдо тримасової МКС можна визначити із виразів [46]:

$$y_1(t) = -\frac{F_0 k_{12}(k_{23} + k_{33})}{k_{11} k_{22} k_{33} - k_{12} k_{21} k_{33} - k_{11} k_{23} k_{32}} \sin(\omega_f t); \quad (1.9)$$

$$y_2(t) = -\frac{-F_0 k_{11}(k_{23} + k_{33})}{k_{11}k_{22}k_{33} - k_{12}k_{21}k_{33} - k_{11}k_{23}k_{32}} \sin(\omega_f t); \quad (1.10)$$

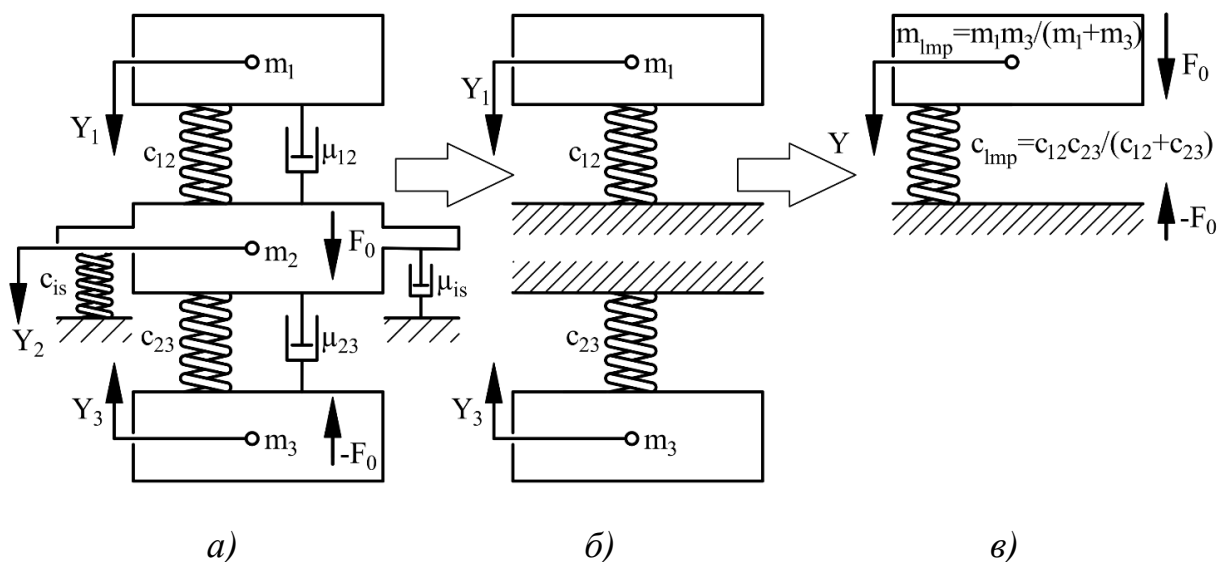
$$y_3(t) = -\frac{F_0(k_{11}k_{32} - k_{12}k_{21} + k_{11}k_{22})}{k_{11}k_{22}k_{33} - k_{12}k_{21}k_{33} - k_{11}k_{23}k_{32}} \sin(\omega_f t), \quad (1.11)$$

де  $k_{11} = -m_1 \omega_f^2 + c_{12} + i\omega_f(\mu_{12} + \mu_l)$ ;  $k_{12} = k_{21} = -c_{12} + i\omega_f \mu_{12}$ ;  $k_{13} = k_{31} = 0$ ;

$k_{22} = -m_2 \omega_f^2 + c_{12} + c_{23} + c_{is} + i\omega_f(\mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{is})$ ;  $k_{23} = k_{32} = -c_{23} + i\omega_f \mu_{23}$ ;

$k_{33} = -m_3 \omega_f^2 + c_{23} + i\omega_f \mu_{32}$  – вирази,  $\mu_l$  – дисипація середовища завантаження.

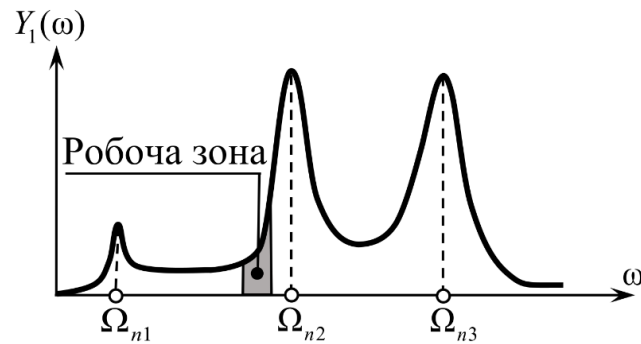
Проте, як згадано вище, доцільніше спростити розрахунки псевдо тримасових МКС за дво- або одномасовою схемами.



**Рис. 1.5.** Псевдо тримасова МКС з динамічним гасником (а)

та її спрощені розрахункові моделі за дво- (б) і одномасовими (в) схемами

Амплітудно-частотна характеристика псевдо тримасових МКС з різними типами приводу представлена на рис. 1.6.



**Рис. 1.6.** АЧХ псевдо тримасових МКС з різними типами приводу

Як видно з рис. 1.6, робоча зона коливань псевдо тримасових вібраційних машин з динамічним гасником знаходиться перед другим резонансним піком, що не дозволяє досягти такій системі великих амплітуд коливань.

Псевдо тримасова МКС з динамічним гасником має ті ж самі недоліки, що і двомасова. Єдиною перевагою використання псевдо тримасових МКС у порівнянні з двомасовими є зменшення відносної амплітуди коливань проміжної та реактивної мас, що зменшує втрати магнітного потоку для систем з електромагнітним приводом.

#### 1.1.4. Тримасові міжрезонансні МКС

Тримасова міжрезонансна МКС подібна до псевдо тримасової і також має три резонансні піки (рис.1.7). Перший резонансний пік спричинений віброізоляторами. Він є порівняно невеликим та часто не враховується під час розрахунків. Тому рахується, що псевдо тримасові МКС працюють в дорезонансній зоні коливань. Тримасові міжрезонансні МКС, на відміну від псевдо тримасових МКС, працюють у діапазоні частот  $\Omega_{n2} < \omega < \Omega_{n3}$ , тобто між «великими» резонансними піками. Звідси і постає назва таких систем [46].



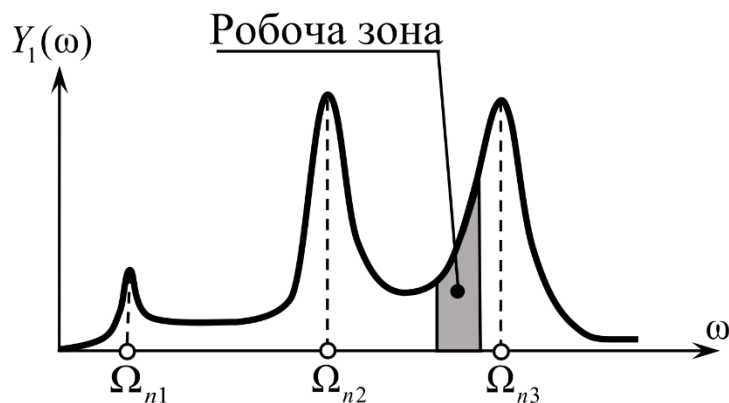


Рис. 1.7. АЧХ тримасових міжрезонансних МКС

Структурна схема даної МКС зображена на рис. 1.8. У тримасових міжрезонансних МКС активну або проміжну маси використовують як робочий орган. Бувають також і рідкісні конструкції тримасових міжрезонансних вібраційних машин в яких робочим органом є реактивна маса [152]. Але, загалом, в таких системах реактивна маса застосовується в більшості випадків для збурення коливань.

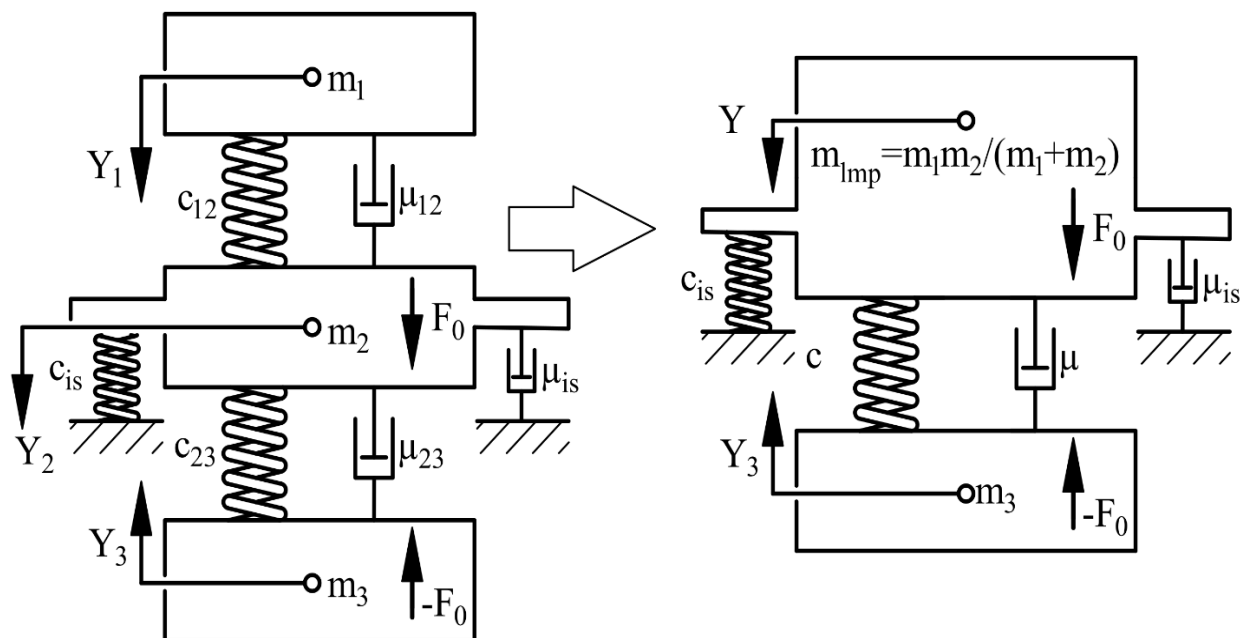


Рис. 1.8. Міжрезонансна тримасова МКС

Система диференціальних залежностей руху тримасової міжрезонансної МКС аналогічна залежності (1.8), а закони руху коливальних мас представлені залежностями (1.9) – (1.11). Тримасові міжрезонансні МКС дозволяють досягти значних амплітуд коливань у міжрезонансній зоні та, відповідно, використати значний динамічний потенціал.

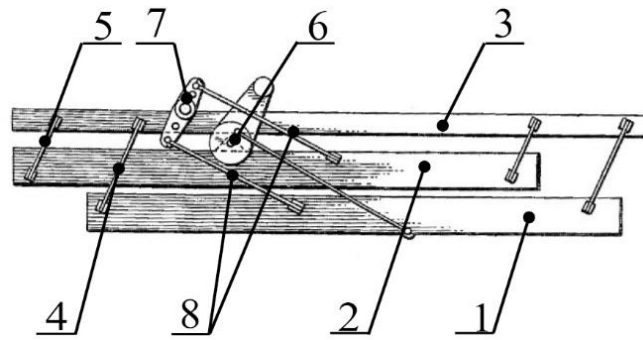
Отже, структурна схема тримасових міжрезонансних МКС є дуже перспективною. Її можна взяти як основу для створення високоефективних вібраційних машин.

## **1.2. Виявлення недоліків існуючих тримасових міжрезонансних вібраційних машин. Обґрунтування раціональності вибору електромагнітного приводу в міжрезонансних вібраційних машинах**

### **1.2.1. Аналіз конструкцій тримасових машин з кривошипно-шатунним механізмом. Виявлення недоліків, пов'язаних з їх проектуванням та експлуатацією**

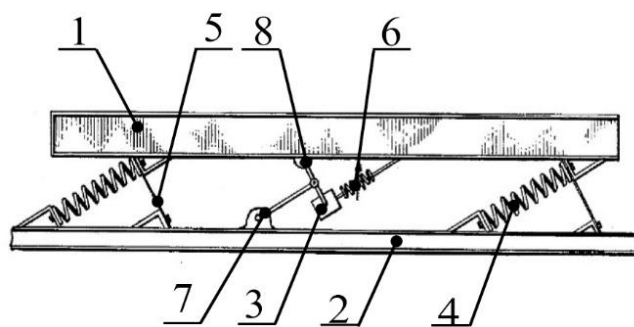
Аналіз конструкцій тримасових машин з кривошипно-шатунним механізмом в основному проводитимемо, використовуючи академічну пошукову систему Google Scholar [1], Європейську патентну базу даних [27] та розробки наукової школи Національного університету “Львівська політехніка”. Це дозволить сформуванню цілісного бачення в напрямку проектування тримасових машин з кривошипно-шатунним механізмом.

У патенті [117] було представлено конструкцію тримасового вібраційного сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом (рис. 1.9). В даній конструкції привід кривошипно-шатунного механізму 6 було розташовано на проміжній масі 2, яка приводить в рух реактивну масу 1. Попарно активна 3 і проміжна 2 маси, активна 3 і реактивна 1 маси сполучені плоскими пружними вузлами 5 і 4 відповідно.



*Рис. 1.9. Конструкція тримасового вібраційного сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом*

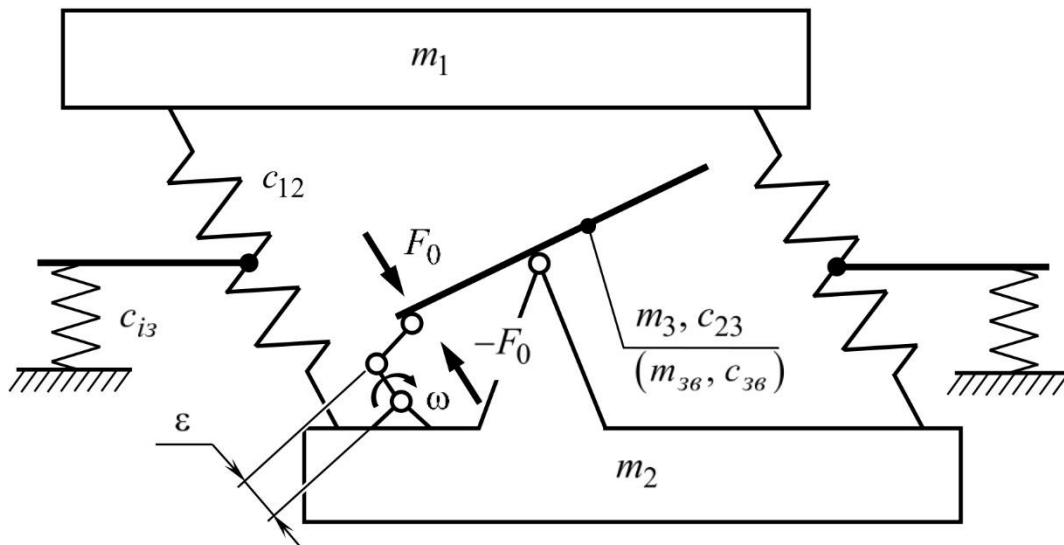
В роботі [110] наведена схема тримасового вібраційного транспортера з кривошипно-шатунним механізмом (рис. 1.10). До робочого органу даного транспортера – активної маси 1 приєднано кронштейн 8, який спрямовує коливальний рух реактивної маси 3. Привід кривошипно-шатунного механізму 7 розташований на проміжній масі 2. Це дозволяє безпосередньо збурювати реактивну масу 3. При цьому активна маса 1 є зв'язана з проміжною за допомогою комбінації витих 4 та плоских 5 пружних елементів, а з реактивною масою – через пружний елемент 6. Особливістю даної конструкції є можливість зміни ексцентриситету кривошипно-шатунного механізму.



*Рис. 1.10. Конструкція тримасового вібраційного транспортера з кривошипно-шатунним механізмом*

Конструкцію високоефективного тримасового міжрезонансного вібраційного транспортера-сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом

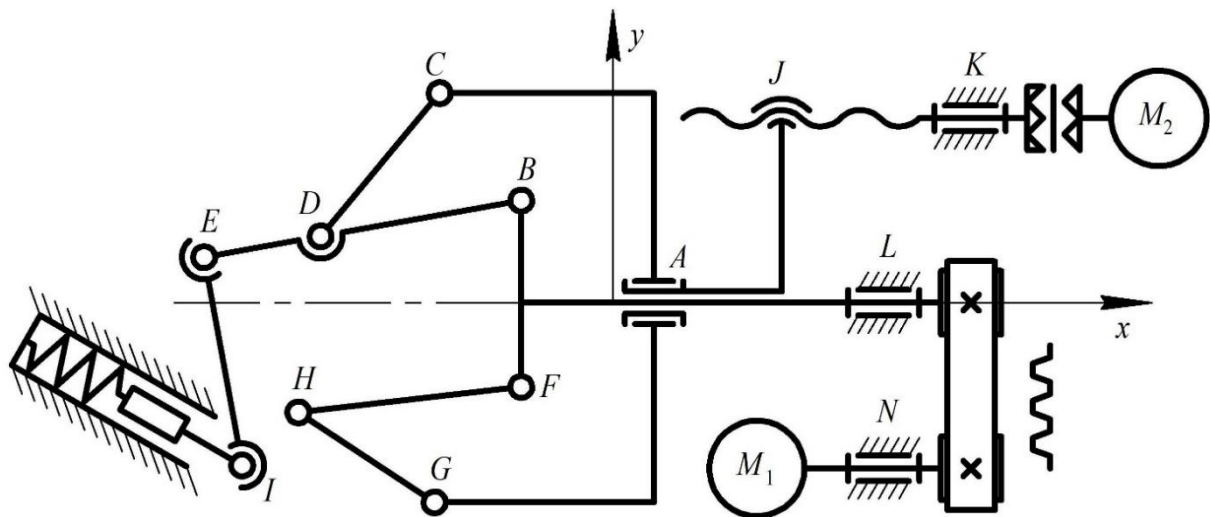
запропоновано в роботі [30]. Структурна схема такого транспортера-сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом представлена на рис. 1.11.



**Рис. 1.11.** Схема дискретно-континуального транспортера-сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом

Особливістю запропонованої у роботі [30] принципової схеми, показаної на рис. 1.11, є поєднання одночасно дискретної та континуальної структур. Дискретними структурами в даній схемі вважаються активна  $m_1$  та проміжна  $m_2$  коливальні маси, з'єднані між собою резонансним пружним вузлом жорсткістю  $c_{12}$ . Континуальною структурою автор [30] вважає тіло з розподіленими параметрами, що поєднує одночасно жорсткість  $c_{23} = c_{lmp}$  й інерційний параметр маси  $m_3 = m_{lmp}$ . Вважається, що деяка частка маси і жорсткості континуальної ділянки (представленої у вигляді стержня) сприйматиметься дискретною двомасовою коливальною системою як підпружинена реактивна маса. Запропонована модель транспортера-сепаратора з кривошипно-шатунним механізмом призначена для транспортування легких полімерних матеріалів.

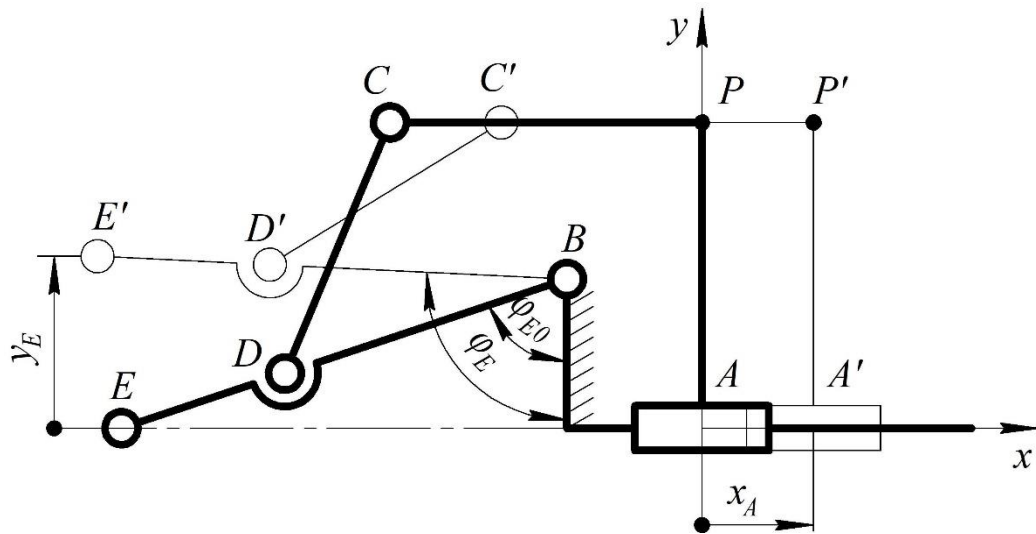
В роботі [30] для проектування вібраційного транспортера-сепаратора було складено структурну схему кривошипно-шатунного приводу, що зображена на рис. 1.12.



*Рис. 1.12. Структурна схема керованого кривошипного-шатунного приводу*

Особливістю проектування є те, що двигун  $M_1$  за допомогою пасової передачі з'єднаний з валом  $AL$  та приводить в обертальний рух кривошип  $BF$ . Кривошип  $BF$  є з'єднаним із коромислом  $BE$ . Розташування шарніра  $E$  по відношенню до осі привідного вала  $AL$  визначає ексцентриситет силового збурення, і як наслідок, амплітуду вимушених коливань реактивної маси вібраційної машини. Для зміни кутового положення коромисла  $BE$ , використовується з'єднувальний стержень  $CD$  та циліндричний повзун  $A$ . Повзун  $A$  рухається вздовж вала  $AL$ , що з'єднаний з гайкою гвинтового механізму, який приводиться в рух двигуном  $M_2$ . Кривошип  $BF$  із всіма з'єднаними ланками обертається навколо вала  $AL$  та навколо повзуна  $A$ . Повзун  $A$  та ланка  $AJ$  рухаються поступально через обертання гвинта  $KJ$ . Несучі опори  $L$ ,  $K$ ,  $N$  підтримують вали кривошипа, гвинта та електродвигуна пасової передачі. Нижня частина механізму є призначеною для збалансовування такого механізму по відношенню до привідного вала.

У роботі [30] було здійснено кінематичний аналіз кривошипно-шатунного механізму на основі запропонованої кінематичної схеми механізму зміни ексцентриситету, зображеної на рис. 1.13.



**Рис. 1.13.** Кінематична схема механізму зміни ексцентриситету, представлено у двох фіксованих положеннях

Для опису руху даного кривошипно-шатунного механізму [30] запропоновано аналітичні вирази (рівняння 1.12 – 1.15):

$$\begin{aligned}
 & l_{CD}^2(x_B - (x_A - l_{PC})) + l_{BD}^2(-x_B + (x_A - l_{PC})) + \\
 & + (x_B + (x_A - l_{PC})) \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) \pm \\
 & \pm \sqrt{ - \left( (l_{BD} - l_{CD})^2 - (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 - (y_B - y_C)^2 \right) \times } \\
 & \times \left( (l_{BD} + l_{CD})^2 - (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 - (y_B - y_C)^2 \right) (y_B - y_C)^2 } \\
 x_D(x_A) = & \frac{\pm \sqrt{ - \left( (l_{BD} - l_{CD})^2 - (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 - (y_B - y_C)^2 \right) \times } }{2 \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right)}; (1.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_D(x_A) = & \frac{1}{2 \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) (y_B - y_C)} \times \\
& \times \left( -l_{BD}^2 (y_B - y_C)^2 \pm x_B \times \right. \\
& \times \sqrt{- \left( l_{BD}^4 + \left( -l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right)^2 - \right.} \\
& \left. \left. -2l_{BD}^2 \left( l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) \right) (y_B - y_C)^2 \mp} \\
& \mp (x_A - l_{PC}) \sqrt{- \left( l_{BD}^4 + \left( -l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + \right. \right.} \\
& \left. \left. + (y_B - y_C)^2 \right)^2 - \right.} \\
& \left. -2l_{BD}^2 \left( l_{CD}^2 + (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + \right. \right.} \\
& \left. \left. + (y_B - y_C)^2 \right) \right) (y_B - y_C)^2 +} \\
& + (y_B - y_C) \left( l_{CD}^2 (y_B - y_C) + \left( (x_B - (x_A - l_{PC}))^2 + (y_B - y_C)^2 \right) (y_B + y_C) \right) \Bigg);
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$x_E(x_A) = \frac{x_B(l_{BD} - l_{BE}) + l_{BE} \cdot x_D(x_A)}{l_{BD}}; \tag{1.14}$$

$$y_E(x_A) = \frac{y_B(l_{BD} - l_{BE}) + l_{BE} \cdot y_D(x_A)}{l_{BD}}. \tag{1.15}$$

Підставивши вирази (1.12) та (1.13) в рівняння (1.14) та (1.15) отримаємо закон руху шарніра.

Аналізуючи в цьому підрозділі особливості проектування вібраційних машин з кривошипно-шатунним механізмом, можна виокремити деякі недоліки даного типу приводу. По-перше, використання кривошипно-шатунного механізму в якості приводу вібраційних машин передбачає наявність рухомих з'єднань, що зменшує надійність даних конструкцій і ускладнює їх експлуатацію. По-друге, як видно з вищеописаного, процес проектування, і як наслідок, налагодження роботи тримасових вібраційних машин з кривошипно-шатунним механізмом є складним та ресурсозатратним.

### 1.2.2. Проблемні питання, пов'язані з проектуванням тримасових МКС з інерційним приводом

В роботі [46] описані тримасові системи з інерційним приводом, які дозволяють розвинути високі коефіцієнти динамічності. Принципова схема такої тримасової системи показана на рис. 1.14. Як зрозуміло з назви, такі системи мають три коливальні маси: активну масу  $m_1$ , яка є робочим органом вібраційної машини, проміжну масу  $m_2$  і реактивну масу  $m_3$ . Маси попарно сполучені між собою за допомогою пружних систем, жорсткістю  $c_{12}$  та  $c_{23}$ . Одна із цих мас неодмінно закріплюється до фундаменту чи підвісу за допомогою пружного віброізоляційного елемента із жорсткістю  $c_{i2}$ .

Для збурення інерційних мас даного типу обладнання використовують інерційний привід.

При проектуванні тримасових МКС вібраційних машин з інерційним приводом вводиться коефіцієнт  $\tilde{k}_\lambda$  додаткового динамічного підсилення коливань [46].

При цьому передбачається, що робочі режими коливань мають проходити в міжрезонансній зоні. Для встановлення інерційно-жорсткісних параметрів МКС, які дозволяють синтезувати такі високоефективні системи з інерційним приводом, використовують наступні залежності [46]:

$$c_{12} = m_1 \left( \frac{\omega}{z_{res}} \right)^2 \left( \frac{m_3 \zeta + m_2 (\zeta - 1)}{(\zeta - 1)(m_1 + m_2) + m_3 \zeta} \right); \quad (1.16)$$

$$c_{23} = m_3 \left( \frac{\omega}{z_{res}} \right)^2 \zeta; \quad (1.17)$$

$$m_3 = \frac{m_2 (1 - \zeta) (1 - z_{res}^2) (m_1 + m_2)}{\zeta (m_2 (1 - z_{res}^2) + m_1)}; \quad (1.18)$$

де  $\zeta$  - приведена частка жорсткості, яка визначається з рівняння:



$$\zeta = \frac{m_1 \check{k}_\lambda}{m_2(1 - z_{res}^2) + m_1(1 + \check{k}_\lambda)}, \quad (1.19)$$

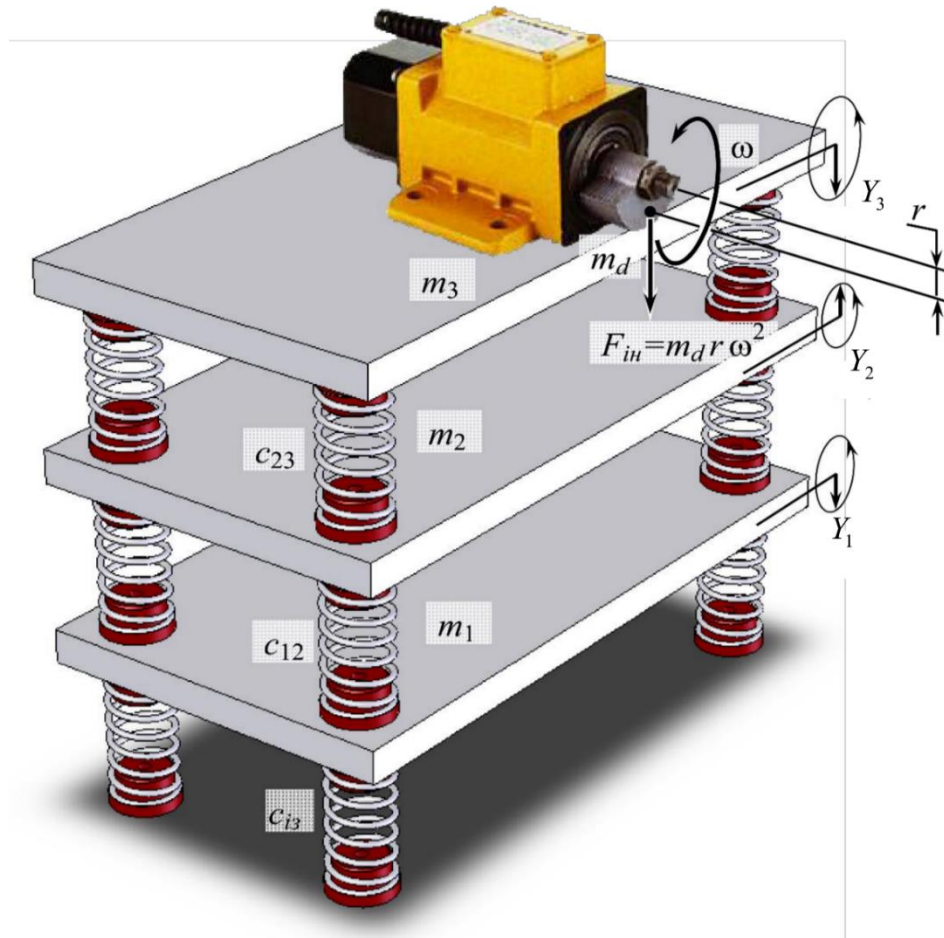
$\check{k}_\lambda$  – додаткове динамічне підсиленням коливань, що для тримасових МКС з інерційним приводом (рис. 1.14), визначатиметься як співвідношення коефіцієнту динамічності даних систем по відношенню до інерційних двомасових.

При проектних роботах спочатку конструктивно закладаються необхідні значення параметрів, а саме додаткового динамічного підсилення коливань  $\check{k}_\lambda$ , що і є показником енергоефективності. За встановлених значень коливальних мас  $m_1$  та  $m_2$  (які вже відомі чи наперед задані та можуть виконувати роль робочого органу), частоти вимушених коливань  $\omega$  і технологічно раціонального резонансного налагодження системи  $z_{res}$ , розраховують згідно (1.19) коефіцієнт  $\zeta$ , потім з (1.18) встановлюють необхідне значення маси  $m_3$ , а згідно (1.16) і (1.17) – жорсткості двох резонансних систем пружних вузлів.

Варто зазначити, що в такому випадку тримасова МКС споживатиме у  $\check{k}_\lambda$  разів менше електроенергії у порівнянні з двомасовою МКС, при цьому забезпечуючи такі ж амплітуди коливань інерційних мас. Максимальне значення параметру додаткового динамічного підсилення коливань  $\check{k}_\lambda$  можливо визначити згідно нерівності [46]:

$$[\check{k}_\lambda] \leq \frac{m_1 \check{z}_{res}^2 - m_2(1 - z_{res}^2)(1 - \check{z}_{res}^2)}{m_1(1 - \check{z}_{res}^2)}; \quad (1.20)$$

де  $z_{res}$  і  $\check{z}_{res}$  – резонансні налагодження (співвідношення) частоти вимушених коливань  $\Omega_\epsilon$  до другої  $\Omega_{\epsilon 2}$  і першої  $\Omega_{\epsilon 1}$  власних частот ( $z_{res} = \Omega_\epsilon / \Omega_{\epsilon 2}$ , та  $\check{z}_{res} = \Omega_{\epsilon 1} / \Omega_\epsilon$ ).



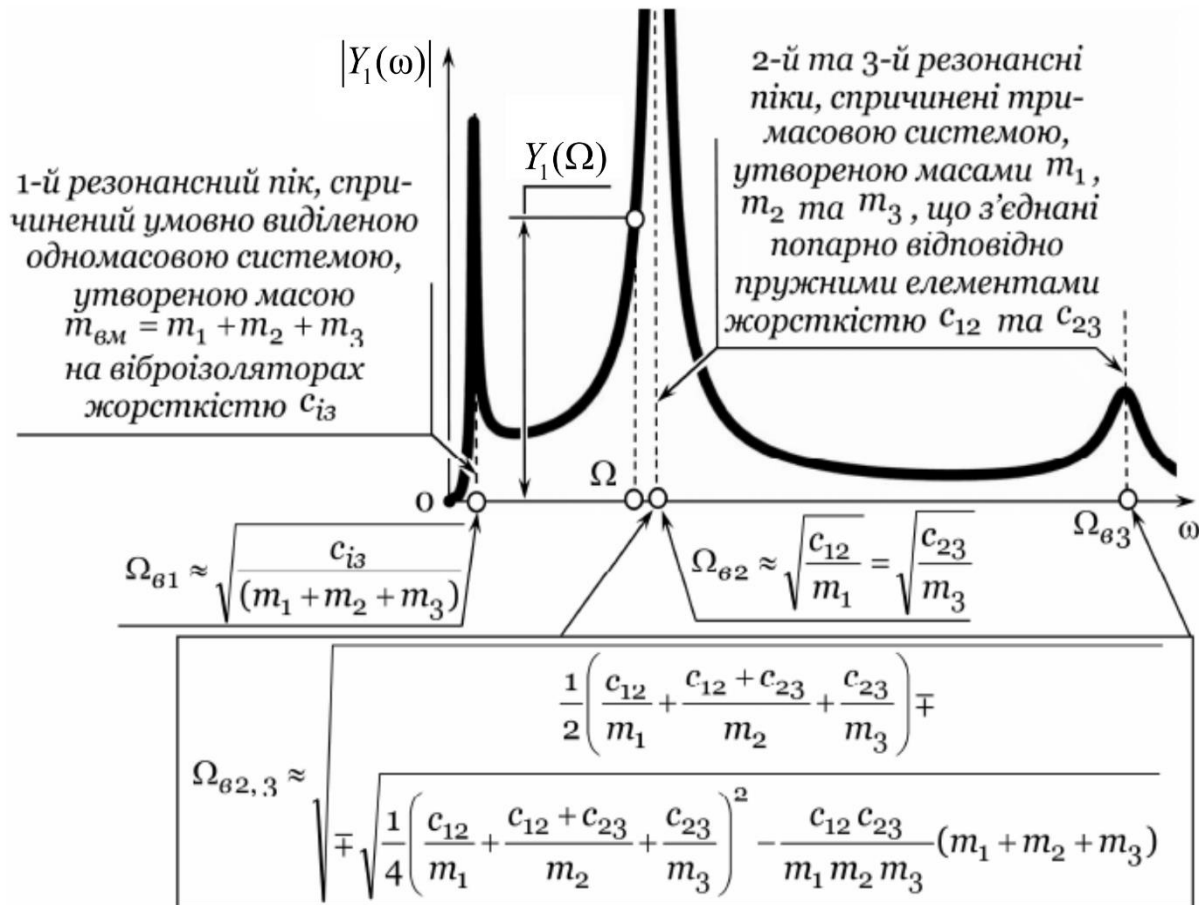
*Рис. 1.14. Принципова схема механічної МКС,  
до якої зводяться тримасові вібраційні машини  
з інерційним приводом*

Вищезгадані тримасові системи з інерційним приводом можуть бути до 49 разів ефективнішими за двомасові, при умові, що  $z_{res} = \tilde{z}_{res} = 0.99$ .

Проте, дані показники енергоефективності досягаються в міжрезонансній зоні коливань. Для її досягнення тримасовими вібраційними машинами з інерційним приводом, дебалансу необхідно перейти низькочастотну зону резонансу, яка спричинена власними коливаннями МКС на віброізоляторах та перший власний резонанс системи.

Певні труднощі в міжрезонансних системах з інерційним приводом можуть виникнути у випадках, коли дебаланс повинен набрати оберти від нуля до необхідної кутової швидкості для забезпечення заданої частоти збурення. Адже

при цьому для потрапляння в зону між другим і третім резонансами, незбалансованому валу вібромашини потрібно перейти два резонанси (рис. 1.15).



**Рис.1.15.** АЧХ коливань активної маси у тримасовій вібраційній машині

Найбільша складність виникає під час переходу другого власного піка системи, розташованого на частоті  $\Omega_{62}$ , адже він значно потужніший за пік, спричинений віброізоляторами. У такому випадку оберти дебаланса можуть зависнути на лівій гілці другого піка й електродвигун не вийде на номінальну частоту обертання, яка, власне, і є частотою збурення системи. Це може спричинити вихід з ладу електродвигуна. Наведений недолік вагомий для міжрезонансних систем з інерційним збуренням і вперше описаний ще у 1902 р. А. Зоммерфельдом [151]. Ним було встановлено, що при наближенні кутової швидкості обертання дебалансу до частоти резонансного піку, його оберти

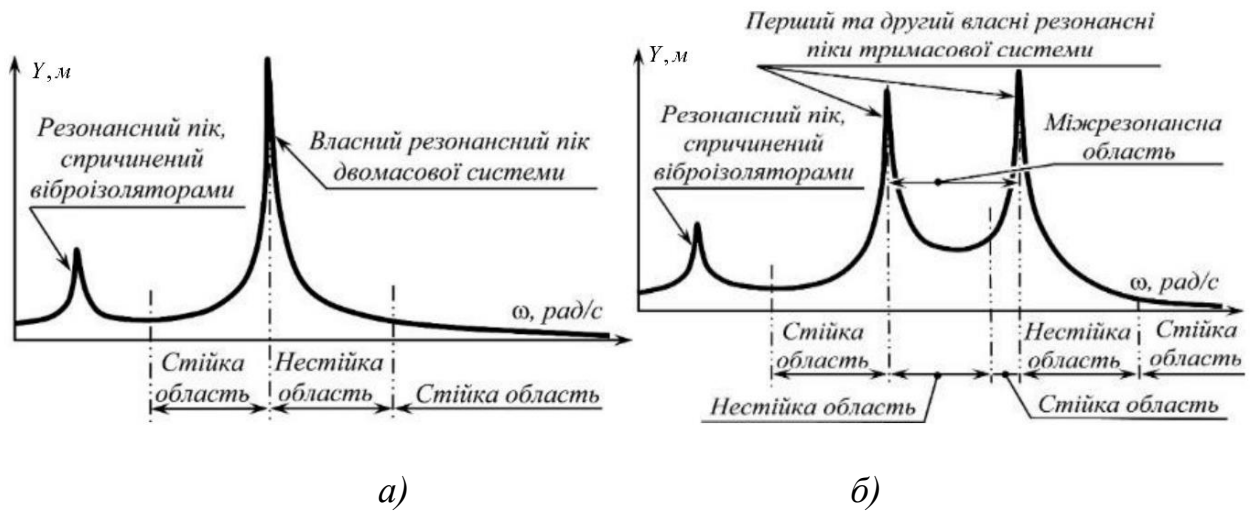
можуть “зависнути”, а тому при збільшуванні прикладеної потужності амплітуди коливань можуть суттєво зрости. При цьому частота обертання майже не зміниться. Внаслідок цього може відбутись швидкий перехід через резонансну частоту. Це супроводжуватиметься раптовим зменшенням амплітуди коливань робочого органу вібраційної машини з інерційним приводом.

Через декілька десятків років відомий український вчений С. П. Тимошенко [153] повторив і розвинув результати праць А. Зоммерфельда. Експериментальні дослідження С. П. Тимошенка були продовжені, зокрема було зроблено висновок, про взаємозв'язок поведінки системи поблизу резонансу та властивостей інерційного приводу. Постановка задачі про взаємодію приводу із МКС була вперше запропонована в 1949 р. І. Рокаром [144], однак містила неточності.

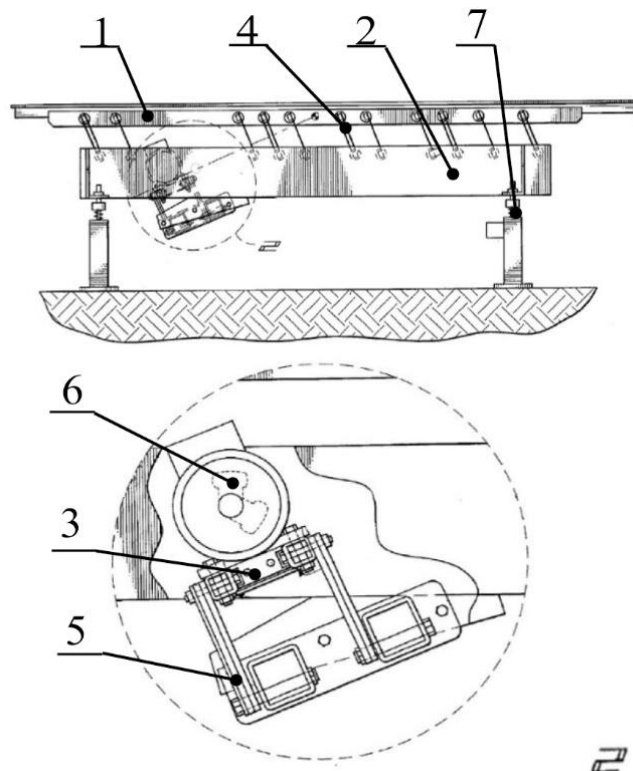
Вищезазначені ефекти є небезпечними для електродвигунів асинхронного типу, які, як правило і використовуються у вібраційному технологічному обладнанні. Адже зростання обертів дебалансу в околі резонансного піку практично призупиняється. У такому випадку спостерігається суттєво випередження частоти обертання магнітного поля статора у порівнянні із швидкістю обертання ротора. Це спричиняє зростання сили струму в обмотці збурення – і, як наслідок, вихід двигуна з ладу.

Ще одним недоліком реалізації міжрезонансних режимів коливань в тримасових системах з інерційним збуренням є те, що навіть пройшовши резонансний пік, система коливатиметься на частотах віддалених від частоти резонансу, при яких неможливо досягти значних динамічних підсилень коливань (рис. 1.16).

В розробці [115] запропоновано вібраційний транспортер (рис. 1.17), що містить робочу активну масу 1, яка з'єднана з проміжною масою 2 за допомогою плоских пружин 4. До проміжної маси 2 через пружини 5 закріплена реактивна маса 3, що містить інерційний привід 6. Транспортер встановлюється на фундамент за допомогою віброізоляторів 7.



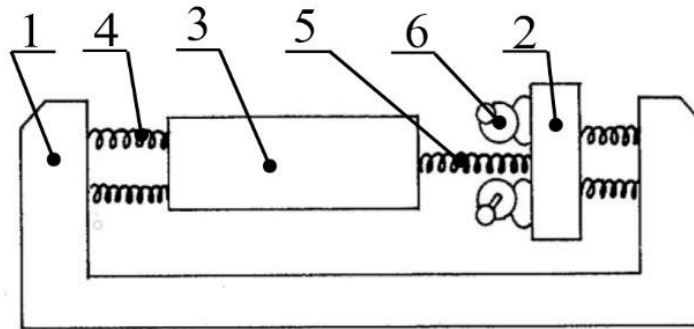
**Рис. 1.16.** Амплітудно-частотні характеристики дво- (а) і тримасової (б) МКС



**Рис. 1.17.** Вібраційний тримасовий транспортер

У патенті [114] запропоновано вібраційний лоток, в якого силове збурення здійснюється двома синхронізованими дебалансами 6 (рис. 1.18). Дебаланси 6 розміщені на проміжній масі 2 і приводяться в рух від електродвигунів.

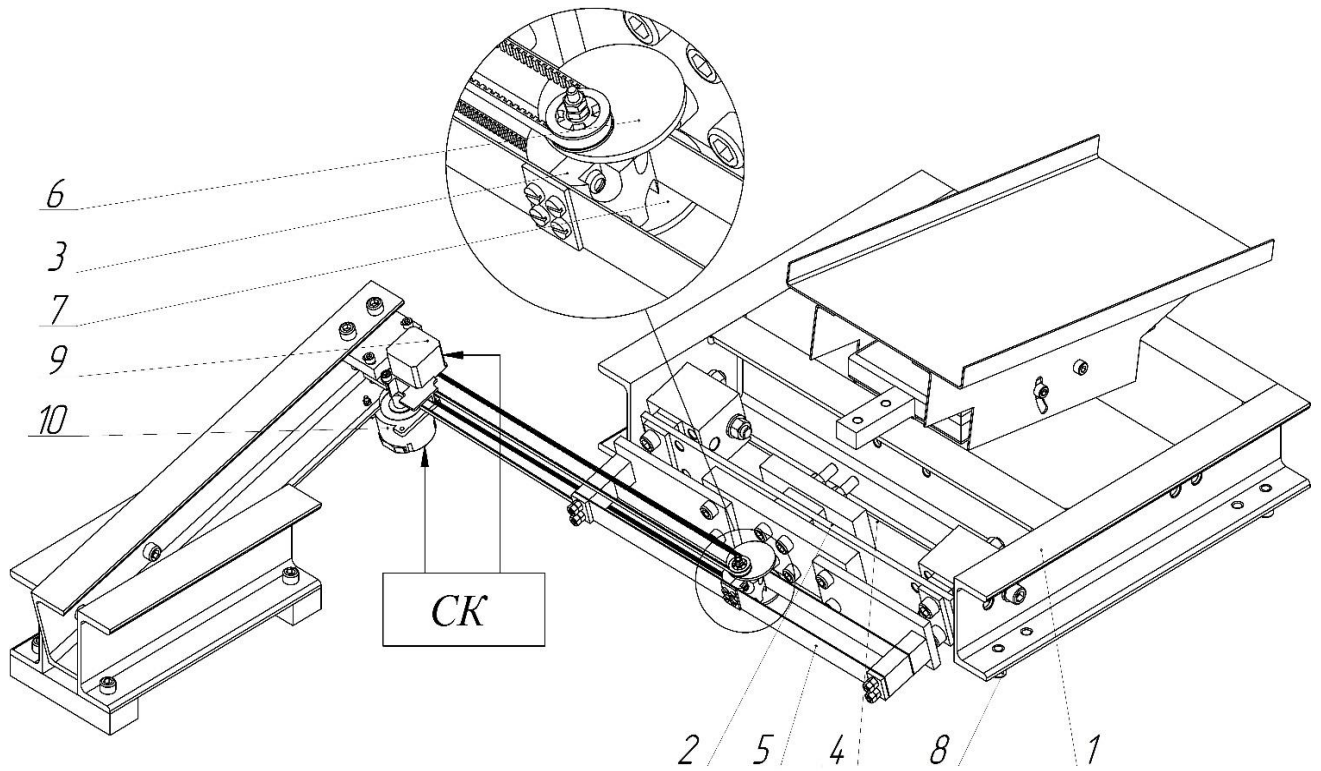
Кінематичне збурення коливань активної 1 та реактивної 3 мас забезпечується проміжною масою 2 через пружні вузли 4 та 5 відповідно.



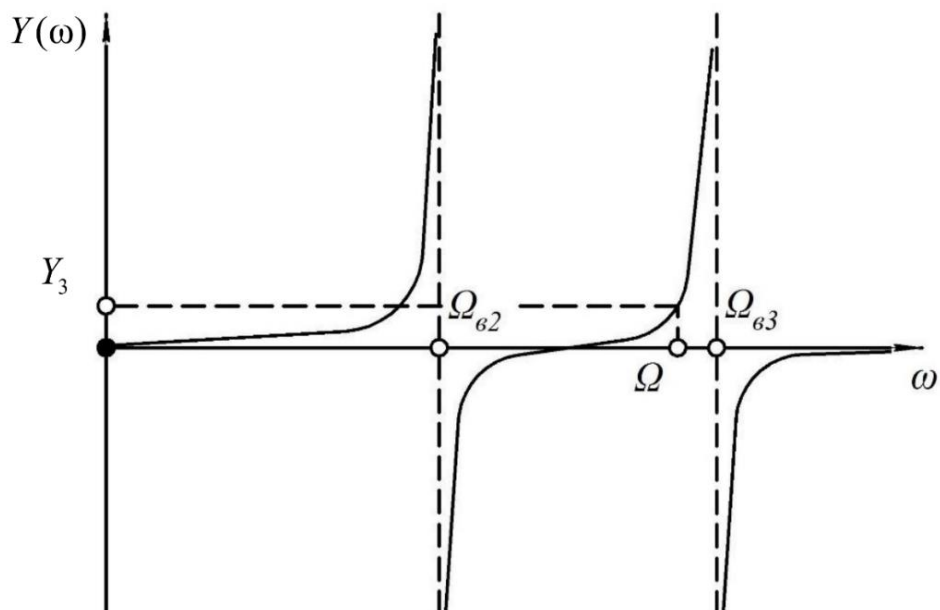
*Рис. 1.18. Вібраційний лоток з двома синхронізованими дебалансами*

Також, в патенті [50] запропоновано конструкцію тримасової вібраційної машини з інерційним приводом, здатної входити в міжрезонансну зону коливань. Така тримасова вібраційна машина з інерційним приводом (рис. 1.19) містить активну масу 1, яка встановлена на нерухомій основі за допомогою віброізоляційних пружних елементів 8, проміжну масу 2 та реактивну масу 3. Активна 1 та проміжна 2, проміжна 2 і реактивна 3 маси попарно сполучені між собою через пружні вузли 4 та 5 відповідно. До реактивної маси 3 прикріплено перший дебаланс 6. Також дана тримасова система має закріплений в реактивній масі другий дебаланс 7. Перший 6 і другий 7 дебаланси вібраційної машини є з'єднаними відповідно з першим 9 і другим 10 кроковими електродвигунами.

Дана тримасова вібраційна машина з інерційним приводом може без труднощів переходити другий резонанс на частоті  $\Omega_{в2}$  (рис. 1.20) і досягати частоти вимушених коливань  $\Omega$  у міжрезонансній зоні, оскільки під час запуску системи два крокових електродвигуна, що синхронізовані системою керування СК, прискорюють розведені на  $180^\circ$  дебаланси з однаковою частотою  $\omega$ . При цьому відцентрові сили, які згенеровані дебалансами, є рівними за модулем та протилежними за значенням. В такому випадку результуюча сила інерції, яка діє на реактивну масу 3, близька до нуля.



*Рис. 1.19. Тримасова вібраційна машина*



*Рис. 1.20. АЧХ третьої маси вібраційної машини*

Робоча частота  $\Omega$  обертання незбалансованих мас зафіксується на частоті між другим та третім резонансами, які розташовані на частотах  $\Omega_{в2}$  та  $\Omega_{в3}$ . При її досягненні дебаланси зводяться між собою [60]. Результуюча сила інерції у

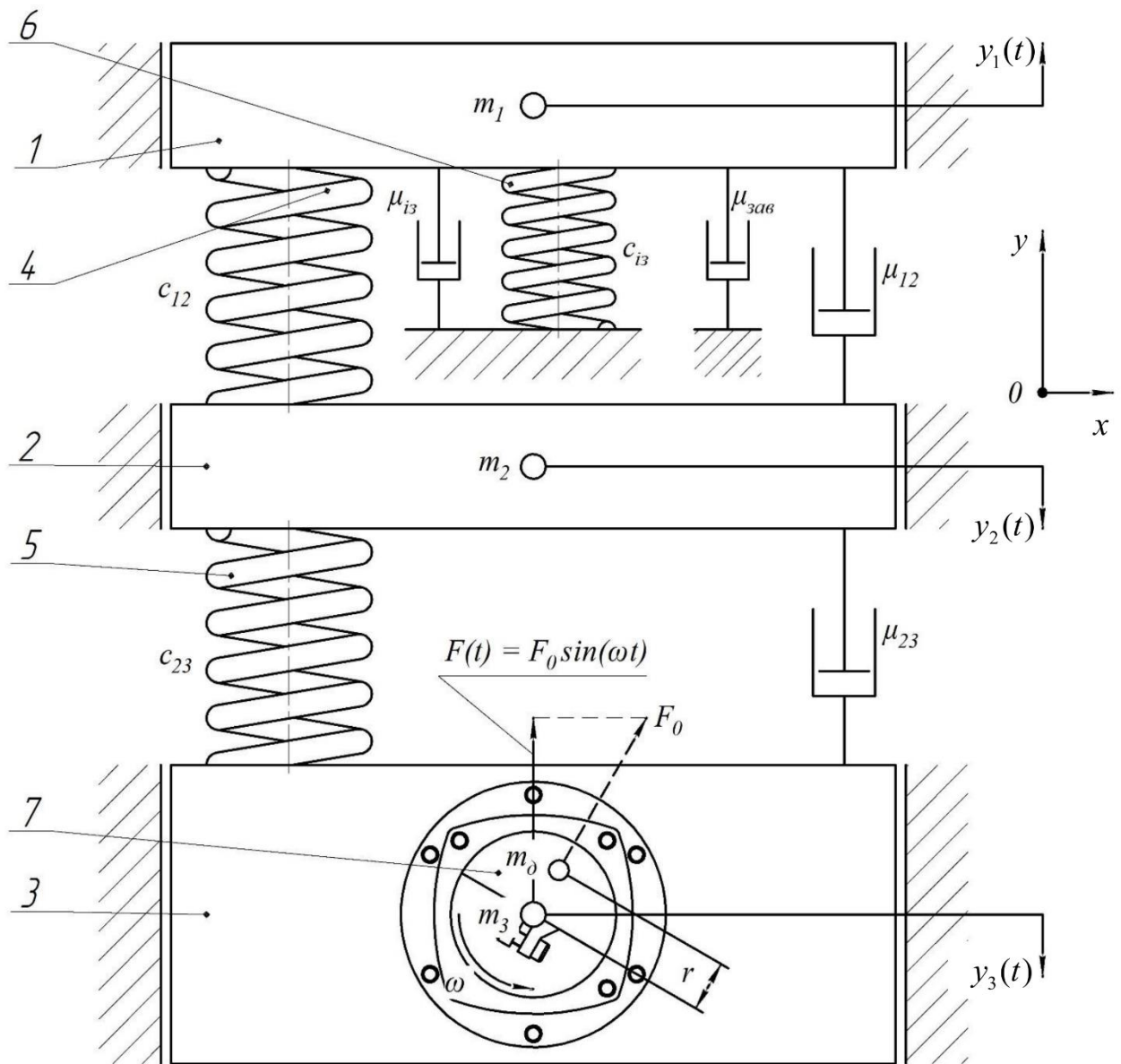
цьому випадку дорівнює сумі відцентрових сил двох незбалансованих мас. Завдяки цьому МКС приводиться в обертовий рух і амплітуди усіх мас досягають необхідних робочих значень. При зупинці такої вібраційної дебаланси розводяться на  $180^\circ$  між собою. Результируюча сила інерції зменшується до нуля. Тоді поступово зменшується також частота  $\omega$  обертання дебалансів, до їх повної зупинки.

Конструкції тримасових вібраційних машин, які запропоновані в [50, 51], із двома незалежними дебалансами, що приводяться в рух від індивідуальних крокових двигунів, дають можливість даній машині входити в робочу міжрезонансну зону із великим динамічним підсиленням, але є дуже складними в розрахунках, проектуванні та експлуатації, тому що синхронізована робота двох крокових двигунів є достатньо складною у налагодженні.

Наступною проблемою під час проектування тримасової міжрезонансної вібраційної машини з інерційним приводом є складність визначення необхідної потужності привода. В даний час існує багато праць, які пов'язані із визначенням потужності інерційних приводів вібраційних машин, зокрема роботи І. В. Кузьо та О. В. Ланець [37], М. П. Ярошевича [99, 100, 162 – 164], П. С. Берника [11], та ін. Однак вищезгадані праці зосереджені на дослідженні одно- і двомасових вібраційних машинах з інерційним приводом, а визначення споживаної потужності моторів-вібраторів тримасових вібраційних машин відрізняється від них присутністю таких додаткових параметрів як частки жорсткості та додаткового динамічного підсилення коливань [47].

В роботах [47, 49] запропонована методика розрахунку моторів-вібраторів для тримасових міжрезонансних вібраційних машин. Розрахункова схема тримасової МКС вібраційної машини з інерційним приводом, що показана на рис. 1.21, має три коливальні маси: робочий орган, що разом із умовно приєднаною масою механізму завантаження утворює активну масу  $m_1$ , другу (проміжну) масу  $m_2$  і третю реактивну масу  $m_3$ , до якої також належать два мотори-вібратори кожен з масою  $m_{\text{віб}}$ .





**Рис. 1.21.** Розрахункова схема тримасової міжрезонансної МКС із інерційним приводом, у якій цифрою 1 позначено активну масу, 2 – проміжну масу, 3 – реактивну масу, 4, 5, 6 – пружні вузли, 7 – дебаланс.

Як видно з рис. 1.21, активна  $m_1$ , проміжна  $m_2$  та реактивна  $m_3$  маси є попарно сполучені між собою системами пружних вузлів і мають жорсткості відповідно  $c_{12}$  та  $c_{23}$ . Силоне збурення прикладене до реактивної маси  $m_3$ . Маса  $m_1$  кінематично збурюється від руху маси  $m_2$ . Через активну масу  $m_1$

здійснюється кріплення МКС до вібраційних ізоляторів із жорсткістю  $c_{is}$ . Коливання мас здійснюються вздовж осі  $Ox$  по узагальненим координатам  $Y_1, Y_2, Y_3$  відповідно.

По методиці розрахунку моторів-вібраторів для тримасових міжрезонансних вібраційних машин, яка описана в [47], їх потужність можна визначити по залежності:

$$N = \left( \frac{\omega_f^3 \sqrt{6}}{4\eta} \right) \left( \frac{m_1 Y_1^2}{\lambda_1} + \frac{m_2 Y_2^2}{\lambda_2} + \frac{m_3 Y_3^2}{\lambda_3} \right). \quad (1.21)$$

Маса одного мотору-вібратора у такій тримасовій МКС буде визначатись по залежності:

$$m_{vib} = \frac{(\sqrt{6} \omega^3 Y_1^2 k m_1 (2m_1^2 + m_2^2 + 3m_1 m_2) \times (1 - \zeta)(1 - z^2))}{8\eta m_2 \zeta (m_2(1 - z^2) + m_1)}. \quad (1.22)$$

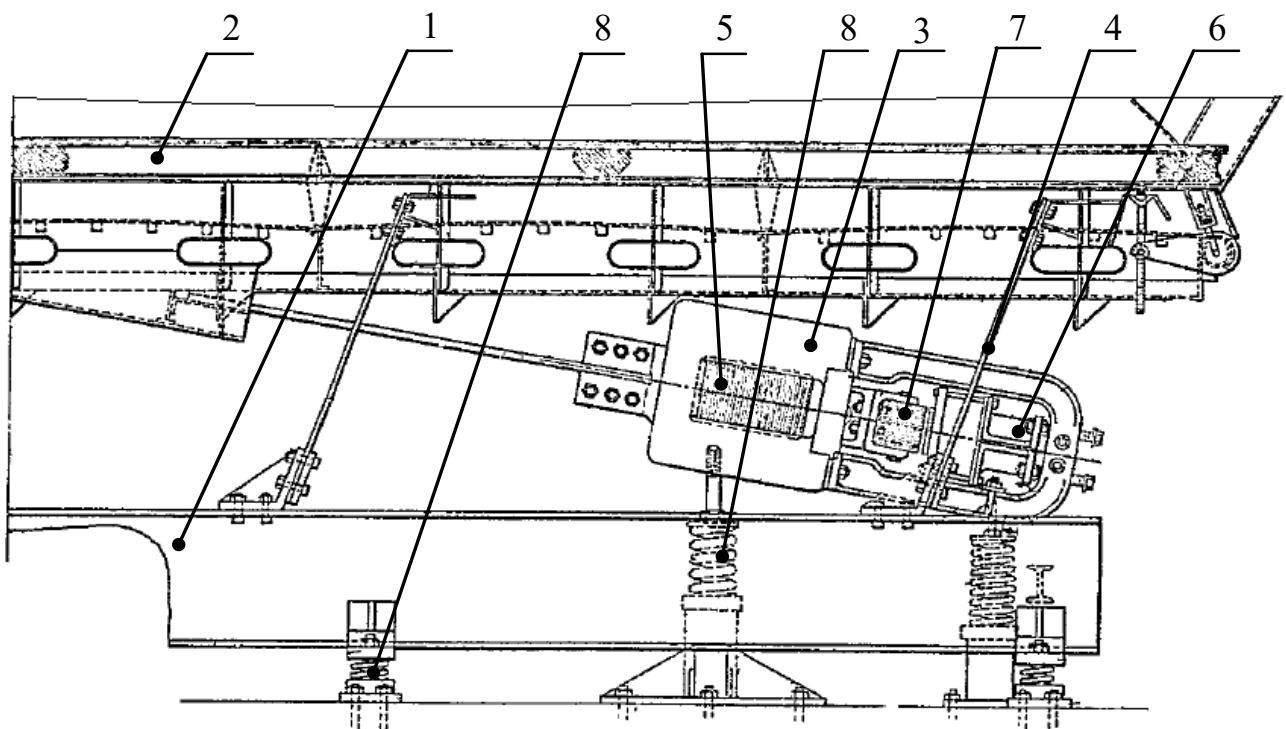
По наведених залежностях можна визначити необхідну потужність привода для приведення в рух тримасової МКС, а також правильно підібрати масу мотору-вібратора. Дану масу можна узгодити із масами уніфікованих моторів-вібраторів, які випускаються різними фірмами виробниками. Однак таке виконання тримасової міжрезонансної вібраційної машини не дозволить отримати надлегку реактивну масу, яка має значний динамічний потенціал.

Узагальнюючи, можна сказати, що використання тримасових міжрезонансних вібраційних машин з інерційним приводом має низку істотних недоліків, зокрема неможливість одержати надлегку реактивну масу, яка дозволила б забезпечити високу енергоефективність функціонування, а також трудність входу в міжрезонансну зону коливань.

### **1.2.3. Аналіз тримасових міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом**

Прототипами перших тримасових вібраційних машин з електромагнітним приводом було великогабаритне двомасове вібраційне обладнання [160, 161].

Початком використання тримасових МКС як основи для проектування вібраційного технологічного обладнання можна вважати патент 30-х років ХХ століття англійського винахідника William W. Triggs[161]. Зображена в патенті конструкція тримасового вібраційного транспортера з електромагнітним приводом великогабаритна, режим роботи такої вібраційної машини – міжрезонансний (рис. 1.22).



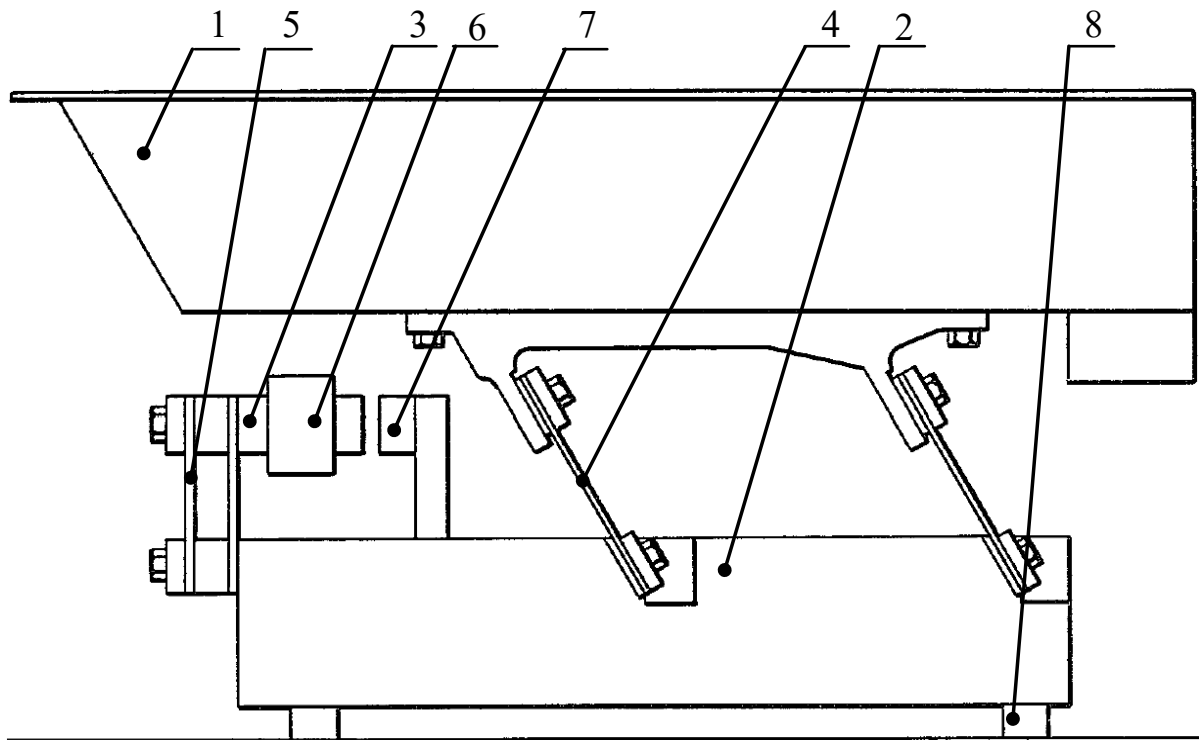
*Рис. 1.22. Тримасовий вібротранспортер із електромагнітним приводом*

На рис 1.23 видно, що робочим органом транспортера є проміжна маса 2, на неї кріпиться також ярмі електромагніту 7. Резонансні плоскі пружини 5 сполучають проміжну 2 та реактивну 3 маси. Реактивна маса містить осердя з котушкою 6. Збурення коливань від електромагніту безпосередньо передається на проміжну 2 і реактивну 3 маси. Через похилі пружини 4 проміжна маса 2 спирається на раму (активна маса 1), та надає їй кінематичне збурення. Конструкція транспортера встановлюється на фундамент через віброізолятори 8, що кріпляться до активної маси 1 та реактивної маси 3.

Автор даного винаходу обґрунтовував необхідність застосування білярезонансного режиму роботи вібротранспортера. Відповідно, при частоті вимушених коливань, що становитиме  $120 \text{ Гц}$ , власна частота даної МКС повинна бути дещо нижчою або ж вищою, наприклад  $118 \text{ Гц}$  або  $122 \text{ Гц}$ . Білярезонансне налагодження МКС усуне вплив маси середовища завантаження на активну масу 1. Аналізуючи запропоновану конструкцію вібраційного транспортера, можна констатувати факт, що вже на початку минулого століття були спроби реалізувати переваги багатомасових конструкцій вібраційного обладнання. Серед переваг таких систем можна виокремити насамперед набагато кращі амплітудно-частотні характеристики у міжрезонансному режимі коливань. Проте, автор даного патенту не характеризує дану конструкцію як міжрезонансну. Отож, можна припустити, що вперше спроектувавши тримасову міжрезонансну вібромашину, він не до кінця усвідомив переваги своєї конструкції. У патенті [161] не описані підходи для розрахунку конструкції транспортера, тому ймовірно, підбір власної частоти коливань відбувався експериментальним шляхом, без врахування того, що тримасова система на частотній області наділена двома резонансними піками.

У патенті [159] запропоновано конструкцію тримасового вібраційного живильника (рис. 1.23) та методику підбору параметрів тримасової системи за парціальними частотами. Дана методика передбачає синфазний рух в силовому збурюванні якоря 7 і осердя із котушкою 6 електромагніту, та дозволяє отримати значне підвищення ККД приводу. До недоліків такого типу розрахунку можна віднести відсутність конкретних аналітичних виразів для визначення інерційних параметрів та чіткого співвідношення жорсткісних характеристик пружних елементів. Не зважаючи на це, така методика є доволі перспективною. Вібраційний живильник, описаний в патенті [159] складається з робочої активної маси 1, яка з'єднана із проміжною масою 2 і реактивною масою 3 через пружні елементи 4 і 5 відповідно. Якір 7 електромагніту кріпиться до проміжної маси 2, а осердя з котушкою 6 електромагніту закріплений на реактивній масі 3.

Конструкція вібраційного живильника через віброізолятори 8 кріпиться до фундаменту.



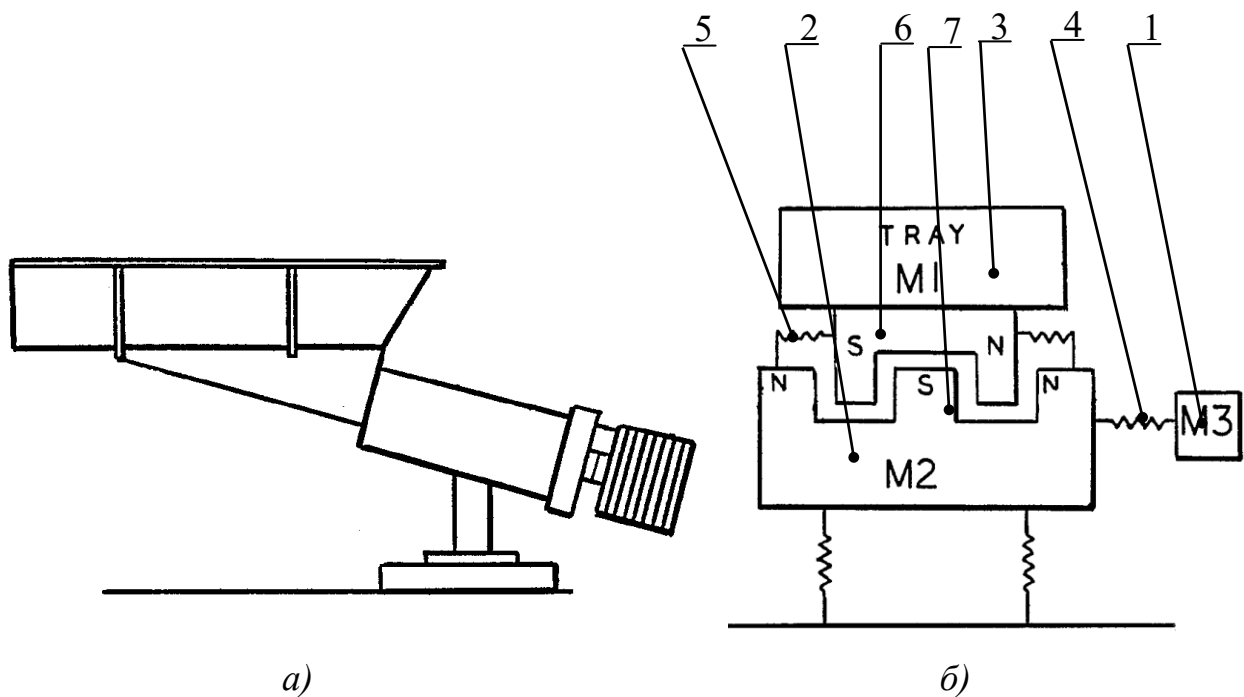
*Рис. 1.23. Тримасовий вібраційний живильник з електромагнітним приводом*

В патенті [101] удосконалено конструкції тримасових транспортерів і наведено різноманітні принципові схеми без розрахунків їх параметрів. В роботі [105] запропоновано методику раціонального підбору параметрів для тримасової вібраційної машини. Проте в запропонованій автором методиці проведено розрахунок МКС з динамічним гасником. Важливими є розробки систем, здатних до самоналагодження [128, 129].

Для транспортування вугілля у праці [152] представлено тримасовий вібраційний живильник, в якому робочим органом є реактивна маса 3 (рис. 1.24). Збурення від електромагніту 6, 7 передається проміжній 2 і реактивній 3 масам, які сполучені між собою системою пружних вузлів 5.

Проміжна маса 2 передає збурення активній масі 1 через систему пружних вузлів 4. Вібраційна машина кріпиться до фундаменту за допомогою

віброізоляторів. Проте в патенті [152] не розкриті принципи розрахунку даної установки.



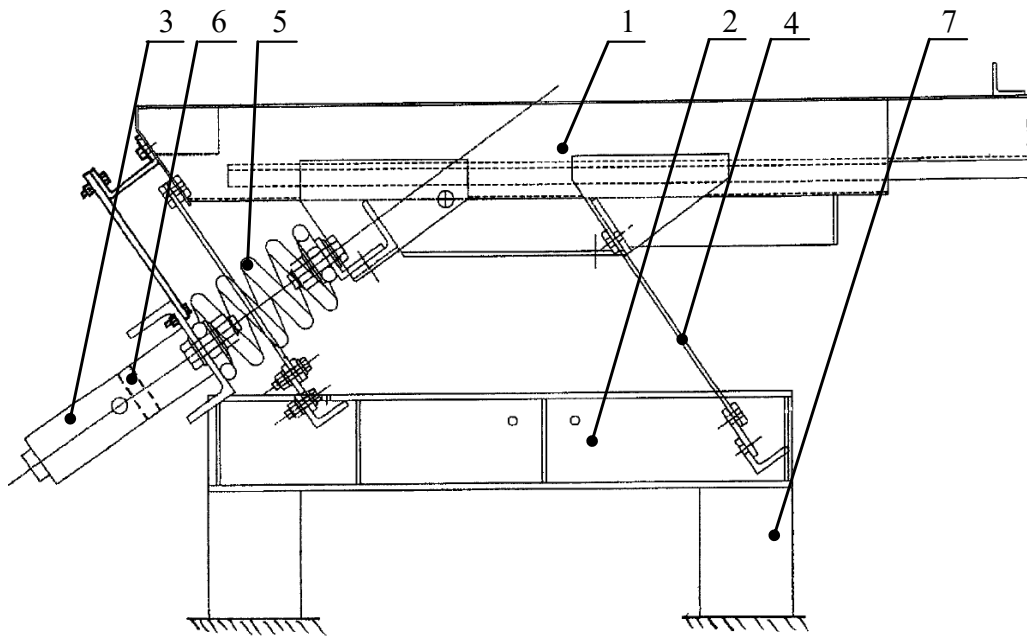
**Рис. 1.24.** Тримасова вібраційна машина:

*а – конструктивна схема обладнання; б – структурна схема*

Перспективним є патент [143], де запропонована раціональна конструкція тримасового вібраційного транспортера (рис. 1.25).

У показаному на рис. 1.25 вібраційному транспортері робоча маса 1 сполучена із проміжною масою 2 за допомогою похилих плоских пружин 4, а із реактивною масою 3 – витих пружин 5. Силоне збурення даної вібраційної машини відбувається за допомогою гідро- чи пневмоприводу, встановлених на реактивній масі 3. Віброізолятори 7, що з'єднані з проміжною масою 2, прикріплюють транспортер до фундаменту. Конструкція даного вібраційного транспортера особлива тим, що коливальна маса, яка безпосередньо бере участь в збуренні коливань, не має пружного зв'язку. У зазначеній вібраційній машині поршень 6, що вільно рухається вздовж своєї власної осі, приводиться в рух через пульсації повітря. Інерційні сили, які виникають в поршні 6, передаються

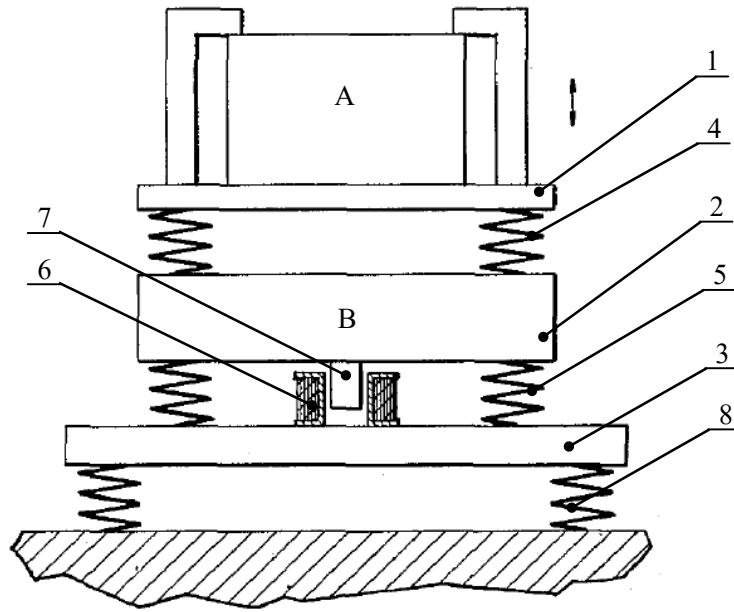
завдяки пружинам 5 активній масі 1, де МКС входить у резонанс вже як тримасова конструкція. Даний принцип реалізації МКС отримав назву ефекту “нульової жорсткості”.



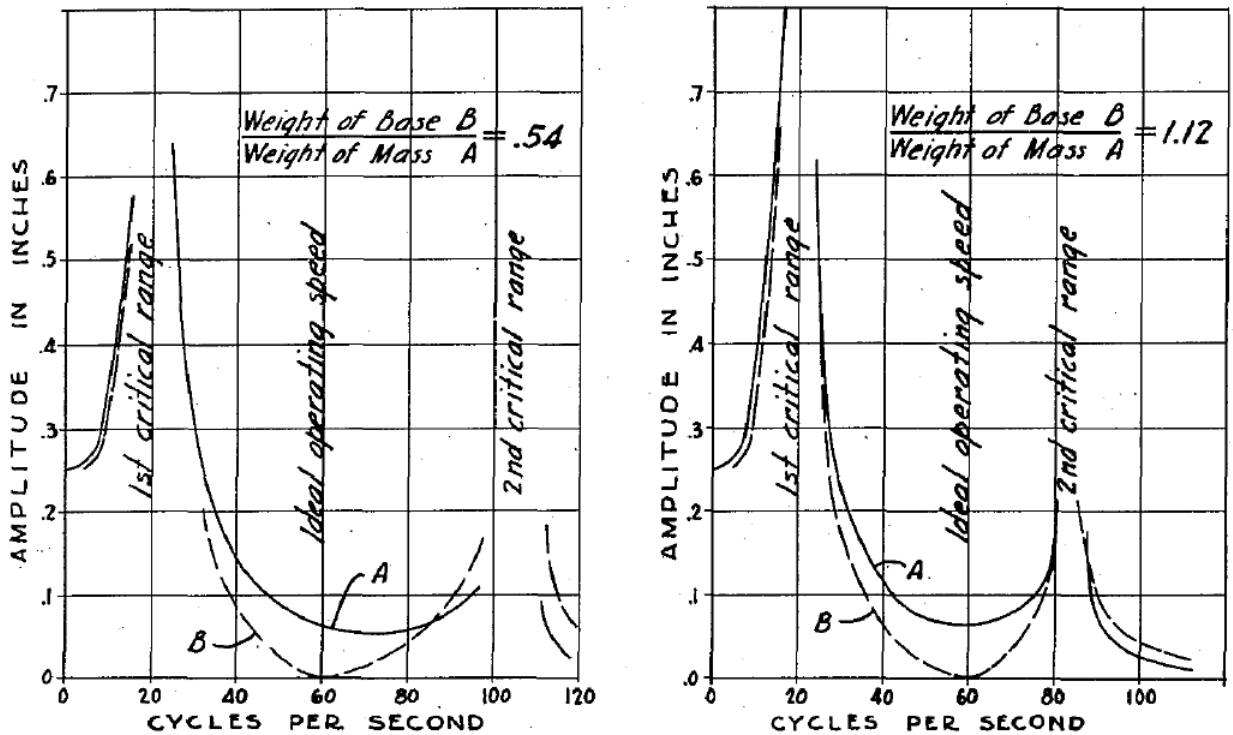
*Рис. 1.25. Тримасовий вібротранспортер*

У патенті [117] 1944 р. запропоновано конструкцію тримасової вібраційної машини з електромагнітним приводом для ущільнення бетоноsumішей (рис. 1.26, а).

В даній конструкції робочим органом є активна маса 1, яка кінематично збуджується від проміжної маси 2 через пружну систему 4. До проміжної маси 2 закріплюється ярма електромагніту 7, до реактивної маси 3 кріпиться осердя із котушкою 6. Проміжна 2 і реактивна 3 маси сполучені між собою пружною системою 5. Уся МКС кріпиться до фундаменту за рахунок віброізоляційних пружних елементів 8. Дана тримасова вібраційна машина є яскравим прикладом міжрезонансної МКС.



a)



б)

Рис. 1.26. Тримасова уцільнювальна вібромашина:

а – структурна схема обладнання; б – АЧХ МКС

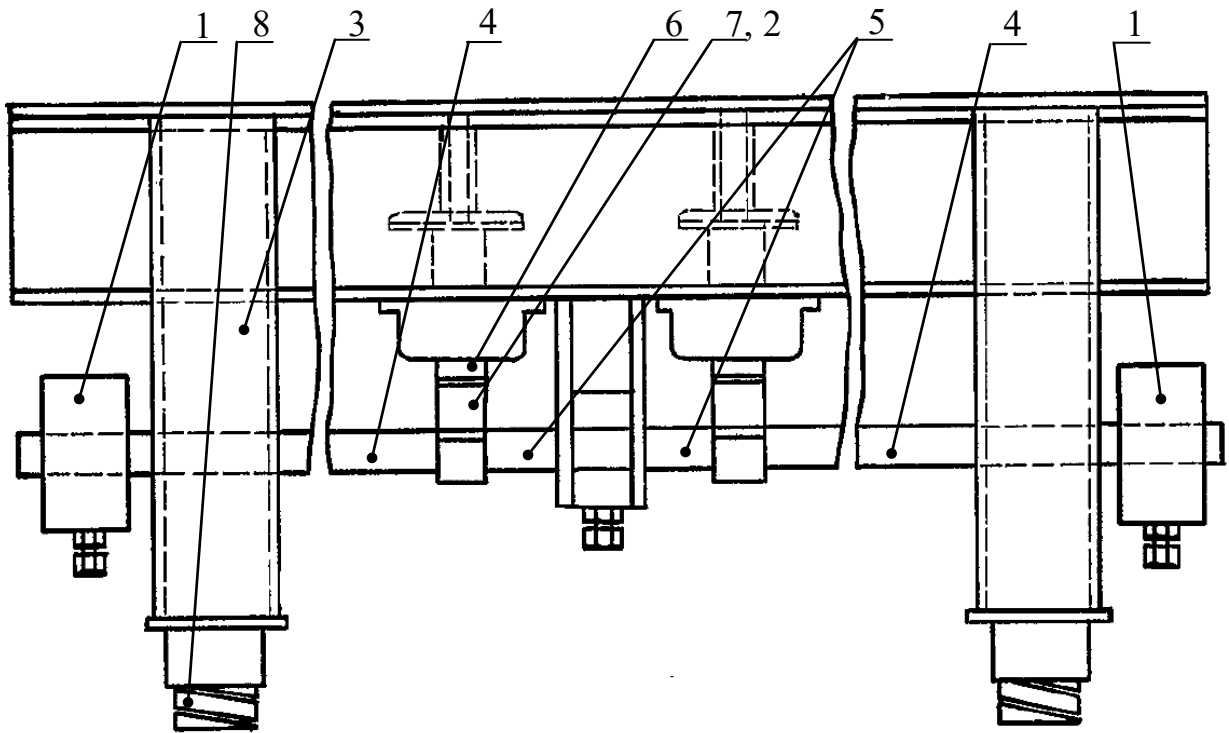
На рис. 1.26, б видно наявність в активній масі 1 (маси А на графіку) сідлоподібної характеристики. Це дозволяє даній масі мати стабільну амплітуду коливань в околі частоти 60 Гц. У проміжній масі 2 (маси В) на частоті 60 Гц



не тільки змінюється фаза коливань але також і зводиться до нуля значення амплітуди коливань. Проте, оскільки методики підбору параметрів МКС у патенті [117] не наведено, якісно оцінити потенціал даної конструкції неможливо.

В патенті [119] американською компанією General Electric Company Ltd запропоновано електромагнітне вібраційне технологічне обладнання для ущільнення та сепарації (рис. 1.27). Робочим органом є реактивна маса 3. Дві активні маси 1, що розташовані симетрично, здійснюють рух по пружній балці 4, яка дозволяє їм змінювати свої парціальні частоти. Внаслідок зміни парціальних частот активними масами 1, дана вібраційна машина має можливість працювати на частотах як  $50 \text{ Гц}$ , так і  $100 \text{ Гц}$ . Також в даній конструкції передбачена наявність віброізоляторів 8, на яких вона встановлюється на фундамент. Позиціями 6 та 7 на рис. 1.27 позначено відповідно осердя з котушкою та якір електромагніту. У вищеописаному патенті мало уваги приділяється резонансному налагодженню даної конструкції. Ймовірно, така вібраційна машина була налагоджена на дуже близькі до резонансних режимів роботи частоти. В такому разі маса середовища завантаження суттєво впливає на амплітуду коливань робочого органу. Як і у переважній більшості згаданих раніше патентів, налагоджування конструкції відбувалось експериментально, без попереднього аналізу МКС та математичної моделі, що описувала б її роботу. Як подальше удосконалення, в патенті [120] оприлюднено аналогічну конструкцію під аналогічною назвою і авторством.

Багато методик розрахунку та експериментальних зразків тримасових вібраційних машин було розроблено представниками київської школи вібраційної техніки [66 – 72]: Ю. О. Барановим, І. І. Назаренком та іншими. Дані розробки стосувались ущільнювального обладнання для бетонних сумішей, поверхневого ущільнення насипу і т.п.

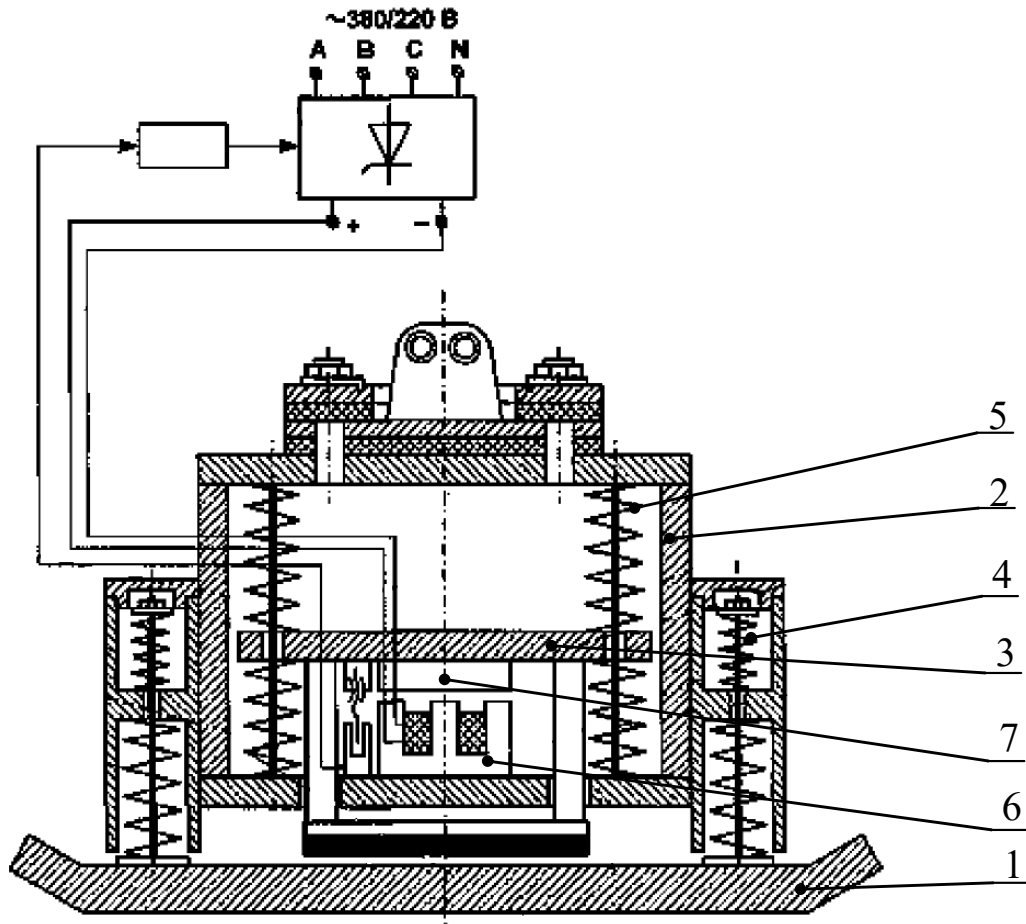


*Рис. 1.27. Тримасова вібраційна машина для сепарації та ущільнення бетоносумішей*

Важливий внесок в розвиток тримасових вібраційних машин зробили також: компанії Signal gesellschaft [146–148] та Wright Machinery Limited [138], науковці Josef Wölz [121], Mikata Yoshitaka [136, 137], Gulertan Vural і Albert Linz [111], John M. Morris [118, 122], Peter T. Jones [139], Ralph A. Stearns [141], Wang Yun [158] та інші.

Деякі розробки проводились і за напрямом міжрезонансних вібромашин із електромагнітним приводом. Зокрема була запропоновано віброударну тримасову електромагнітну трамбувальну машину [68], яка показана на рис. 1.28. Її особливістю є те, що це яскраво виражена нелінійна МКС. Це зумовлено нелінійністю у пружних вузлах 4, 5 і наявністю віброударного режиму. Методи розрахунку таких МКС відмінні від розрахунків лінійних МКС із гармонійним збуренням.

Детальні описи та розрахунки нелінійних МКС проведено в працях [22, 104].



*Рис. 1.28. Тримасова трамбувальна машина розробки КНУБА*

Іноземні джерела не надають детальну інформація про розрахунки тримасових міжрезонансних МКС вібромашин із електромагнітним типом збурення, що не створює передумов до проведення широкомасштабних наукових досліджень та зародження наукових шкіл за кордоном у цьому напрямку.

Поряд з тим, конструкції тримасових міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом є надзвичайно перспективною ідеєю для створення високоефективного вібраційного технологічного обладнання. Зазвичай вони є простішими у експлуатації, що зумовлено миттєвим виходом на робочу частоту коливань. Застосування в якості приводу вібраційних машин електромагнітів дозволяє уникнути зайвих рухомих з'єднань, які зменшують надійність такого обладнання. З цією метою, сформуємо ідею подальших досліджень, використавши особливості даного типу вібраційних машин.

### 1.3. Формування ідеї та гіпотези подальших досліджень

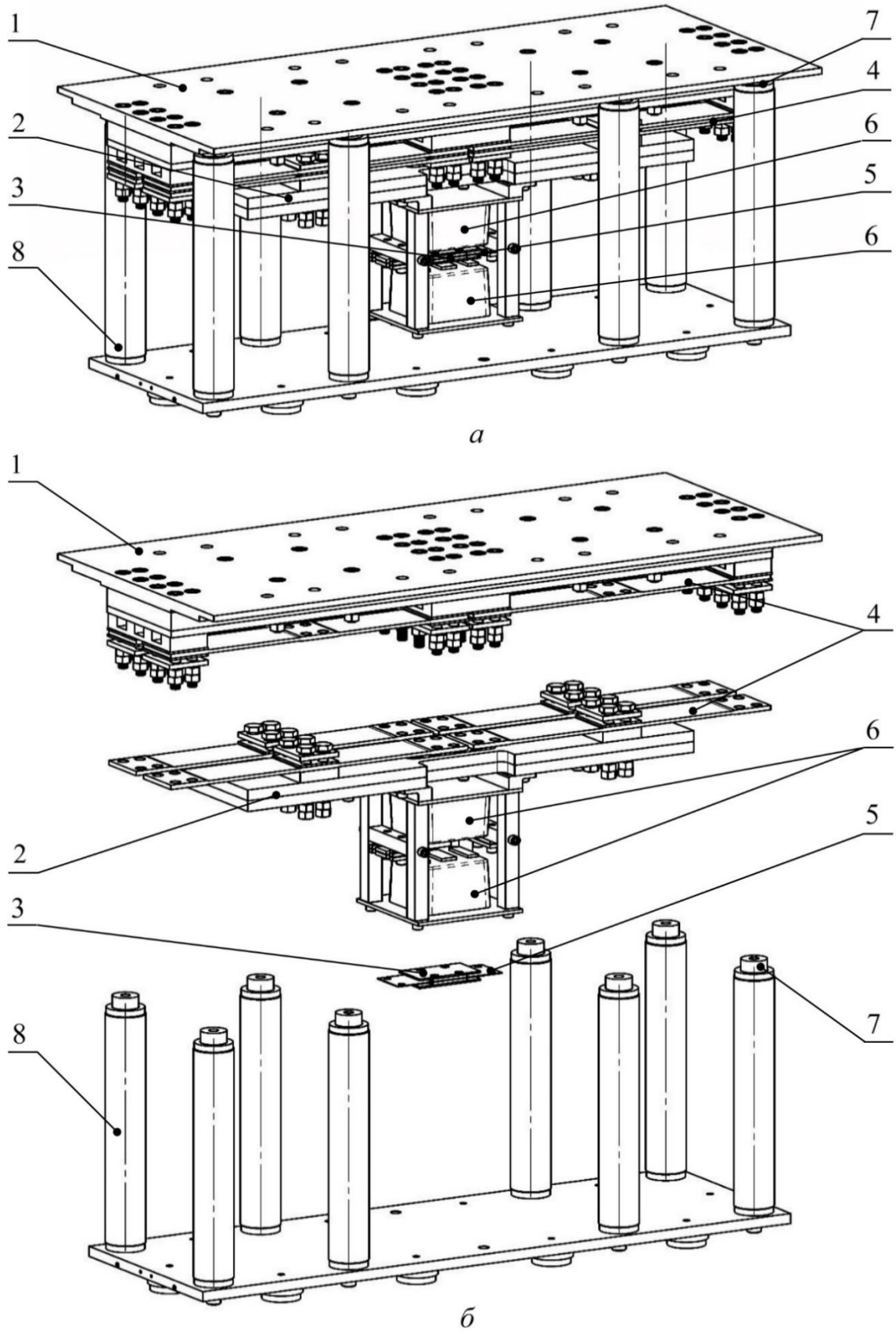
Варто зазначити, що вже існує модель тримасового міжрезонансного вібраційного стола з електромагнітним приводом [41, 46] (рис. 1.29). Він містить активну масу 1, що відіграє роль робочого органу, проміжну масу 2 і реактивну масу 3. Активна маса 1 за допомогою резонансного пружного вузла 4 сполучена з проміжною масою 2. Проміжна маса 2 в свою чергу сполучена з реактивною масою 3 за допомогою пружного вузла 5.

У вібраційній машині на рис. 1.29 силове збурення від електромагнітів прикладається до проміжної 2 і реактивної 3 мас. Воно реалізовується за двотактною схемою, коли осердя із котушками 6 закріплені на проміжній масі 2, а якорі – на реактивній 3. При цьому активна маса 1 отримує кінематичне збурення від проміжної маси 2. Вібраційний стіл за допомогою віброізоляторів 7 встановлений на основі 8.

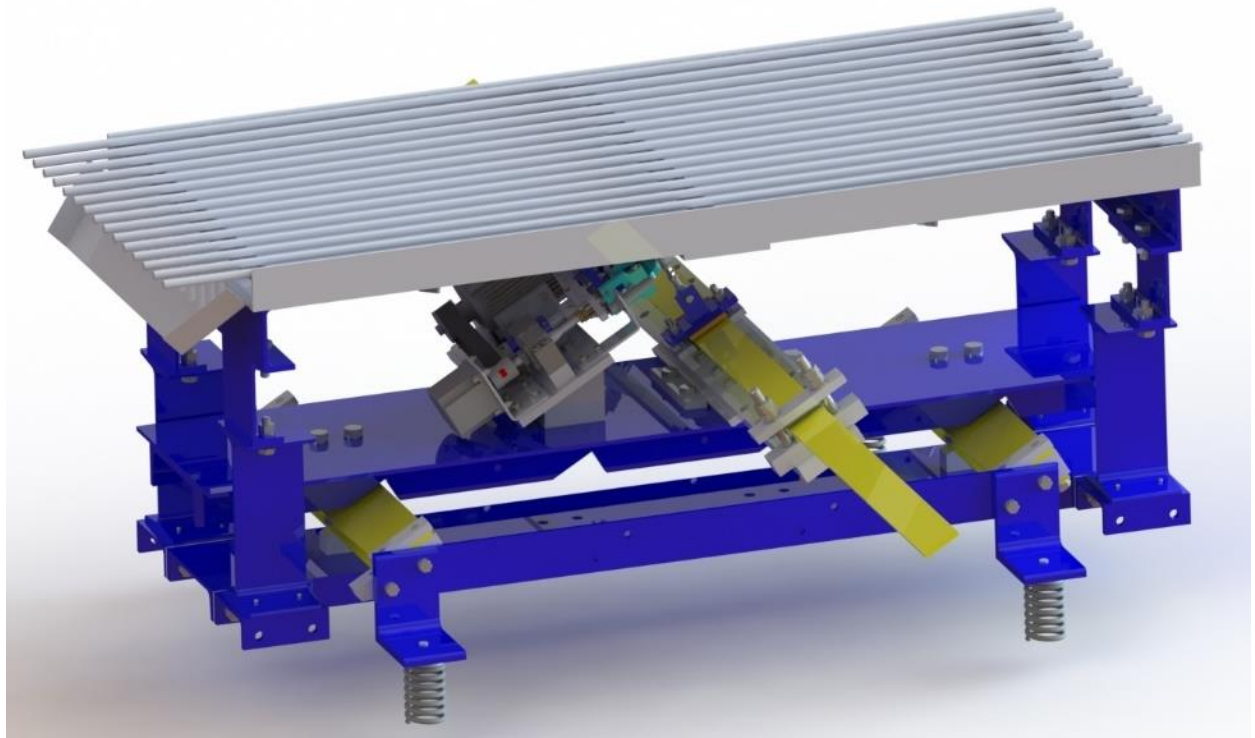
Вищеописана конструкція тримасового міжрезонансного вібраційного столу є типовою дискретною системою. Її виконання не дозволяє отримати необхідну надлегку реактивну масу, що унеможливорює досягнення значних динамічних підсилень коливань в міжрезонансній зоні, і відповідно, забезпечення максимальної енергоефективності функціонування.

Реалізація надлегкої реактивної маси шляхом введення континуальної ділянки у вигляді стержня була проведена в роботах Качура О.Ю. та Ланця О. С. [30, 45, 54], де описується дискретно-континуальна міжрезонансна система вібраційної машини з кривошипно-шатунним приводом (рис. 1.30). Даний підхід дозволяє отримати надлегку реактивну масу та реалізувати високоефективні міжрезонансні режими роботи вібраційного технологічного обладнання.

Проте, як зазначено вище, використання кривошипно-шатунного приводу має низку недоліків, серед них наявність великої кількості рухомих з'єднань, що в процесі роботи посилено зношуються, складність проектування кривошипно-шатунного механізму та труднощі з входженням в міжрезонансну зону.



*Рис. 1.29. Тримасовий міжрезонансний вібростіл:  
 а – твердотіла модель вібростола; б – рознесений вигляд*



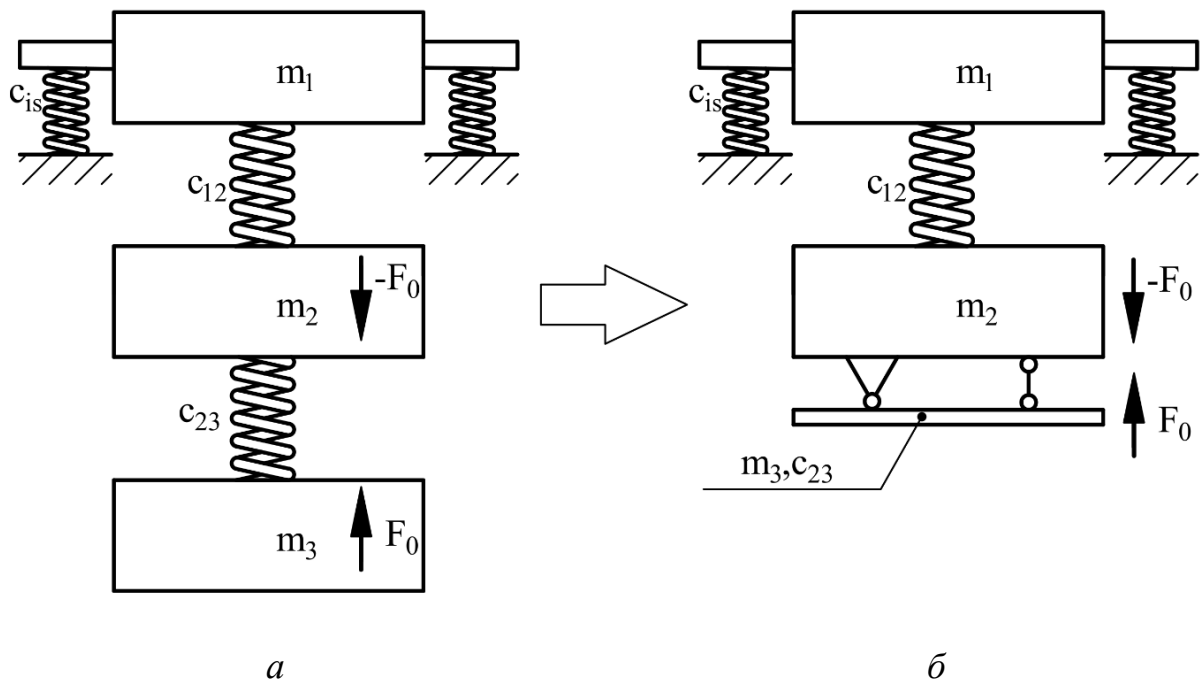
*Рис. 1.30. Модель тримасового транспортера-сепаратора із кривошипно-шатунним механізмом*

Проведений аналіз перспективних структур міжрезонансних конструкцій вібраційних машин дає можливість встановити напрямок подальших наукових досліджень із підвищення енергоощадності високоефективних МКС. Він вказує на доцільність використання реактивних мас з надмалими значеннями інерційних та жорсткісних параметрів у високоефективних міжрезонансних системах. Для такого міжрезонансного вібраційного обладнання в якості реактивної маси доцільно використовувати гнучке тіло (континуальну ділянку), що оптимально поєднає інерційні та жорсткісні параметри.

Тож, для створення високоефективного та надійного міжрезонансного вібраційного технологічного обладнання в дисертаційній роботі закладена наступна *ідея*: синтезувати дискретно-континуальну МКС вібраційної машини на базі електромагнітного приводу, що надасть нових властивостей таким машинам для їх ефективного функціонування та дозволить усунути недоліки існуючих конструкцій.

Гіпотеза, яка забезпечує реалізацію даної ідеї, зводиться до введення у МКС у якості реактивної маси континуальної ділянки з розподіленими параметрами – пластини, яка володіє малими інерційними та жорсткісними параметрами та дозволить ефективно збудуватись від електромагнітного привода.

Тому пропонується схема дискретно-континуальної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом (рис 1.31, б), яка аналогічно дискретній системі (рис 1.31, а), потребує встановлення п'яти інерційно-жорсткісних параметрів: трьох мас і двох жорсткостей пружних елементів. Основна відмінність полягає в тому, що реактивна маса поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри (масу  $m_3$  та жорсткість  $c_{23}$ ).



**Рис.1.31.** Схема дискретної (а) і дискретно-континуальної (б) міжрезонансних МКС

Отже, подальші наукові дослідження полягають у створенні дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом шляхом синтезу дискретних та континуальних властивостей її компонентів.

## 1.4. Висновки до першого розділу

1. Проведено аналіз існуючих типів МКС, які беруться за основу при проектуванні вібраційного технологічного обладнання. Встановлено, що оптимальним рішенням для забезпечення високоефективних режимів роботи є тримасові міжрезонансні МКС.

2. На сьогодні найбільшого поширення набули три типи приводу вібраційних машин: інерційний, кривошипно-шатунний та електромагнітний. Проаналізовано патенти та промислові зразки міжрезонансного вібраційного обладнання з даними типами приводів. Зважаючи на істотні недоліки інерційного та кривошипно-шатунного приводів при застосуванні у міжрезонансних МКС, встановлено, що для подальшого розвитку високоефективних міжрезонансних вібраційних машин найдоцільніше використовувати електромагніти. Це дозволяє мінімізувати кількість рухомих з'єднань та миттєво виходити на робочу частоту коливань.

3. Виявлено, що для реалізації переваг міжрезонансних режимів роботи тримасовим вібраційним технологічним обладнанням необхідні надлегка реактивна маса та невелика жорсткість пружнього вузла, що її закріплює. Такими властивостями наділене гнучке тіло, що поєднує у собі необхідні значення інерційно-жорсткісних параметрів. Тому встановлено, що в якості реактивної маси енергоефективної міжрезонансної вібраційної машини із електромагнітним приводом доцільно використати гнучке тіло, тобто континуальну ділянку.

Для реалізації запропонованого підходу у синтезі високоефективних дискретно-континуальних міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом необхідно розв'язати такі основні *задачі*:

➤ сформулювати математичну модель еталонної дискретної тримасової міжрезонансної МКС, яка є визначальною для створення дискретно-континуальної міжрезонансної МКС.

➤ обрати та удосконалити методологію для розрахунку континуальної ділянки та її синтезу в МКС вібраційної машини;



- розрахувати інерційно-жорсткісні параметри континуальної ділянки;
- сформулювати математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом, в якій адекватно синтезуються властивості континуальної ділянки та дискретної системи. Провести аналіз коливального руху мас системи;
  - запропонувати конструкцію міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом з використанням континуальної ділянки в якості реактивної маси;
  - встановити адекватність методології розрахунків шляхом експериментальних досліджень;
  - оптимізувати форму континуальної ділянки вібраційної машини для максимальної енергоефективності;
  - узагальнити методологію проектування такого обладнання для застосування в промисловому виробництві.

## РОЗДІЛ 2

### ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ ПАРАМЕТРІВ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ МКС НА БАЗІ ЕТАЛОННОЇ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ

*Розділ присвячений розробленню еталонної дискретної моделі з інерційно-жорсткісними та силовими параметрами, які є визначальними для створення дискретно-континуальної системи вібраційної машини з електромагнітним приводом. Для математичної моделі еталонної дискретної системи МКС встановлено ефективність її функціонування порівняно з адекватною двомасовою резонансною системою. Визначено парціальну частоту реактивної маси як ключового параметру для синтезу дискретно-континуальної МКС.*

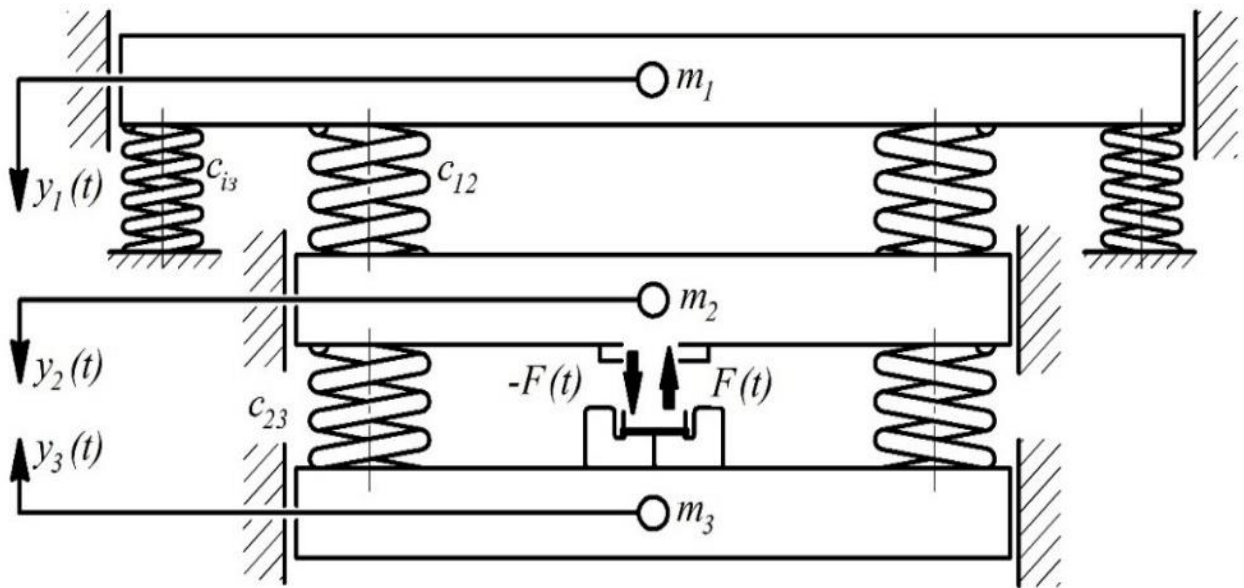
#### **2.1. Структура та математична модель еталонної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом**

Щоб описати дискретно-континуальну систему, необхідно спочатку звести її до еталонної високоефективної дискретної міжрезонансної МКС. Це дозволить чітко ідентифікувати параметри коливальної системи, наділеної заданою ефективністю функціонування. Саме ці параметри і відтворюватимуться в дискретно-континуальній МКС.

Тому в даному розділі проведено обґрунтування інерційно-жорсткісних та силових параметрів високоефективної дискретної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом – як еталонної моделі.

Існуючі [32, 39, 47] методи аналізу дискретної МКС дають можливість однозначно визначити ефективність її функціонування. В працях у галузі вібраційних технологій закон зміни жорсткості у пружних вузлах вібромашин вважається лінійними та відповідає закону Гука [65]. Таке припущення є доречним коли розглядаються малі колювання [46] вібраційної машини

Розглянемо еталонну тримасову міжрезонансну МКС (рис. 2.1).



*Рис. 2.1. Розрахункова схема дискретної тримасової МКС вібромашини з електромагнітним приводом*

Активна, проміжна і реактивна маси, які мають інерційні параметри відповідно  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$ , і попарно сполучені між собою системою пружних елементів з жорсткостями  $c_{12}$  та  $c_{23}$ . Інерційні маси  $m_1$ ,  $m_2$  і  $m_3$  здійснюють прямолінійний рух вздовж вертикальної осі  $Oy$  за узагальненими координатами відповідно  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  та  $y_3(t)$ .

При визначенні рівнянь для малих коливань динамічної моделі еталонної МКС з трьома ступенями вільності найдоречніше скористатись системою трьох диференціальних рівнянь Лагранжа II роду [48]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial y_1} = -\frac{\partial P}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_1} + Q_{y_1}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial y_2} = -\frac{\partial P}{\partial y_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_2} + Q_{y_2}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial K}{\partial y_3} = -\frac{\partial P}{\partial y_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_3} + Q_{y_3}, \end{cases} \quad (2.1)$$

де  $K, P, \Phi$  та  $Q_{y_i} = Q_{y_i}(t)$  – відповідно: кінетична енергія, потенціальна енергія, функція дисипації системи і збурювальна сила приводу за узагальненими координатами  $y_i$ .

Кінетична енергія еталонної тримасової МКС є сумою кінетичних енергій усіх мас системи ( $K_1, K_2$  та  $K_3$ ). Зважаючи на те, що дані маси здійснюють прямолінійні коливання, їх кінетичні енергії дорівнюють:

$$K_1 = \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2}; \quad K_2 = \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2}; \quad K_3 = \frac{m_3 \dot{y}_3^2}{2}. \quad (2.2)$$

Відповідно, сумарна кінетична енергія еталонної МКС становить:

$$K = \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{y}_3^2}{2}. \quad (2.3)$$

Потенціальна енергія  $P$  еталонної дискретної МКС вібротомашини із електромагнітним приводом є сумою робіт відновлювальних сил пружності в резонансних та віброізоляційних пружних вузлах:

$$P = \frac{1}{2} c_{12} (y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2} c_{23} (y_2 - y_3)^2 + \frac{1}{2} c_{i3} y_2^2. \quad (2.4)$$

Дисипативна функція  $\Phi$  для дискретної системи розраховується за виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \dot{y}_3^2. \quad (2.5)$$

Узагальнені збурювальні зусилля визначаються з виразів  $Q_{y_2} = \frac{\delta A_{Py_2}}{\delta y_2}$  і  $Q_{y_3} = \frac{\delta A_{Py_3}}{\delta y_3}$ , де  $\delta A_{Py_2}, \delta A_{Py_3}$  – елементарні роботи збурювальної сили  $F$  на деяких елементарних переміщеннях МКС, що викликані приростом узагальнених координат  $y_2$  і  $y_3$ . Отож:

$$\begin{aligned} \delta A_{Py_2} &= -P \delta y_2 \sin(\omega t + \varepsilon); \quad Q_{y_2} = -P \sin(\omega t + \varepsilon); \\ \delta A_{Py_3} &= P \delta y_3 \sin(\omega t + \varepsilon); \quad Q_{y_3} = P \sin(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Застосовуючи вирази (2.3) – (2.6), знайдемо складові системи рівнянь (2.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_1} &= m_1 \dot{y}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_1} \right) = m_1 \ddot{y}_1; \quad \frac{\partial K}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = c_1 (y_1 - y_2); \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_1} &= \mu_a \dot{y}_1 + \mu_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2); \\
\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_2} &= m_2 \dot{y}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_2} \right) = m_2 \ddot{y}_2; \quad \frac{\partial K}{\partial y_2} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y_2} = c_1 (y_2 - y_1) + c_2 (y_2 - y_3) + c_{i3} y_2; \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_2} &= \mu_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \mu_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + \mu_3 \dot{y}_2 + \mu_n \dot{y}_2; \\
\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_3} &= m_3 \dot{y}_3; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_3} \right) = m_3 \ddot{y}_3; \quad \frac{\partial K}{\partial y_3} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y_3} = c_2 (y_3 - y_2); \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_3} &= \mu_2 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + \mu_3 \dot{y}_3.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Система диференціальних рівнянь руху еталонної тримасової МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом за лінійними координатами набуде вигляду [48]:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) + c_{12} (y_1(t) - y_2(t)) + c_{i3} y_1(t) = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + c_{12} (y_2(t) - y_1(t)) + c_{23} (y_2(t) - y_3(t)) = -F(t); \\ m_3 \ddot{y}_3(t) + c_{23} (y_3(t) - y_2(t)) = F(t). \end{cases} \tag{2.8}$$

Система рівнянь (2.8) є визначальною для оцінювання параметрів високоефективної міжрезонансної еталонної тримасової дискретної МКС. Дана система рівнянь обґрунтовує найважливіші динамічні процеси, що відбуваються у даному типі вібраційних машин [13, 15, 154]. Система диференціальних рівнянь (2.8) може бути представлена у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} -m_1 \omega^2 + \\ +c_{12} + c_{i3} \end{array} \right) & -c_{12} & 0 \\ -c_{12} & \left( \begin{array}{c} -m_2 \omega^2 + \\ +c_{12} + c_{23} \end{array} \right) & -c_{23} \\ 0 & -c_{23} & \left( \begin{array}{c} -m_3 \omega^2 + \\ +c_{23} \end{array} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ F \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Коефіцієнти матриці (2.9) можна знайти із виразів:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= -m_1\omega^2 + c_{12} + c_{i3}; \quad k_{12} = -c_{12}; \quad k_{13} = 0; \\
k_{21} &= -c_{12}; \quad k_{22} = -m_2\omega^2 + c_{12} + c_{23}; \quad k_{23} = -c_{23}; \\
k_{31} &= 0; \quad k_{32} = -c_{23}; \quad k_{33} = -m_3\omega^2 + c_{23}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Використовуючи правило Крамера, визначник матриці коефіцієнтів дорівнюватиме:

$$D_1 = k_{11}k_{22}k_{33} - k_{12}k_{21}k_{33} - k_{11}k_{23}k_{32}, \tag{2.11}$$

а розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.8):

$$\begin{aligned}
Y_1 &= F k_{12}(k_{23} + k_{33}) / D_1; \\
Y_2 &= -F k_{11}(k_{23} + k_{33}) / D_1; \\
Y_3 &= F(k_{11}k_{32} - k_{12}k_{21} + k_{11}k_{22}) / D_1.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Враховуючи той факт, що жорсткість віброізоляційних пружних елементів не матиме суттєвого впливу на динамічні процеси в розглянутій еталонній дискретній МКС, її можливо не враховувати під час розрахунків вібраційної машини. В такому випадку, застосовуючи вирази (2.10), рівняння (2.11) запишеться у вигляді:

$$D_1 = \begin{pmatrix} (c_{12} - m_1\omega^2)(c_{12} + c_{23} - m_2\omega^2)(c_{23} - m_3\omega^2) - \\ -c_{12}^2(c_{23} - m_3\omega^2) - c_{23}^2(c_{12} - m_1\omega^2) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Відсутність дисипативних сил в системі рівнянь руху за узагальненими лінійними координатами (2.8) та невраховування жорсткості віброізоляційних пружних елементів у виразі (2.13) при розрахунках інерційно-жорсткісних параметрів створює деяку похибку моделі системи, однак отримувані у таких випадках результати задовільняють необхідну точність інженерних розрахунків, а аналітичні вирази у таких випадках – прості та однозначні для подальшого застосування у інженерній практиці. Тому необхідно, щоб параметри такої МКС були точно реалізовані в дискретно-континуальній МКС (особливо значення жорсткості  $c_{3\beta} = c_{23}$  і маси  $m_{3\beta} = m_3$  континуальної ділянки) вібромашини із електромагнітним приводом. Виконання цієї умови дозволить амплітудно-частотній характеристиці дискретної МКС співпадати з амплітудно-частотною

характеристикою аналогічної дискретно-континуальної МКС. Це забезпечить розглянутій дискретно-континуальній системі таку ж ефективність роботи, як у дискретної системи, відповідно – аналогічну енергоощадливість в робочих режимах коливань.

## 2.2. Обґрунтування конструктивних та інерційно-жорсткісних параметрів еталонної тримасової МКС

Задаймо еталонною тримасовою МКС, як базу для подальшого її використання під час розроблення конкретної вібраційної машини. Враховуючи частоту електромережі України  $\nu = 50 \text{ Гц}$ , необхідно, щоб робоча частота коливань МКС знаходилась в околі даного значення. Тоді електромагніти, які є приводом розглянутої МКС, можливо було живити напряму із мережі. Нехай активна маса становить  $m_1 = 118 \text{ кг}$ , а проміжна –  $m_2 = 45 \text{ кг}$ . Застосовуючи відомий алгоритм розрахунку для еталонної дискретної тримасової МКС [46], визначимо область допустимих значень інерційного параметру реактивної маси  $m_3$  [56]

$$0 < m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)(1 - \Lambda^2)^2}{m_2(1 - \Lambda^2)^2 - 4m_1\Lambda^2}, \quad (2.14)$$

де  $\Lambda = \frac{\Omega_{n1}}{\Omega_{n2}}$  – відношення власних частот коливань системи. Прийmemo значення

власних частот коливань  $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад/с}$  і  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад/с}$ . Отже, підставивши усі необхідні дані у нерівність (2.14), визначимо, що реактивна маса повинна знаходитись в діапазоні  $0 < m_3 < 0,447 \text{ кг}$ .

Зважаючи на вищеписані умови, прийmemo  $m_3 = 0,36 \text{ кг}$ . Жорсткість  $c_{12}$  встановимо використовуючи рівняння [46, 56]

$$c_{12} = \frac{(m_2 + m_3)m_1 \Omega_{n2}^2 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{n2}^2 (\Lambda^2 - 1) - H \right]}{(m_1 + m_2 + m_3) \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{n2}^2 (\Lambda^2 - 1) + (-H - 2m_1 m_3 \Omega_{n2}^2) \right]}, \quad (2.15)$$

де 
$$H = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{n2}^4 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2 (\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1 m_3 \Lambda^2 \right]}.$$

Підставивши усі параметри в рівняння (2.15), встановимо, що  $c_{12} = 3,455 \cdot 10^6 \text{ Н / м}$ .

Жорсткість  $c_{23}$  можна знайти з рівняння [46, 56]:

$$c_{23} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2 \Omega_{n2}^2 (\Lambda^2 + 1) - H}{2 \cdot (m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3. \quad (2.16)$$

При існуючих параметрах МКС вона становитиме  $c_{23} = 3,517 \cdot 10^4 \text{ Н / м}$ .

Амплітудне значення збурюючої сили  $F_{02}$  для двомасової системи, визначене через амплітуду коливань  $Y_1$  робочого органу, становитиме [46, 56]:

$$F_{02} = Y_1 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 - m_1 \cdot c - m_2 \cdot c}{m_2}, \quad (2.17)$$

де  $c$  – жорсткість резонансного пружного елемента двомасової МКС, що можна визначити з рівняння [46, 56]:

$$c = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Omega_{n2}^2. \quad (2.18)$$

Амплітудне значення збурюючої сили  $F_{03}$  для тримасової системи, визначене через амплітуди її коливальних мас, враховуючи рівняння (2.15) і (2.16), розраховуватиметься згідно виразів:

$$F_{03} = -Y_1 \cdot \frac{D_2}{m_3 \cdot c_{12}}, \quad (2.19)$$

$$F_{03} = -Y_2 \cdot \frac{D_2}{m_3 (c_{12} - m_1 \omega^2)}, \quad (2.20)$$

$$F_{03} = Y_3 \cdot \frac{D_2}{c_{12} (m_1 + m_2) - \omega^2 m_1 m_2}, \quad (2.21)$$



у яких множник  $D_2$  можна описати за допомогою рівняння:

$$D_2 = \left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right). \quad (2.22)$$

Підставляючи вираз (2.22) у рівняння (2.19) – (2.21), отримано залежності для визначення збурюючої сили:

$$F_{03} = -Y_1 \cdot \frac{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - \\ - m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}{m_3 \cdot c_{12}}, \quad (2.23)$$

$$F_{03} = -Y_2 \cdot \frac{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - \\ - m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}{m_3 (c_{12} - m_1 \omega^2)}, \quad (2.24)$$

$$F_{03} = Y_3 \cdot \frac{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - \\ - m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}{c_{12} (m_1 + m_2) - \omega^2 m_1 m_2}. \quad (2.25)$$

Коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань  $D$  в тримасовій еталонній міжрезонансній МКС становитиме:

$$D = - \frac{(m_3 \cdot c_{12}) \cdot (m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 - (m_1 + m_2) \cdot c)}{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \times \\ \times \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \times \\ \times c_{12} \cdot c_{23} + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right) \cdot m_2} \approx 21. \quad (2.26)$$

Отже, запропонована еталонна тримасова дискретна МКС буде в 21 раз ефективнішою у порівнянні із двомасовою системою. Згідно із поставленою задачею, необхідно забезпечити прямолінійний коливальний рух активної маси із перевантаженням  $\zeta = 4g$ , де стала  $g = 9,81 м/с^2$  – прискорення вільного падіння. Перевантаження, яке утворюється на робочому органі вібронашину, можна визначити з виразу:

$$\zeta = \frac{Y_1 \cdot \omega^2}{g}. \quad (2.27)$$

Підставивши вираз (2.27) у (2.23), можна визначити силу, з якою на частоті  $\Omega = 314 рад/с$  необхідно збурити тримасову еталонну МКС вібронашину із електромагнітним приводом для отримання перевантаження  $\zeta = 4g$  активної маси:

$$F_{03} = -\zeta \cdot g \cdot \frac{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - \\ -m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ +m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ +m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}{\omega^2 \cdot m_3 \cdot c_{12}} = 27,488 Н. \quad (2.28)$$

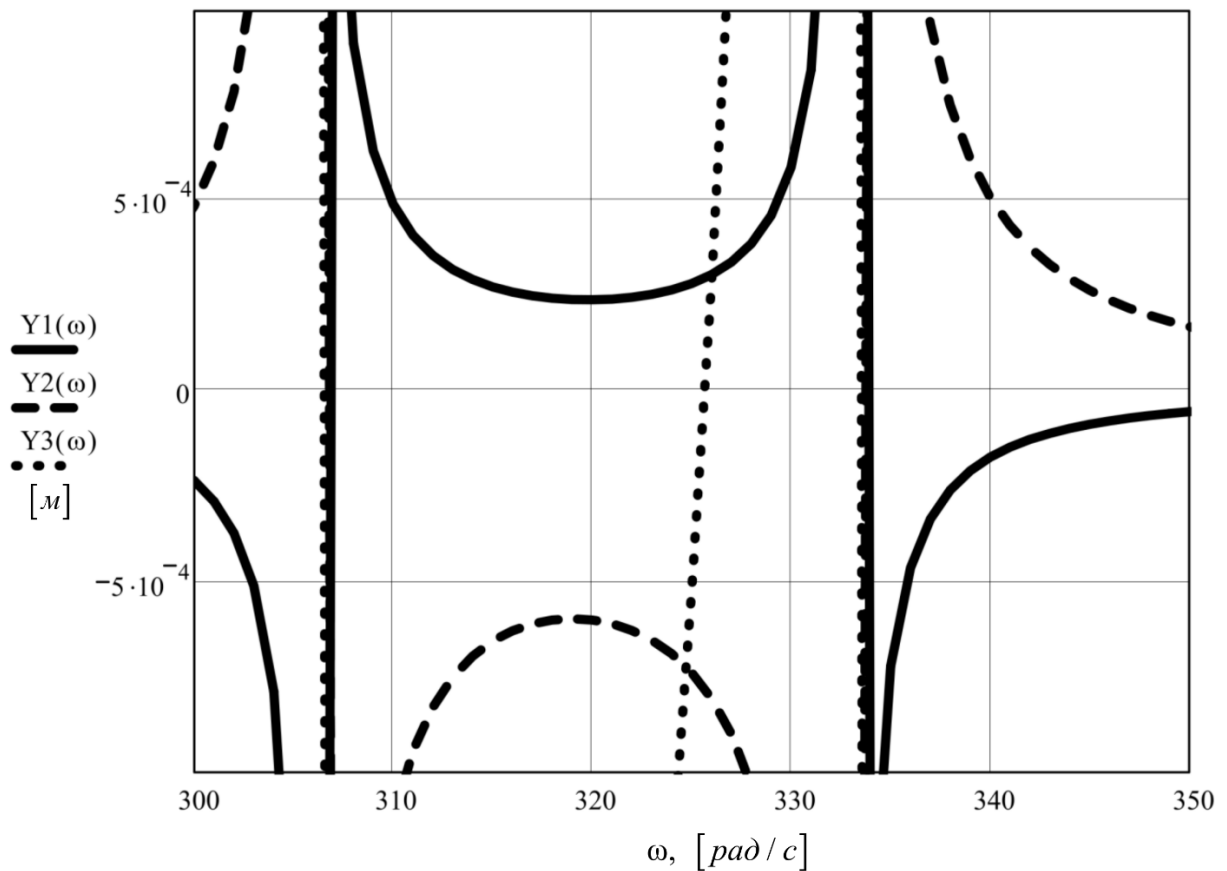
Використовуючи вирази (2.23) – (2.25), можна знайти рівняння для встановлення амплітуд коливальних мас еталонної дискретної тримасової системи:

$$Y_1 = \frac{-m_3 \cdot F_{03} \cdot c_{12}}{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \times \\ \times \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ +m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}; \quad (2.29)$$

$$Y_2 = \frac{m_3 \cdot F_{03} \cdot (m_1 \cdot \omega^2 - c_{12})}{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \times \\ \times \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ +m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}; \quad (2.30)$$

$$Y_3 = \frac{-F \cdot (m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 - m_1 \cdot c_{12} - m_2 \cdot c_{12})}{\left( \begin{aligned} & m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \times \\ & \times \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ & + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{aligned} \right)}. \quad (2.31)$$

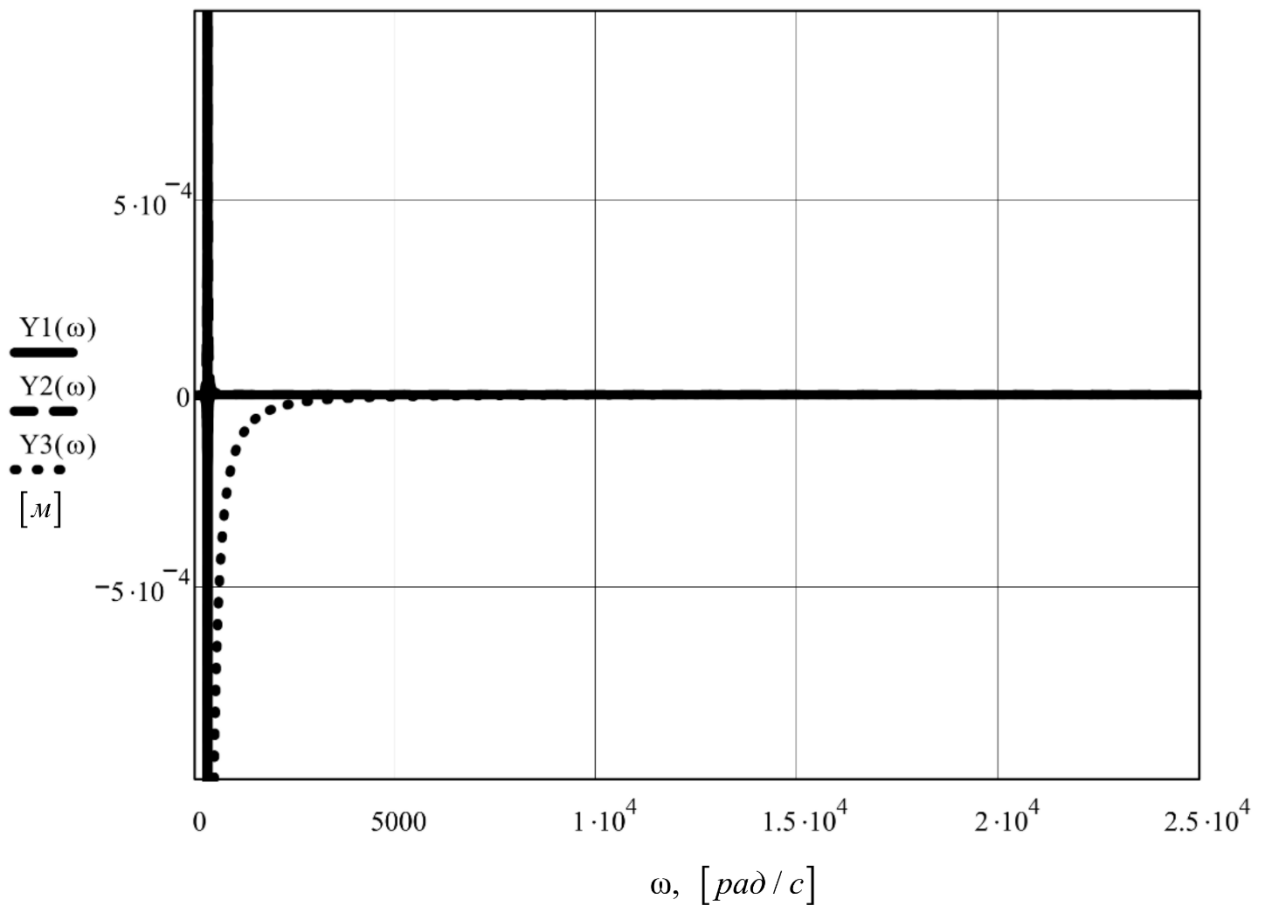
Використовуючи визначені вище параметри і вирази (2.29) – (2.31), побудуємо АЧХ еталонної тримасової міжрезонансної МКС (рис. 2.2, 2.3).



**Рис. 2.2.** АЧХ тримасової міжрезонансної МКС в діапазоні резонансних частот

З рис. 2.2 можна помітити два резонансних піки, що знаходяться на частотах  $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад/с}$  і  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад/с}$ . Дані значення і закладалися у математичну модель розглянутої еталонної дискретної тримасової МКС. Амплітудно-частотна характеристика активної та проміжної мас системи у міжрезонансній зоні є сідлоподібною. Це дозволяє МКС під час робочих режимів мінімізувати

вплив маси завантаження робочого органу на значення амплітуди його коливань. Однак, для реактивної маси характерна стрімкоподібна характеристика на частоті вимушених коливань  $\Omega_f = 314 \text{ рад/с}$ . Цей факт унеможливорює практичну реалізацію дискретних тримасових міжрезонансних вібротомашин із електромагнітним приводом. На рис. 2.3 можна спостерігати відсутність додаткових резонансів дискретної системи на широкому діапазоні частот.



**Рис. 2.3.** Амплітудно-частотна характеристика дискретної тримасової міжрезонансної МКС на широкому діапазоні частот

При частоті вимушених коливань  $\Omega = 314 \text{ рад/с}$ , амплітуда коливань робочого органу вібраційної машини визначається згідно рівняння (2.29):

$$Y_1 = \frac{-m_3 \cdot F_{03} \cdot c_{12}}{\left( m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \Omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \Omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \times \right.} = 0,0004 \text{ м}, \quad (2.32)$$

$$\left. \times \Omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \Omega^2 \cdot c_{23} + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \right.$$

$$\left. + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \Omega^2 \cdot c_{23} \right)$$

що дозволяє підтвердити амплітудно-частотну характеристику МКС (рис. 2.2) і відповідає перевантаженню  $\zeta = 4 g$ .

Для підтвердження приросту енергоефективності еталонної тримасової МКС у порівнянні з двомасовою системою, розрахуємо, яке зусилля необхідно розвивати аналогічній двомасовій резонансній МКС на частоті її вимушених коливань  $\Omega = 314 \text{ рад/с}$  для отримання перевантаження на робочому органі  $\zeta = 4 g$  із відповідними значеннями інерційних параметрів її коливальних мас. Отже, підставивляючи рівняння (2.27) в (2.17), отримаємо значення для двомасової МКС:

$$F_{02} = \zeta \cdot g \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 - m_1 \cdot c - m_2 \cdot c}{m_2 \cdot \omega^2} = 577,311 \text{ Н}. \quad (2.33)$$

Амплітудно-частотну характеристику двомасової МКС із закладеним значення збурювальної сили  $F_{02} = 577,311 \text{ Н}$  представлено на рис. 2.4.

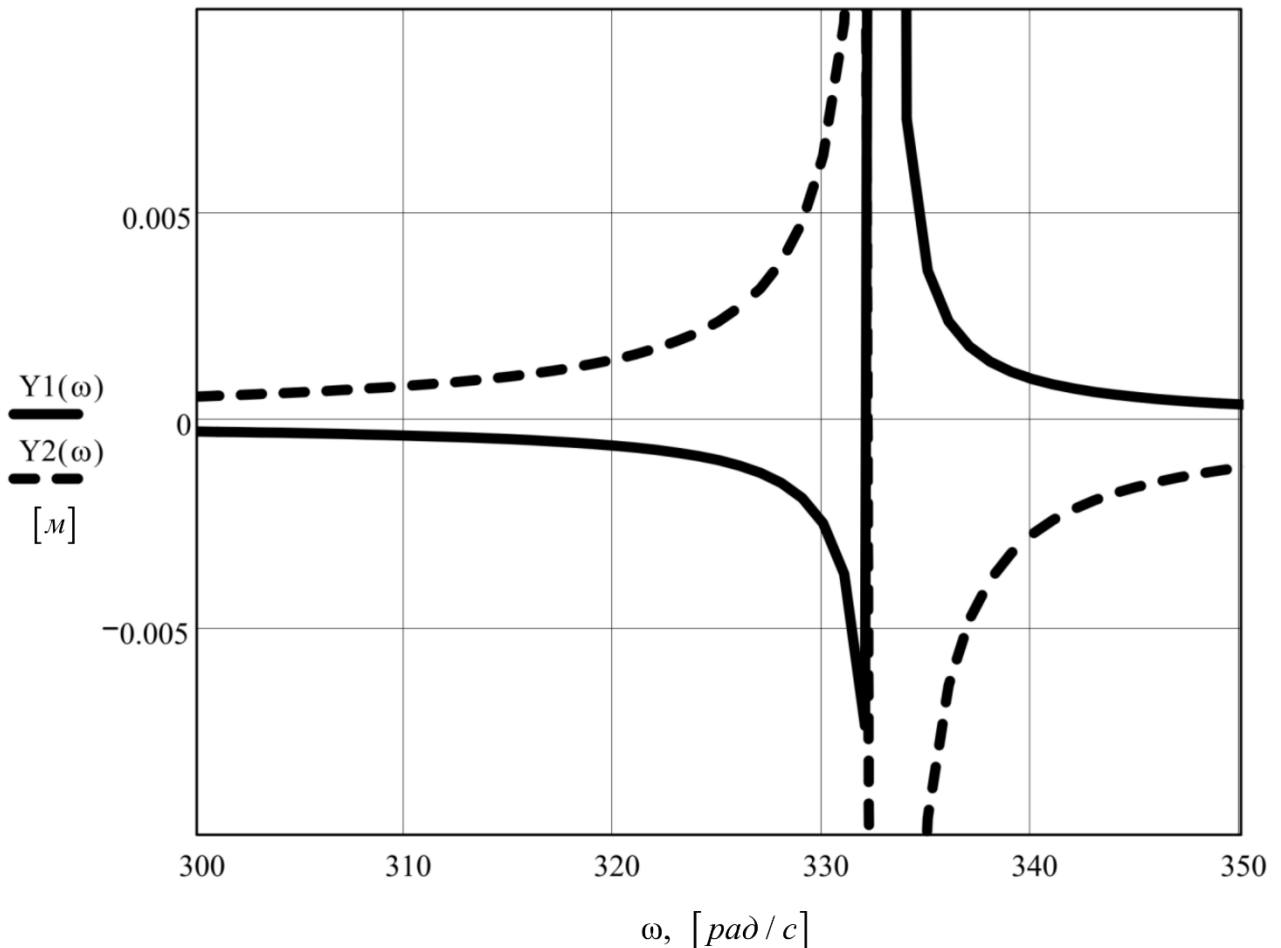
Хоча в двомасових МКС вібраційних машин із електромагнітним приводом можливо реалізувати резонансні режими роботи, що характерні значним зростанням амплітуди коливань, вони не здатні забезпечити таке ж динамічне підсилення, як еталонні тримасові міжрезонансні МКС із аналогічними характеристиками коливальних мас.

З рис. 2.4 можна помітити аналогічні до тримасової міжрезонансної МКС значення амплітуди коливань активної маси на частоті  $\Omega_f = 314 \text{ рад/с}$ .

З рівняння (2.33) стає очевидним факт, що для роботи двомасової МКС вібраційної машини із електромагнітним приводом необхідно набагато більше значення збурювальної сили електромагнітів. Додаткове динамічне підсилення коливань у розроблюваній МКС становитиме:

$$D = \frac{F_{02}}{F_{03}} = \frac{577,311H}{27,488H} \approx 21, \quad (2.34)$$

що узгоджується із закладеними закладеними при розрахунках параметрами.



**Рис. 2.4.** Амплітудно-частотна характеристика двомасової резонансної МКС

Отже, маючи задані дві власні частоти  $\Omega_{n1}$  та  $\Omega_{n2}$  еталонної МКС, та дві маси  $m_1$  та  $m_2$  було встановлено, що для забезпечення необхідної технологічної продуктивності тримасовою системою із додатковим динамічним підсиленням коливань  $D = 21$  порівняно з двомасовою МКС, реактивна маса розглянутої тримасової МКС повинна складати  $m_3 = 0,36 \text{ кг}$ . Значення жорсткостей резонансних пружних вузлів  $c_{12}$  і  $c_{23}$  даної вібромашини набувають значень відповідно:  $c_{12} = 3,455 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$  та  $c_{23} = 3,517 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ . Встановлені вище

параметри є важливими при створенні дискретно-континуальної МКС для її ефективного функціонування.

На відміну від активної  $m_1$  та проміжної  $m_2$  мас та жорсткості  $c_{12}$ , які повністю переносяться у дискретно-континуальну систему, для формування інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки необхідно поєднати дискретну жорсткість пружного вузла  $c_{23}$  та дискретний інерційний параметр реактивної маси  $m_3$ . Для цього встановимо параметр, що би пов'язував їх між собою.

Очевидно, що найдоцільніше вибрати в якості такого параметра парціальну частоту  $\omega_p$  реактивної маси. Її встановимо, використовуючи вираз:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} = \sqrt{\frac{3,517 \cdot 10^4}{0,36}} = 312,545 \text{ рад/с}. \quad (2.35)$$

Значення парціальної частоти  $\omega_n$  реактивної маси в континуальній ділянці фізично набуде змісту першої власної частоти коливань тіла з розподіленими параметрами, яким в даному випадку є пластина. Як видно з виразу (2.35), знайдене значення парціальної частоти реактивної маси  $\omega_p = 312,545 \text{ рад/с}$ , що є вихідним параметром для розрахунку континуальної ділянки, чому і буде присвячена частина наступного розділу.

### 2.3. Висновки до другого розділу

1. Сформована еталонна модель МКС, параметри якої взяті як визначальні для формування дискретно-континуальної системи і повинні бути реалізовані в ній. За циклічної частоти вимушених коливань МКС  $50 \text{ Гц}$  встановлено інерційне значення реактивної маси ( $m_3 = 0,36 \text{ кг}$ ) та жорсткості ( $c_{23} = 3,517 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ). Для цього в методику розрахунку було конструктивно закладено інерційні параметри активної ( $m_1 = 118 \text{ кг}$ ) та проміжної коливальних мас ( $m_2 = 45 \text{ кг}$ ), а також розташування власних резонансних піків ( $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад/с}$ ,

$\Omega_{n2} = 333 \text{ рад/с}$ ). Для даної тримасової МКС закладено додаткове динамічне підсилення коливань  $D = 21$  в порівнянні з класичною двомасовою системою.

2. Для забезпечення отриманих інерційних та жорсткісних параметрів еталонної дискретної МКС встановлено, що у дискретно-континуальній системі парціальна частота коливань реактивної маси (континуальної ділянки) повинна становити  $\omega_p = 312,545 \text{ рад/с}$ .



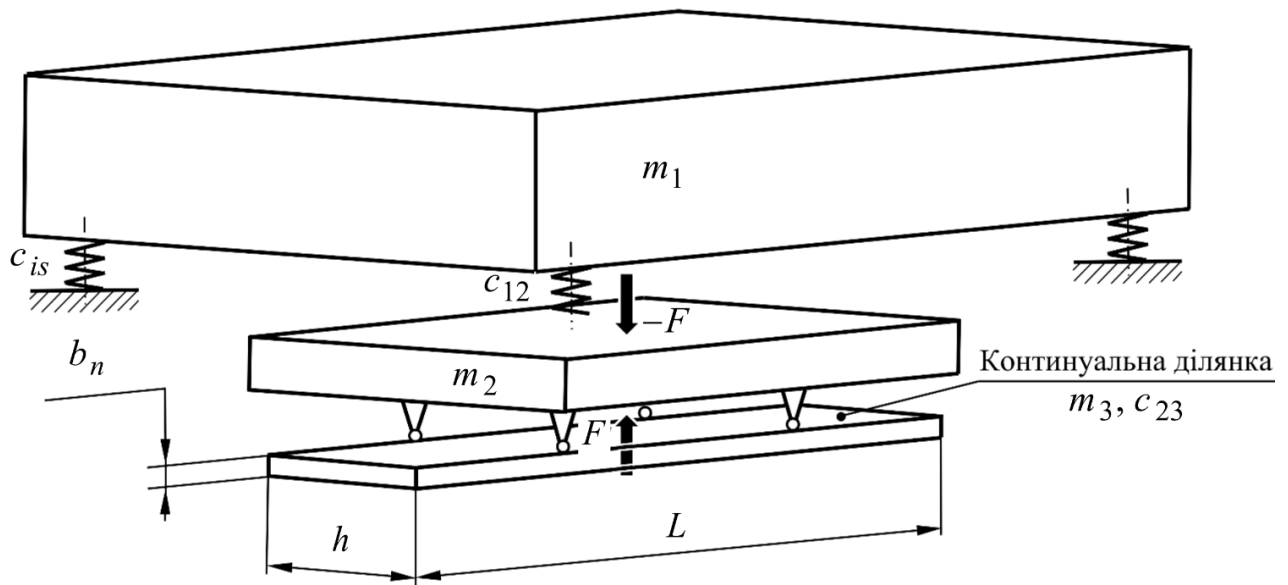
## РОЗДІЛ 3

### РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ КОНТИНУАЛЬНОЇ ДІЛЯНКИ ТА ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МІЖРЕЗОНАНСНОЇ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ МКС ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ

*В результаті аналізу існуючих наближених методів розрахунку власних частот коливань систем із нескінченним числом ступеней вільності, розроблено методика встановлення власної частоти континуальної ділянки дискретно-континуальної МКС з електромагнітним приводом. Базуючись на запропонованих методиках розраховано значення власної частоти коливань континуальної ділянки. Співставлено значення власних частот коливань системи при різних методиках розрахунку. Розроблено модель дискретно-континуальної МКС, міжрезонансна зона якої збігається з еталонною моделлю. Отримано результати, які свідчать про те, що запропоновані математичні моделі розрахунку параметрів континуальної ділянки та математична модель дискретно-континуальної МКС дають можливість спроектувати високо-ефективне вібраційне технологічне обладнання. Підтверджено полічастотність дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом.*

#### **3.1. Структура дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини**

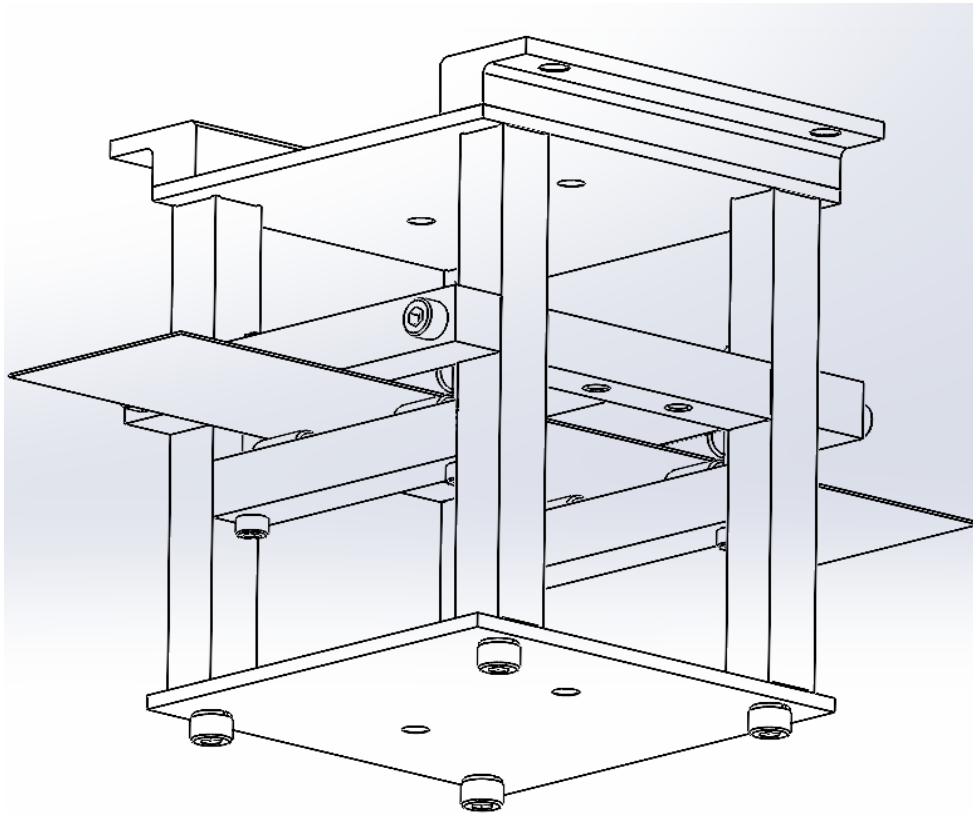
Згідно запропонованої в пункті 1.3 концепції високоефективної міжрезонансної вібраційної машини, розроблено принципову схему дискретно-континуальної МКС [58], що показана на рис. 2.1.



**Рис. 3.1.** Розрахункова схема дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом, на якій показано габаритні та кріпильні розміри континуальної ділянки у вигляді пластини, де:  $F$  – сила збурення електромагніту;  $L$ ,  $h$ ,  $b_n$  – геометричні розміри пластини

Дана МКС складається з активної  $m_1$ , проміжної  $m_2$  та реактивної  $m_3$  мас. Активна та проміжна маси є дискретними (вважаємо їх абсолютно твердими тілами), а реактивна маса є континуальною (вважаємо її тілом з розподіленими параметрами). Ці коливальні маси послідовно з'єднані між собою за допомогою пружних вузлів  $c_{12}$  та  $c_{23}$ . Активна маса за допомогою віброізоляторів  $c_{is}$  кріпиться до фундаменту. Варто зауважити, що реактивна маса, як тіло з розподіленими параметрами, поєднує у собі інерційні і жорсткісні параметри ( $m_3, c_{23}$ ). Ці параметри проявляються лише в динамічних процесах як абстрактні зведені величини. В якості континуальної ділянки використано пластину, що і показано на рис. 3.1.

Одним з об'єктів досліджень даного розділу власне і є континуальна ділянка (пластина) зі складними граничними умовами кріплення. Розроблено конструктивне рішення кріплення континуальної ділянки (пластини), що відображене на рис. 3.2.



*Рис. 3.2. Вікно програмного продукту SolidWorks, де зображено конструктивне виконання кріплення пластини*

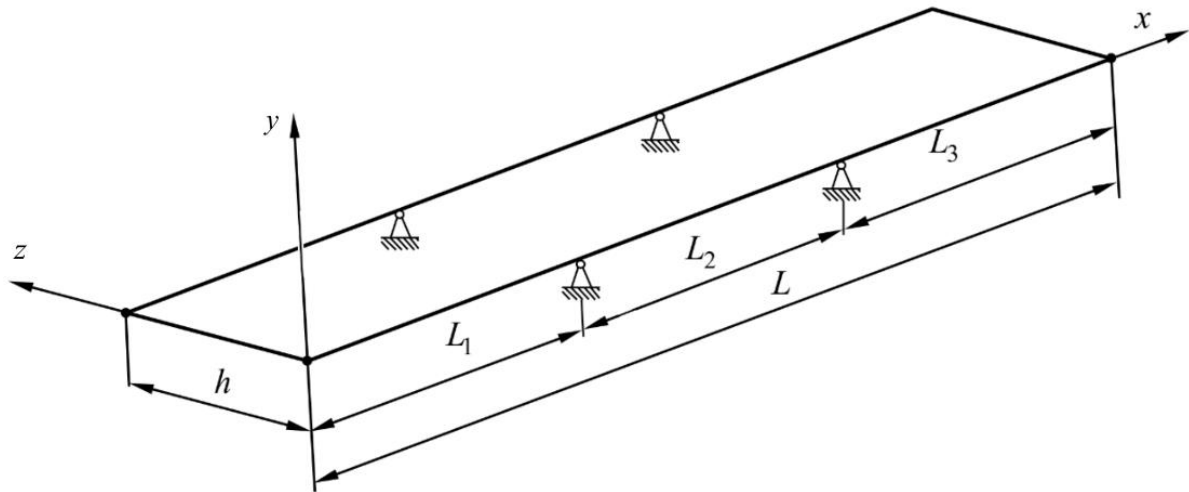
Виходячи з умов та конструкції кріплення пластини, розрахункова схема кріплення пружної пластини набуде вигляду, як на рис. 3.3. В якості матеріалу пластини вибираємо конструкційну сталь [64]. Даний матеріал є феромагнетиком і має відносно невелику вартість.

Згідно результатів розрахунку другого розділу власна циклічна (парціальна) частота коливань пластини повинна становити [13, 15, 46]

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3,517 \cdot 10^4}{0,36}} = 49,743 \text{ Гц.} \quad (3.1)$$

Власна частота коливань пластини є важливим параметром під час синтезу дискретно-континуальної системи, адже саме правильний підбір власної частоти [61, 78, 103, 106, 108] реактивної маси дозволяє отримати високоефективний

робочий режим дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного обладнання.



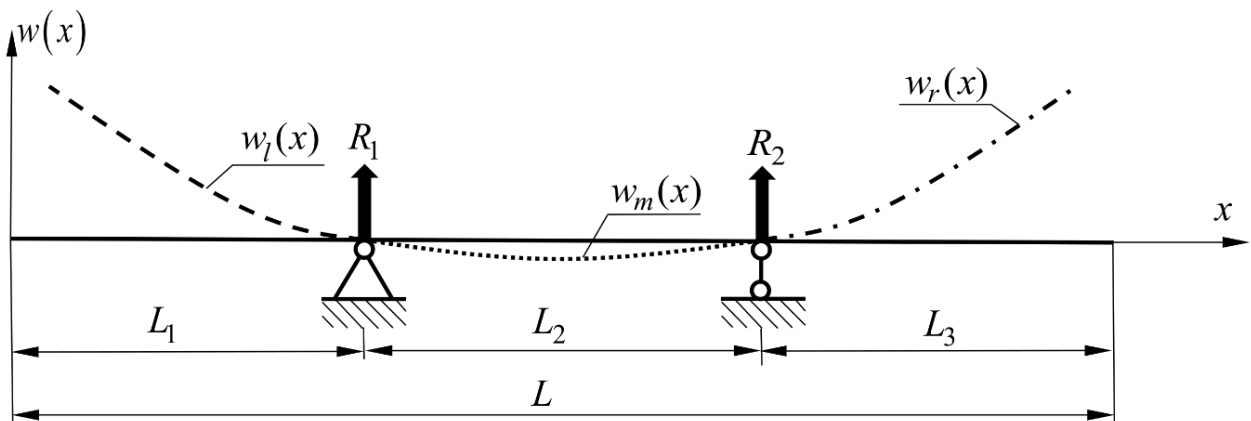
*Рис. 3.3. Розрахункова схема кріплення пластини, де:  $L_1, L_3$  – відстані від початку відліку лівого та правого кінців до відповідних опор;  $L_2$  – відстань між опорами*

Як видно з рис. 3.3, тип кріплення пружної пластини не дозволяє отримати точний розв'язок за допомогою відомих методів розрахунку [9]. Тому одним із завдань даного розділу є встановлення першої власної частоти коливань пластини за даного типу кріплення з використанням наближених методів розрахунку [155, 165].

### **3.2. Розрахунок власної частоти пластини з використанням функцій Крилова**

Даний метод дозволяє розраховувати власні частоти коливань пластини, як тіла з розподіленими параметрами, з припущенням, що це стержень (коливання здійснюються по одній координаті (в одній площині)).

В нашому випадку, в якості тіла виступає пластина. Проте, вважаючи, що довжина пластини є значно більшою за її поперечні габарити (за ширину, коли  $L \gg h$ , та товщину, коли  $L \gg b_n$ ) – пластину можна розглянути як стержень, який виконує лише згинальні коливання в площині. Для опису даного стержня скористаємося класичною теорією коливань прямих пружних стержнів [153]. Запропонована конструктивна схема кріплення стержня зображена на рис. 3.4.



**Рис. 2.4.** Розрахункова схема стержня із розподіленими параметрами, де:  $w_l, w_m, w_r$  – прогини відповідно лівої, середньої та правої ділянок стержня;  $L_1, L_3$  – відстані від початку відліку лівого та правого кінців відповідно до лівої та правої опор;  $L_2$  – відстань між опорами;  $L$  – довжина стержня;  $R_1, R_2$  – реакції в опорах

Шарнірне кріплення стержня дозволяє отримати консоль із значною інертністю. Припускається, що в такому випадку умовно виділена маса та жорсткість на частоті вимушених коливань сприйматиметься двомасовою МКС як третя незалежна маса і дискретно-континуальна МКС буде міжрезонансною.

Для встановлення власної частоти коливань континуальної системи необхідно розглянути стержень, поділений на декілька ділянок (у даному випадку – три). Ділянки стержня пов'язуються між собою через реакції в опорах. Позначимо відношення відстаней ділянок до загальної довжини стержня [134]:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{L_3}{L} = \beta; \quad (3.2)$$

$$\frac{L_2}{L} = \gamma. \quad (3.3)$$

Рівняння прогинів лівої та правої ділянок стержня пов'язані між собою залежністю [75]:

$$w_r = w_l + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x), \quad (3.4)$$

$$\text{де } V_2(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(1-\beta)) - \sin(\xi(1-\beta)));$$

$$V_3(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi(1-\beta-\gamma)) - \sin(\xi(1-\beta-\gamma))) - \text{функції Крилова.}$$

Коефіцієнт  $\xi$  знаходиться з виразу:

$$\xi = 4 \sqrt{\frac{m_{rm} \omega^2}{EJ_z}}, \quad (3.5)$$

де  $m_{rm}$  – маса погонного метру стержня;  $\omega$  – колова частота коливань стержня;  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль пружності першого роду для сталей;  $J_z$  – момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії перерізу.

За початок відліку візьмемо лівий кінець, що перебуває у вільному стані. Згідно [153], початкові умови на цьому кінці, де згинальний момент і поперечна сила рівні нулю, відповідно становлять:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M = 0; \quad (3.6)$$

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = P_{cr} = 0. \quad (3.7)$$

Тоді загальне рівняння прогину на лівій ділянці стержня ( $0 \leq x \leq L_1$ ), використовуючи початкові умови (2.6) та (2.7), набуде вигляду:

$$w_l(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x), \quad (3.8)$$

де  $A, B$  – постійні в рівняннях прогинів;

$$S(\xi x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\xi x) + \cos(\xi x));$$

$$T(\xi x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\xi x) + \sin(\xi x)) - \text{функції Крилова.}$$

На середній ділянці стержня ( $L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$ ) рівняння прогинів запишеться як:

$$w_m(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x). \quad (3.9)$$

На правій ділянці стержня ( $L_1 + L_2 \leq x \leq L$ ) матимемо наступне рівняння прогинів:

$$w_r(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x). \quad (3.10)$$

Рівняння (3.8), (3.9) та (3.10) записано у загальному вигляді. Для встановлення першої власної частоти стержня, необхідно знайти його частотне рівняння. Для цього потрібно сформулювати систему рівнянь, що задовольнить крайові умови та умови в реакціях опор. З цією метою розглянемо правий кінець стержня, який є вільним (рис. 3.3). Початкові умови його кріплення є аналогічними умовам (3.6) – (3.7).

Перше рівняння сформуємо з умови (3.7). Користаючись рівнянням (3.10), коли  $x = L$ , матимемо:

$$w_r''(x) = A\xi^2 \cdot U_1(\xi x) + B\xi^2 \cdot V_1(\xi x) + \frac{R_1\xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T_2(\xi x) + \frac{R_2\xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T_3(\xi x), \quad (3.11)$$

$$\text{де } U_1(\xi x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\xi L) - \cos(\xi L));$$

$$V_1(\xi x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\xi L) - \sin(\xi L));$$

$$T_2(\xi x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\xi L(1-\beta)) + \sin(\xi L(1-\beta)));$$

$T_3(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L(1-\beta-\gamma)) + \sin(\xi L(1-\beta-\gamma)))$  – функції Кривола.

Друге необхідне рівняння формуємо згідно умови (3.7). Застосовуючи рівняння (3.10), коли  $x = L$ , вираз набуде вигляду:

$$w_r'''(x) = A\xi^3 \cdot T_1(\xi x) + B\xi^3 \cdot U_1(\xi x) + \frac{R_1\xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S_2(\xi x) + \frac{R_2\xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S_3(\xi x), \quad (3.12)$$

де  $T_1(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L) + \sin(\xi L))$ ;

$$S_2(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L(1-\beta)) + \cos(\xi L(1-\beta)));$$

$S_3(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L(1-\beta-\gamma)) + \cos(\xi L(1-\beta-\gamma)))$  – функції Кривола.

Зважаючи, що в нас чотири невідомих: постійні  $A$ ,  $B$  та реакції на опорах  $R_1$  й  $R_2$ , нам потрібні ще два рівняння крім (3.11) та (3.12). Використаємо рівняння (3.8) для лівого кінця стержня. За умови, коли  $x = L_1$ , де прогин в першій опорі дорівнює нулю, рівняння матиме вигляд:

$$w_l(\xi x) = A \cdot S_4(\xi x) + B \cdot T_4(\xi x) = 0, \quad (3.13)$$

де  $S_4(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L \cdot \beta) + \cos(\xi L \cdot \beta))$ ;

$T_4(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L \cdot \beta) + \sin(\xi L \cdot \beta))$  – функції Кривола

Використаємо рівняння (3.9) для правого кінця стержня. Отже для  $x = L_1 + L_2$ , де прогин в другій опорі дорівнює нулю, справедлива рівність:

$$w_m(\xi x) = A \cdot S_5(\xi x) + B \cdot T_5(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V_5(\xi x) = 0, \quad (3.14)$$

де  $S_5(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L(\beta + \gamma)) + \cos(\xi L(\beta + \gamma)))$ ;

$T_5(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L(\beta + \gamma)) + \sin(\xi L(\beta + \gamma)))$ ;

$V_5(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L \cdot \gamma) - \sin(\xi L \cdot \gamma))$  – функції Кривола.



Згідно виразів (3.11), (3.12), (3.13) та (3.14) отримуємо систему чотирьох рівнянь вільних коливань стержня:

$$\begin{cases} A \cdot U_1(\xi x) + B \cdot V_1(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot T_2(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot T_3(\xi x) = 0; \\ A \cdot T_1(\xi x) + B \cdot U_1(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot S_2(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot S_3(\xi x) = 0; \\ A \cdot S_4(\xi x) + B \cdot T_4(\xi x) = 0; \\ A \cdot S_5(\xi x) + B \cdot T_5(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V_5(\xi x) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

З системи рівнянь (2.15) складемо частотну матрицю:

$$\Delta(\xi x) = \begin{vmatrix} U_1(\xi x) & V_1(\xi x) & T_2(\xi x) & T_3(\xi x) \\ T_1(\xi x) & U_1(\xi x) & S_2(\xi x) & S_3(\xi x) \\ S_4(\xi x) & T_4(\xi x) & 0 & 0 \\ S_5(\xi x) & T_5(\xi x) & V_5(\xi x) & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Визначник частотної матриці (2.16) розпишеться як:

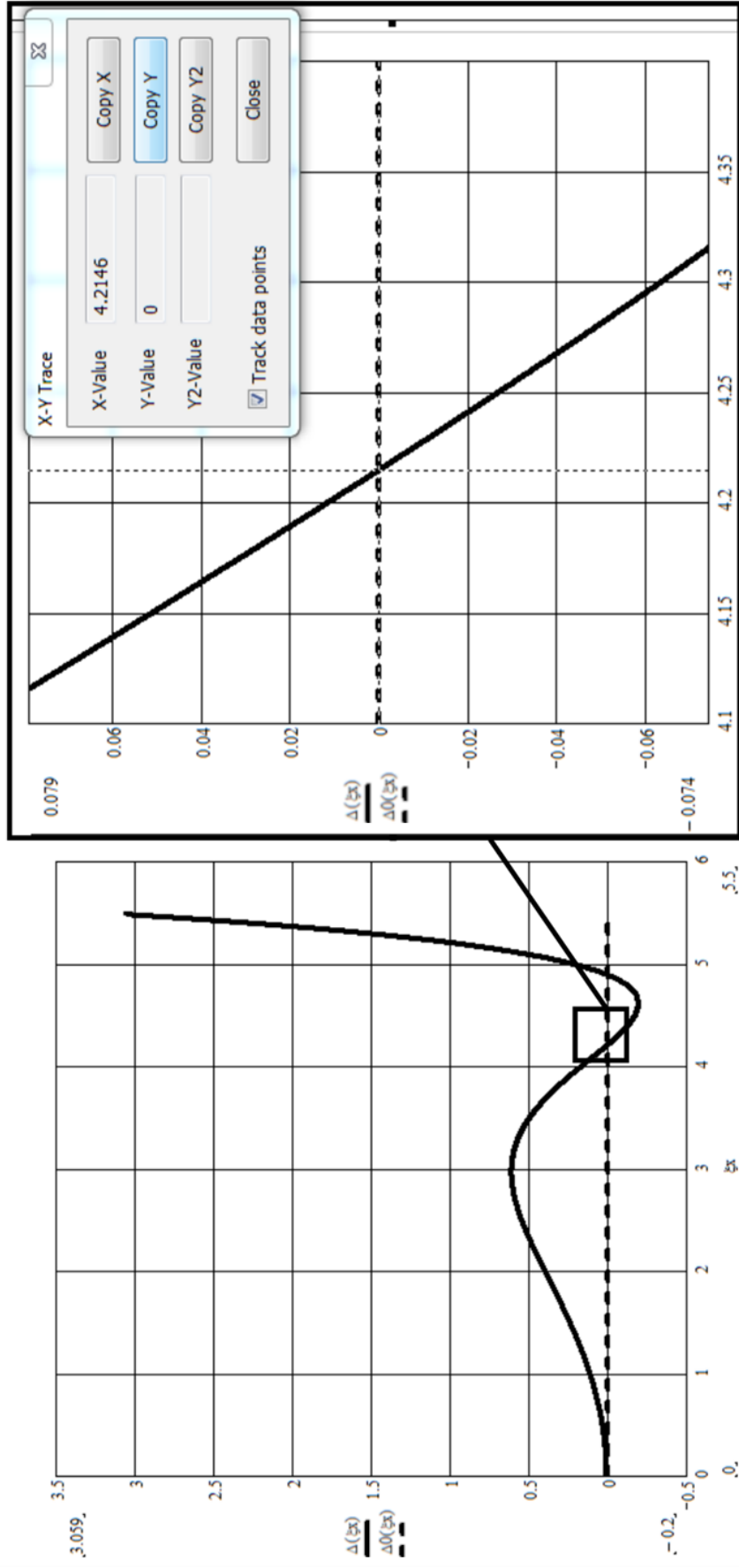
$$\begin{aligned} \Delta(\xi x) = & U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot V_5(\xi x) - T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \times \\ & \times V_5(\xi x) - S_4(\xi x) \cdot V_1(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot V_5(\xi x) + S_4(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \times \\ & \times T_3(\xi x) \cdot V_5(\xi x) + S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_3(\xi x) - \\ & - S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot S_2(\xi x) - S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \times \\ & \times T_2(\xi x) \cdot S_3(\xi x) + S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot S_2(\xi x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Перейдемо до встановлення циклічної частоти власних коливань стержня. Спочатку графічно встановимо (рис. 3.5) визначник  $\Delta(\xi x)$  (вираз (3.17)) частотної матриці (3.16) на проміжку  $\Delta(\xi x) \in [0 \dots 6]$ , де якраз і спостерігається перший корінь. Використовуючи значення довжин ділянок стержня:  $L = 0,54 \text{ м}$ ,  $L_1 = 0,182 \text{ м}$ ,  $L_2 = 0,176 \text{ м}$ ,  $L_3 = 0,182 \text{ м}$ , визначник є рівним 4,2146 (рис. 3.5).

Маса погонного метра стержня:

$$m_{rm} = \rho h b_n = 1,261 \text{ кг / м}, \quad (3.18)$$

де  $\rho = 7850 \text{ кг / м}^3$  – питома маса для сталі;  $b_n = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  – товщина пружного стержня;  $h = 0,0875 \text{ м}$  – ширина пружного стержня.



**Рис. 3.5.** Вікно програмного продукту MathCAD, де показано графічне рішення визначника частотної матриці

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії перерізу

$$J_z = \frac{hb_n^3}{12} = 2,866 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4. \quad (3.19)$$

Тож колова частота власних коливань стержня становить

$$\omega_{nK} = (\xi x)^2 \sqrt{\frac{EJ_z}{m_{rm} L^4}} = 309,235 \text{ рад / с}, \quad (3.20)$$

а циклічна частота власних коливань буде

$$\nu_{nK} = \frac{\omega_{nK}}{2\pi} = 49,216 \text{ Гц}. \quad (3.21)$$

Отримане значення першої власної частоти  $\omega_{nK} = 309,235 \text{ рад / с}$  за допомогою функцій Крилова знаходиться в околі вимушеної частоти коливань системи  $\omega_f = 314 \text{ рад / с}$  та є близьким до розрахункової парціальної частоти коливань  $\omega_p = 312,545 \text{ рад / с}$  (див. вираз (2.35)), що дозволяє МКС працювати у міжрезонансній зоні.

### **3.3. Розрахунок власної частоти пластини за допомогою методу скінченних елементів в програмному продукті ANSYS Workbench**

На сучасному етапі розвитку промисловості та методів проектування, твердотіле моделювання стає все більш значущим. Розробка твердотілої моделі машини у сучасних CAD/CAE програмних продуктах дозволяє проводити віртуальні експерименти над вібрмашиною та отримувати результати, максимально наближені до реальних [14, 94, 113]. Крім того, даний підхід дозволяє опосередковано підтвердити достовірність описаної в п. 3.2 методики розрахунку власної частоти пластини дискретно-континуальної міжрезонансної МКС.

Основною метою даного віртуального експерименту є перевірка значення власної частоти пластини із встановленими наперед параметрами, а саме, геомет-

ричними розмірами та матеріалом, як підтвердження правильності описаної в попередньому підрозділі методики розрахунку пластини. Адже, саме встановлення параметра власної частоти пластини, як континуальної ділянки вібраційної машини, дозволяє спроектувати високоефективну міжрезонансну МКС.

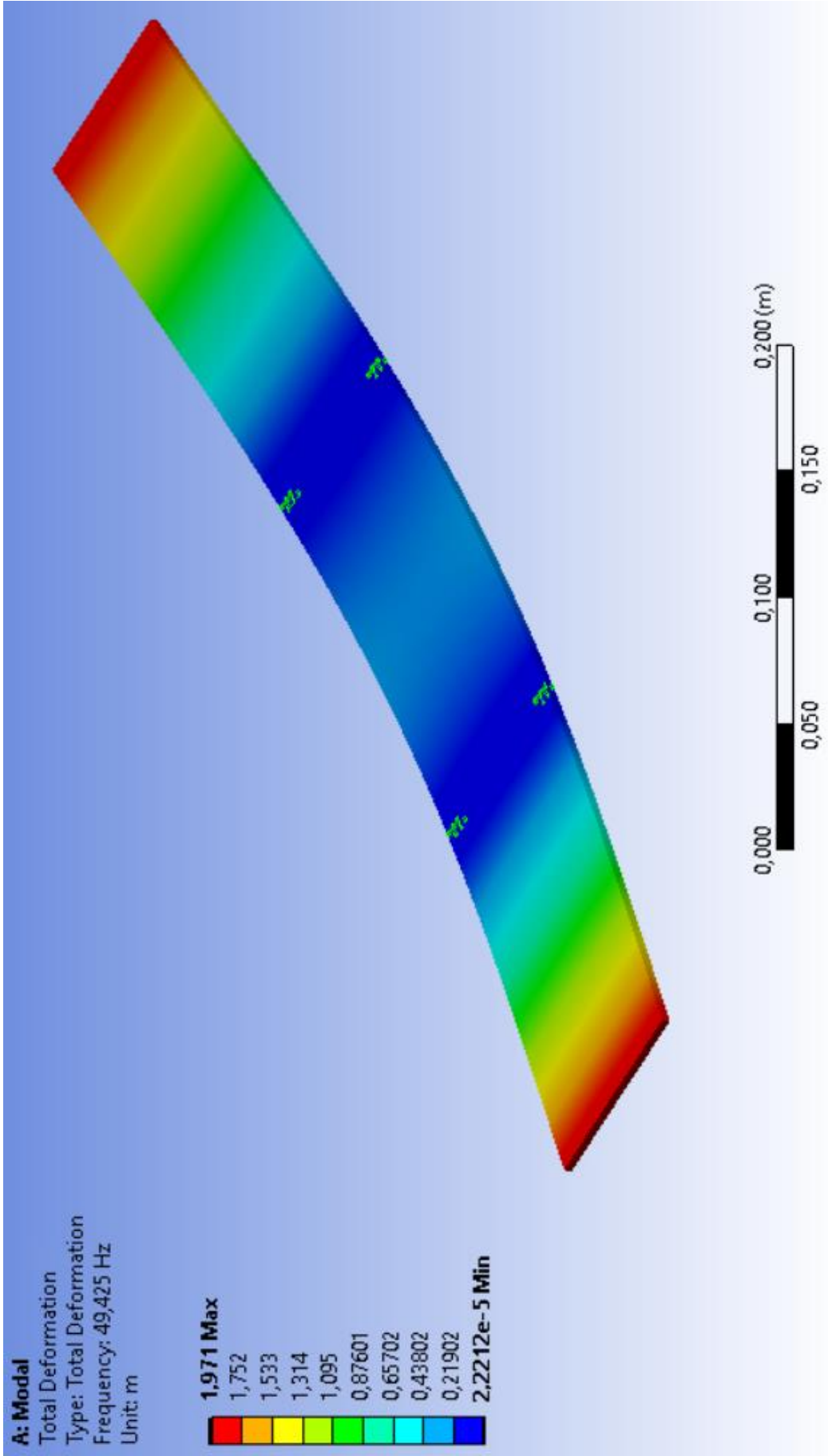
Тому, даний пункт зосереджений на чисельних методах розрахунку, засобами програмного модуля Modal, який працює в оболонці продукту Ansys Workbench, та спрямований на підтвердженні результатів чисельних розрахунків, наведених вище. Тим самим можна буде опосередковано підтвердити адекватність як самої методики розрахунку, так і закладених в неї параметрів системи.

Модель пластини із відомими параметрами, такими, як геометричні розміри, матеріал та тип кріплення, була занесена у вигляді тривимірної моделі (рис. 3.3) в програмний продукт Ansys Workbench. Результат моделювання ідентичної системи в програмному продукті Ansys Workbench відображений на рис. 3.5 та рис. 3.6. Як видно з рис. 3.5, перша власна частота коливань пластини при моделюванні МСЕ в програмному продукті Ansys Workbench становить  $\nu_{nF} = 49,425 \text{ Гц}$ .

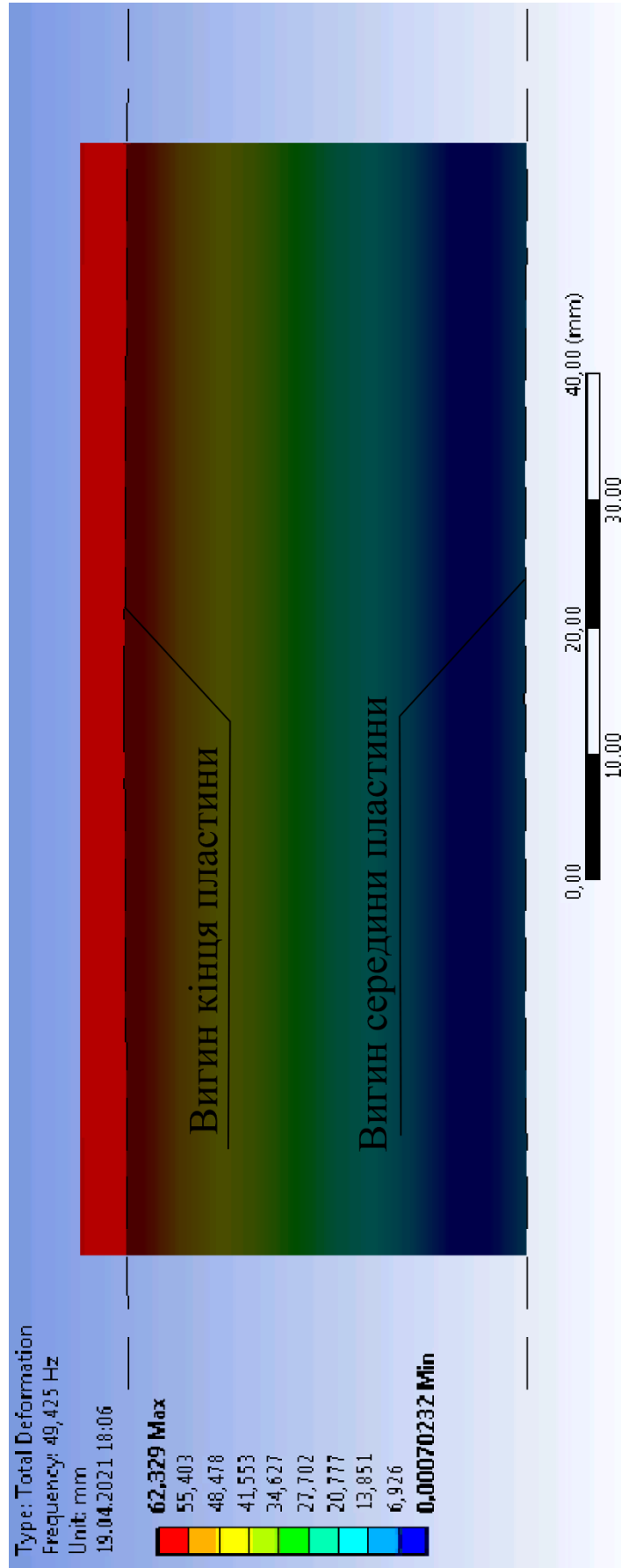
Встановимо колово частота власних коливань пластини, оперуючи циклічною частотою, яка була отримана в процесі імітаційного моделювання:

$$\omega_{nF} = \nu_{nF} 2\pi = 49,425 \cdot 2\pi = 310,546 \text{ рад} / \text{с}. \quad (3.22)$$

Отримана завдяки імітаційному моделюванню колово частота  $\omega_{nF} = 310,546 \text{ рад} / \text{с}$  є більшою від значення власної частоти пластини  $\omega_{nK} = 309,235 \text{ рад} / \text{с}$ , встановленої за допомогою функцій Крилова (вираз (3.20)), однак різниця є невеликою. Це свідчить, що континуальна ділянка у вигляді пластини адекватно узгоджена з дискретною моделлю (масою  $m_3$  та жорсткістю  $c_{23}$ ) і, відповідно, наділена її властивостями.



*Рис. 3.5. Перша власна частота коливань пластини в програмному продукті Ansys Workbench (вид в ізометрії)*



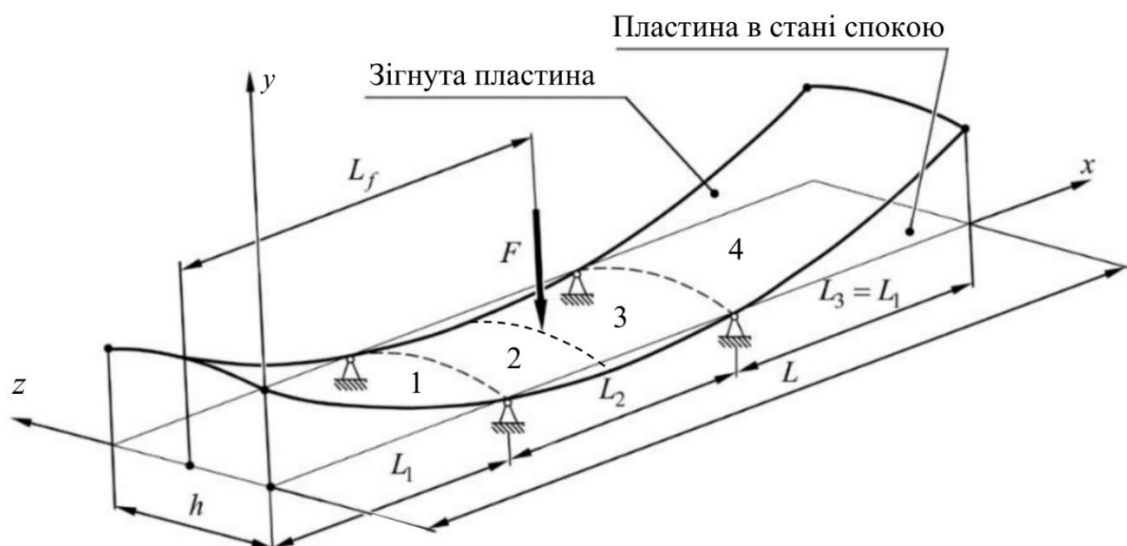
*Рис. 3.6. Перша власна частота коливань пластини в програмному продукті Ansys Workbench (від поперечного прогину)*

Як можна помітити на рис. 3.6, пластина прогинається за певною формою не тільки у повздовжньому напрямку, а і у поперечному. При цьому поверхня пластини при прогині утворює форму гіперболоїда.

### 3.4. Розрахунок власної частоти пластини методом Релея-Рітца з використанням гармонійних та балочних функцій

На відміну від описаного в п. 3.2 методу, в даному наближеному методі розрахунку власної частоти коливань континуальної ділянки пластина розглядається не як стержень, а власне як пластина, яка здійснює поперечні коливання по двох координатах. Базисна функція  $w$  представлена у вигляді добутку двох функцій, одна з яких описує коливання пластини тільки по осі  $Ox$ , друга – тільки по  $Oz$ . Ці функції по координатах описують власні форми коливань однорідних балок [142]. Вони повинні задовольняти крайові умови відповідно до способів закріплення пластини.

Розрахункова схема кріплення збудованої пластини силою  $F$  з відповідними прогинами по представлена на рис. 3.7.



*Рис. 3.7. Розрахункова схема кріплення збудованої пластини, де цифрами 1 – 4 позначено номери її ділянок*

Для встановлення власної частоти коливань континуальної ділянки, збуреної силою  $F$ , розглянемо пластину утворену з балок [135], що прогинаються у поперечному напрямку за двома координатами: вздовж осей  $0x$  та  $0z$ .

Розглянемо балку, що відображає прогин у поперечному напрямку вздовж осі  $0x$ . Називатимемо її поздовжньою. Схема закріплення даної балки, поділеної на чотири ділянки, показана на рис. 3.8. Сила  $F$  діє строго посередині балки, звідси можна вважати, що  $L_f = 0,5 L$ .

За початок відліку приймемо лівий кінець, який знаходиться у вільному стані. Аналогічно до підходу, наведеному у п. 3.2, залежності між прогинами всіх ділянок поздовжньої балки з використанням функцій Крилова становлять:

$$\begin{aligned} w_4(x) &= w_3(x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x) = w_2(x) + \frac{F}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_f(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x) = \\ &= w_1(x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_f(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x); \end{aligned} \quad (3.23)$$

де  $w_1(x) \dots w_4(x)$  – прогини відповідних ділянок балки;

$$V_f(\xi x) = \frac{1}{2} (sh(\xi L(1 - \beta - \kappa)) - \sin(\xi L(1 - \beta - \kappa))) - \text{функція Крилова.}$$

Початкові умови на вільному лівому кінці балки аналогічні умовам (3.6) – (3.7). Тому загальне рівняння прогину на першій ділянці тотожне рівнянню (3.8).

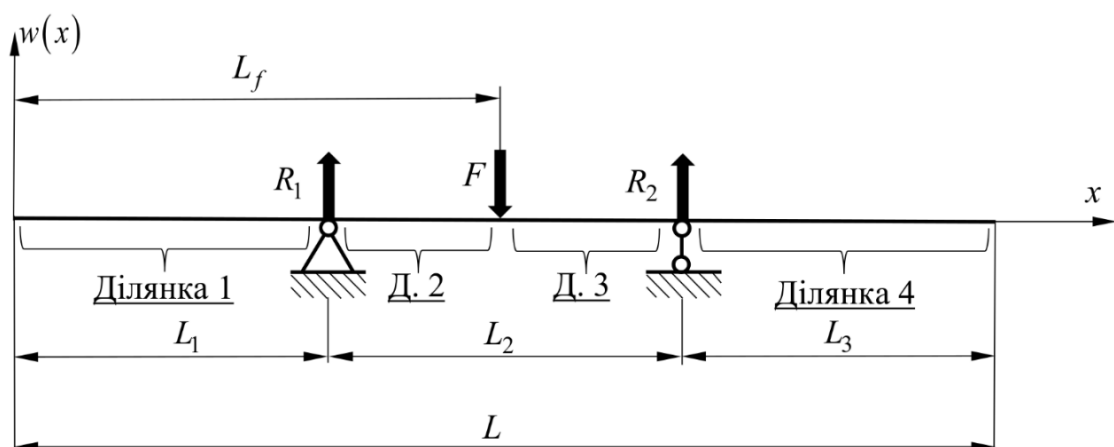


Рис. 3.8. Розрахункова схема поздовжньої балки, спрямованої вздовж осі  $0x$



На другій ділянці ( $L_1 \leq x \leq L_f$ ) загальне рівняння прогинів балки, використовуючи вираз (3.23), прийме наступний вигляд:

$$w_2(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x). \quad (3.24)$$

Рівняння прогинів на третій ділянці поздовжньої балки ( $L_f \leq x \leq L_1 + L_2$ ), враховуючи вирази (3.23) та (3.24), набуде вигляду:

$$w_3(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_f(\xi x). \quad (3.25)$$

Для четвертої ділянки балки ( $L_1 + L_2 \leq x \leq L$ ), рівняння прогинів має вигляд:

$$w_4(x) = A \cdot S(\xi x) + B \cdot T(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_2(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_f(\xi x) + \frac{R_2}{\xi^3 EJ_z} \cdot V_3(\xi x). \quad (3.26)$$

Правий кінець балки, як видно з рис. 3.8, також вільний, тож початкові умови його кріплення будуть аналогічними рівнянням (3.6) – (3.7).

Перше рівняння системи рівнянь вимушених коливань поздовжньої балки сформуємо з умови (3.6), використовуючи рівняння (3.26), коли  $x = L$ , тож:

$$w_4''(L) = A \xi^2 \cdot U_1(\xi x) + B \xi^2 \cdot V_1(\xi x) + \frac{R_1 \xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T_2(\xi x) + \frac{R_2 \xi^2}{\xi^3 EJ_z} \cdot T_3(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 EJ_z} \cdot T_f(\xi x), \quad (3.27)$$

де  $T_f(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{sh}(\xi L(1 - \kappa)) + \sin(\xi L(1 - \kappa)))$  – функція Крилова.

Друге рівняння, що є третьою похідною виразу прогинів четвертої ділянки поздовжньої балки, формуємо згідно умови (3.7), застосовуючи рівняння (3.26) при  $x = L$ . Тоді вираз набуде вигляду:

$$w_4'''(L) = A\xi^3 \cdot T_1(\xi x) + B\xi^3 \cdot U_1(\xi x) + \frac{R_1 \xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S_2(\xi x) + \frac{R_2 \xi^3}{\xi^3 E J_z} \cdot S_3(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 E J_z} \cdot S_f(\xi x), \quad (3.28)$$

де  $S_f(\xi x) = \frac{1}{2}(\text{ch}(\xi L(1-\kappa)) + \cos(\xi L(1-\kappa)))$  – функція Кривола.

При наявності чотирьох невідомих: постійних  $A$ ,  $B$  і реакцій в опорах  $R_1$  та  $R_2$ , нам необхідно ще два рівняння крім (3.27) і (3.28). Використовуючи рівняння (3.8) для лівого кінця, за умови, що прогин в опорі  $R_1$  дорівнює нулю (рис. 3.7), матимемо:

$$A \cdot S_4(\xi x) + B \cdot T_4(\xi x) = 0. \quad (3.29)$$

Використовуючи рівняння (3.25) для третьої ділянки поздовжньої балки, де прогин опори  $R_2$  також дорівнює нулю (рис. 3.7), отримаємо рівняння:

$$A \cdot S_5(\xi x) + B \cdot T_5(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V_5(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 E J_z} \cdot V_f(\xi x) = 0. \quad (3.30)$$

Згідно виразів (3.27), (3.28), (3.29) та (3.30), отримано систему з чотирьох рівнянь вимушених коливань поздовжньої балки:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot U_1(\xi x) + B \cdot V_1(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot T_2(\xi x) + \\ + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot T_3(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 E J_z} \cdot T_f(\xi x) = 0; \\ A \cdot T_1(\xi x) + B \cdot U_1(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot S_2(\xi x) + \\ + \frac{R_2}{\xi^3 E J_z} \cdot S_3(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 E J_z} \cdot S_f(\xi x) = 0; \\ A \cdot S_4(\xi x) + B \cdot T_4(\xi x) = 0; \\ A \cdot S_5(\xi x) + B \cdot T_5(\xi x) + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \cdot V_5(\xi x) + \frac{F}{\xi^3 E J_z} \cdot V_f(\xi x) = 0. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Маючи систему з чотирьох рівнянь, аналітичним методом знаходимо всі чотири невідомих. Отже:

$$\begin{aligned}
A = & (-F \cdot T_4(\xi x)) \left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot T_f(\xi x) \cdot V_5(\xi x) - \\ -S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot V_f(\xi x) + S_f(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \end{array} \right) / \\
& / \left( \begin{array}{l} (\xi^3 \cdot E \cdot J_z) \left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \times \\ \times S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) + \\ + S_3(\xi x) \cdot V_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) - S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \times \\ \times S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) + \\ + T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - \\ - U_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \end{array} \right) \end{array} \right); \quad (3.32) \\
B = & \frac{(F \cdot S_4(\xi x)) \left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot T_f(\xi x) \cdot V_5(\xi x) - \\ -S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot V_f(\xi x) + S_f(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} (\xi^3 \cdot E \cdot J_z) \left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - \\ -S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) - \\ -S_3(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) + \\ + S_3(\xi x) \cdot V_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) - \\ -S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + \\ + S_2(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_5(\xi x) + \\ + T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - \\ - U_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \end{array} \right) \end{array} \right); \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$R_1 = (-F) \left( \begin{array}{l} S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot T_f(\xi x) - \\ -S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot S_f(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - \\ -T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot T_f(\xi x) + \\ + T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot S_f(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - \\ -V_f(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + \\ + V_f(\xi x) \cdot S_3(\xi x) \cdot V_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) + \\ + V_f(\xi x) \cdot T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - \\ -V_f(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \end{array} \right) /$$

$$\left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) - \\ - S_3(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + S_3(\xi x) \cdot V_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) - \\ - S_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) + S_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) + \\ + T_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - U_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \end{array} \right); \quad (3.34)$$

$$R_2 = \frac{F \left( \begin{array}{l} -T_2(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot S_f(\xi x) \cdot S_5(\xi x) + \\ + T_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot S_f(\xi x) + \\ + T_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) \cdot T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - \\ - T_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) - \\ - U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot S_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) + \\ + U_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_f(\xi x) + \\ + V_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot S_2(\xi x) \cdot V_f(\xi x) - \\ - V_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_f(\xi x) + \\ + T_f(\xi x) \cdot S_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - \\ - T_f(\xi x) \cdot S_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) - \\ - T_f(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_1(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + \\ + T_f(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot T_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \times \\ \times S_4(\xi x) - S_3(\xi x) \cdot U_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) + S_3(\xi x) \times \\ \times V_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) - S_2(\xi x) \cdot S_5(\xi x) \cdot T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) + \\ + S_2(\xi x) \cdot T_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) + T_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \times \\ \times T_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) - U_1(\xi x) \cdot V_5(\xi x) \cdot S_4(\xi x) \cdot T_3(\xi x) \end{array} \right)}; \quad (3.35)$$

Знайдені коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  необхідні в подальшому розрахунку кінетичної та потенціальної енергій пластини та для встановлення динамічних характеристик дискретно-континуальної міжрезонансної МКС.

Також необхідно описати прогини балки за допомогою функцій. Для цього на першій ділянці вводимо змінну  $x_1$ , так що  $0 < x_1 < L_1$  (рис. 3.8). Підставивши встановлене значення  $L_1 = 0,182$ , визначимо діапазон змінної на цій ділянці

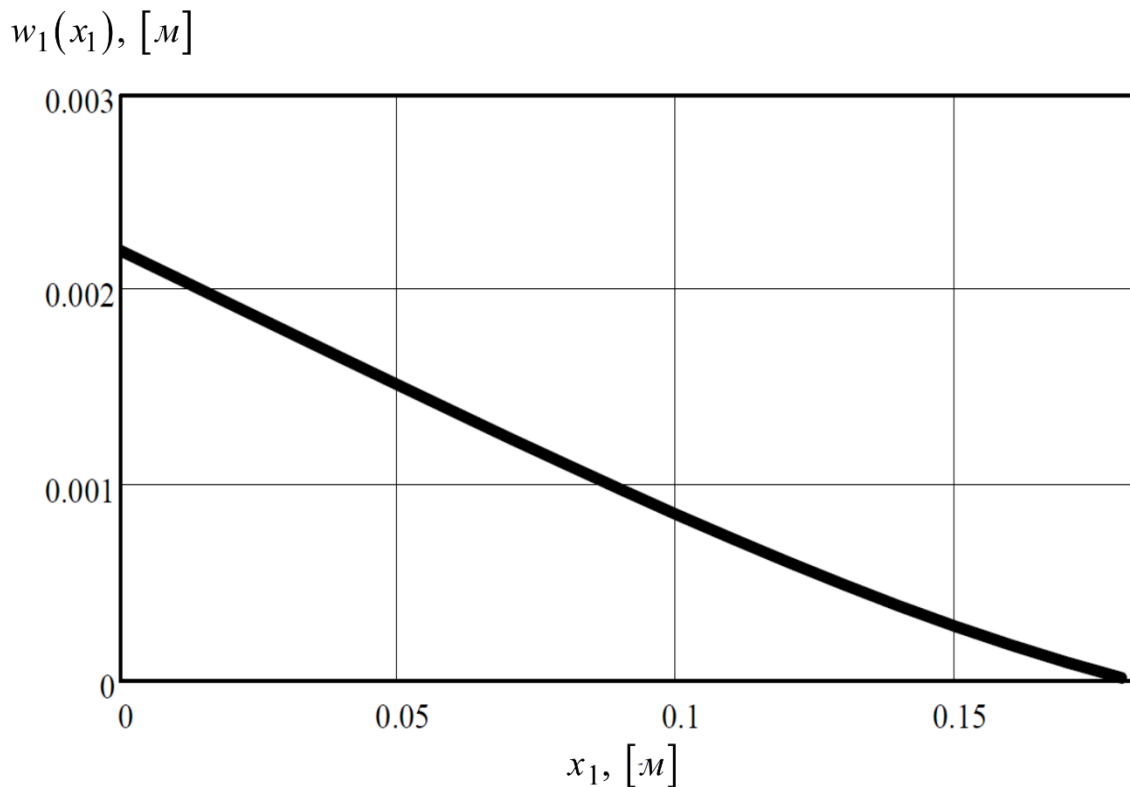
$0 < x_1 < 0,182$ . Тож функція, що описуватиме прогин балки на першій ділянці, використовуючи рівняння (3.8), матиме вигляд:

$$w_1(x_1) = A \cdot S_S(x_1) + B \cdot T_T(x_1), \quad (3.36)$$

де  $S_S(x_1) = \frac{1}{2}(ch(\xi \cdot x_1) + \cos(\xi \cdot x_1))$ ;

$T_T(x_1) = \frac{1}{2}(sh(\xi \cdot x_1) + \sin(\xi \cdot x_1))$  – функції Кривола.

Прогин балки на першій ділянці, розрахований згідно (3.36), показано на рис. 3.9.



*Рис. 3.9. Прогин поздовжньої балки на ділянці  $x_1 \in (0; 0,182)$*

На другій ділянці вводимо змінну  $x_2$ , так що  $L_1 < x_2 < L_f$ . Підставляючи значення довжин  $L_1 = 0,182$ ,  $L_f = 0,27$  визначимо, що змінна  $x_2$  буде знаходитись у межах  $0,182 < x_2 < 0,27$ . Вираз, що описуватиме прогин балки на другій ділянці, використовуючи рівняння (3.24), матиме вигляд:

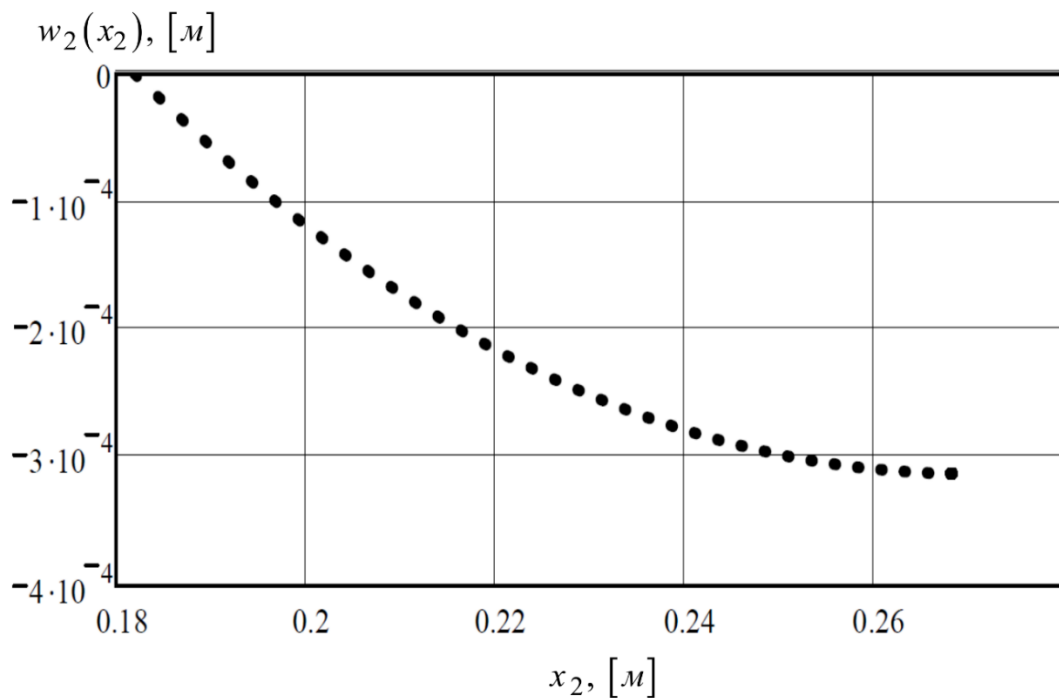
$$w_2(x_2) = A \cdot S_S(x_2) + B \cdot T_T(x_2) + \frac{R_1}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{V1}(x_2), \quad (3.37)$$

$$\text{де } S_S(x_2) = \frac{1}{2}(ch(\xi \cdot x_2) + \cos(\xi \cdot x_2));$$

$$T_T(x_2) = \frac{1}{2}(sh(\xi \cdot x_2) + \sin(\xi \cdot x_2));$$

$$V_{V1}(x_2) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_2 - L_1)) - \sin(\xi(x_2 - L_1))) - \text{функції Кривола.}$$

Прогин на другій ділянці, розрахований згідно (3.37), є менший у порівнянні з прогином на ділянці 1 (рис. 3.10). Це пояснюється, по-перше, меншою довжиною ділянки 2; по-друге, вільним краєм ділянки 1.



**Рис. 3.10.** Прогин поздовжньої балки на ділянці  $x_2 \in (0,182; 0,27)$

На третій ділянці вводимо змінну  $x_3$ , так що  $L_f < x_3 < L_1 + L_2$ . Підставивши  $L_1 = 0,182$ ,  $L_f = 0,27$ ,  $L_2 = 0,176$  визначаємо діапазон змінної на цій ділянці  $0,27 < x_2 < 0,358$ . Рівняння прогину балки на третій ділянці, використовуючи (3.25), матиме вигляд:

$$w_3(x_3) = A \cdot S_S(x_3) + B \cdot T_T(x_3) + \frac{R_1}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{V1}(x_3) + \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{VF}(x_3), \quad (3.38)$$

де  $S_S(x_3) = \frac{1}{2}(ch(\xi \cdot x_3) + \cos(\xi \cdot x_3))$ ;

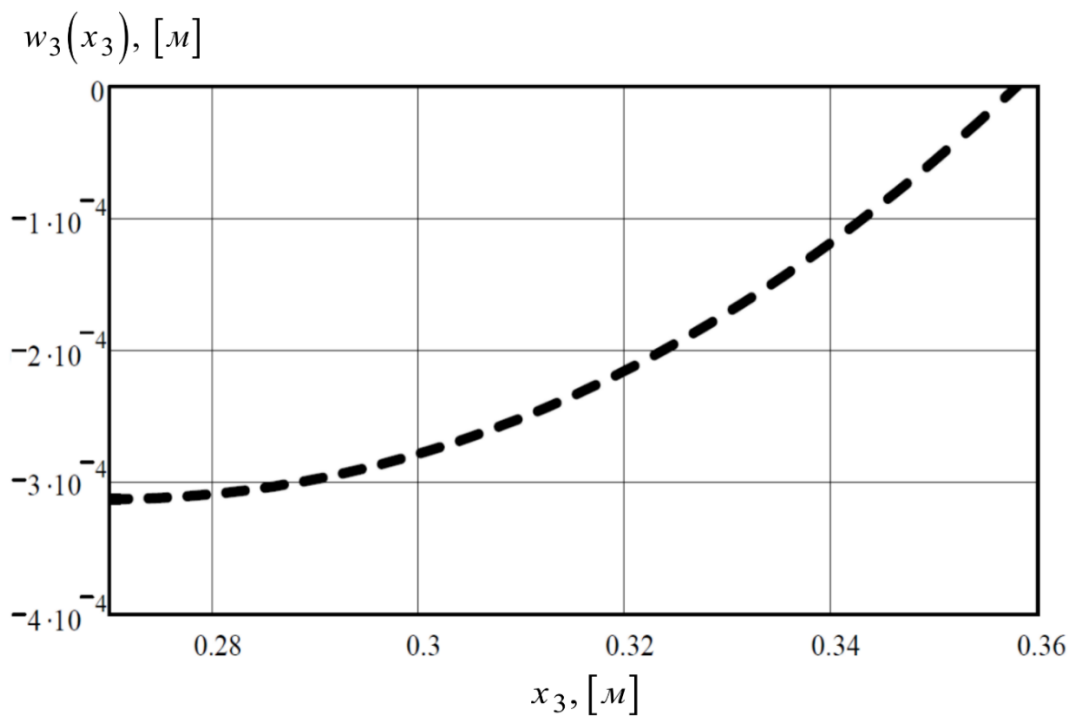
$$T_T(x_3) = \frac{1}{2}(sh(\xi \cdot x_3) + \sin(\xi \cdot x_3));$$

$$V_{V1}(x_3) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_3 - L_1)) - \sin(\xi(x_3 - L_1)));$$

$$V_{VF}(x_3) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_3 - L_f)) - \sin(\xi(x_3 - L_f))) - \text{функції Крилова.}$$

Прогин на третій ділянці, розрахований згідно (3.38), показано на рис. 3.11.

$$V_{VF}(x_4) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_4 - L_f)) - \sin(\xi(x_4 - L_f))) - \text{функції Крилова.}$$



**Рис. 3.11.** Прогин поздовжньої балки на ділянці  $x_3 \in (0,27;0,358)$

На четвертій ділянці вводимо змінну  $x_4$ , так що  $L_1 + L_2 < x_3 < L$ . Підставивши  $L_1 = 0,182$ ,  $L_2 = 0,176$ ,  $L = 0,54$  визначаємо діапазон змінної на цій

ділянці  $0,358 < x_2 < 0,54$ . Функція, що описуватиме прогин поздовжньої балки пластини на четвертій ділянці, використовуючи рівняння (3.26), прийме наступний вигляд:

$$w_4(x_4) = A \cdot S_S(x_4) + B \cdot T_T(x_4) + \frac{R_1}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{V1}(x_4) + \frac{R_2}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{V2}(x_4) + \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J_z} \cdot V_{VF}(x_4), \quad (3.39)$$

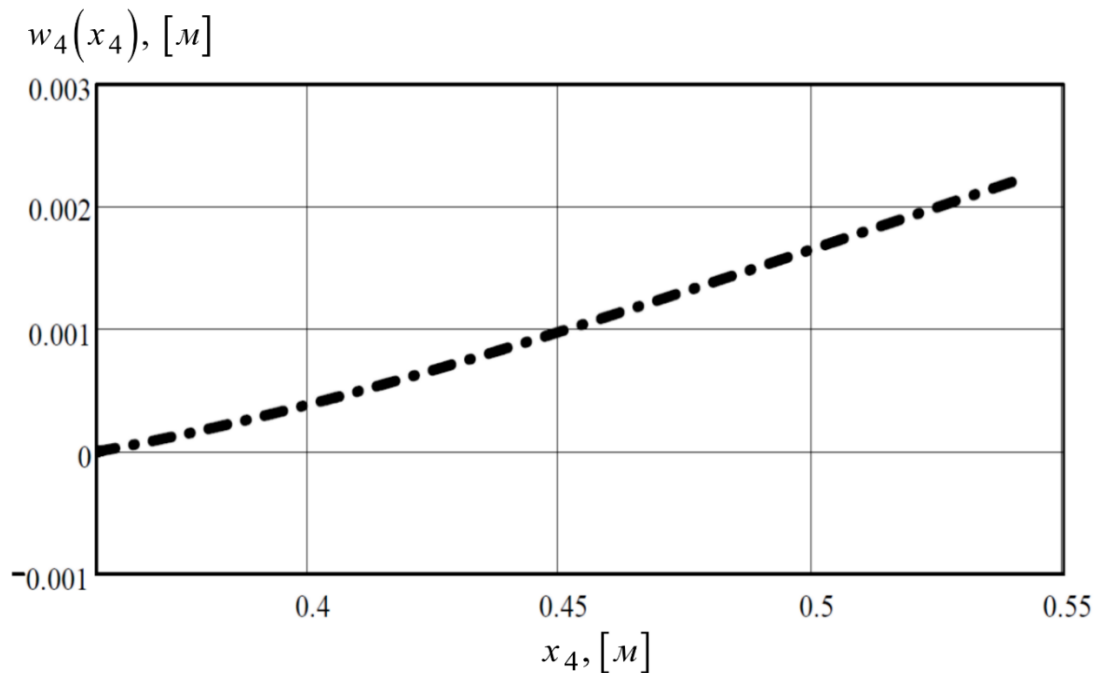
$$\text{де } S_S(x_4) = \frac{1}{2}(ch(\xi \cdot x_4) + \cos(\xi \cdot x_4));$$

$$T_T(x_4) = \frac{1}{2}(sh(\xi \cdot x_4) + \sin(\xi \cdot x_4));$$

$$V_{V1}(x_4) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_4 - L_1)) - \sin(\xi(x_4 - L_1)));$$

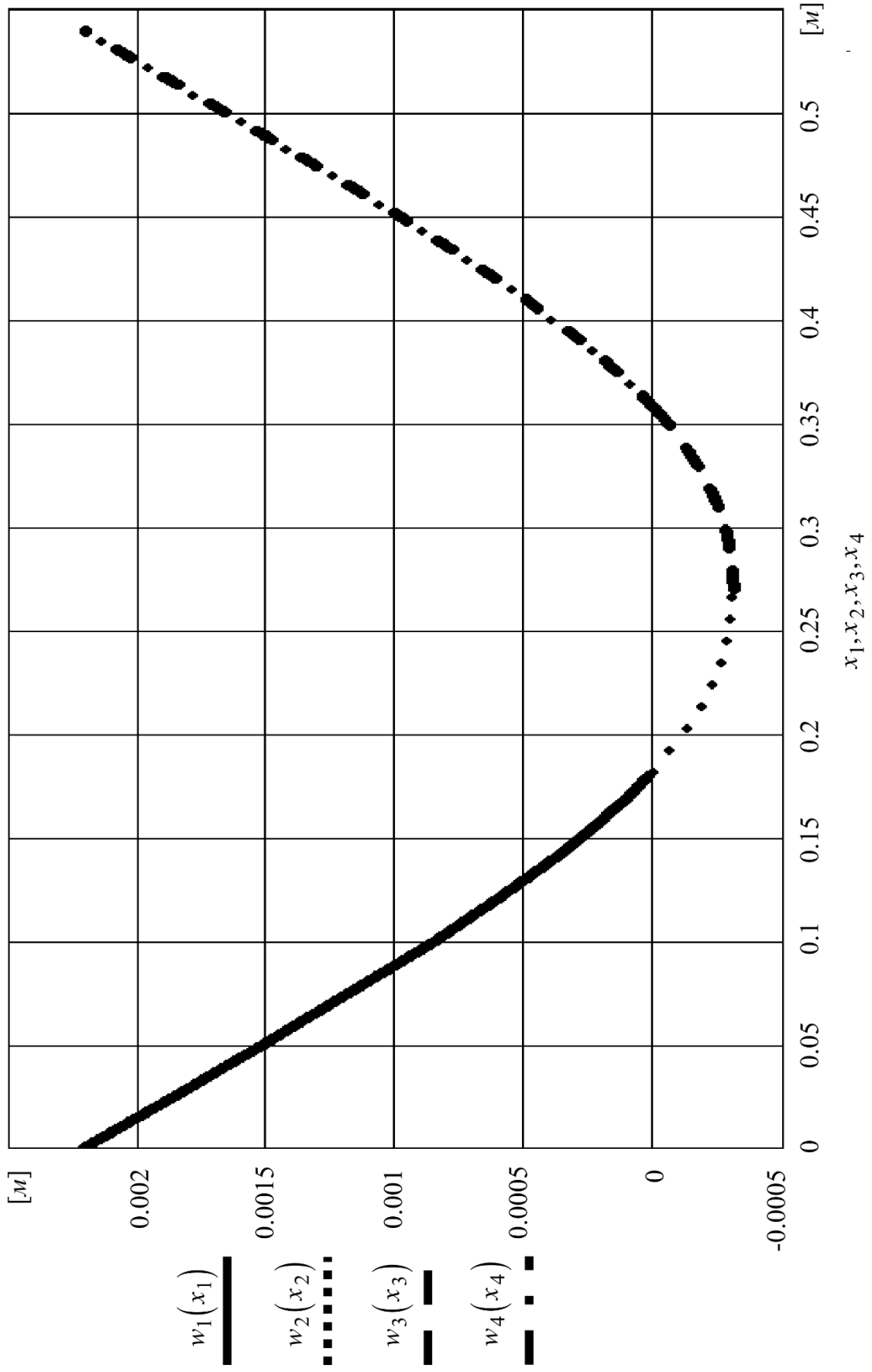
$$V_{V2}(x_4) = \frac{1}{2}(sh(\xi(x_4 - L_1 - L_2)) - \sin(\xi(x_4 - L_1 - L_2)));$$

Прогин на четвертій ділянці, розрахований згідно (3.39), показано на рис. 3.12. Сумарний прогин поздовжньої балки пластини показано на рис. 3.13.



**Рис. 3.12.** Прогин поздовжньої балки на ділянці  $x_4 \in (0,358;0,54)$





*Рис. 3.13. Прогин позадвожньої балки пластини на всій довжині*

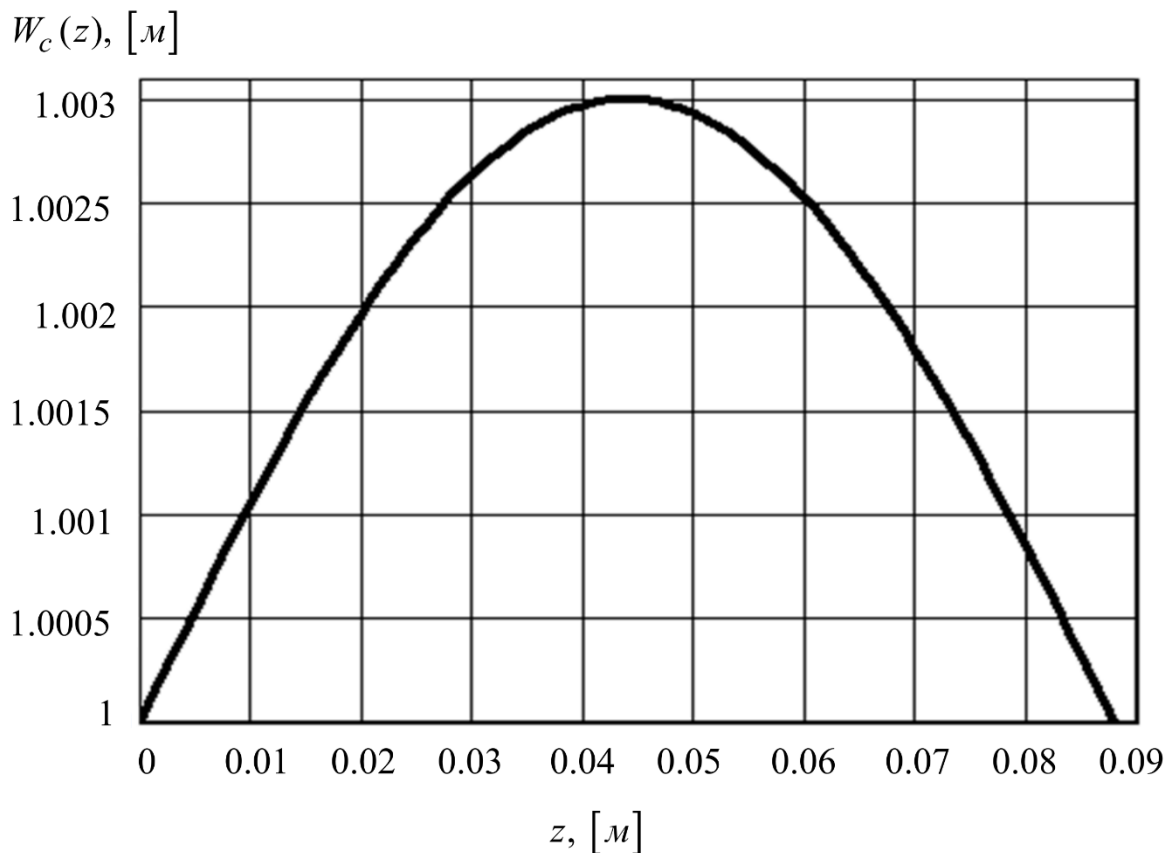
Оскільки, як видно із рис. 3.9 – 3.13, ділянка 1 симетрична ділянці 4, а ділянка 2 симетрична ділянці 3, надалі розглядаємо лише ділянку 1 (консоль) та ділянку 2 (середину).

Для опису поперечних коливань консолі вздовж осі  $0z$  (рис. 3.14) використаємо наступну залежність

$$W_c(z) = \sin\left(\frac{\xi}{2} \cdot \frac{z}{b_n}\right) \cdot 0,003 + 1. \quad (3.40)$$

Поперечні коливання середини пластини вздовж осі  $0z$  (рис. 3.15), враховуючи, що прогин на цій ділянці буде дещо менший за прогин консолі, опишемо функцією

$$W_m(z) = \sin\left(\frac{\xi}{2} \cdot \frac{z}{b_n}\right) \cdot 0,001 + 1. \quad (3.41)$$

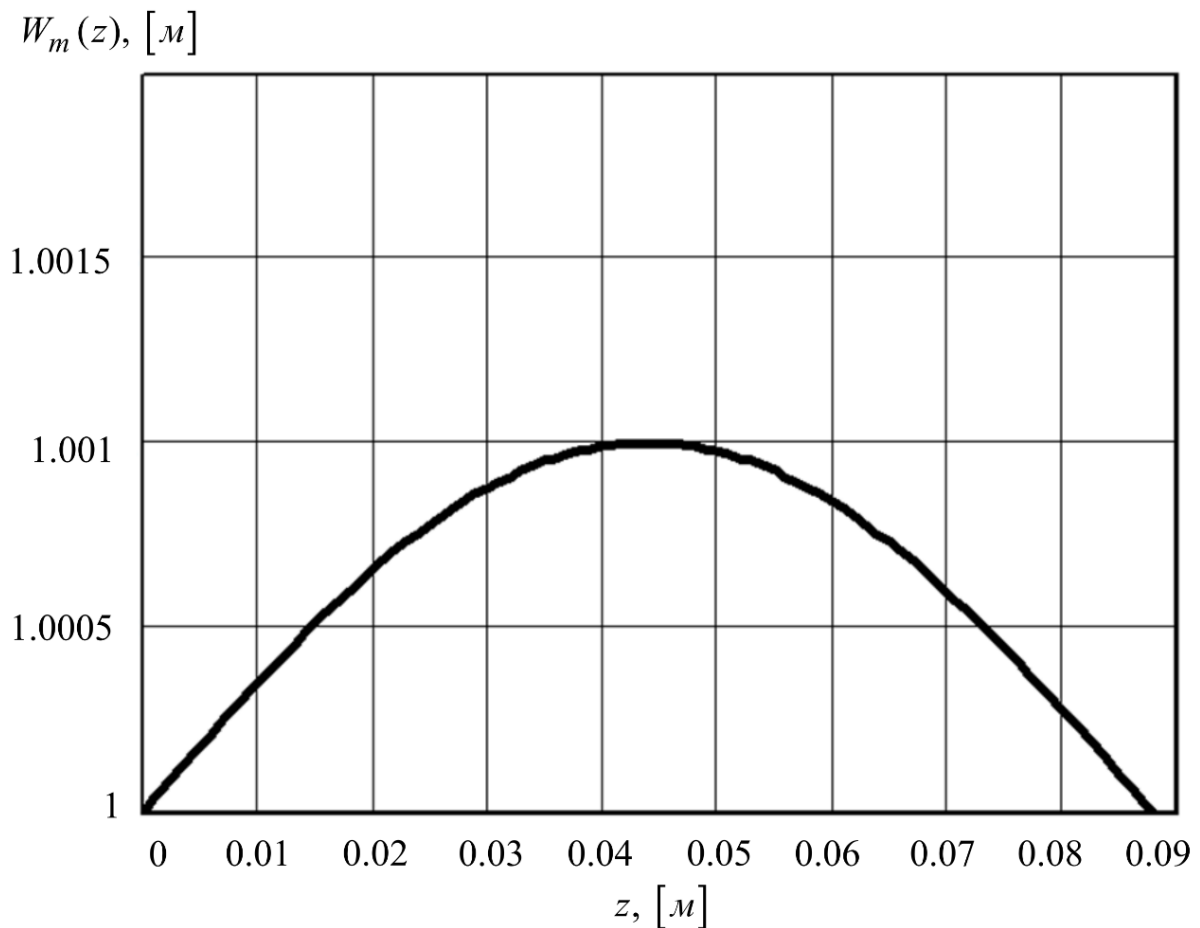


*Рис. 3.14. Поперечний прогин консолі пластини вздовж осі  $0z$*

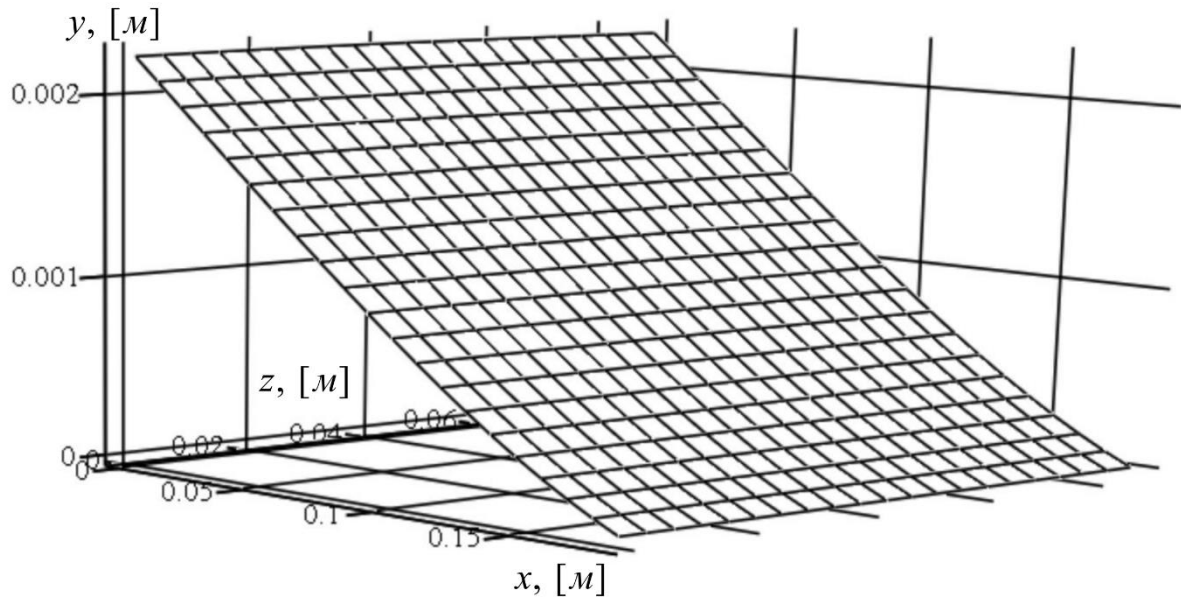
Розглянемо консоль пластини (рис. 3.7, ділянка 1). Прогин відбувається одночасно по осях  $0x$  та  $0z$ . Лише у двох точках на периметрі ділянки, де пластина кріпиться за допомогою шарнірів до проміжної маси МКС, прогин дорівнює нулю. Визначивши залежності для встановлення поперечних прогинів консолі, перемножимо згадані функції (вирази (3.36) та (3.40)) між собою:

$$G_c(x_1, z) = w_1(x_1) \cdot W_c(z). \quad (3.42)$$

Функція  $G_c(x_1, z)$ , що описує поверхню прогину консолі пластини по двох координатах на першій власній частоті коливань, розрахована за допомогою рівняння (3.42), показана на рис. 3.16.



**Рис. 3.15.** Поперечний прогин середини пластини вздовж осі  $0z$



**Рис. 3.16.** Прогин консолі пластини в просторі

Використовуючи метод Релея – Рітца [127, 157], встановимо відношення кінетичної енергії до квадрату колової частоти пластини при прогині консолі на першій власній частоті коливань за виразом:

$$\frac{K_c}{\omega^2} = \int_0^{L_1} \int_0^h \rho b_n (G_c(x_1, z))^2 dz dx_1, \quad (3.43)$$

що становить  $K_c / \omega^2 = 6,009 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2 / \text{рад}^2$  (див. вираз (E9) додатку E).

Потенціальна енергія прогину консолі на першій власній частоті коливань пластини визначатиметься наступною залежністю

$$P_c = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \int_0^h D_f \left( \left( \frac{\partial^2 G_c(x_1, z)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_c(x_1, z)}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left( \left( \frac{\partial^2 G_c(x_1, z)}{\partial x_1 \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 G_c(x_1, z)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 G_c(x_1, z)}{\partial z^2} \right) \right) dz dx_1 \quad (3.44)$$

та дорівнює  $P_c = 0,011 \text{ Дж}$  (див. вираз (E10) додатку E).

У виразі (2.51) множник  $D_f$  знаходиться із залежності

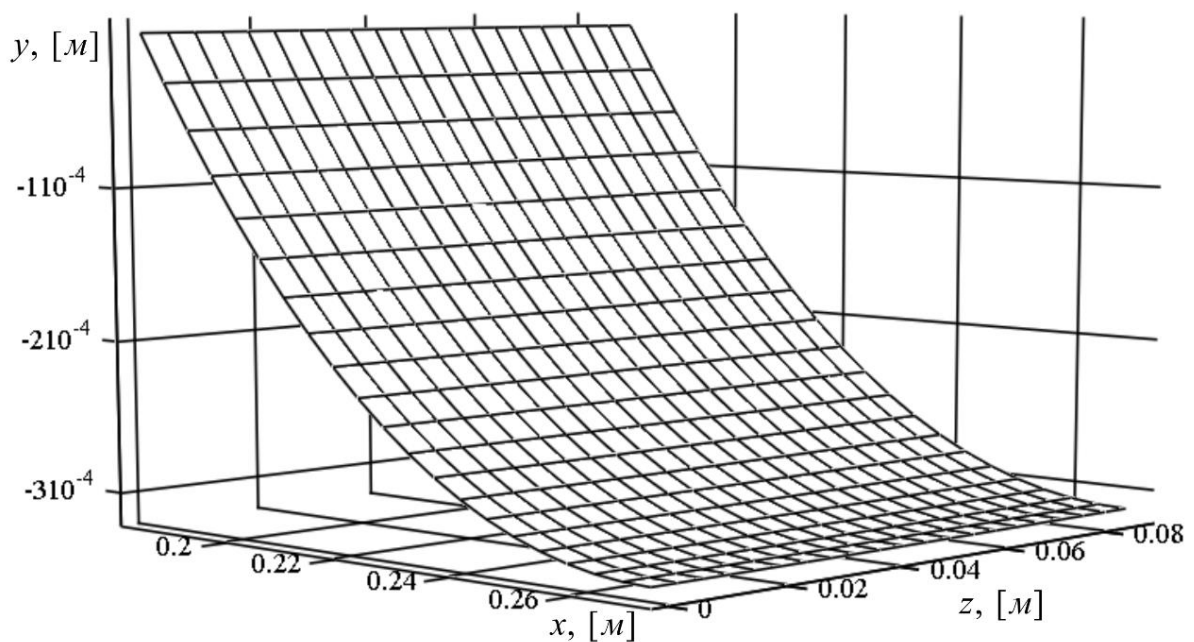
$$D_f = \frac{E \cdot b_n^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (3.45)$$

де  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо також половину середини пластини (рис. 3.7). Тут прогин також відбувається одночасно по двох координатах за винятком двох точок із шарнірним кріпленням до проміжної маси МКС. Залежності для встановлення поперечних прогинів половини середини пластини знайдемо, перемноживши балочні функції (3.38) та (3.42) між собою. Отримаємо наступну функцію:

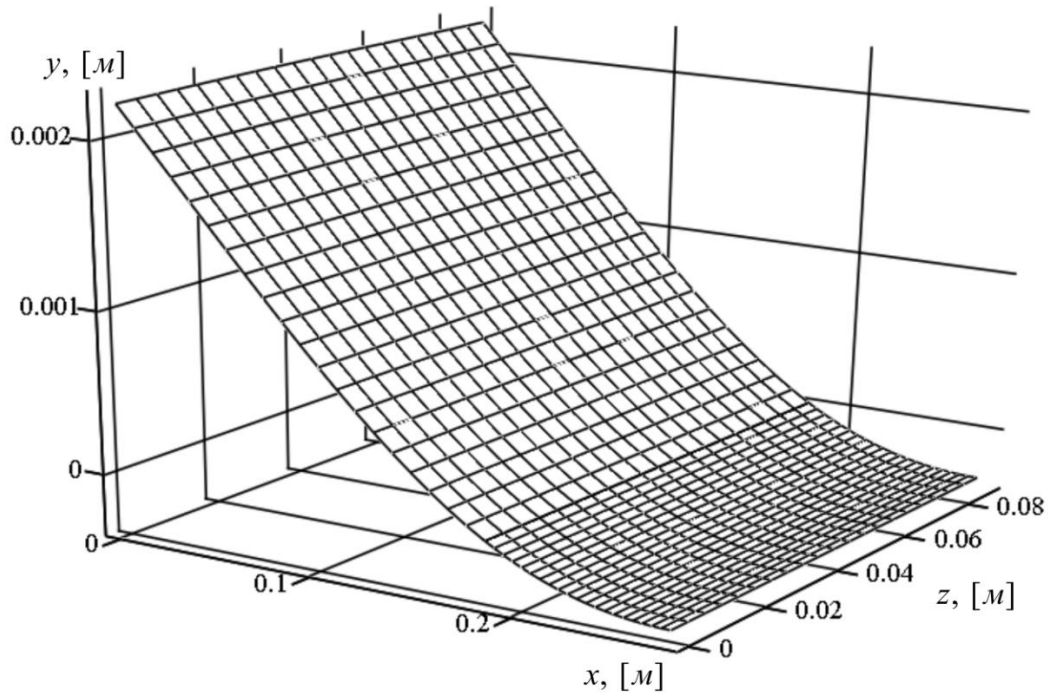
$$G_m(x_2, z) = w_2(x_2) \cdot W_m(z), \quad (3.46)$$

що описує прогин поверхні половини середини пластини на першій власній частоті коливань та зображена на рис. 3.17.



**Рис. 3.17.** Прогин половини середини пластини в просторі

Вигляд сумарної поверхні половини пластини, просумувавши графіки на рис. 3.16 та рис. 3.17, зображено на рис. 3.18.



**Рис. 3.18.** Прогин половини пластини в просторі

З використанням методу Релея – Рітца, встановимо відношення кінетичної енергії до квадрату колової частоти пластини при прогині половини її середини на першій власній частоті коливань

$$\frac{K_m}{\omega^2} = \int_{L_1}^{L_f} \int_0^h \rho b_n (G_m(x_2, z))^2 dz dx_2. \quad (3.47)$$

яке дорівнює  $K_m / \omega^2 = 1,058 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2 / \text{рад}^2$  (див. вираз (E11) додатку E).

Потенціальна енергія прогину половини середини пластини на першій власній частоті коливань пластини визначатиметься наступною залежністю

$$P_m = \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_f} \int_0^h D \left( \left( \frac{\partial^2 G_m(x_2, z)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_m(x_2, z)}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left( \left( \frac{\partial^2 G_m(x_2, z)}{\partial x_2 \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 G_m(x_2, z)}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 G_m(x_2, z)}{\partial z^2} \right) \right) dz dx_2 \quad (3.48)$$

та становить  $P_m = 0,018 \text{ Дж}$  (див. вираз (E12) додатку E).

Кінетична та потенціальна енергії ділянки 3 (рис. 3.7) дорівнюють кінетичній та потенціальній енергіям ділянки 2, а енергії ділянки 4 – аналогічні енергіям ділянки 1.

Отже знаючи відношення кінетичних енергій до квадрату колової частоти та потенціальні енергії усіх ділянок пластини, враховуючи вирази (3.43), (3.44), (3.47) та (3.48), можемо встановити першу власну циклічну частоту коливань пластини (див. додаток Е):

$$v_{nR} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(2P_c + 2 \cdot P_m)}{2\left(\frac{K_c}{\omega^2} - \frac{K_m}{\omega^2}\right)}} = 49,624 \text{ Гц}. \quad (3.49)$$

Даний результат співпадає з попередніми розрахунками (вираз (3.12) та рис. 3.5).

### **3.5. Розрахунок власної частоти пластини методом Релея-Рітца з припущенням, що її прогин відбувається по гіперболоїдній поверхні**

Як видно на рис. 3.4, прогин пластини, що має шарнірне кріплення у чотирьох точках, відбувається по поверхні, що описує гіперболоїд. Отже можна припустити, що зігнута внаслідок коливань на першій власній частоті пластини є частиною поверхні гіперболоїда. Розрахункова схема зображена на рис. 3.19.

Загальне рівняння гіперболоїда [85], у нашому випадку, матиме вигляд

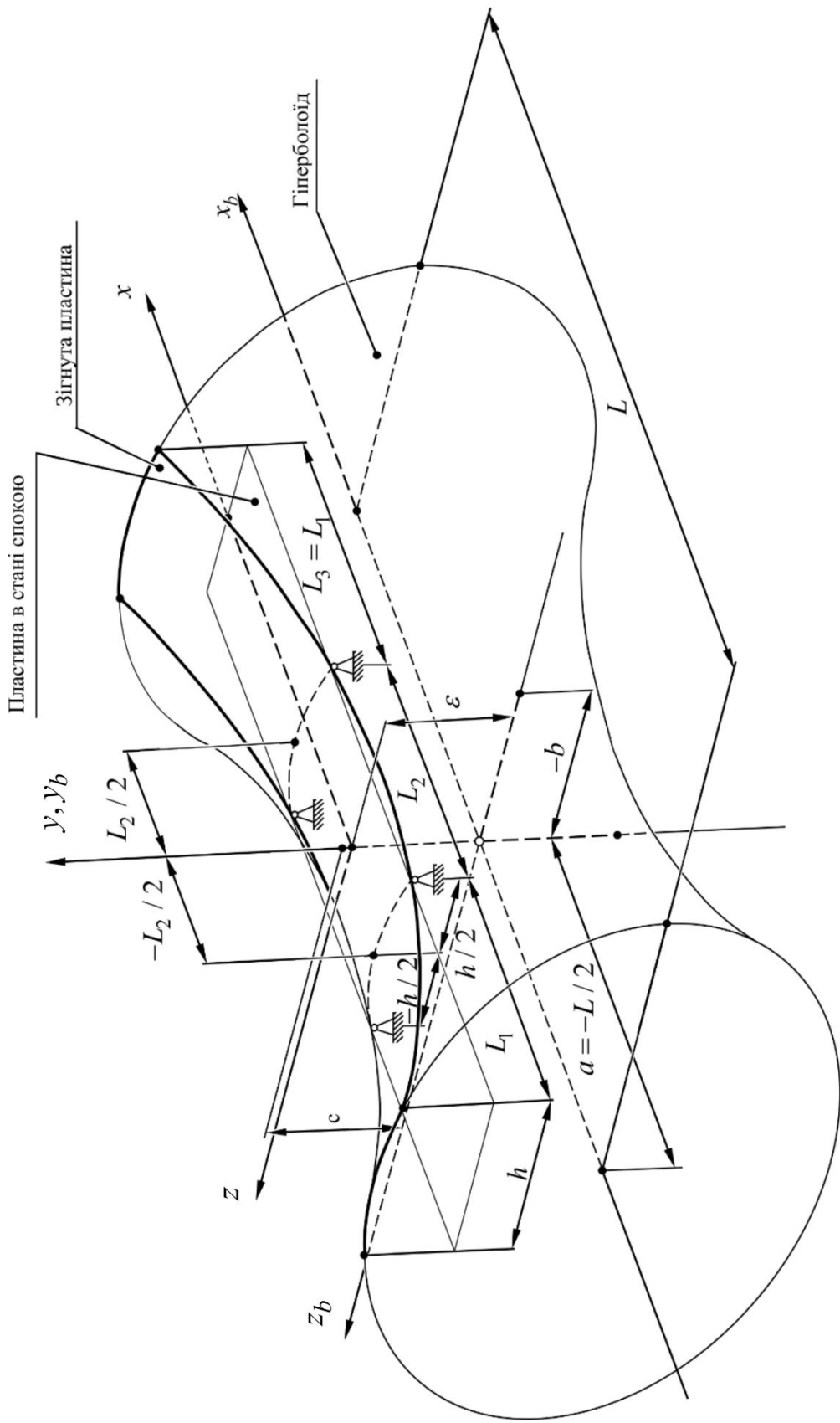
$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (3.50)$$

Враховуючи, що зміщення шарнірних опор пластини відносно центру гіперболоїда по осі  $Oy$  дорівнює  $\varepsilon$ , прогин пластини становитиме:

$$W_H = y - \varepsilon. \quad (3.51)$$

З рівняння (3.50) знайдемо вираз для визначення  $y$ :

$$y = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)}. \quad (3.52)$$



**Рис. 3.19.** Розрахункова схема визначення власної частоти коливань пластини з припущенням, що коливання відбуваються по гіперболоїдній поверхні, де  $x, y, z$  – осі абсолютної системи координат;  $x_b, y_b, z_b$  – осі відносної системи координат;  $\epsilon$  – зміщення відносної системи координат по осі  $Oy$ ;  $a, b, c$  – параметри гіперболоїда



Позначивши  $c = b/k$ , де  $k$  – коефіцієнт співвідношення сторін овалу гіперболоїда, а також враховуючи, що  $a = L/2$  (рис. 3.19), вираз (3.52) можна подати у вигляді:

$$y = \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{b^2}\right]}. \quad (3.53)$$

Точки шарнірного закріплення пластини лежать на поверхні гіперболоїда. Приймаючи одну з точок шарнірного закріплення з координатами  $x = L/2$ ,  $y = \varepsilon$ ,  $z = h/2$  та використовуючи рівняння (3.50), отримаємо:

$$\frac{(h/2)^2}{b^2} + \frac{\varepsilon^2}{(b/k)^2} - \frac{(L/2)^2}{(L/2)^2} = 1, \quad (3.54)$$

звідки

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{b^2}\right]}. \quad (3.55)$$

З врахуванням габаритів пластини та параметрів її заземлення в проміжній масі, використовуючи вирази (3.51), (3.53), (3.55), рівняння прогинів набуде вигляду:

$$W_H(x, z) = \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{b^2}\right]} - \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{b^2}\right]}. \quad (3.56)$$

Відношення кінетичної енергії до квадрату колової частоти пластини при прогині пластини по гіперболоїдній поверхні на першій власній частоті коливань визначатиметься за виразом

$$\frac{K_H}{\omega^2} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho b_n W_H(x, z)^2 dx dz \quad (3.57)$$

та становитиме  $K_H / \omega^2 = 5,648 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{с}^2 / \text{рад}^2$  (див. вираз (F3) додатку F).

Потенціальна енергія прогину на першій власній частоті коливань пластини по гіперболоїдній поверхні визначатиметься залежністю

$$P_H = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} D_f \left( \left( \frac{\partial^2 W_H(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_H(x,z)}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left( \left( \frac{\partial^2 W_H(x,z)}{\partial x \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_H(x,z)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W_H(x,z)}{\partial z^2} \right) \right) dx dz \quad (3.58)$$

та набуде значення  $P_H = 553,293 \text{ Дж}$  (див. вираз (F5) додатку F).

Перша власна частота коливань пластини, прогин якої здійснюється по гіперболоїдній поверхні можна знайти із рівняння

$$v_{nH} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot P_H}{K_H}} = 49,816 \text{ Гц} . \quad (3.59)$$

Знайдене даним методом значення власної частоти коливань пластини  $v_{nH} = 49,816 \text{ Гц}$  (див. вираз (F6) додатку F) задовольняє необхідну точність розрахунків і співпадає з проведеними раніше розрахунками (вирази (3.12), (3.49) та рис. 3.5). Зауважимо, що на відміну від розрахунку власної частоти пластини з використанням функцій Крилова, дана методика є менш трудомісткою.

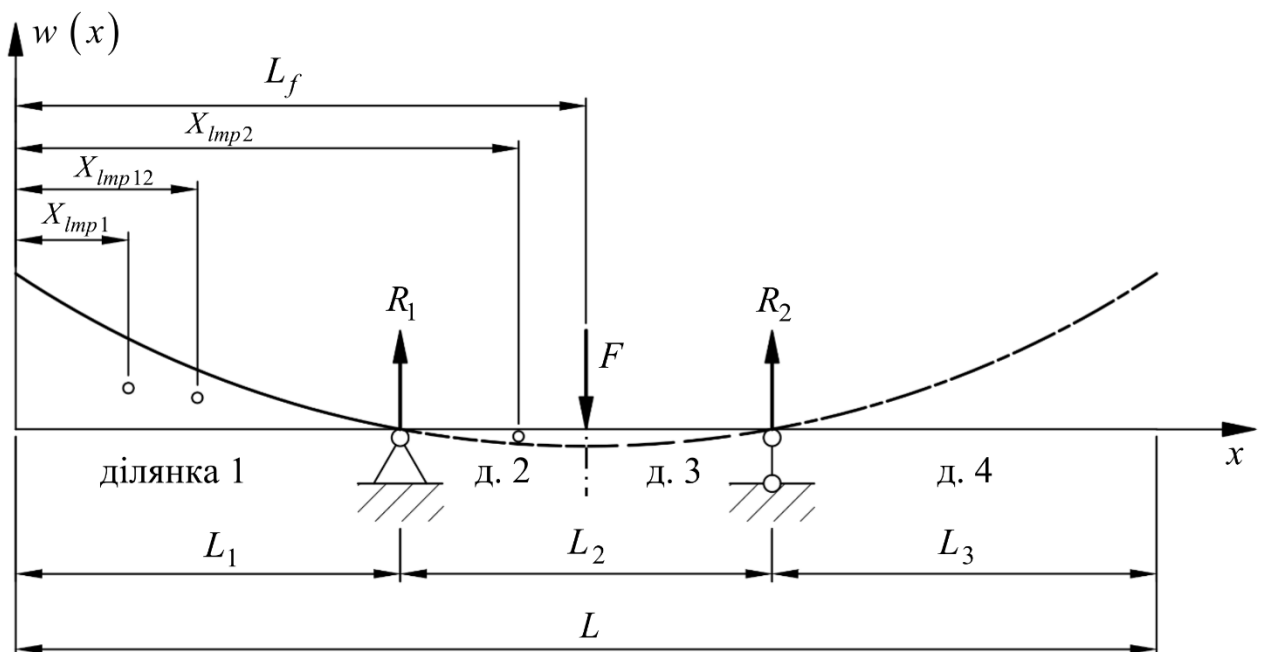
### 3.6. Зведені маса та жорсткість стержня

#### 3.6.1. Розрахунок точок зведення швидкостей ділянок стержня

Для аналізу реакції дискретної системи на континуальну ділянку під час коливань на робочій частоті доцільно знайти зведені інерційно-жорсткісні параметри пластини, що прогинається в одній площині (фактично стержня).

Згідно з гіпотезою дисертаційних досліджень, МКС сприйматиме пружний елемент, як тіло із розподіленими параметрами, дискретно, відносно зведених точок швидкостей, котрі умовно зосереджують інерційні значення усього стержня. В даному випадку точки зведення швидкостей стержня – це точки, у яких будуть умовно зосереджуватись його інерційно-жорсткісні параметри.

Оскільки континуальна ділянка у вигляді стержня має певні умови закріплення в проміжній масі (рис. 3.20) та ділиться симетрично відносно центру на чотири ділянки, для визначення інерційно-жорсткісних параметрів доцільно провести розрахунок точок зведення на її лівій половині.



**Рис. 3.20.** Схема розташування точок зведення швидкостей ділянок стержня

Рівняння зміни лінійної та кутової швидкостей ділянок стержня від координати  $x$  становлять:

$$v(x) = \omega \cdot w(x), \quad (3.60)$$

$$v_{ang}(x) = \omega \cdot \frac{dw(x)}{dx}, \quad (3.61)$$

де  $v(x)$ ,  $v_{ang}(x)$  – відповідно лінійна та кутова швидкості стержня у певній точці,  $w(x)$  – прогин пластини у даній точці. Власне, математично зведена швидкість є відношенням суми статичних моментів швидкостей усіх ділянок стержня до суми його швидкостей на усій довжині. В інтегральній формі вираз для встановлення координати точки зведення швидкостей на лівій половині стержня (ділянки 1 та 2 на рис. 3.20) набуде вигляду [31, 55]:

$$X_{imp12} = \frac{X_{imp1} \cdot \int_0^{L_1} w_1(x_1) dx_1 + X_{imp2} \cdot \int_{L_1}^{L_f} w_2(x_2) dx_2}{\int_0^{L_1} w_1(x_1) dx_1 + \int_{L_1}^{L_f} w_2(x_2) dx_2}, \quad (3.62)$$

де  $X_{imp1}$ ,  $X_{imp2}$  – точки зведення стержня відповідно на першій та другій ділянках;  $x_1$  – змінна із діапазоном значень  $(0; L_1)$ ;  $w_1(x_1)$  – функція, яка описує прогин стержня на ділянці 1 (див. вираз (3.36));  $x_2$  – змінна із діапазоном значень  $(L_1; L_f)$ ;  $w_2(x_2)$  – функція, яка описує прогин стержня на ділянці 2 (див. вираз (3.38)).

Точка зведення стержня на ділянці 1 знаходиться, використовуючи залежність [31]:

$$X_{imp1} = \frac{\int_0^{L_1} x_1 \cdot w_1(x_1) dx_1}{\int_0^{L_1} w_1(x_1) dx_1} = 0,068 м. \quad (3.63)$$

Аналогічно, щоб знайти точку зведення швидкостей стержня на ділянці 2, можна скористатись залежністю:

$$X_{imp2} = \frac{\int_{L_1}^{L_f} x_2 \cdot w_2(x_2) dx_2}{\int_{L_1}^{L_f} w_2(x_2) dx_2} = 0,226 м. \quad (3.64)$$

Маючи встановленими координати центрів швидкостей для першої і другої ділянок розглянутого стержня, використовуючи вираз (3.62), можна знайти координату точки, що є центром швидкостей стержня на його лівій половині. Координати даної точки становлять  $X_{lmp12} = 0,001m$  (додаток G).

### 3.6.2. Розрахунок зведених мас та жорсткостей стержня

Встановимо зведені масу та жорсткість стержня. Ці параметри запишемо у вигляді алгебраїчної суми відповідних параметрів на кожній із ділянок стержня. У такому випадку [63]:

$$m_{lmp} = 2 \cdot |m_{lmp1} - m_{lmp2} + m_{lmp1s} - m_{lmp2s}|; \quad (3.65)$$

$$c_{lmp} = 2 \cdot (c_{lmp1} + c_{lmp2} + c_{lmp1t} + c_{lmp2t}). \quad (3.66)$$

де  $m_{lmp1}, m_{lmp2}$  – відповідні зведені маси першої та другої ділянок стержня від лінійного переміщення;

$m_{lmp1s}, m_{lmp2s}$  – відповідні зведені маси першої та другої ділянок стержня від провертання;

$c_{lmp1}, c_{lmp2}$  – відповідні зведені жорсткості першої та другої ділянок стержня від його прогину;

$c_{lmp1t}, c_{lmp2t}$  – відповідні зведені жорсткості першої та другої ділянок стержня від зсуву в його шарах.

Визначимо частку зведеної маси  $m_{lmp1}$  від лінійного переміщення на першій ділянці стержня [63, 153]:

$$m_{lmp1} = m_{rm} \int_0^{L_1} \left( \frac{w_1(x_1)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_1 = 0,17kz, \quad (3.67)$$

$$\chi_{lmp12} = A \cdot \frac{1}{2} \cdot (ch(\xi \cdot X_{lmp12}) + \cos(\xi \cdot X_{lmp12})) +$$

де – вираз для визначення прогину

$$+ B \cdot \frac{1}{2} \cdot (sh(\xi \cdot X_{lmp12}) + \sin(\xi \cdot X_{lmp12}))$$

стержня у точці центру швидкостей лівої половини.

Визначимо частку зведеної маси  $m_{lmp1s}$  від провертання на першій ділянці стержня [153]:

$$m_{lmp1s} = \int_0^{L_1} \frac{m_{rm}}{3} \cdot x_1^2 \cdot \left( \frac{\frac{d^2}{dx_1^2} w_1(x_1)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_1 = 0,024 \text{ кг}. \quad (3.68)$$

Частка зведеної жорсткості стержня від згину на першій ділянці дорівнюватиме [153]:

$$c_{lmp1} = E \cdot J \int_0^{L_1} \left( \frac{\frac{d^2}{dx_1^2} w_1(x_1)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_1 = 5,635 \cdot 10^3 \text{ Н/м}. \quad (3.69)$$

Частка зведеної жорсткості стержня від зсуву в його шарах на першій ділянці становитиме [153]:

$$c_{lmp1t} = k_\tau \int_0^{L_1} \left( \frac{\frac{d^3}{dx_1^3} w_1(x_1)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_1 = 2,542 \text{ Н/м}, \quad (3.70)$$

де  $k_\tau = k_y \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot F_n} = 1,814 \cdot 10^{-4}$ ;

$k_y = 1,2$  – коефіцієнт, що залежить від форми поперечного прямокутного перерізу пластини;

$G = 8,1 \cdot 10^{10}$  – модуль пружності II роду для матеріалу стержня;

$F_n = b_n \cdot h = 2.992 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  – площа поперечного перерізу стержня.

Визначимо частку зведеної маси  $m_{lmp2}$  стержня від лінійного переміщення на другій ділянці:

$$m_{lmp2} = m_{rm} \int_{L_1}^{L_f} \left( \frac{w_2(x_2)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_2 = 6.134 \cdot 10^{-3} \text{ кг} . \quad (3.71)$$

Визначимо частку зведеної маси  $m_{cons2s}$  стержня від провертання на другій ділянці:

$$m_{lmp2s} = \int_{L_1}^{L_f} \frac{m_{rm}}{3} \cdot x_2^2 \cdot \left( \frac{\frac{d^2}{dx_2^2} w_2(x_2)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_2 = 5,436 \cdot 10^{-3} \text{ кг} . \quad (3.72)$$

Частка зведеної жорсткості стержня від його згинання на другій ділянці дорівнюватиме:

$$c_{lmp2} = E \cdot J \int_{L_1}^{L_f} \left( \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{w_2(x_2)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_2 = 1,199 \cdot 10^4 \text{ Н/м} . \quad (3.73)$$

Частка зведеної жорсткості стержня від зсуву в його шарах на другій ділянці дорівнюватиме:

$$c_{lmp2t} = k_\tau \int_{L_1}^{L_f} \left( \frac{d^3}{dx_2^3} \frac{w_2(x_2)}{\chi_{lmp12}} \right)^2 dx_2 = 7,524 \text{ Н/м} . \quad (3.74)$$

Визначивши частки зведених мас та жорсткостей на двох ділянках стержня, із рівнянь (3.65) і (3.66) знайдемо його зведені масу та жорсткість:

$$m_{lmp} = 2 \cdot \left| m_{lmp1} - m_{lmp2} + m_{lmp1s} - m_{lmp2s} \right| = 0,364 \text{ кг} ;$$

$$c_{lmp} = 2 \cdot \left( c_{lmp1} + c_{lmp2} + c_{lmp1t} + c_{lmp2t} \right) = 3,525 \cdot 10^4 \text{ Н/м} .$$

Знайдемо власну частоту пластини, виходячи з параметрів маси та жорсткості [46]:

$$\nu_{lmp} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{lmp}}{m_{lmp}}} = 49,563 \text{ Гц} . \quad (3.75)$$

Знайдена за допомогою рівняння (3.75) перша власна частота коливань пластини є близькою за значенням до отриманих за допомогою наближених методів значень.

### 3.7. Математична модель дискретно-континуальної МКС

Для проектування високоефективного міжрезонансного вібраційного обладнання створимо математичну модель дискретно-континуальної МКС та проведемо аналіз її амплітудно-частотної характеристики.

Математична модель дискретно-континуальної МКС, що необхідна для встановлення амплітуд коливань активної та проміжної мас залежно від частоти вимушених коливань, набуде вигляду:

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 Y_1(\omega) + c_{12}(Y_1(\omega) - Y_2(\omega)) = 0; \\ -m_2\omega^2 Y_2(\omega) + c_{12}(Y_2(\omega) - Y_1(\omega)) = R_1(\omega) + R_2(\omega) + F, \end{cases} \quad (3.76)$$

де  $R_1(\omega)$  та  $R_2(\omega)$  – функції реакцій в опорах (див. вирази (3.34), (3.35)), де  $\omega$  входить через параметр  $\xi$  (див. вираз (3.5));  $m_1 = 118 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 45 \text{ кг}$  – інерційні значення активної та проміжної мас МКС, що були прийняті в розділі 2;  $c_{12} = 3,531 \cdot 10^6 \text{ Н / м}$  – значення жорсткості пружного вузла, що з'єднує активну та проміжну маси дискретної системи (див. вираз (2.15));  $F = 30 \text{ Н}$  – амплітудне значення сили збурення МКС електромагнітами.

Для активної та проміжної мас функції амплітуд коливань  $Y_1(\omega)$  та  $Y_2(\omega)$  залежать від багатьох факторів, зокрема частоти вимушених коливань, інерційно-жорсткісних параметрів системи, які були встановлені у попередньому розділі, функцій реакцій в опорах  $R_1(\omega)$ ,  $R_2(\omega)$  та сили збурення  $F$ .

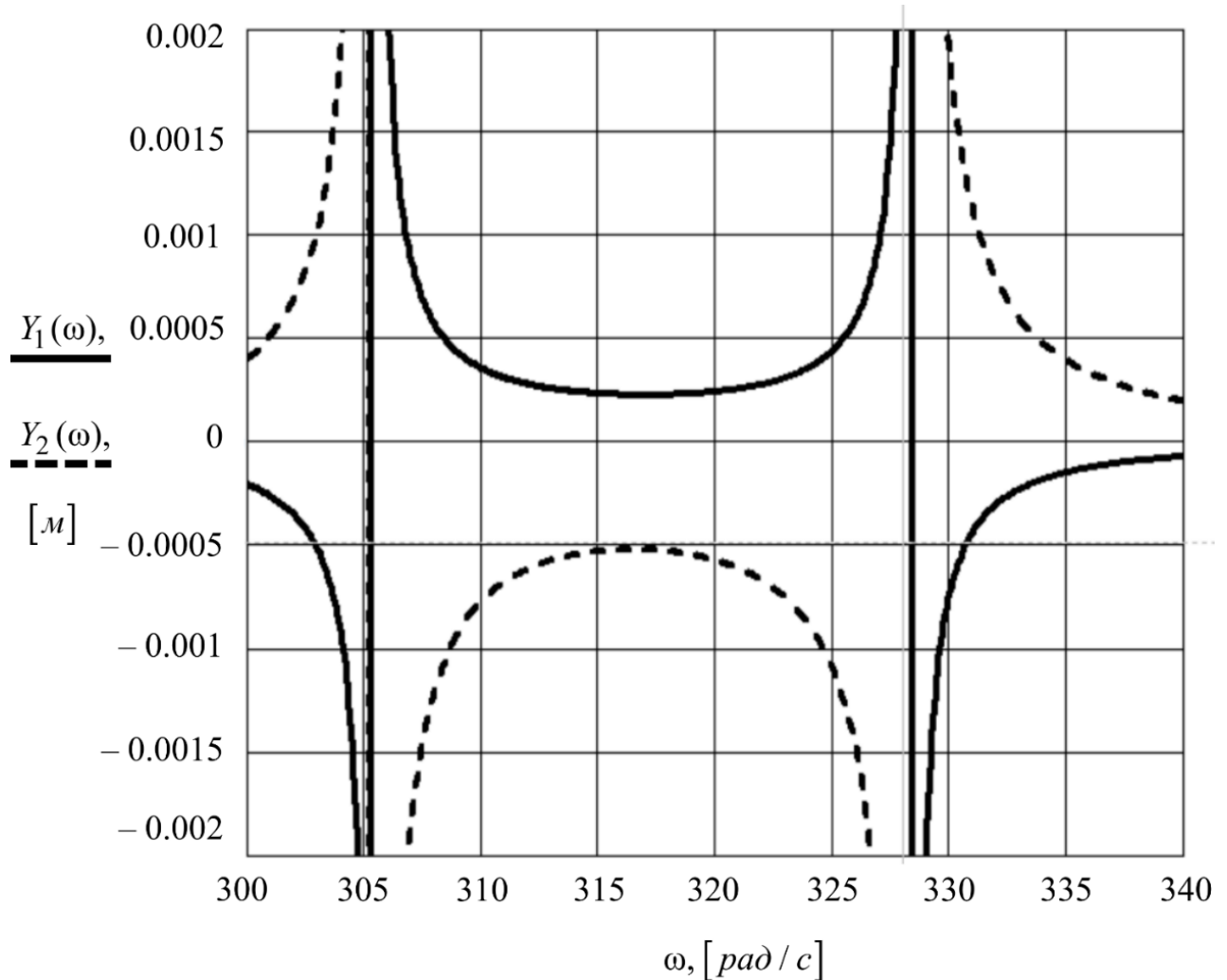
Отож, виходячи із системи рівнянь (3.76), амплітуди коливань  $Y_1(\omega)$  та  $Y_2(\omega)$  визначатимуться згідно:

$$Y_1(\omega) = c_{12} \frac{R_1(\omega) + R_2(\omega) + F}{\omega^2(m_1 m_2 \omega^2 - m_1 c_{12} - m_2 c_{12})}; \quad (3.77)$$

$$Y_2(\omega) = (c_{12} - m_1 \omega^2) \frac{R_1(\omega) + R_2(\omega) + F}{\omega^2(m_1 m_2 \omega^2 - m_1 c_{12} - m_2 c_{12})}. \quad (3.78)$$



Використовуючи залежності (3.77), (3.78) (див. додаток Н) побудовано амплітудно-частотну характеристику дискретно-континуальної МКС з електромагнітним приводом, що зображена на рис. 3.21.



**Рис. 3.21.** Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуальної міжрезонансної МКС

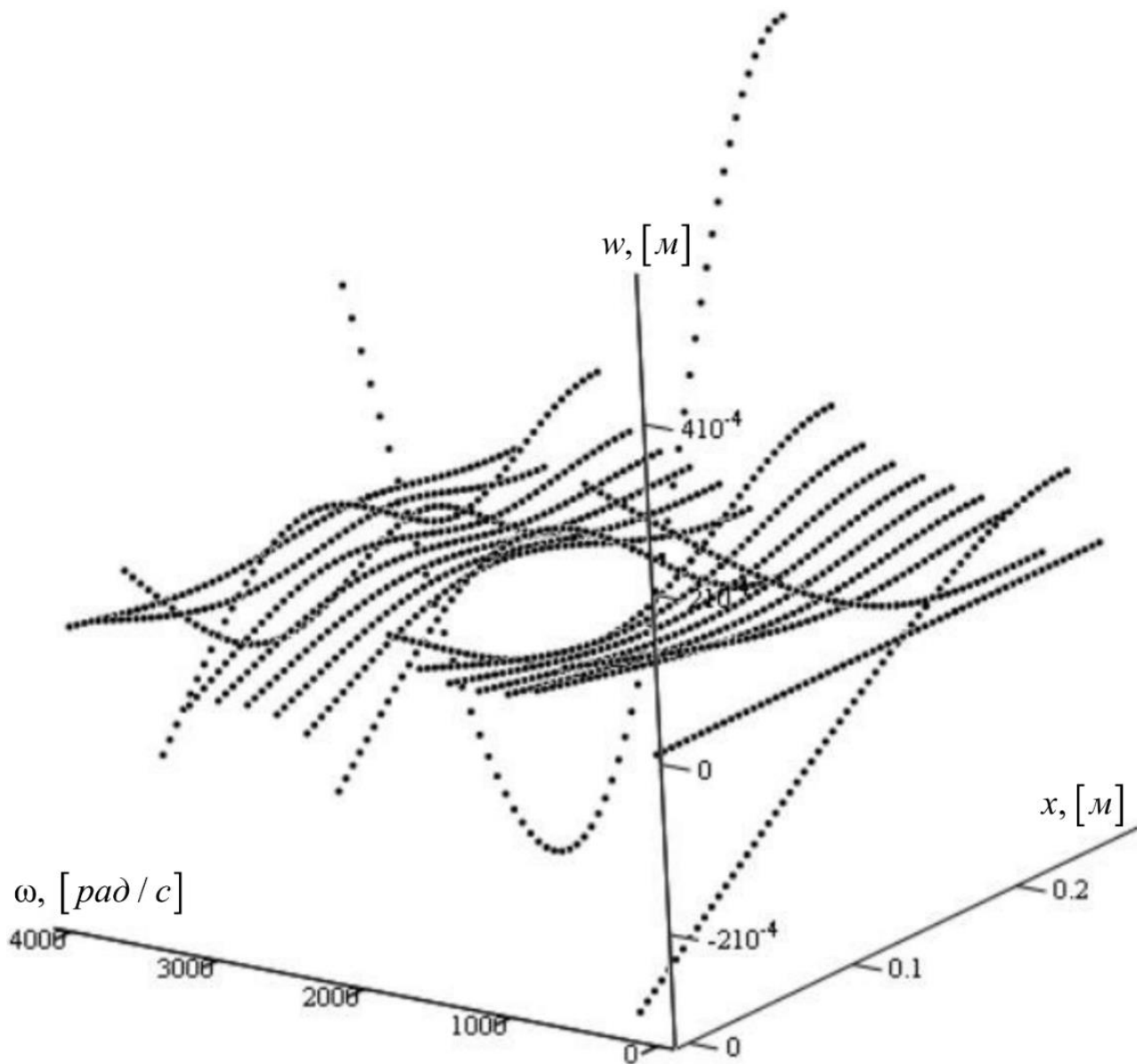
З рис. 3.21 видно, що в діапазоні частот  $\omega = 300 \dots 340 \text{ рад/с}$  утворюються два резонансних піки. Вони формуються на частотах  $\omega_{ndc1} = 306 \text{ рад/с}$  і  $\omega_{ndc2} = 328 \text{ рад/с}$ . Дані значення дещо відрізняються від закладених в математичну модель еталонної дискретної тримасової міжрезонансної МКС  $\Omega_{n1} = 308 \text{ рад/с}$  і  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад/с}$ . Проте дана похибка не є суттєвою, та дозволяє

системі працювати на частоті вимушених коливань  $\Omega_f = 314 \text{ рад/с}$  в міжрезонансній високоефективній зоні. Отже можна стверджувати, що запропоновані математичні моделі розрахунку параметрів континуальної ділянки та математична модель дискретно-континуальної міжрезонансної МКС надають можливість спроектувати високоефективне вібраційне технологічне обладнання.

Варто відзначити, що для МКС з безмежною кількістю ступенів вільності характерним явищем є полічастотність [5]. У таких системах може виникати нескінченна кількість частотних складових. Це відрізняє системи з безмежною кількістю ступенів вільності від систем з обмеженою кількістю ступенів вільності, де спектр зазвичай обмежений певним дискретним набором частот. Полічастотність означає, що в системі можуть бути присутні коливання з будь-якою можливою частотою у певному діапазоні. Це може мати важливі наслідки для поведінки системи, оскільки різноманітні спектральні складові системи можуть взаємодіяти між собою, впливаючи на її стан та динаміку. Дослідження полічастотності дозволяє краще розуміти та моделювати динамічні системи та взаємодії між їхніми компонентами.

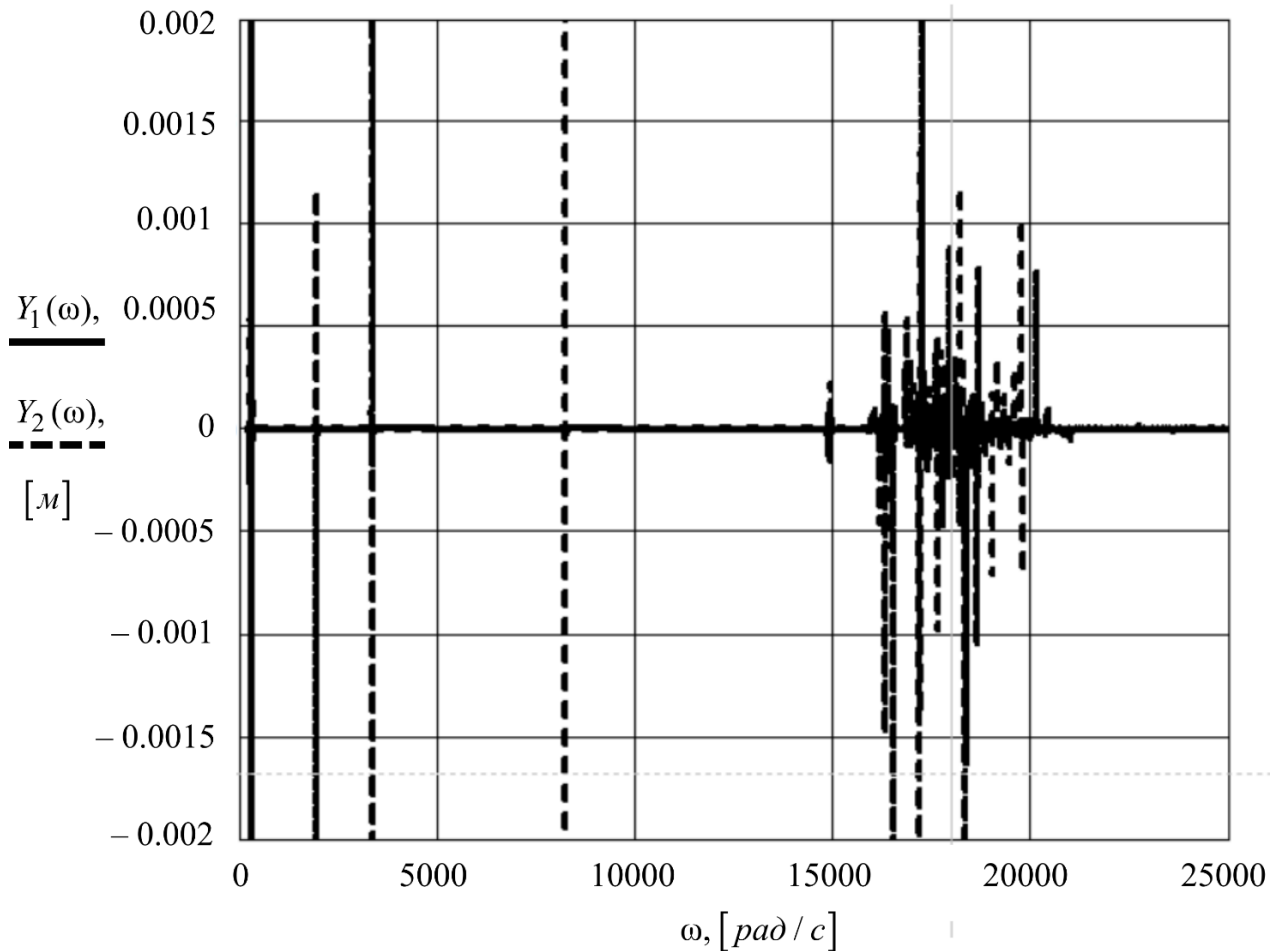
Важливим етапом у дослідженні полічастотності є визначення прогинів континуальної ділянки, синтезованої у дискретну модель при різних частотах збурення даної МКС. Вони дозволяють оцінити поведінку континуальної ділянки з врахуванням того, що вона взаємодіє з активною та проміжною масами МКС. Для цього побудовано графік залежності прогинів половини пластини від частоти вимушених коливань (рис. 3.22).

З рис. 3.22 можна помітити, що континуальна ділянка отримує безліч резонансних піків при збуренні такої гібридної МКС в діапазоні частот  $\omega = 0 \dots 4000 \text{ рад/с}$ .



*Рис. 3.22. Графік залежності прогинів половини пластини від частоти вимушених коливань дискретно-континуальної міжрезонансної системи*

Для підтвердження адекватності отриманих математичних моделей, а саме реакції дискретної системи вібраційної машини на введення полічастотної континуальної ділянки в якості реактивної маси, було побудовано графік полічастотного відгуку дискретно-континуальної міжрезонансної МКС на широкому діапазоні частот, включно до  $25000 \text{ rad/s}$  (рис. 3.23).



*Рис. 3.23. Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційної машини з електромагнітним приводом на широкому діапазоні частот*

Як видно з рис. 3.23, насправді дискретна система під впливом континуальної ділянки, що має безмежну кількість ступенів вільності, отримує, відповідно, безліч резонансних піків на широкому діапазоні частот, які є ознакою даного роду гібридних систем.

### 3.8. Висновки до третього розділу

1. Запропоновано розрахункову схему дискретно-континуальної міжрезонансної МКС на основі електромагнітного приводу, як найперспективнішу структуру для реалізації вискоелективних режимів роботи,

у якої активна та проміжна маси є дискретними (абсолютно твердими тілами), а реактивна маса є континуальною (тіло з розподіленими параметрами). В якості континуальної ділянки використано пластину, яка є легкою і володіє певною жорсткістю. Зважаючи на те, що умови закріплення пружної пластини вибрано складними, які не дозволяють отримати точний розв'язок за допомогою відомих на даний момент методів розрахунку, запропоновано встановлювати першу власну частоту коливань пластини з використанням наближених методів розрахунку.

2. Розраховано власну частоту пластини з використанням функцій Крилова. Даний метод дозволив розраховувати першу власну частоту коливань пластини, як тіла з розподіленими параметрами, з припущенням, що це стержень (коливання здійснюються по одній координаті). Отримане значення першої власної частоти  $\omega_{nK} = 309,235 \text{ рад/с}$  за допомогою функцій Крилова знаходиться в околі вимушеної частоти коливань системи  $\omega_f = 314 \text{ рад/с}$  та є близьким до розрахункової парціальної частоти коливань  $\omega_p = 312,545 \text{ рад/с}$ , що дозволяє МКС працювати у міжрезонансній зоні.

3. Засобами програмного модуля Modal, який працює в оболонці продукту Ansys Workbench, проведено імітаційне моделювання першої власної частоти пластини. Отримана завдяки імітаційному моделюванню колова частота  $\omega_{nF} = 310,546 \text{ рад/с}$  є більшою від значення власної частоти пластини  $\omega_{nK} = 309,235 \text{ рад/с}$  встановленої за допомогою функцій Крилова, однак різниця є невеликою. Виявлено, що пластина прогинається за певною формою не тільки у повздовжньому напрямку, але також і в поперечному. При цьому поверхня пластини при прогині утворює поверхню гіперболоїда.

4. Проведено розрахунок власної частоти пластини з використанням гармонійних та балочних функцій по двох координатах за допомогою методу Релея-Рітца. В даному наближеному методі розрахунку власної частоти реактивна маса розглядається не як стержень, а власне як пластина, яка здійснює поперечні коливання по осях  $Ox$  та  $Oz$ . Перша власна колова частота коливань

пластини при такому методі розрахунку становитиме  $\omega_{nR} = 311,797 \text{ рад} / \text{с}$  і є близькою до значень, отриманих за допомогою вище згаданих методів розрахунку власних частот.

5. Враховуючи, що прогин пластини, шарнірно закріпленої у чотирьох точках, утворює поверхню гіперболоїда, додатково проведено розрахунок власної частоти пластини методом Релея-Рітца з припущенням, що її прогин відбувається по гіперболоїдній поверхні. Знайдене даним методом значення власної частоти коливань пластини  $\nu_{nH} = 49,816 \text{ Гц}$  забезпечує необхідну точність розрахунків. Варто зауважити, що на відміну від розрахунку власної частоти пластини з використанням функцій Крилова, дана методика є менш трудомісткою.

6. З метою удосвірення адекватності параметрів пластини параметрам реактивної маси дискретної моделі було встановлено зведені масу та жорсткість пластини. Зведена маса становить  $m_{lmp} = 0,364 \text{ кг}$  а зведена жорсткість  $c_{lmp} = 3,525 \cdot 10^4 \text{ Н} / \text{м}$ , що узгоджується із результатами, отриманими за виразами (2.14) та (2.16). Власна частота пластини, виходячи з параметрів маси та жорсткості, становить  $\omega_{lmp} = 49,563 \text{ Гц}$ , що відповідає закладеним у континуальну ділянку параметрам.

7. Запропонована математична модель дискретно-континуальної міжрезонансної МКС на основі електромагнітного приводу, в яку модель континуальної ділянки ввійшла через реакції в опорах. Було сформовано залежності для визначення амплітуд коливань активної  $Y_1(\omega)$  та проміжної  $Y_2(\omega)$  мас системи від частоти. При даних розрахунках два резонансних піки формуються на частотах  $\omega_{ndc1} = 306 \text{ рад} / \text{с}$  та  $\omega_{ndc2} = 328 \text{ рад} / \text{с}$ . Дані значення дещо відрізняються від закладених в математичну модель еталонної дискретної тримасової міжрезонансної МКС  $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад} / \text{с}$  та  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад} / \text{с}$ . Проте дана

похибка не є суттєвою, та дозволяє МКС працювати на частоті вимушених коливань  $\Omega_f = 314 \text{ рад} / \text{с}$  у міжрезонансній високоефективній зоні коливань.

8. Встановлено, що завдяки введенню континуальної ділянки у дискретну модель міжрезонансної МКС з електромагнітним приводом, отримана полічастотна дискретно-континуальна МКС, яка безліч резонансних піків.

## РОЗДІЛ 4

### КОНСТРУКТИВНЕ РОЗРОБЛЕННЯ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО ВІБРАЦІЙНОГО СТОЛА З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ

*У розділі запропонована конструкція дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. Описано принцип роботи даного вібраційного технологічного обладнання. Встановлено експлуатаційні параметри вібраційного столу, інерційні параметри коливальних мас та жорсткість системи резонансних пружних елементів. Підтверджено відповідність параметрів запропонованої твердотілої моделі вібраційного столу з електромагнітним приводом із закладеними параметрами математичної моделі еталонної тримасової МКС та синтезованої на її основі дискретно-континуальної МКС. Проведено розрахунок на міцність континуальної ділянки. Підібрано конструкцію електромагнітного приводу вібраційного столу. Досліджено часові залежності руху коливальних мас з врахуванням процесів, що протікають в електромагнітному вібробуджувачі. Проведено числові розрахунки тривимірного магнітного поля електромагнітного приводу вібраційного столу.*

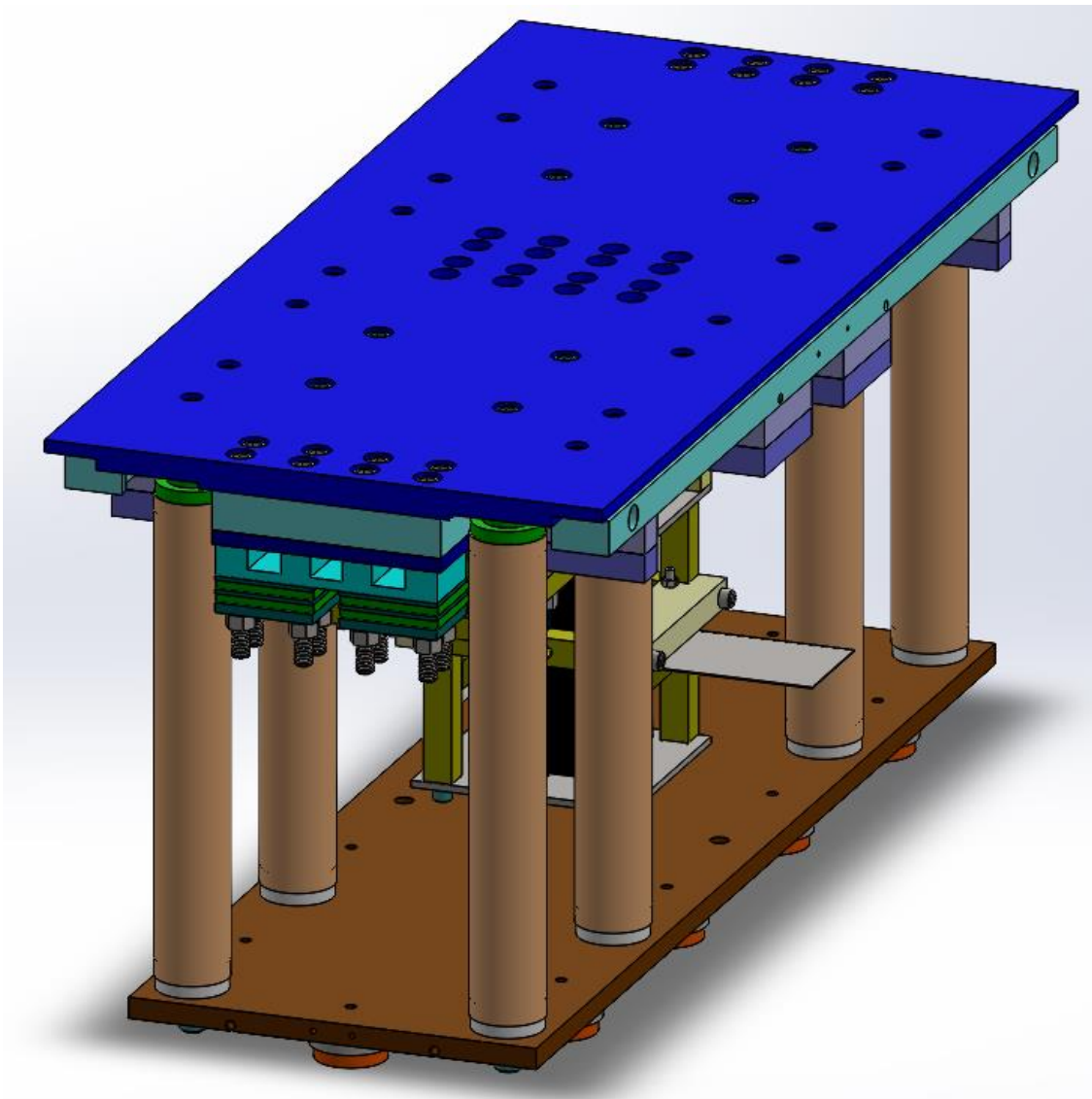
#### **4.1. Твердотіла модель вібраційного столу з електромагнітним приводом**

Згідно проведених у розділах 2 та 3 розрахунків, запропоновано твердотілу модель дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом (рис. 4.1). Роль робочого органу в даній конструкції виконує активна маса, яка здійснює прямолінійний рух вздовж осі  $Oy$ .

Дискретно-континуальний міжрезонансний вібраційний стіл з електромагнітним приводом призначений для ущільнення бетонних сумішей, що



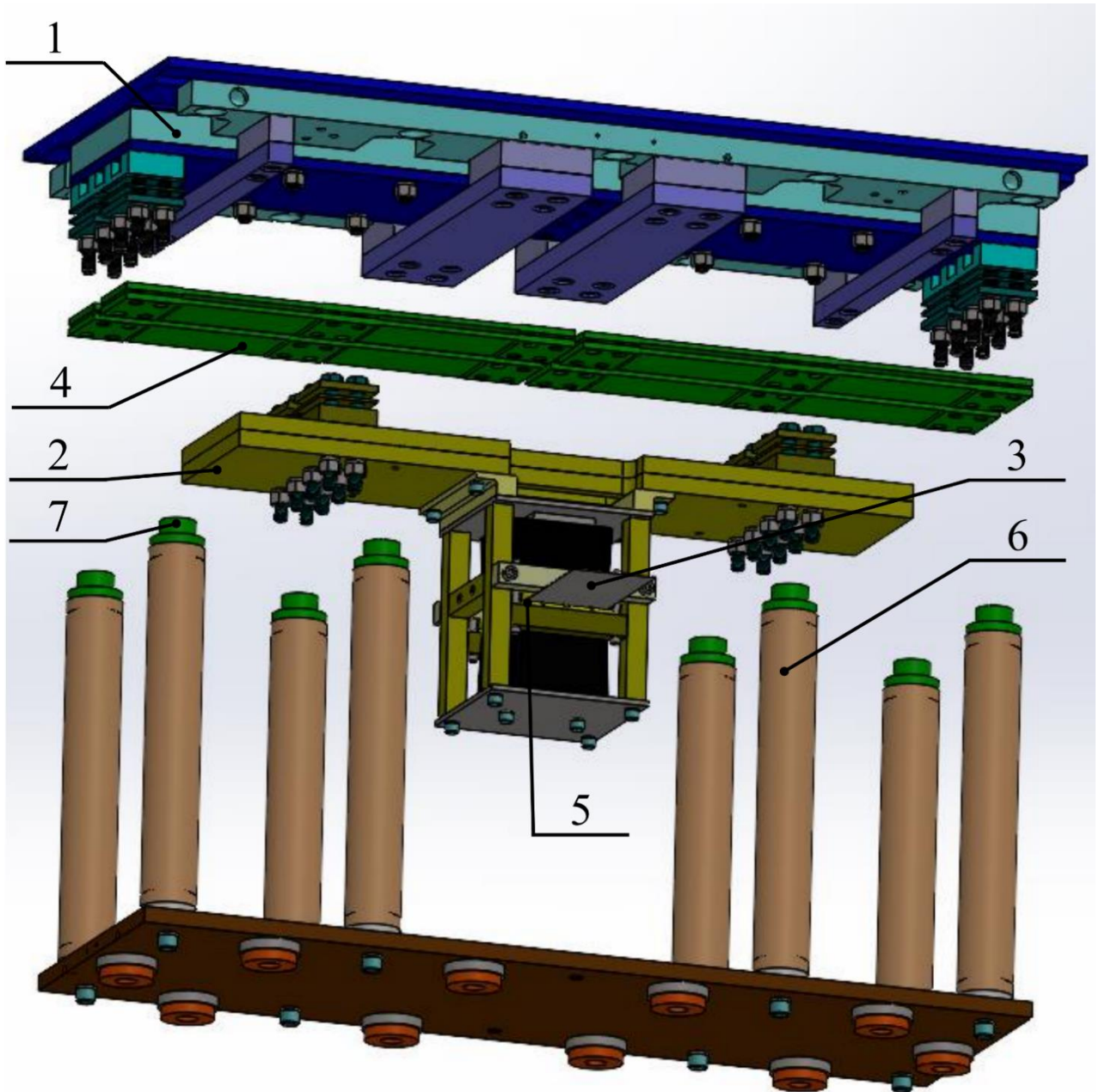
використовується при формуванні бетонних та залізобетонних виробів. Також даний вібраційний стіл можливо використовувати у ливарному виробництві для ущільнення формувальної суміші в процесі виготовлення форм. За рахунок вібрації, коли залишки повітря та води виходять нагору, суміш заповнює порожнини, забезпечуючи високу міцність виробів.



*Рис. 4.1. Твердотіла модель дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу*

Вібраційний стіл з електромагнітним приводом (рис. 4.2) містить першу 1 та другу 2 коливальні маси, з'єднані між собою пружним вузлом 4. Третя коливальна маса 3 представлена у вигляді пластини і з'єднана з другою

недеформівною коливальною масою 2 за допомогою шарнірних опор 5. Третя коливальна маса 3, будучи гнучким тілом, наділена одночасно інерційними і жорсткісними характеристиками. Уся конструкція виконана симетрично та кріпиться до нерухої основи 6 за допомогою віброізоляторів 7.



*Рис. 4.2. Рознесений вигляд дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу: 1 – активна маса; 2 – поміжна маса; 3 – континуальна ділянка (пластина); 4 – пружні елементи, що з'єднують активну та проміжну маси; 5 – шарнірні опори; 6 – нерухома основа; 7 – віброізолятори*

Вібраційний стіл з електромагнітним приводом приводиться в рух за допомогою знакозмінної сили збурення, що прикладається до третьої коливальної маси 3. Третя коливальна маса 3, що вільно прогинається на шарнірних опорах 5 та має консольні виступи, ефективно передає збурення на другу коливальну масу 2, яка наділена лише інерційними характеристиками. Перша коливальна маса 1, що наділена лише інерційними характеристиками, приводиться в рух кінематично від другої коливальної маси 2 через пружний вузол 4, що наділений лише жорсткісними характеристиками.

Опишемо параметри дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом [33]. Поверхня робочого органу вібраційного столу має довжину в 900 мм та ширину 400 мм. Приймаємо, що перевантаження на робочому органі становить  $\zeta = 4g$ , а режим роботи – міжрезонансний на частоті вимушених коливань  $\nu_f = 50 \text{ Гц}$ . Дана частота вимушених коливань відповідає частоті змінного струму в електромережі України.

Згідно з проведеним моделюванням в програмному продукті SOLIDWORKS, маса робочого органу вібраційного столу становить  $m_1 = 118 \text{ кг}$  (рис. 4.3).

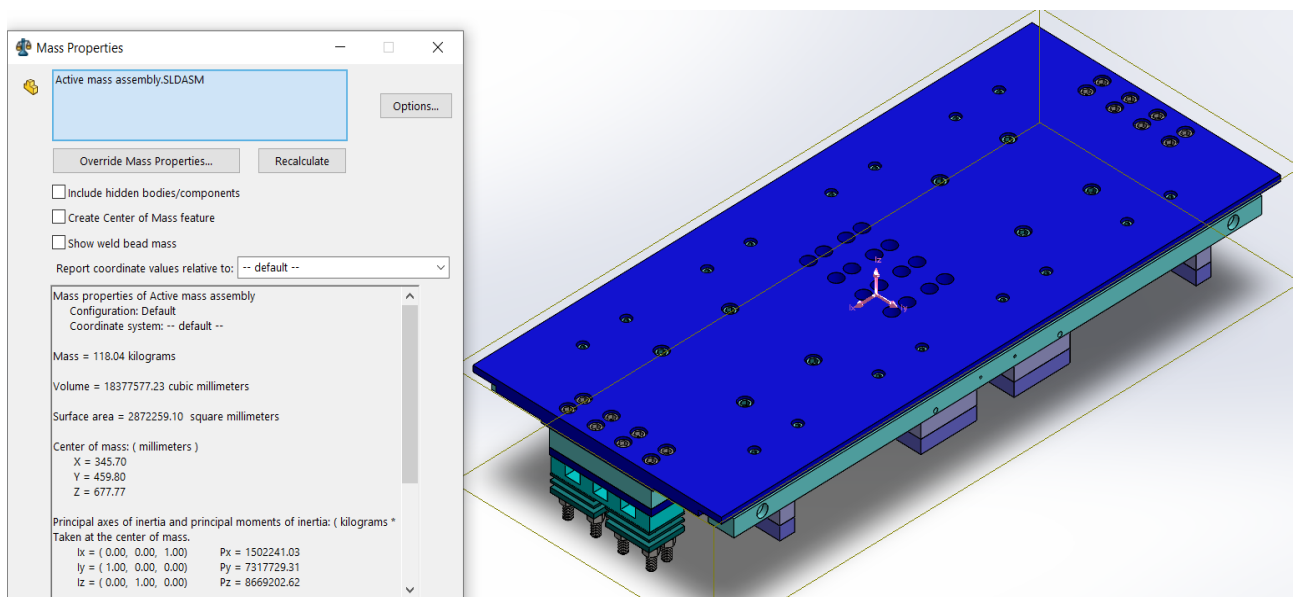
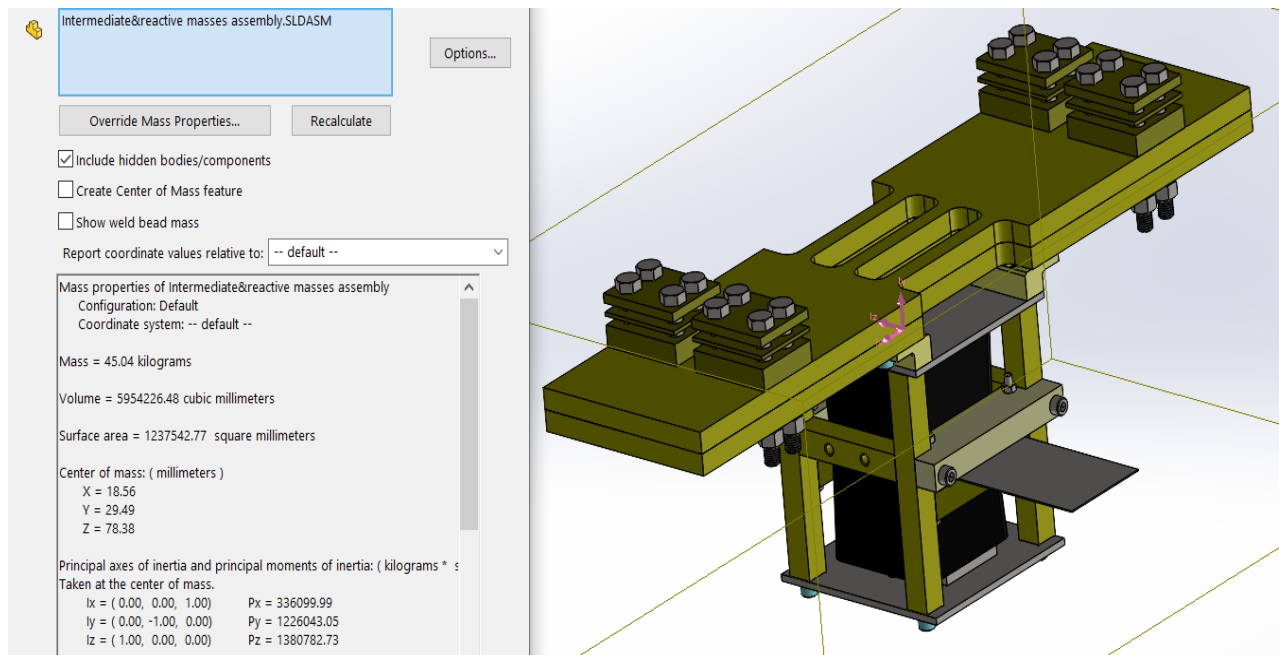


Рис. 4.3. Розрахунок маси робочого органу в SOLIDWORKS

Проміжна маса, згідно з моделюванням в SOLIDWORKS, має інерційне значення  $m_2 = 45 \text{ кг}$  (рис. 4.4).



*Рис. 4.4. Значення інерційного параметру проміжної маси в програмному продукті SOLIDWORKS*

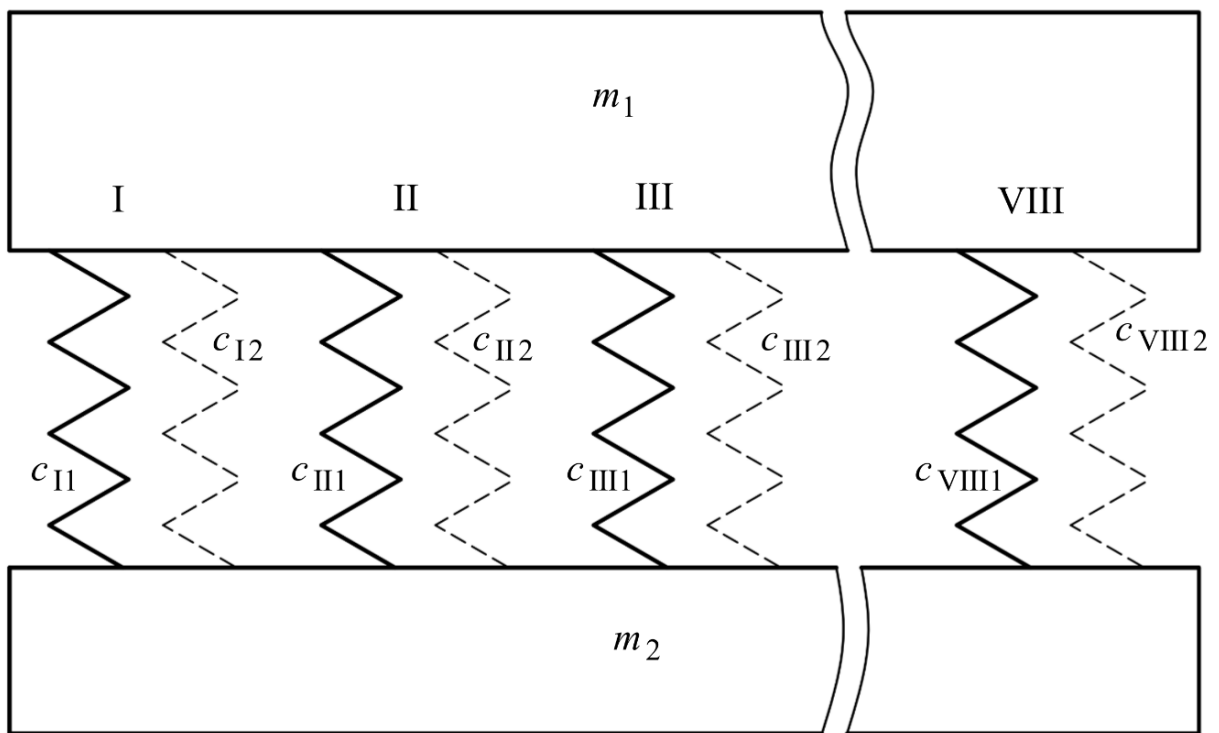
Вібраційний стіл з електромагнітним приводом встановлюється на фундамент за допомогою віброізоляторів, які закріплені до робочого органу.

Отже, інерційні значення активної та проміжної маси у даному конструктивному виконанні дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом становлять відповідно  $m_1 = 118 \text{ кг}$  та  $m_2 = 45 \text{ кг}$ , що відповідає закладеним у розділі 3 параметрам еталонної тримасової міжрезонансної МКС. Це дозволяє даній конструкції реалізовувати значний динамічний потенціал розглянутих коливальних структур.

## **4.2. Розрахунок системи резонансних пружних елементів МКС вібраційного столу**

Пружні елементи вібраційного столу відіграють важливу роль у забезпеченні високоефективних режимів роботи, тому розрахунок параметрів

пружин є необхідною складовою при проектуванні вібраційного технологічного обладнання. Для проектування дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом, зображеного на рис. 4.1 та рис. 4.2, в якості резонансних пружних елементів було використано вісім однакових плоских пластин, кожна з яких має дві робочі ділянки. При цьому, за рахунок різних методів закріплення пластин, можливо використовувати як дві, так і одну робочу ділянку (що і застосовується в даному варіанті вібраційного столу). Наявність додаткових незадіяних робочих ділянок дозволяє при потребі змінювати з певною дискретністю жорсткість  $c_{12}$  МКС. Схема закріплення резонансних пружних елементів показана на рис. 4.5.



*Рис. 4.5. Схема закріплення резонансних пружних елементів, де римськими цифрами I – VIII позначено пластини, кожна з яких має дві робочі ділянки із жорсткостями  $c_{i1}$  та  $c_{i2}$ . При цьому робочі ділянки  $c_{i2}$  незадіяні (їхня жорсткість не враховується)*

Як видно з рис. 4.5, сумарна жорсткість резонансних пружних елементів, які з'єднують активну та проміжну коливальні маси вібраційного столу дорівнює сумі робочих ділянок усіх пластин:

$$c_{12} = c_{I1} + c_{II1} + c_{III1} + c_{IV1} + \dots + c_{VIII1}. \quad (4.1)$$

При цьому, враховуючи кількість пластин та рівність жорсткостей усіх робочих ділянок, справедливим буде рівняння:

$$c_{i1} = c_{12} / 8. \quad (4.2)$$

Мінімально необхідна довжина робочої ділянки пружного елемента визначається за виразом [46]:

$$l_{\min} = 3 \cdot Y_{rel} \cdot k_{sc} \sqrt[3]{\frac{c_{12} \cdot E^2}{h_c \cdot n \cdot k_f [\sigma_{-1}]^3}} =$$

$$= 3 \cdot 0,001449 \cdot 1,2 \sqrt[3]{\frac{3,455 \cdot 10^6 \cdot (2,1 \cdot 10^{11})^2}{0,07 \cdot 8 \cdot 0,75 \cdot (3,92 \cdot 10^8)^3}} = 0,106 \text{ м}, \quad (4.3)$$

де  $Y_{rel} = Y_1 + Y_2 = Y_1(1 + m_1 / m_2) = 0,0004(1 + 118 / 45) = 1,449 \text{ мм}$  – відносна амплітуда коливань;

$k_{sc} = 1,2$  – коефіцієнт концентрації напружень;

$c_{12} = 3,455 \cdot 10^6 \text{ Н / м}$  – сумарна жорсткість резонансних пружних елементів,

які з'єднують активну та проміжну коливальні маси;

$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль пружності першого роду для сталі 60С2 (матеріалу пружних елементів);

$h_c = 0,07 \text{ м}$  – ширина пружного елемента;

$n = 8$  – кількість діючих робочих ділянок;

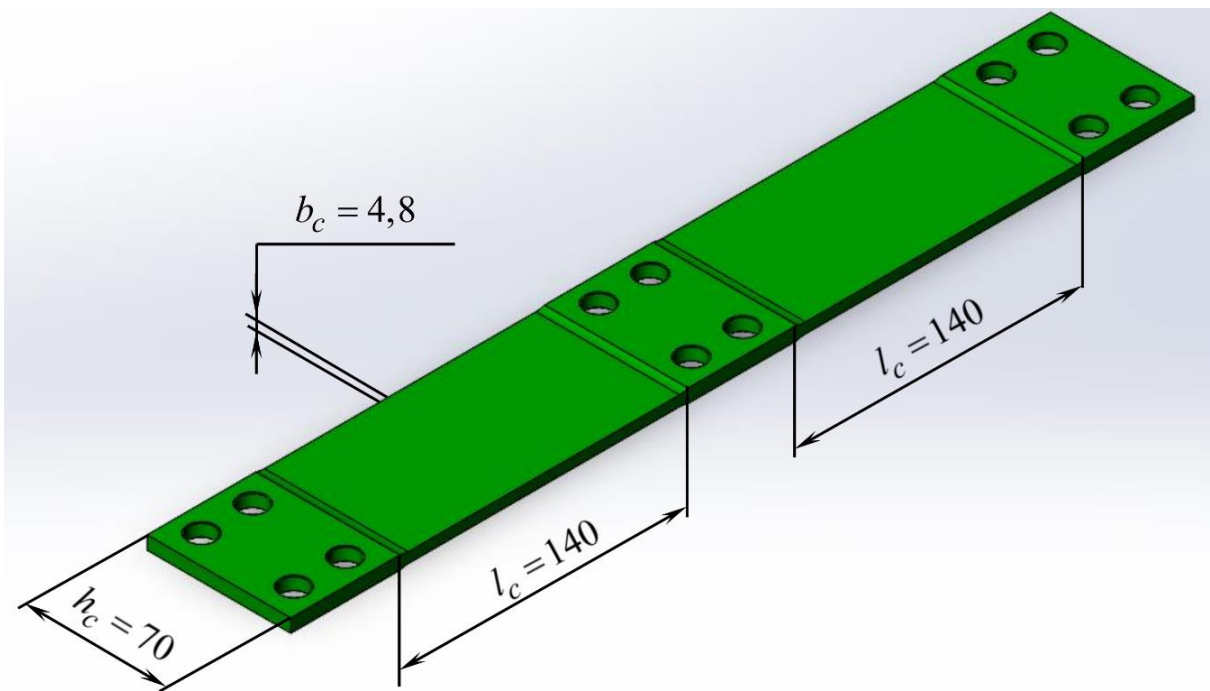
$k_f = 0,75$  – коефіцієнт защемлення пружних елементів;

$[\sigma_{-1}] = 350 \text{ МПа}$  – допустимі напруження, що виникають в пружних елементах [77].

Приймаємо довжину робочої ділянки  $l_c = 140$  мм. Товщину робочої ділянки пружного елемента, що матиме жорсткість  $c_{i1} = c_{i2} / 8 = 4,32 \cdot 10^5$  Н / м, можна встановити з рівняння [46]:

$$b_c = \sqrt[3]{\frac{c_{i1} \cdot l_c^3}{h_c \cdot k_f \cdot E}} = \sqrt[3]{\frac{4,32 \cdot 10^5 \cdot 0,14^3}{0,07 \cdot 0,75 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}}} = 4,8 \text{ мм.} \quad (4.4)$$

Пружний елемент із розрахованими розмірами робочої ділянки зображено на рис. 4.6.



**Рис. 4.6.** Геометричні розміри робочої ділянки пружного елемента

Зважаючи на те, що прийнята довжина робочої ділянки пружного елемента значно більша за встановлене із рівняння (4.3) мінімальне значення довжини, максимальні напруження, що виникатимуть у пружному елементі, становитимуть:

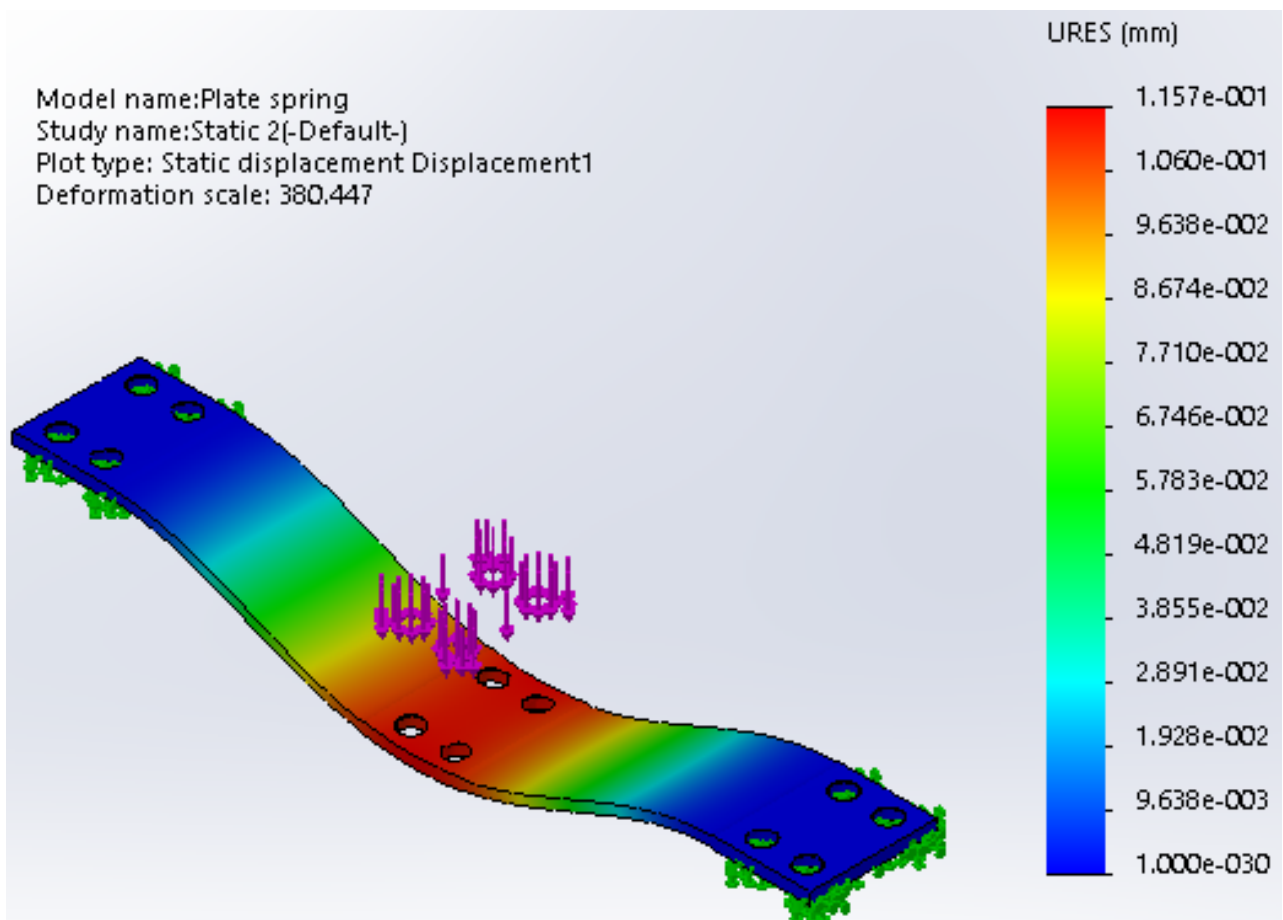
$$\sigma_{c \max} = \frac{3 \cdot k_{sc} \cdot b_c \cdot E \cdot Y_{rel}}{l_c^2} = \frac{3 \cdot 1,2 \cdot 0,0048 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,001449}{0,14^2} = 268,3 \text{ МПа,} \quad (4.5)$$

що є менше за гранично допустимі значення напружень для матеріалу пружного елемента.

Для перевірки жорсткості пружного елемента використано метод скінченних елементів. Навантаживши пружний елемент (рис. 4.7) тестовим зусиллям  $P_{ts} = 100 \text{ Н}$ , отримано величину його прогину  $\delta_c = 0,1157 \text{ мм} = 1,157 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ . Враховуючи, що при даному навантаженні працювали дві робочі ділянки пружного елемента, жорсткість однієї становитиме:

$$c_{i1} = P_{ts} / (2 \cdot \delta) = 100 / (2 \cdot 1,157 \cdot 10^{-4}) = 4,32 \cdot 10^5 \text{ Н / м}, \quad (4.6)$$

що відповідає необхідному для забезпечення високоефективних міжрезонансних режимів роботи значенню жорсткості пружного вузла.



**Рис. 4.7.** Схема прогинів резонансного пружного елемента під дією тестового навантаження  $P_{ts} = 100 \text{ Н}$



Отож, зважаючи на результати розрахунку резонансного пружного елемента, який з'єднує активну та проміжну коливальні маси вібраційного столу, можна зробити висновок, що підібрані геометричні розміри робочої ділянки та матеріал пластини дозволяють отримувати необхідні для реалізації високоефективних режимів роботи значення жорсткості, забезпечуючи при цьому умову міцності.

### 4.3. Розрахунок континуальної ділянки вібраційного столу на міцність

Для розрахунку на міцність континуальної ділянки необхідно розрахувати моменти та нормальні напруження при плоскому згинанні пластини [2, 26, 75]. При розрахунках на міцність Формула Нав'є є базовим рівнянням, яке дозволяє визначати нормальні напруження в будь-якій точці балки при її чистому згині.

$$\sigma = M y / J_z. \quad (4.7)$$

Враховуючи, що пластина має постійний поперечний переріз вздовж осі  $x$ , залежність моменту від координати точки пластини набуде вигляду [75]:

$$M(x) = EJ_z \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (4.8)$$

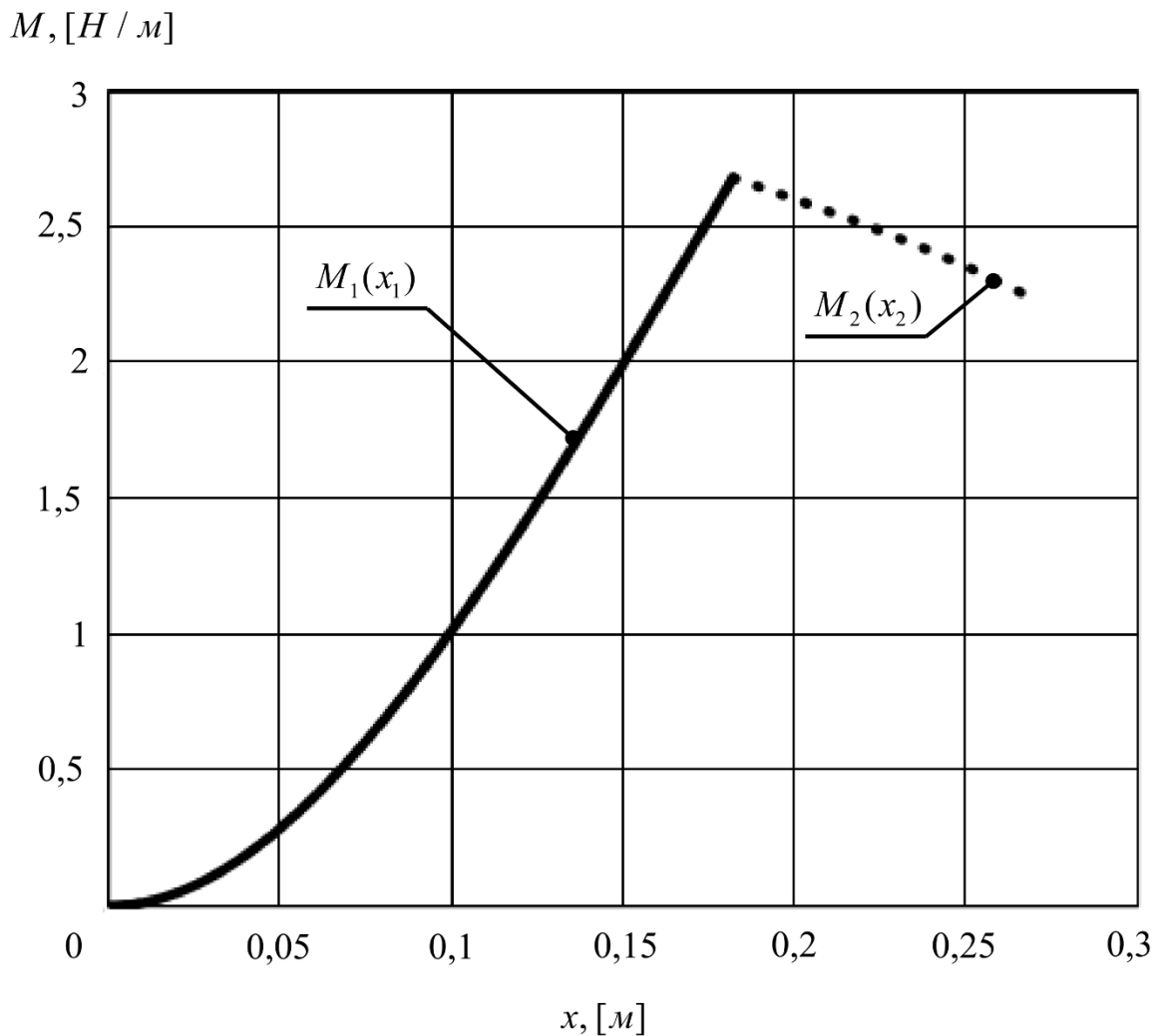
Використовуючи вирази (3.8) та (4.8) для досліджуваної пластини, встановимо рівняння для знаходження згинальних моментів у довільній точці ділянки 1 (рис. 3.8) (на діапазоні  $x_1 \in [0...0,182]$ ):

$$M_1(x_1) = EJ_z \frac{d^2 w_1(x_1)}{dx_1^2} = EJ_z \times \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}(\xi x_1) \xi^2 - \cos(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) + B \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{sh}(\xi x_1) \xi^2 - \sin(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) \right]. \quad (4.9)$$

Моменти на ділянці 2 пластини (рис. 3.8) (при  $x_2 \in [0,182...0,27]$ ), використовуючи вирази (3.24) та (4.8) можна визначити згідно залежності:

$$\begin{aligned}
 M_2(x_2) = EJ_z \frac{d^2 w_2(x_2)}{dx_2^2} = EJ_z \cdot & \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}(\xi x_2) \xi^2 - \cos(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + \right. \\
 & + B \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{sh}(\xi x_2) \xi^2 - \sin(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + \\
 & \left. + \frac{R_1}{\xi^3 EJ_z} \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 + \sin(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 \right) \right].
 \end{aligned}
 \quad (4.10)$$

При симетричному закріпленні пластини, для розрахунку згинальних моментів, що діють на неї, достатньо встановити рівняння розподілу моментів на поверхні двох її ділянок. Отож, провівши розрахунки згідно виразів (4.9), (4.10), отримано графік розподілу згинальних моментів по довжині пластини на ділянках 1 та 2 (рис. 4.8).



**Рис. 4.8.** Схема згинальних моментів на ділянках 1 та 2 пластини

Як видно з рис. 4.8, найбільший згинальний момент діє в точці шарнірного закріплення пластини. Максимальне значення згинального моменту становить  $M_{\max} = 2,684 H / м$ .

Найбільші напруження при розрахунку континуальної ділянки на міцність виникатимуть на поверхні пластини. Використовуючи вираз (4.8) та рівняння Нав'є, функція розподілу нормальних напружень на поверхні пластини можливо знайти з формули [75]:

$$\sigma(x) = \frac{E b_n}{2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (4.11)$$

Використовуючи вирази (3.8) та (4.11) для досліджуваної пластини, встановимо рівняння для знаходження напружень у довільній точці ділянки 1 (рис. 3.8) (на діапазоні  $x_1 \in [0 \dots 0,182]$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1) &= \frac{E b_n}{2} \cdot \frac{d^2 w_1(x_1)}{dx_1^2} = \frac{E b_n}{2} \times \\ &\times \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}(\xi x_1) \xi^2 - \cos(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) + B \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{sh}(\xi x_1) \xi^2 - \sin(\xi x_1) \xi^2 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Напруження на ділянці 2 (рис. 3.8) пластини (при  $x_2 \in [0,182 \dots 0,27]$ ), використовуючи вирази (4.1) та (2.9) можна визначити згідно залежності:

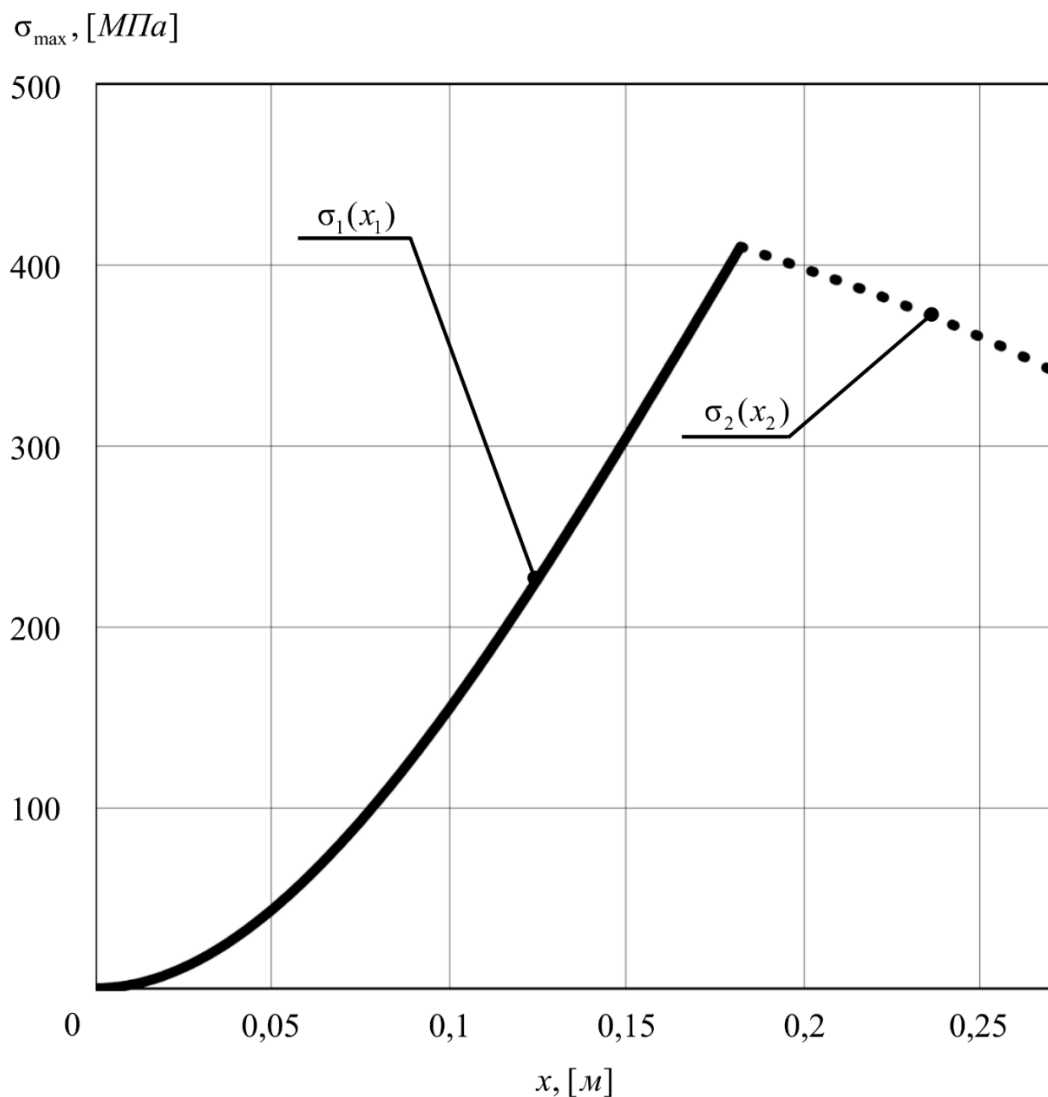
$$\begin{aligned} \sigma_2(x_2) &= \frac{E b_n}{2} \cdot \frac{d^2 w_2(x_2)}{dx_2^2} = \frac{E b_n}{2} \cdot \left[ A \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch}(\xi x_2) \xi^2 - \cos(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + \right. \\ &+ B \left( \frac{1}{2} \left( \operatorname{sh}(\xi x_2) \xi^2 - \sin(\xi x_2) \xi^2 \right) \right) + \\ &\left. + \frac{R_1}{\xi^3 E J_z} \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 + \sin(\xi(x_2 - L_1)) \xi^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Провівши розрахунок напружень, що виникають в пластині згідно виразів (4.12), (4.13), отримано графік розподілу напружень по довжині стержня на ділянках 1 та 2, зображений на рис. 4.9.

Як видно з рис. 4.9, найбільші напруження в пластині утворюються в місці шарнірного закріплення опор. Дана точка є місцем перетину першої та другої

ділянок пластини. Напруження в даній точці становить  $\sigma_{\max} = 409,8 \text{ МПа}$ . Допустиме напруження на згин для матеріалу пластини (сталі) становить  $[\sigma_{-1}] = 460 \text{ МПа}$ , тож умова міцності для континуальної ділянки у вібраційній машині витримується. Також варто враховувати, що математична модель для розрахунку прогинів, подана у розділі 3, не враховує опору повітря при коливанні пластини та дисипацію енергії в її матеріалі.

Тож можна стверджувати, що континуальна ділянка із заданими параметрами дозволяє забезпечити високоефективні міжрезонансні режими роботи дискретно-континуальним вібраційним столом з електромагнітним приводом.



**Рис. 4.9.** Схема поперечних напружень на ділянках 1 та 2 пластини

Отже, попри великі амплітуди коливань вільних кінців пластини, що дозволяють створити необхідне збурення робочого органу, пластина витримує умову міцності для забезпечення міжрезонансних режимів роботи у вібраційному столі з електромагнітним приводом, та може бути використана як континуальна ділянка.

#### **4.4. Розроблення та моделювання електромагнітного приводу вібраційного столу**

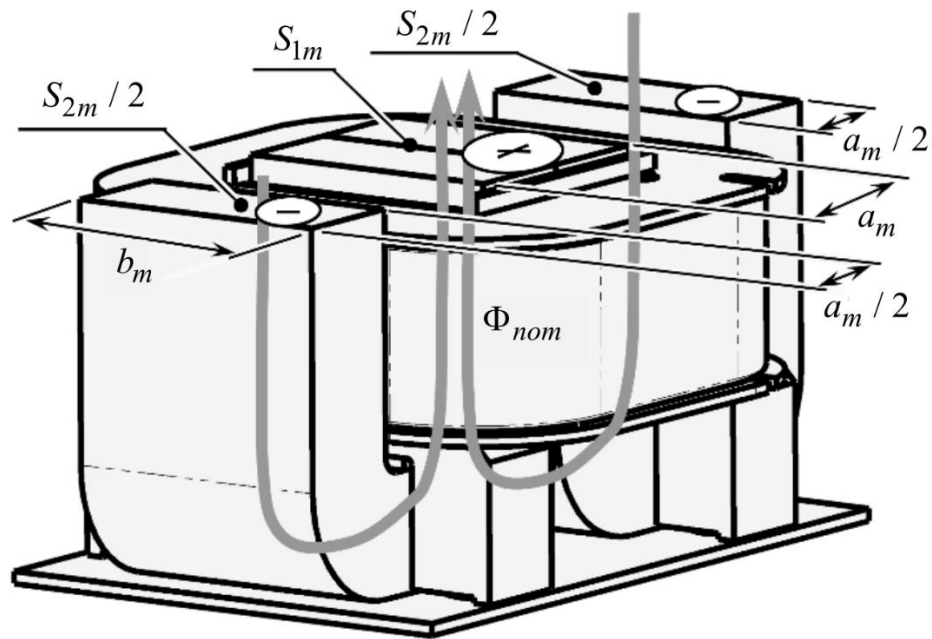
##### **4.4.1. Дослідження часових залежностей руху коливальних мас з врахуванням процесів, що протікають в електромагнітному віброзбуджувачі**

Виходячи із відомих вже силових параметрів системи, розрахованих в підрозділі 2.2, сформуємо необхідні для проектування вібраційної машини параметри електромагнітів. Для цього звестимемо часові залежності ходу коливальних мас розроблювальної системи із врахуванням процесів, які протікають в електромагнітному віброзбуджувачі. У системі рівнянь (2.8) знаходиться функція збурення від електромагнітів. Спробуємо її знайти через параметри електромагніту, які наведені на рис. 4.10.

Провідність полюсів магнітопроводу, у вибраному нами Ш-подібному електромагніті, через два полюси якого проходить один і той самий магнітний потік  $\Phi_{nom}$ , виходячи з рис. 4.10, становить [56]:

$$G_1 = G_2 = \mu_0 \frac{a_m \cdot b_m}{\delta_0} = 5,94 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}, \quad (4.14)$$

де  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$  – магнітна стала пустоти;  $\delta_0 = \Delta_a = 0,002 \text{ м}$  – величина зведеного повітряного зазору між статором і осердям електромагніта.



**Рис. 4.10.** Ш-подібне осердя з котушкою електромагніта, де  $a_m = 0,021$  м - ширина полюсів магнітопровода,  $b_m = 0,045$  м - товщина полюсів магнітопровода,  $S_{1m} = S_{2m} = a_m \cdot b_m = 0,000945$  м<sup>2</sup> - площа полюсів магнітопровода.

Сірим стрілками показаний напрям магнітного потоку  $\Phi_{nom}$

Коефіцієнт втрат, який враховує потоки випуклості електромагнітного поля знаходимо із виразу:

$$k_p = 1,6 + (170 \cdot \Delta_a)^2 = 1,72. \quad (4.15)$$

Індуктивність котушки електромагніта:

$$L_m = 2k_p \cdot \phi^2 \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} = 0,3 \text{ Гн}, \quad (4.16)$$

де  $\phi = 540$  – кількість витків котушки.

Для визначення часової залежності зміни напруженості опишемо за допомогою ряду Фур'є функцію зміни напруги:

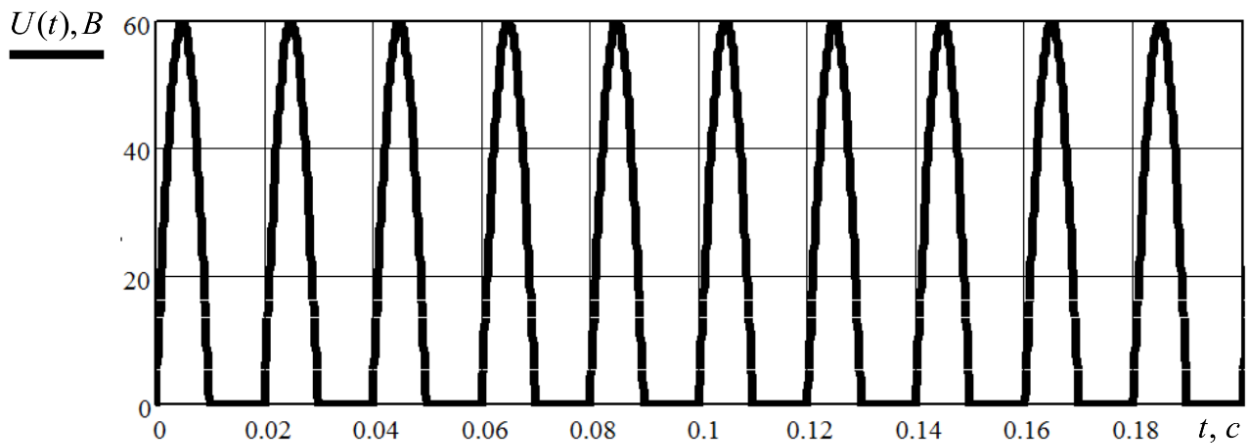
$$U(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2} \cdot \sin(\omega t) - \frac{2U}{\pi} \times \left( \frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \frac{\cos(8\omega t)}{7 \cdot 9} + \dots \right), \quad (4.17)$$

або умови:

$$U(t) = \begin{cases} U(t), \text{ при умові } U(t) > 0; \\ 0, \text{ при умові } U(t) \leq 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

де  $U = 60 \text{ В}$  – амплітудна величина напруги.

Із рівняння (4.17) та умови (4.18), підставивши відповідну амплітудну величину напруги, отримаємо графік зміни напруги в часі, яка зображена на рис. 4.11.



*Рис. 4.11. Графік зміни напруги в часі*

На рис. 4.11 очевидно, що згідно закладеної умови, напруга протікає тільки у додатний півперіод із встановленим амплітудним значенням  $60 \text{ В}$ .

Для опису закономірності зміни сили струму  $i(t)$ , який протікає (комутується) в котушці вібробуджувача, скористаємось умовою:

$$i(t) = \begin{cases} k(t) = Z(t) \cdot \left( \Theta(t) + \Lambda_m(t) - \left( e^{-\frac{R}{L_m} t} \cdot (N_m(t) + \Phi_m(t)) \right) \right), \text{ при } k(t) \geq 0; \\ 0, \text{ при } k(t) < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

де:

$$Z(t) = \left( 1 - \frac{A_m}{\Delta_a} \cdot \sin(\omega t + \xi_m) \right) \cdot U(t) \cdot e^{\frac{-A_m \cdot R}{\Delta \cdot \omega L_m} \cdot \cos(\omega t + \xi_m)}, \quad (4.20)$$

$$\Xi(t) = \frac{\sin(\alpha) \cdot (R \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot L_m \cdot \sin(2\pi t))}{\omega \cdot L_m}, \quad (4.21)$$

$$\Theta(t) = \frac{\omega L_m}{\omega^2 L_m^2 + R^2} \cdot \left( \frac{\cos(\alpha) \cdot (R \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot L_m \cdot \cos(\omega t))}{\omega \cdot L_m} + \Xi(t) \right) + \frac{A_m \cdot \sin(\alpha - \xi_m)}{2 \cdot \Delta \cdot \omega \cdot L_m}, \quad (4.22)$$

$$O(t) = \frac{\sin(\alpha + \xi_m) \cdot (R \cdot \cos(2\omega t) + 2 \cdot \omega \cdot L_m \cdot \sin(2\omega t))}{2 \cdot \omega \cdot L_m}, \quad (4.23)$$

$$\Lambda_m(t) = \frac{A_m \cdot R}{\Delta \cdot (4\omega^2 L_m^2 + R^2)} \times \left( \frac{\cos(\alpha + \xi_m) \cdot (R \cdot \sin(2\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot L_m \cdot \cos(2\omega t))}{2 \cdot \omega \cdot L_m} + O(t) \right), \quad (4.24)$$

$$N_m(t) = \frac{\omega L_m}{\omega^2 L_m^2 + R^2} \cdot \left( -\cos(\alpha) + \frac{R \cdot \sin(\alpha)}{\omega \cdot L_m} \right) + \frac{A_m \cdot \sin(\alpha - \xi_m)}{2 \cdot \Delta \cdot \omega \cdot L_m}, \quad (4.25)$$

$$\Phi_m(t) = \frac{A_m \cdot R}{\Delta_a \cdot (4\omega^2 L_m^2 + R^2)} \cdot \left( -\cos(\alpha + \xi_m) + \frac{R \cdot \sin(\alpha + \xi_m)}{2 \cdot \omega \cdot L_m} \right). \quad (4.26)$$

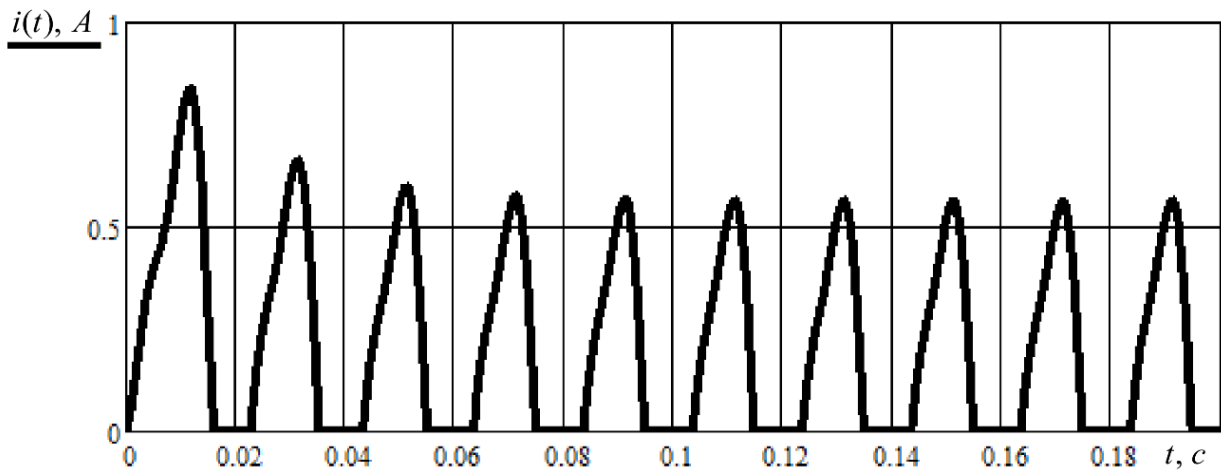
В залежностях (4.20) – (4.26)  $R = 14,9 \text{ Ом}$  – опір котушки,  $A_m = 0,001 \text{ м}$  – відносна гранична амплітуда коливань,  $\xi_m = -\pi / 4 \text{ рад}$  – кут зсуву фаз між зусиллям та переміщенням,  $\alpha = 0 \text{ рад}$  – кут, який відображує відкриття тиристором напруги на затискачах обмотки вібробуджувача із запізненням (в цьому випадку він дорівнює нулю, оскільки напруга подається через діод).

Якщо підставити всі необхідні параметри у рівняння (4.20) – (4.26), і в умову (4.19), отримуємо графік зміни сили струму, який протікає в обмотці вібробуджувача, від часу (рис. 4.12).

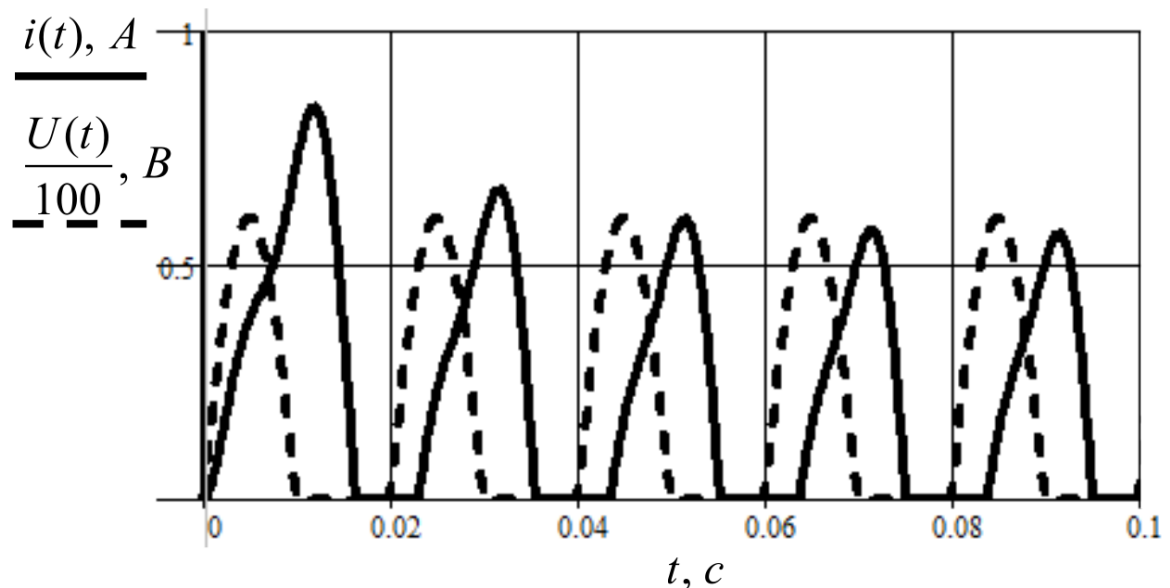
Виходячи із графіка (рис. 4.12), який відповідає умові (4.19), видно, що під час старту системи спостерігаються пускові струми [59, 93].

Наклавши разом графіки змін напруги та сили струму, отримуємо графік, на якому помітно зміщення сили струму відносно напруги (рис. 4.13).





*Рис. 4.12. Графік зміни сили струму в часі*



*Рис. 4.13. Графік змін сили струму та напруги в часі*

Розглядаючи рис. 4.13, отриманий по проходженню перехідних процесів, бачимо, що між силою струму і напругою є зсув фаз [107, 124, 133].

Закономірності зміни провідності робочого повітряного проміжку між осердям із котушкою та якорем вібробуджувача на першому і другому полюсах визначаються за допомогою виразу:

$$G_{mag1}(t) = G_{mag2}(t) = \frac{\mu_0 \cdot a_m \cdot b_m}{\Delta_a - A_m \cdot \sin(\omega t + \xi_m)}. \quad (4.27)$$

Закономірність зміни сумарної провідності робочого повітряного зазору між осердям із котушкою та якорем вібробуджувача визначаємо із виразу:

$$G_{маг}(t) = 2k_p \frac{G_{маг1}(t) \cdot G_{маг2}(t)}{G_{маг1}(t) + G_{маг2}(t)}. \quad (4.28)$$

Силу збурення першого електромагніту встановлюємо із виразу [2]:

$$F_1(t) = F_{маг1}(t)^2 \frac{dG_{маг}(t)}{d\delta_0}, \quad (4.29)$$

де  $F_{маг1}(t) = \phi \cdot i(t)$  – магніторухійна сила, що затрачається в повітряному робочому зазорі між осердям із котушкою і якорем першого електромагніту, та є функцією струму.

Підставивши вираз (4.28) у рівняння (4.29) та провівши диференціювання, отримаємо закономірність:

$$F_1(t) = (\phi \cdot i(t))^2 \frac{dG_{маг}(t)}{d\delta_0} = -\frac{(\phi \cdot i(t))^2}{k_p} \left( \mu_0 \cdot \frac{a_m \cdot b_m}{(\Delta_a - A_m \sin(\omega t + \xi_m))^2} \right). \quad (4.30)$$

Вираз (4.30) дає приближений результат, але достатній для оцінювання характеру тягового зусилля вібробуджувача. Якщо підставити вже відомі параметри електромагніту, можна побудувати графік залежності сили збурення першого електромагніту в часі (рис. 4.14).

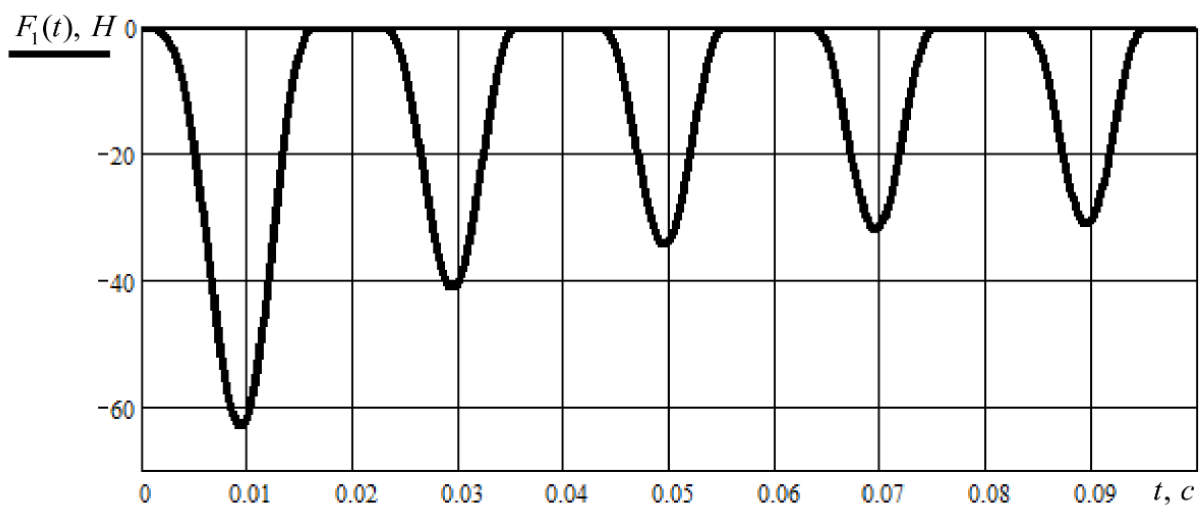


Рис. 4.14. Графік залежності сили збурення першого електромагніту в часі

На рис. 4.14 видно, що під час запуску електромагніта його тягове зусилля набуває граничних значень, і з часом стабілізується на рівні амплітудного значення  $F = 30 \text{ Н}$ . Саме ця величина нами використовувалась для розрахунків.

Відповідно, для другого електромагніту сила збурення буде становити:

$$F_2(t) = F_{\text{маг}2}(t)^2 \frac{dG_{\text{маг}2}(t)}{d\delta_0}, \quad (4.31)$$

де  $F_{\text{маг}2}(t) = \phi \cdot i \left( t - \frac{\pi}{\omega} \right)$  – магніторушійна сила другого електромагніту.

Підставивши вираз (4.28) у залежність (4.31) та провівши диференціювання, отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \left( \phi \cdot i \left( t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right)^2 \frac{dG_{\text{маг}2}(t)}{d\delta_0} = \\ &= - \frac{\left( \phi \cdot i \left( t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right)^2}{k_p} \left( \mu_0 \cdot \frac{a_m \cdot b_m}{(\Delta - A_m \sin(\omega t + \xi))^2} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Графік зміни сили збурення другого електромагніту в часі відображено на рис. 4.15.

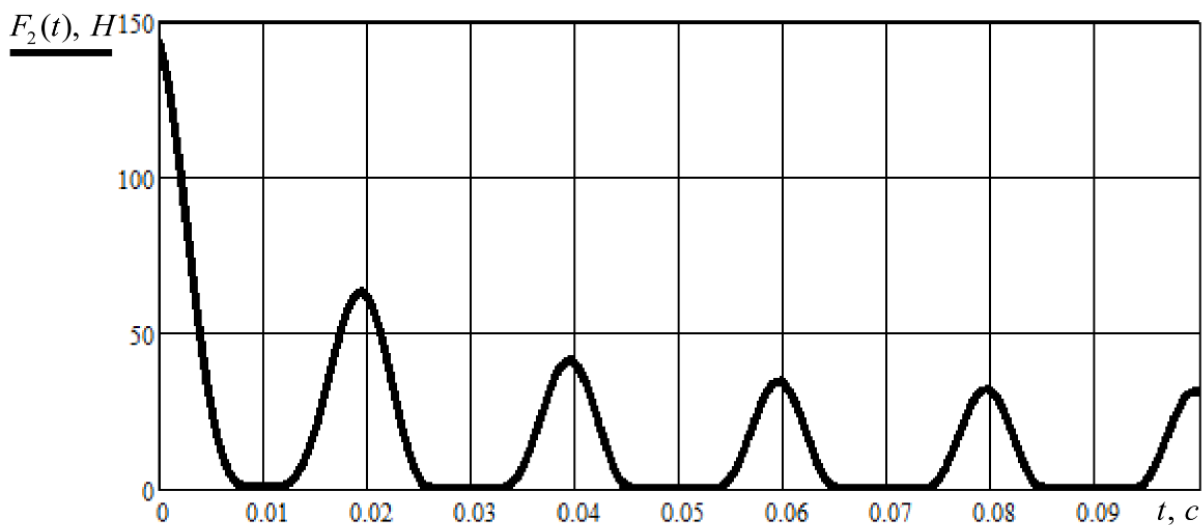


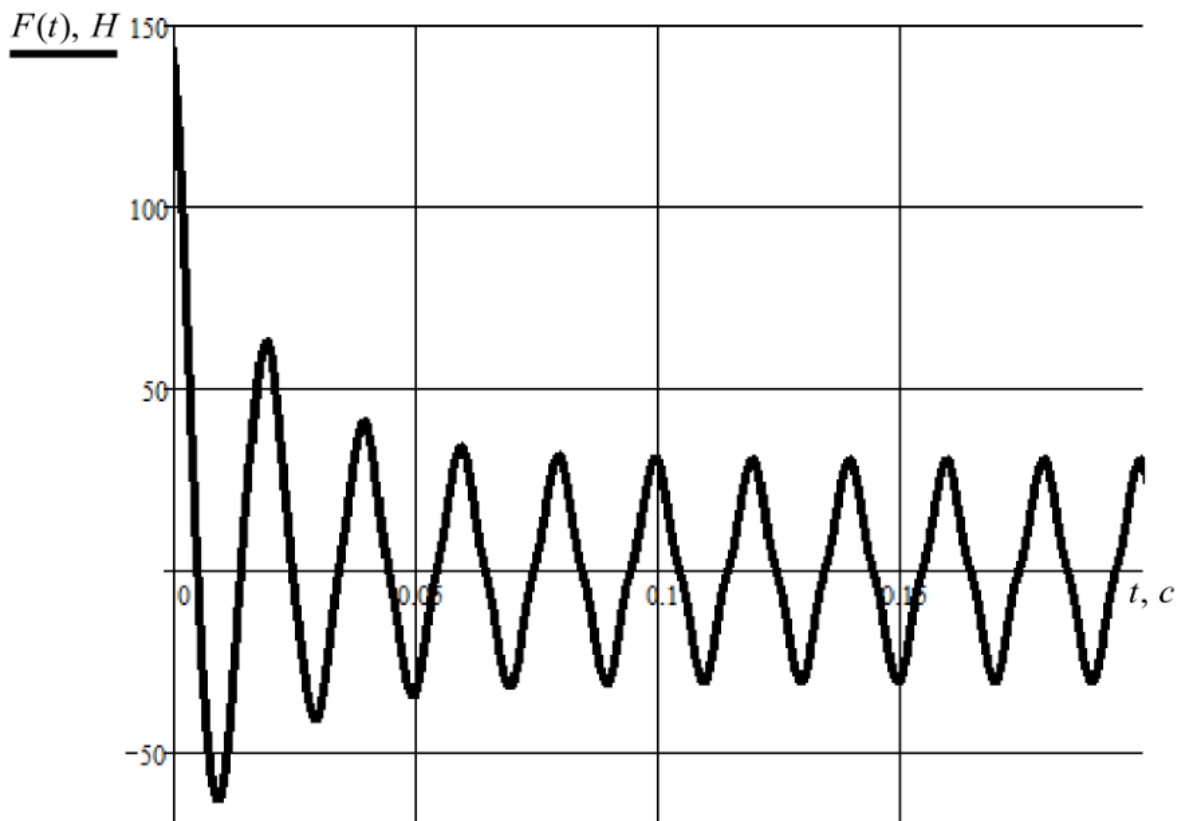
Рис. 4.15. Графік зміни сили збурення другого електромагніту в часі

На рис. 4.15 видно наявність зміщення фази другого електромагніта на  $\pi$  рад. Це зміщення дозволяє електромагнітам збурювати реактивну масу навперемінно [12, 20].

Сумарна сила збурення вібраційної машини дорівнюватиме сумі сил збурення першого і другого електромагнітів:

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t). \quad (4.33)$$

Отже, додавши два графіка зміни сили збурення першого і другого електромагнітів, дістанемо графік зміни результуючої сили збурення вібраційної машини з електромагнітним приводом (рис. 4.16).



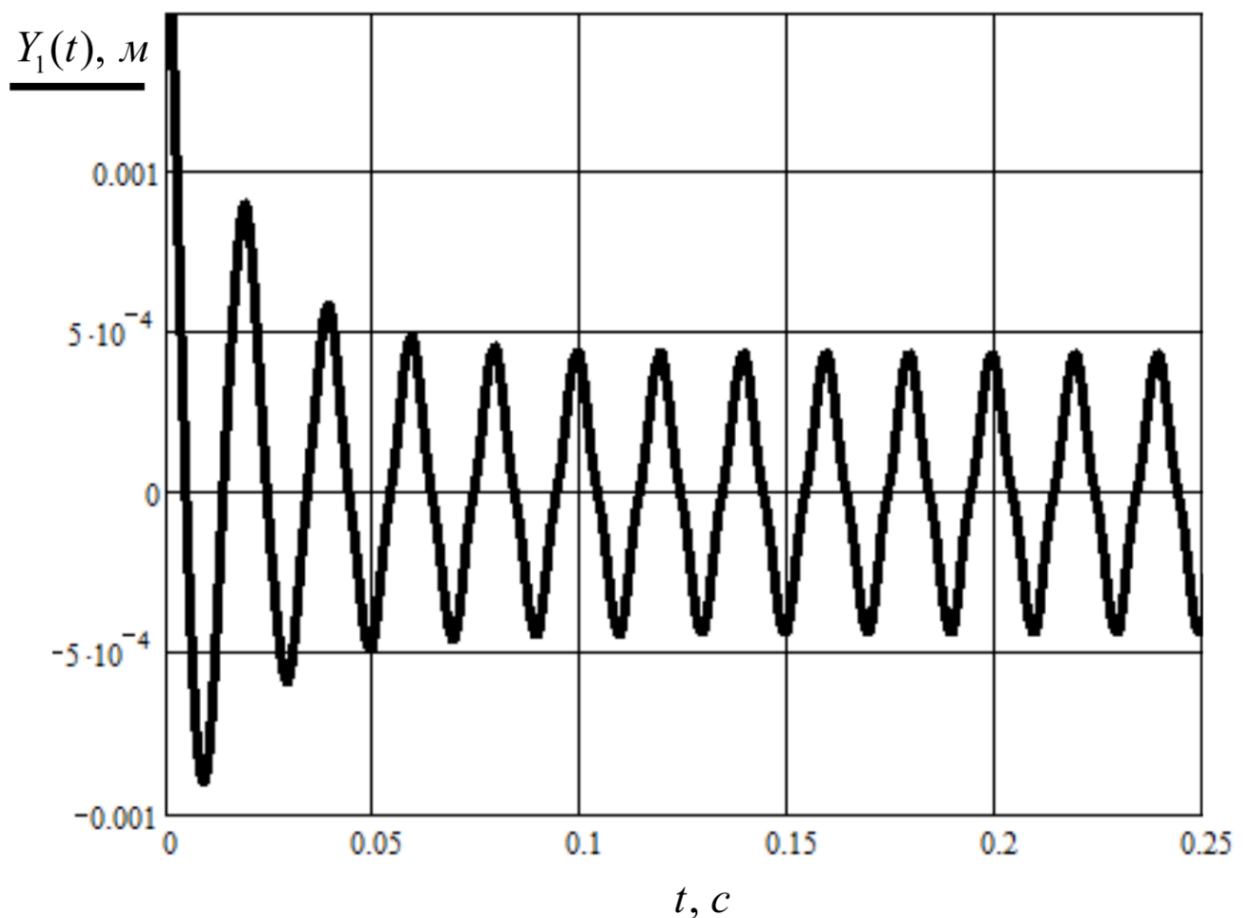
*Рис. 4.16. Графік зміни результуючої сили збурення вібраційної машини в часі*

З даного графіку можна запевнитись, що закон зміни результуючої сили збурення доволі близький до синусоїдального.

Якщо підставити результуючу силу збурення електромагнітів із виразу (4.33) у рівняння, яке описує рух активної маси вібраційної машини (залежність (2.32)), то отримаємо наступне рівняння:

$$Y_1(t) = \frac{-m_3 \cdot F(t) \cdot c_{12}}{\left( \begin{array}{l} m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - \\ -m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \\ +m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + \\ +m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \end{array} \right)}. \quad (4.34)$$

Рівняння (4.34) дозволяє побудувати графік, який демонструє коливання активної маси високоефективної міжрезонансної вібраційної машини із врахуванням характеристик електромагнітного приводу (рис. 4.17).



*Рис. 4.17. Амплітуда коливань активної маси високоефективної міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом*

Як бачимо з рис. 4.17, отримані параметри тримасової міжрезонансної вібраційної машини, зокрема характеристики електромагнітного приводу, забезпечують необхідну амплітуду коливань робочого органу 0,4 мм. Очевидно, що встановлені параметри електромагнітного приводу дозволяють еталонній тримасовій МКС працювати у необхідному технологічному режимі.

#### **4.4.2 Числові розрахунки тривимірного магнітного поля електромагнітного приводу вібраційного столу**

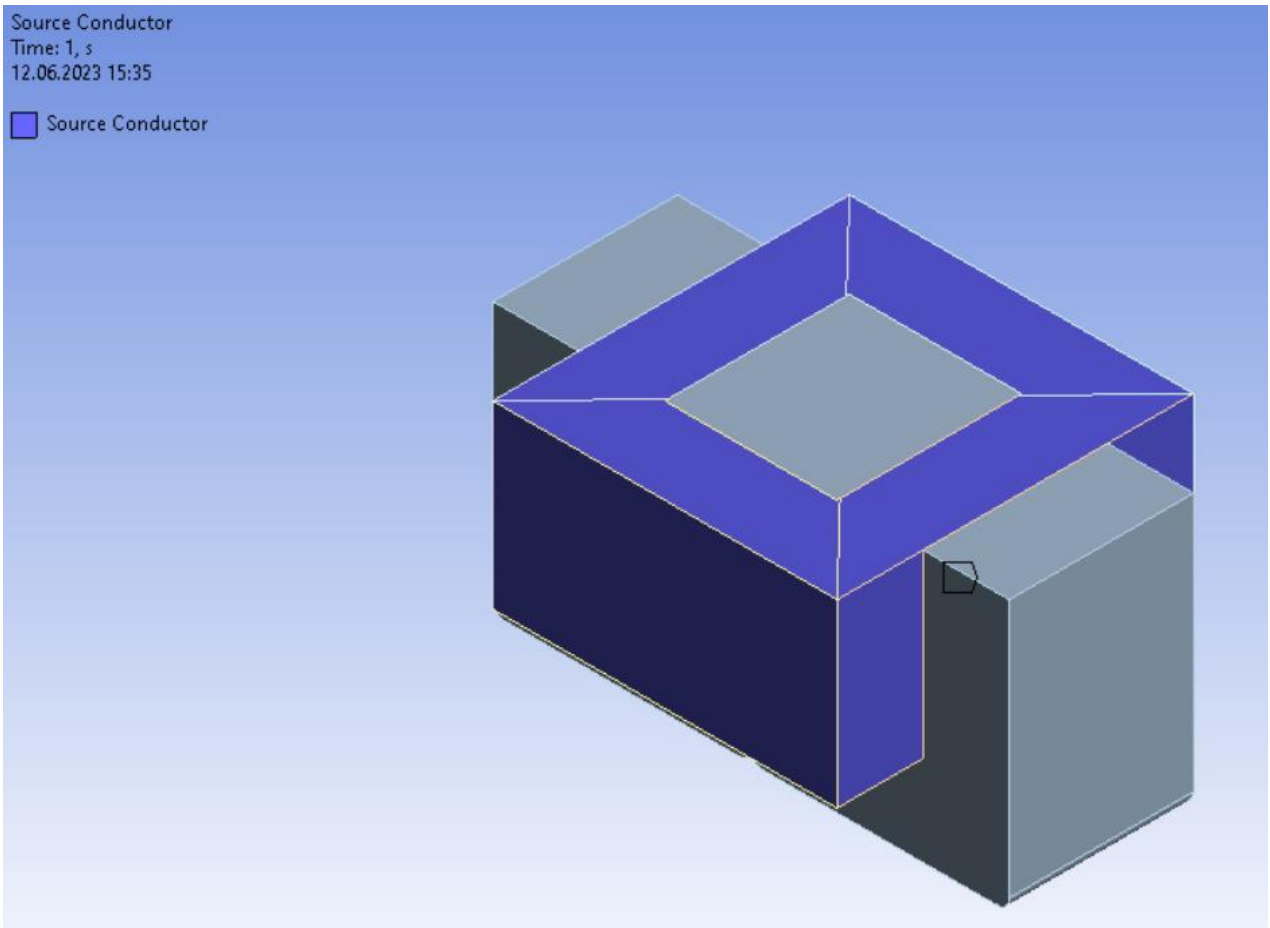
В магнітному полі електромагнітного приводу виникають стаціонарні та змінні процеси [18]. Моделювання процесів що відбуваються в тривимірному магнітному полі електромагнітного приводу вібраційного столу включає наступні етапи:

Крок 1. Підготовка геометрії. Геометрія моделі електромагнітного приводу вібраційного столу конвертується з CAD-системи SolidWorks у форматі .SLDASM в програмний продукт ANSYS Workbench, який має в наявності модуль Mechanical для роботи із твердотільними об'єктами;

Крок 2. Завдання матеріалів для деталей досліджуваної збірки. ANSYS Magnetostatic надає можливість вибрати матеріали зі своєї бази даних, при цьому вказуючи їх магнітні властивості, такі як магнітна проникність, магнітна насиченість та електрична провідність. Вибрано наступні матеріали для деталей досліджуваної збірки: мідь (Copper), залізо (Iron) та повітря (Air);

Крок 3. Встановлення граничних умов. Задано геометрію обмотки електромагніту (Source Conductor) (рис. 4.18), кількість витків (Number of Turns) та величину струму в ній (Current).

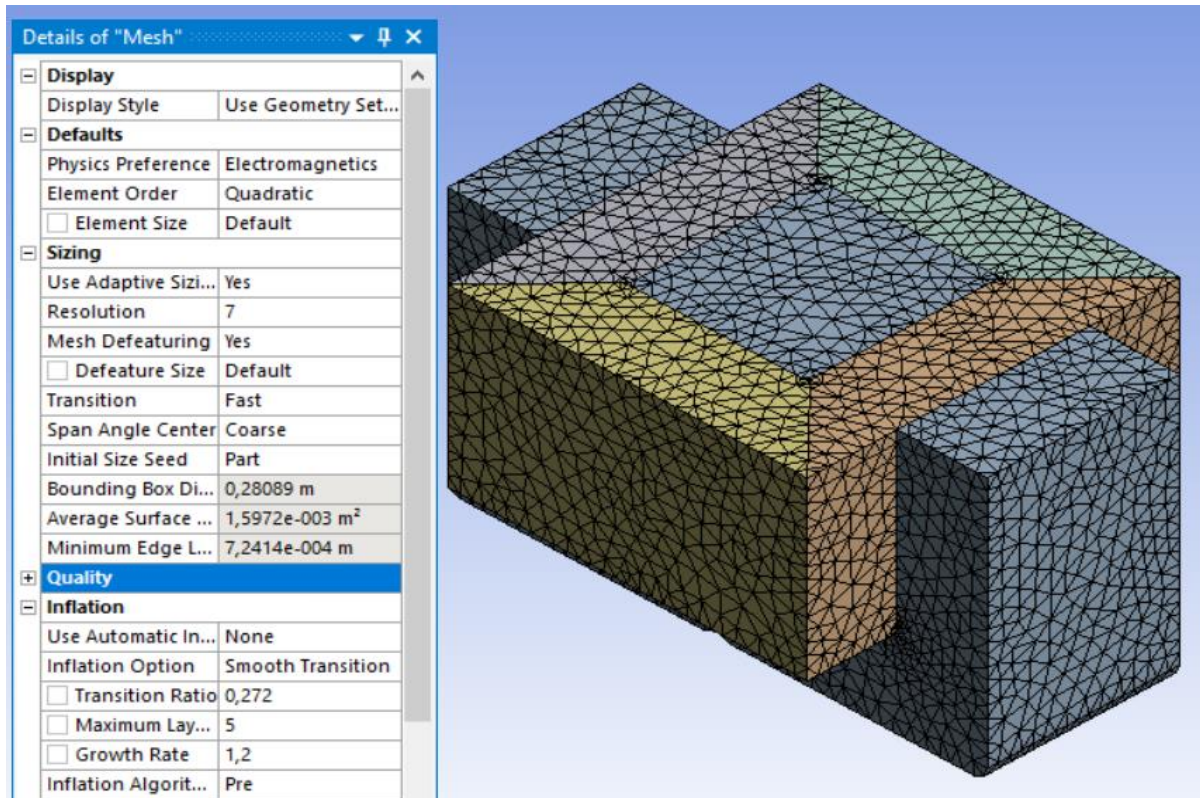
Крок 4. Генерація розрахункової сітки. Підібрано властивості розрахункової сітки (Mesh) твердотільної моделі електромагнітного приводу в ANSYS Magnetostatic (рис. 4.19).



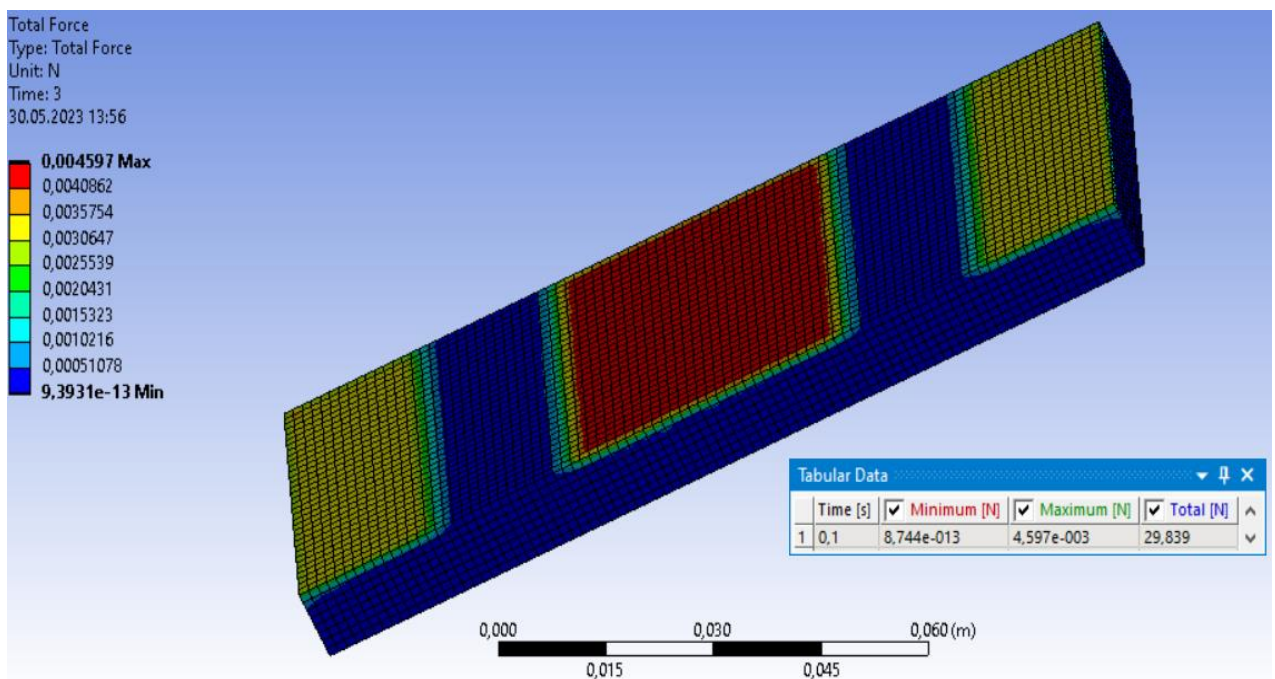
*Рис. 4.18. Вікно програмного продукту ANSYS Workbench, на якому зображено збірку електромагнітного приводу із вказаною геометрією обмотки електромагніту (Source Conductor)*

Крок 5. Розв’язок математичної моделі. Програмним модулем ANSYS Magnetostatic виконано моделювання процесів, що виникають в електромагнітному приводі вібраційного столу.

Крок 6. Аналіз отриманих результатів. Розраховано та візуально відображено такі параметри: збурювальну силу електромагнітного приводу, яка діє на пластину (рис. 4.20), густину магнітного потоку в електромагніті (рис. 4.21), інтенсивність магнітного поля (рис. 4.22) та густину струму в електромагнітному приводі вібраційного столу (рис. 4.23).

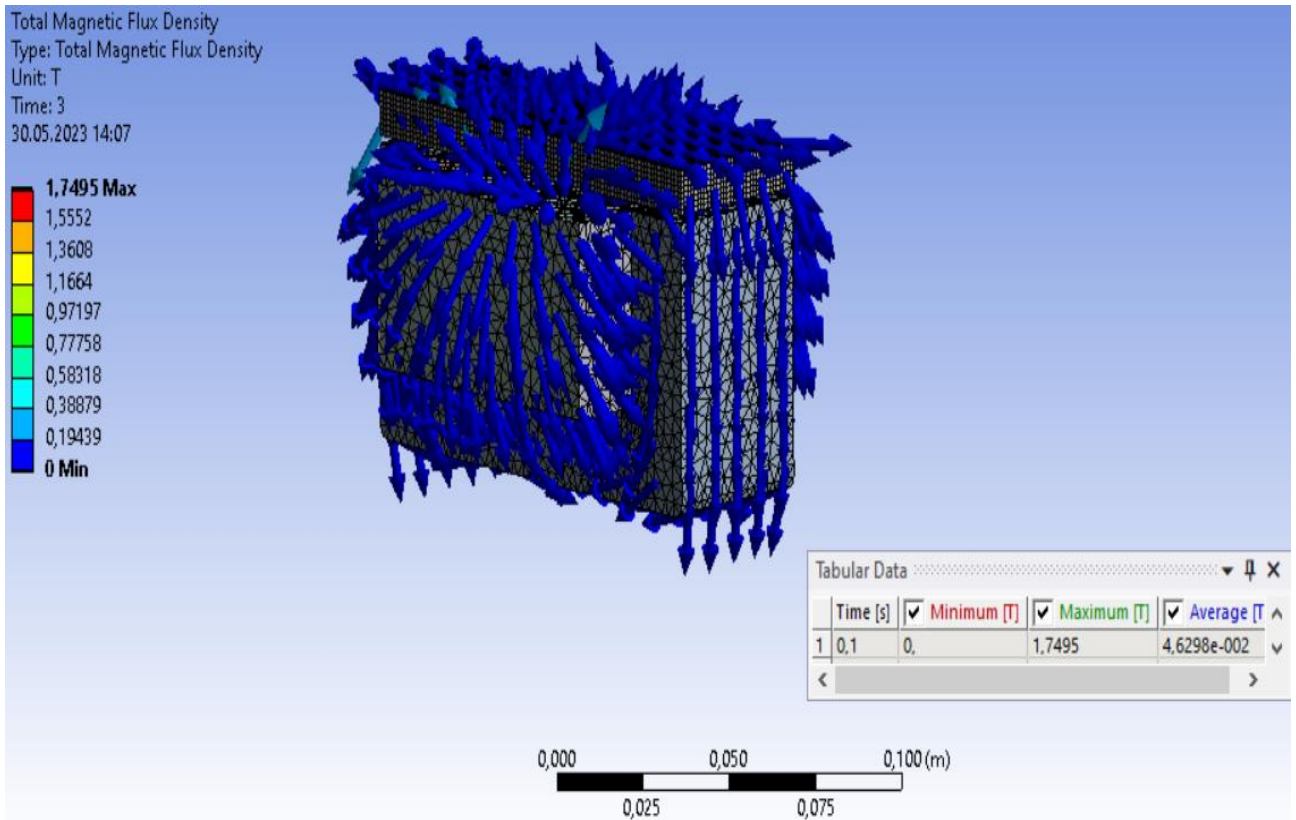


*Рис. 4.19. Розрахункова сітка твердодільної моделі електромагнітного приводу в ANSYS Magnetostatic*

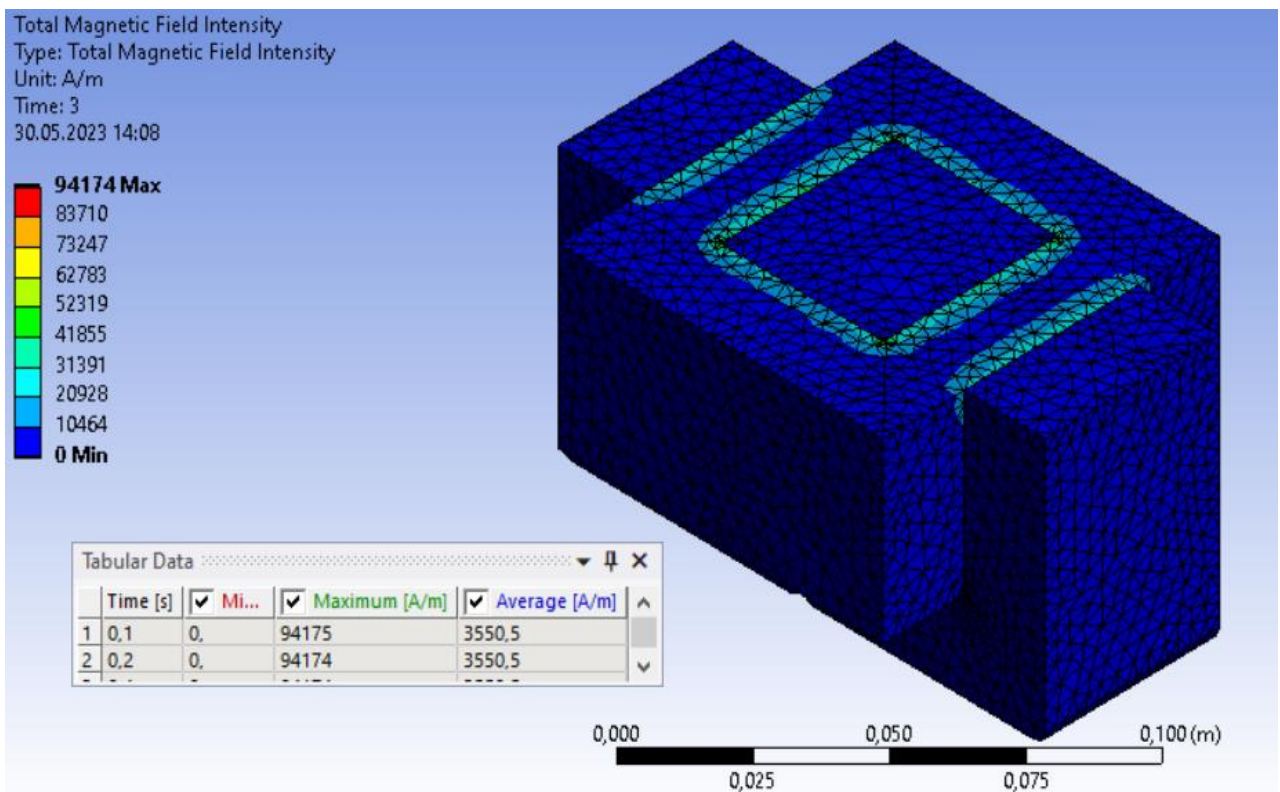


*Рис. 4.20. Збурювальна сила електромагнітного приводу, яка діє на пластину (континуальну ділянку).*

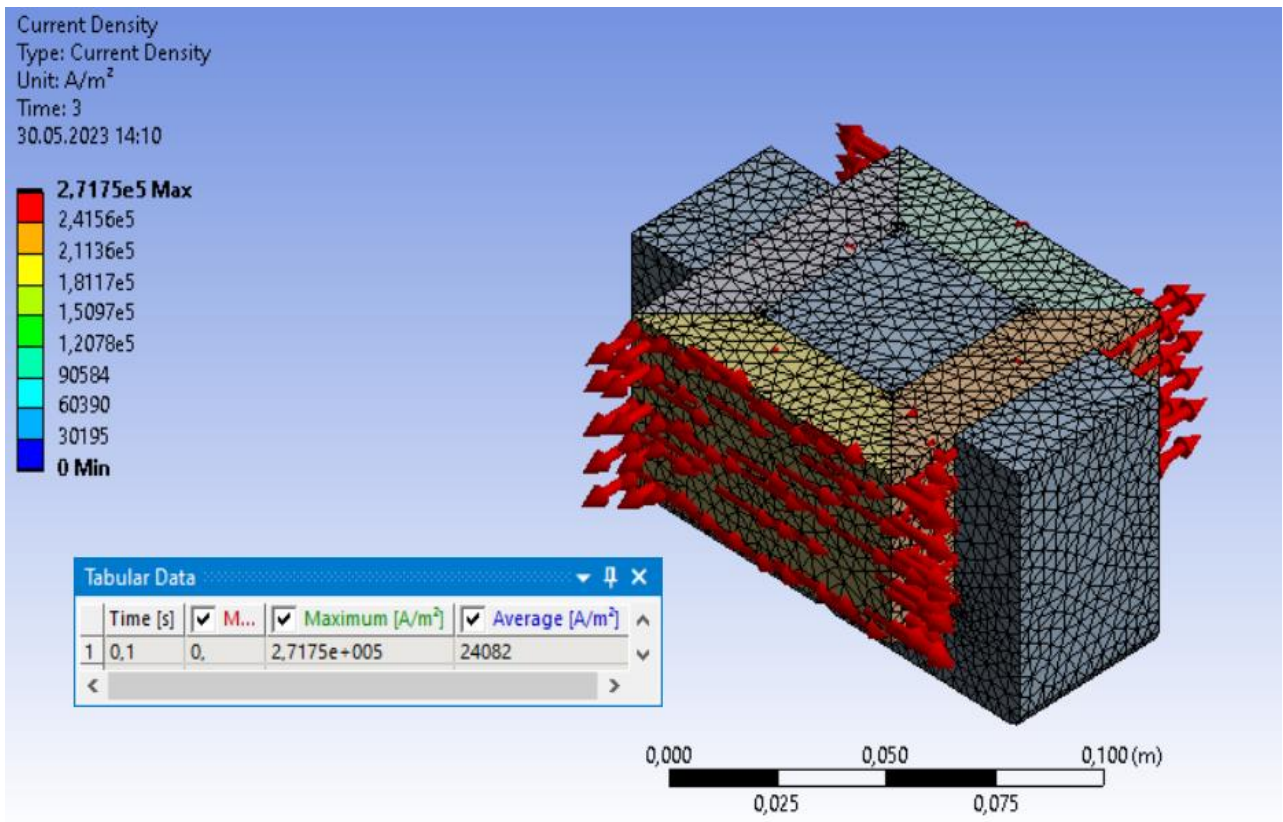




*Рис. 4.21. Густина магнітного потоку в електромагніті вібраційного столу*



*Рис. 4.22. Інтенсивність магнітного поля в електромагнітному приводі вібраційного столу*



*Рис. 4.23. Густина струму в електромагнітному приводі вібраційного столу*

Отже, як видно з рис. 4.20, сила збурення електромагнітного приводу становить  $F = 29,839H$ , що підтверджує точність досліджень часових залежностей руху коливальних мас з врахуванням процесів, що протікають в електромагнітному віброзбуджувачі, які були проведені у підрозділі 4.4.1.

#### 4.5. Висновки до четвертого розділу

1. Як результат проведених теоретичних досліджень із перспективними структурами МКС, в даному розділі було запропоновано конструкцію міжрезонансного вібраційного столу, що отримує силове збурення від електромагнітів. В якості реактивної маси вібраційного столу використано континуальну ділянку у вигляді пластини. Для даного вібраційного технологічного обладнання описано принцип його роботи. Встановлено експлуатаційні параметри вібраційного столу та інерційні параметри

коливальних мас системи, а саме довжину в 900 мм та ширину 400 мм поверхні робочого органу, перевантаження  $\zeta = 4g$ , на робочому органі та частоту вимушених коливань  $\nu_f = 50 \text{ Гц}$  ( $\omega_f = 314 \text{ рад / с}$ ). Дані параметри запропонованої твердотілої моделі вібраційного столу з електромагнітним приводом відповідають закладеним параметрам математичної моделі еталонної тримасової МКС та синтезованої на її основі дискретно-континуальної МКС, запропонованих у 3 розділі.

2. Розраховано систему резонансних пружних елементів МКС вібраційного столу. Система пружних елементів складається з восьми робочих ділянок. Жорсткість однієї робочої ділянки становить  $c_{i1} = 4,32 \cdot 10^5 \text{ Н / м}$ , що відповідає необхідному для забезпечення високоефективних міжрезонансних режимів роботи значенню жорсткості пружного вузла.

3. Пластину, яка виконує роль реактивної маси МКС вібраційного столу, розраховано на міцність. Виявлено, що найбільші нормальні напруження при чистому згині утворюються в місці шарнірного закріплення опор. Напруження в даних точках становить  $\sigma_{\max} = 409,8 \text{ МПа}$ . Допустиме напруження на згин для матеріалу пластини (сталі) становить  $[\sigma_{-1}] = 460 \text{ МПа}$ , тож умова міцності для континуальної ділянки у вібраційній машині витримується. Можна зробити висновок, що попри великі амплітуди коливань вільних кінців пластини, які дозволяють створити необхідне збурення робочого органу, пластина витримує умову міцності для забезпечення міжрезонансних режимів роботи у вібраційному столі.

4. У конструкторській частині роботи розглянуто електромагніти, що приводять в рух запропоновану дискретно-континуальну міжрезонансну МКС вібраційного столу. За допомогою аналітичних методів проведено розрахунки параметрів електромагнітного приводу, зокрема встановлено, що при значенні напруги  $U = 60 \text{ В}$ , амплітудне значення сили струму становить  $I = 0,6 \text{ А}$ . У розділі розрахована знакозмінна сила збурення  $F = 30 \text{ Н}$  електромагнітних

вібробуджувачів. Отримані параметри тримасової міжрезонансної вібраційної машини, зокрема характеристики електромагнітного приводу, забезпечують необхідну амплітуду коливань робочого органу  $0,4$  мм. Усе це дозволяє точно спрогнозувати рух активної коливальної маси в реальній конструкції дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного стола з електромагнітним приводом.

5. Використовуючи програмний продукт ANSYS Magnetostatic, проведено аналіз процесів, що протікають у тривимірному магнітному полі електромагнітного приводу вібраційного стола. Розраховано та візуально відображено збурювальну силу електромагнітного приводу, яка діє на пластину, густину магнітного потоку в електромагніті, інтенсивність магнітного поля та густину струму в електромагнітному приводі вібраційного стола. За допомогою методу скінченних елементів розраховано силу збурення електромагнітного приводу, що становить  $F = 29,839$  Н. Таким чином підтверджено точність досліджень часових залежностей руху коливальних мас за допомогою аналітичних методів.

6. Проведені конструктивні розрахунки, запропоновані в даному розділі є перехідним етапом до фізичних експериментів з лабораторним зразком дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного стола з електромагнітним приводом. Це дає високу ймовірність одержання позитивного результату при впровадженні даного вібраційного технологічного обладнання.

**РОЗДІЛ 5**  
**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-**  
**КОНТИНУАЛЬНОГО МІЖРЕЗОНАНСНОГО ВІБРАЦІЙНОГО СТОЛА З**  
**ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ.**  
**ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ПЛАСТИНИ**

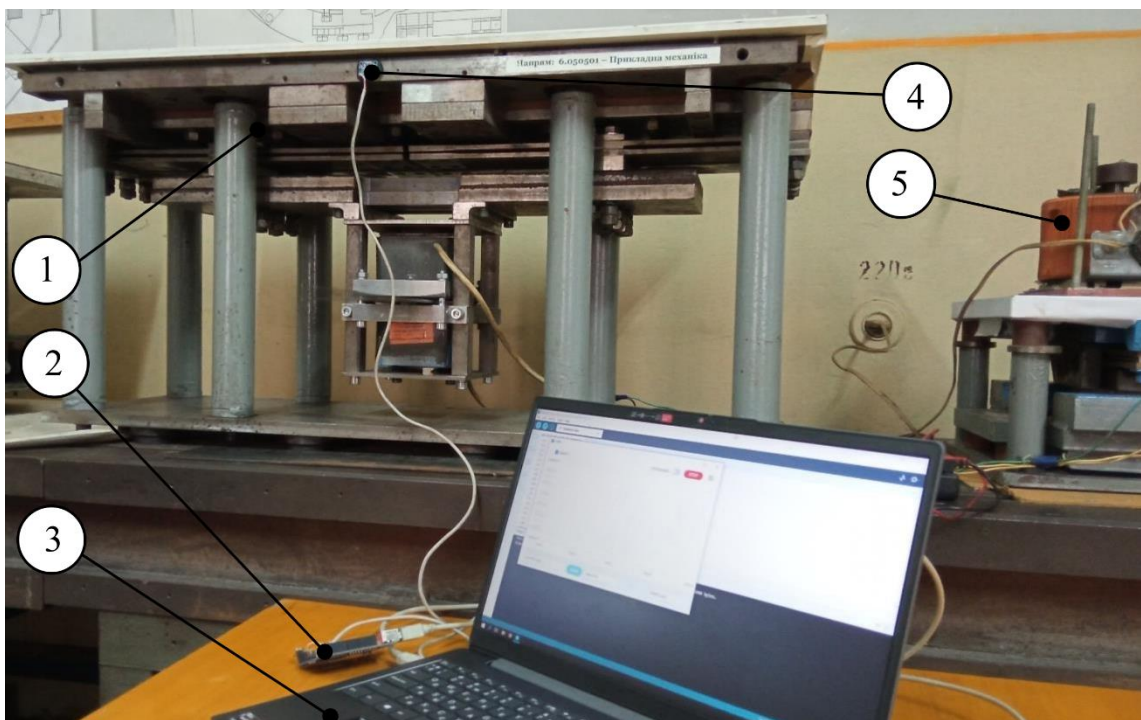
У даному розділі описано експериментальні дослідження дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. Для проведення експериментів до робочого органу вібраційного столу було приєднано датчик акселерометра/гіроскопа, який подавав зняті в процесі експерименту значення амплітуд коливань активної маси на мікроконтролерну плату, що з'єднана з персональним комп'ютером. Експериментально встановлено значення амплітуди коливань та значення власних частот коливань вібраційної машини. Встановлено максимальне значення маси завантаження робочого органу вібраційного столу. Для досягнення максимальної енергоефективності досліджуваної вібраційної машини проведено оптимізацію форми та підбір розмірів континуальної ділянки. Узагальнено результати теоретичних та експериментальних досліджень, проведених в дисертаційній роботі. Розроблено алгоритм розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом.

**5.1. Постановка експериментальних досліджень дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу**

Постановка експериментальних досліджень в цьому розділі дозволяє отримати важливі результати для впровадження вискоефективного дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом [92], а саме: перевірити точність запропонованих у розділі 4 параметрів вібраційного столу, встановити експлуатаційні характеристики

даного вібраційного обладнання та оптимізувати континуальну ділянку вібраційної машини для досягнення максимальної енергоефективності.

Метою реалізації експериментальних досліджень дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом було підтвердження правильності вибору структурної схеми вібраційної машини, адекватності запропонованої математичної моделі для її розрахунку та моделювання, встановлення експлуатаційних характеристик даного обладнання. Експериментальний зразок дискретно-континуального вібраційного столу з під'єднаним до нього вимірювальним обладнанням показано на рис. 5.1.



**Рис. 5.1.** Дискретно-континуальний міжрезонансний вібраційний стіл з під'єднаним до нього вимірювальним обладнанням: 1 – експериментальний зразок вібраційного столу; 2 – мікроконтролерна плата Arduino Uno; 3 – персональний комп'ютер; 4 – датчик акселерометра/гіроскопа MPU-6050; 5 – лампа

Для проведення даного експерименту до робочого органу вібраційного столу 1 було приєднано датчик акселерометра/гіроскопа 4 (рис. 5.2), який,

відповідно, подавав зняті в процесі експерименту значення амплітуд його коливань на мікроконтролерну плату Arduino Uno 2.



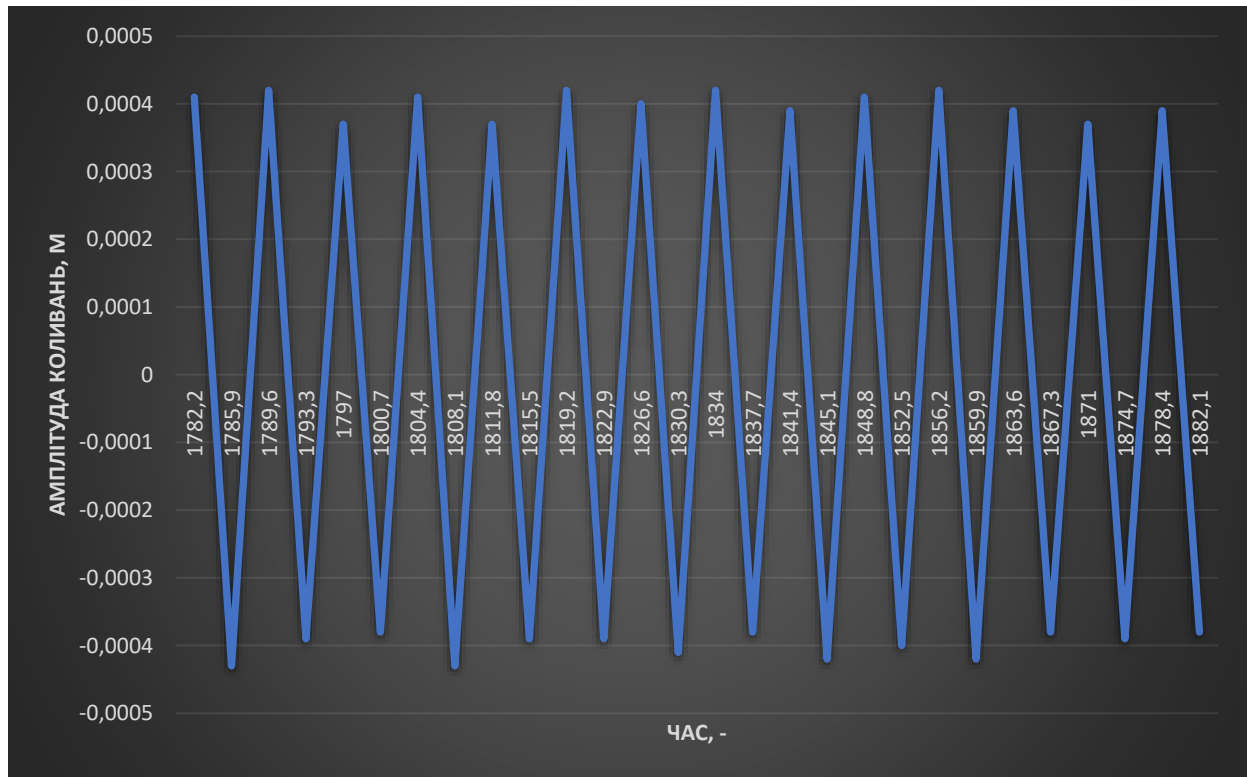
*Рис. 5.2. Під'єднання датчика акселерометра/гіроскопа MPU-6050 до активної маси під час знімання коливань системи*

Мікроконтролерна плата 2, під'єднана через СОМ-порт до персонального комп'ютера 3, дозволяє отримувати графік абсолютного переміщення робочого органу в часі. Для забезпечення необхідного збурення вібраційного столу електромагніти через латер 5 були підключені до електромережі.

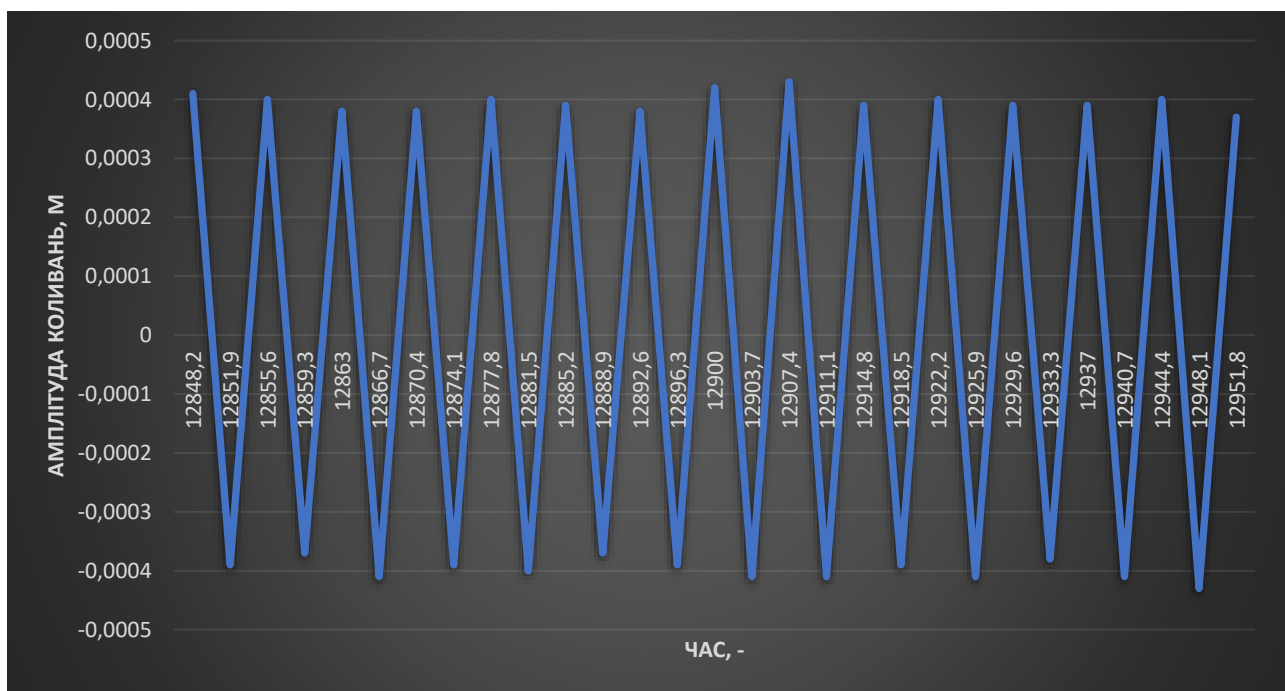
## **5.2. Встановлення амплітуди коливань системи на вимушеній частоті. Дослідження руху робочого органу з використанням датчика акселерометра/гіроскопа.**

Перевірка амплітуди вимушених коливань вібраційної машини дозволяє підтвердити відповідність характеристик експериментального зразка із встановленими у 3 розділі параметрами, що отримані шляхом чисельного моделювання. Експериментальні дослідження здійснювались за допомогою зняття часових залежностей коливань робочого органу за допомогою датчика акселерометра/гіроскопа MPU-6050. Запустивши вібраційний стіл з електромагнітним приводом при амплітудному значенні напруги живлення

$U = 60\text{ В}$  і під'єднавши датчик, отримано часові залежності руху активної маси  $m_1$  (робочого органу), що продемонстровано на рис. 5.3 та рис. 5.4.



*Рис. 5.3. Графік коливань робочого органу у початковий момент часу*



*Рис. 5.4. Графік коливань робочого органу через 30 с після запуску.*



Як видно з рис. 5.3, 5.4, амплітуда коливань робочого органу вібраційної машини становить 0,4 мм. Враховуючи, що на графіках переміщень (рис. 5.3, 5.4) по осі абсцис не показано абсолютні значення часу експерименту, було знято два графіки, що показують переміщення активної маси з різницею в 30 секунд. Для встановлення точної частоти вимушених коливань необхідно виконати наступні розрахунки:

- визначити період коливань в одиницях осі абсцис:

$$T_p = \frac{\text{кінцеве значення} - \text{початкове значення осі абсцис} [-]}{\text{кількість піків} [-]} = \quad (5.1)$$

$$= \frac{1871 - 1797}{10} = 7.4;$$

- визначити, скільки одиниць по осі абсцис відповідають часу 1 с:

$$N_s = \frac{\text{кінцеве значення осі абсцис} - \text{початкове значення} [-]}{\text{проміжок часу між значеннями} [c]} = \quad (5.2)$$

$$= \frac{12900 - 1834}{30} = 368,9 \text{ одиниць / с};$$

- розрахувати частоту вимушених коливань робочого органу:

$$v_{fe} = \frac{N_s}{T_p} = \frac{368,9}{7,4} = 49,85 \text{ Гц}. \quad (5.3)$$

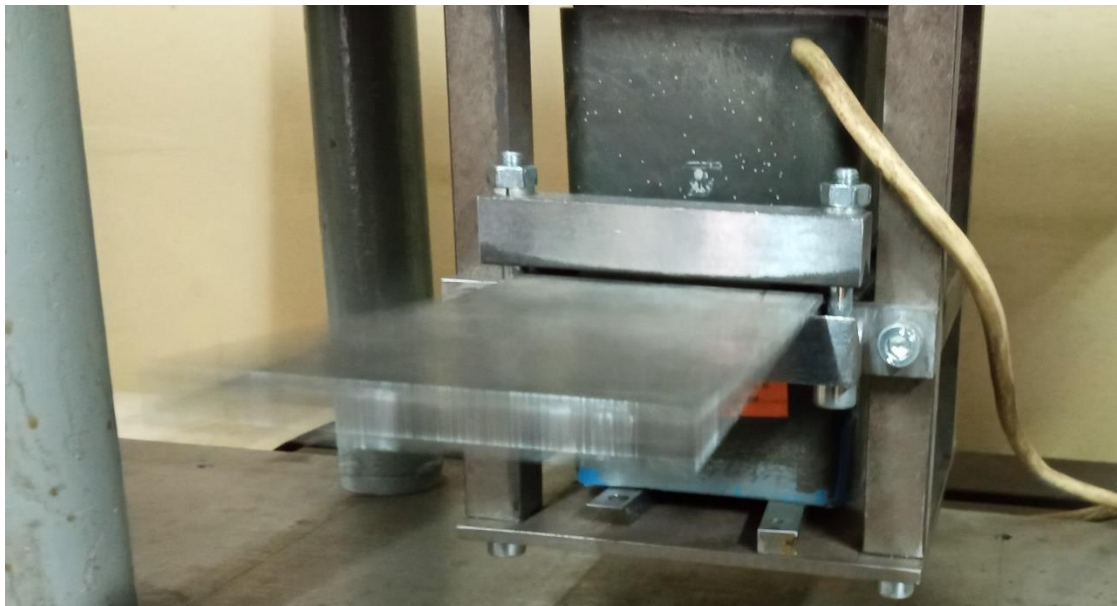
Визначена експериментально амплітуда коливань робочого органу 0,4 мм відповідає закладеному в МКС вібраційної машини значенню, а частота вимушених коливань робочого органу  $v_{fe} = 49,85 \text{ Гц}$  є близькою до розрахункового значення  $v_f = 50 \text{ Гц}$ , що свідчить про адекватність математичних моделей та методики розрахунку дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційного столу з електромагнітним приводом.

### 5.3. Встановлення частоти власних коливань системи.

Перевірка значень власних частот дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом дозволяє

перевірити робочий режим коливань системи [154]. Даний експеримент здійснювався шляхом визначення переміщення робочого органу вібраційного столу під час резонансних режимів роботи. Частота збурення електромагнітів змінювалася за допомогою латера.

Оскільки робоча частота даного обладнання  $\nu=50$  Гц, яка знаходиться у міжрезонансній зоні коливань, то очевидно, що резонансні піки МКС знаходяться у невеликих межах поблизу цієї частоти. Конструктивно спроектовано, що резонансний пік реактивної маси, тобто пластини, повинен знаходитися в діапазоні  $\nu_{1r} = 49...49,5$  Гц, а резонансний пік системи в цілому – припадати на частоту  $\nu_{2r} \approx 51$  Гц. Варто зазначити, що при резонансному піку спостерігається різке збільшення амплітуди коливань континуальної ділянки (рис. 5.5).

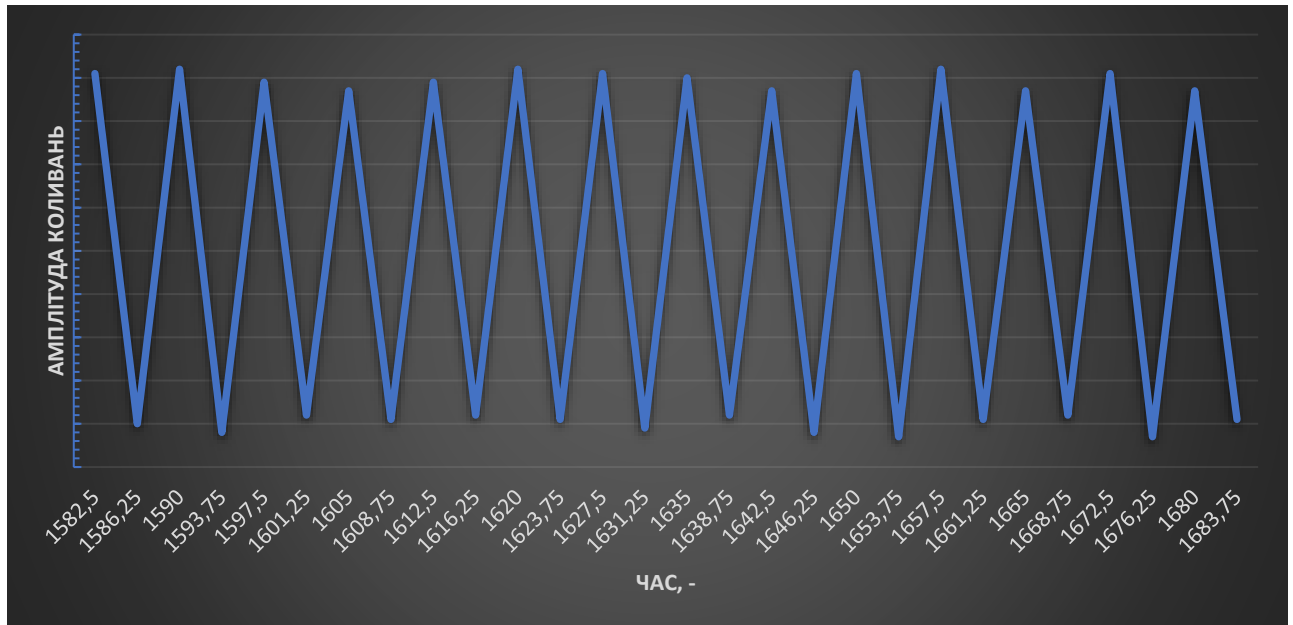


*Рис. 5.5. Коливання континуальної ділянки під час резонансного піку*

Часові залежності зміни амплітуди коливань робочого органу під час першого резонансу визначалися за допомогою датчика акселерометра/гіроскопа MPU-6050. Графік коливань робочого органу під час першого резонансу показано на рис. 5.6.

З рис. 5.6, використовуючи вираз (5.1), визначається період коливань активної маси в одиницях осі абсцис:

$$T_{p1} = \frac{1665 - 1590}{10} = 7.5; \quad (5.4)$$



*Рис. 5.6. Графік коливань робочого органу під час першого резонансу.*

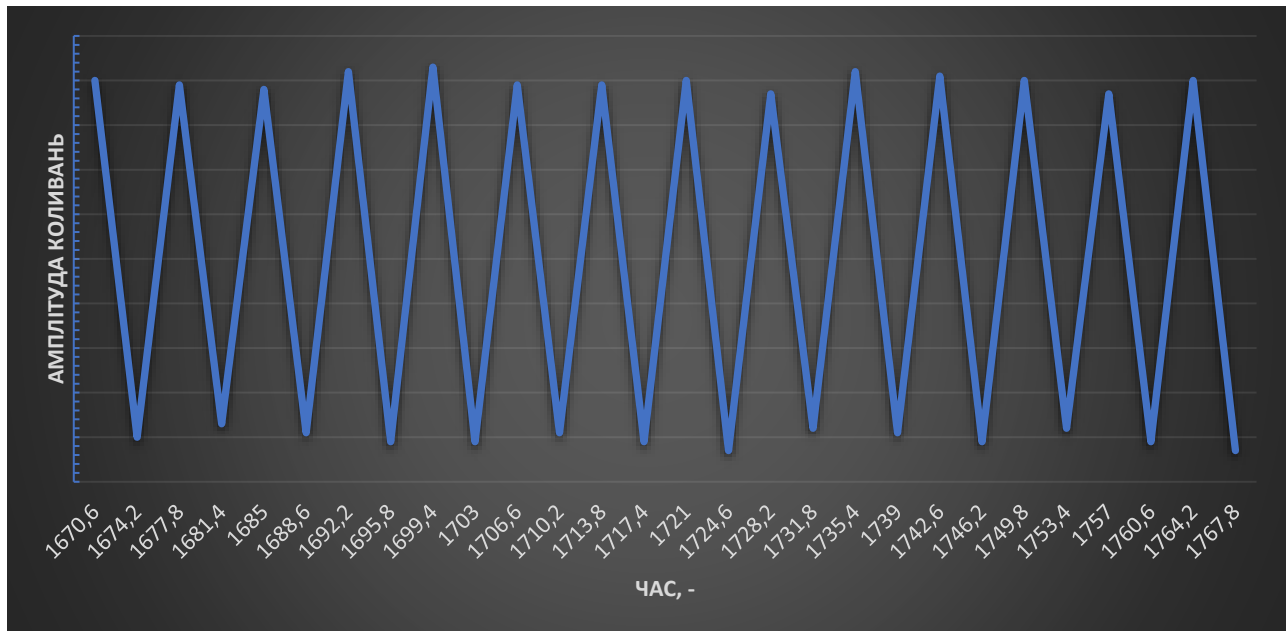
Підставляючи дані з рівнянь (5.4), (5.2), та використовуючи вираз (5.3), знаходимо власну частоту коливань під час першого резонансу досліджуваної вібраційної машини:

$$\nu_{ne1} = \frac{N_s}{T_{p1}} = \frac{368,9}{7,5} = 49,19 \text{ Гц}. \quad (5.5)$$

Отримане значення частоти  $\nu_{ne1} = 49,19 \text{ Гц}$  узгоджується із закладеним при розрахунках континуальної ділянки значенням її власної частоти коливань  $\nu_{n1} = 49 \text{ Гц}$ .

Методика визначення частоти другого резонансу системи є аналогічною до методики визначення частоти першого резонансу. В результаті експериментального дослідження, налаштувавши за допомогою латера відповідним чином частоту коливань вібраційної машини та зафіксувавши дані з

датчика, отримано графік коливань робочого органу під час другого резонансу системи, який показано на рис. 5.7.



*Рис. 5.7. Графік коливань робочого органу під час другого резонансу системи.*

Використовуючи дані на рис. 5.7, по аналогії з рівняннями (5.1) та (5.4), знаходимо період коливань активної маси в одиницях осі абсцис під час другого резонансу системи:

$$T_{p2} = \frac{1757 - 1685}{10} = 7,2; \quad (5.6)$$

Підставляючи дані з рівнянь (5.6), (5.2), та використовуючи вираз (5.3), знаходимо власну частоту коливань під час другого резонансу:

$$\nu_{ne2} = \frac{N_s}{T_{p2}} = \frac{368,9}{7,2} = 51,24 \text{ Гц}. \quad (5.7)$$

Отримане з рівняння (5.7) значення власної частоти коливань системи під час другого резонансу близьке до закладеного під час проектування вібраційної машини значення  $\nu_{n2} = 51 \text{ Гц}$ . Отже, описані вище експериментальні дослідження підтверджують той факт, що режими роботи дискретно-континуальної міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом відповідають закладеним в ході проектування значенням.

#### 5.4. Робота вібраційного столу при завантаженні. Встановлення додаткових переваг міжрезонансних систем з електромагнітним приводом.

Встановлення експлуатаційних характеристик вібраційного столу необхідне для майбутнього впровадження даного типу вібраційних машин в якості технологічного обладнання на підприємствах. Основною експлуатаційною характеристикою вібраційного столу є максимальне значення маси завантаження його робочого органу.

Методика проведення дослідження полягала в тому, що на робочий орган експериментального зразка дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом поступово докладались наважки різних мас. При цьому спостерігалось, чи відбувається відривання наважок від поверхні робочого органу вібраційного столу.

В результаті проведеного дослідження встановлено, що максимальне значення маси завантаження робочого органу вібраційного столу з електромагнітним приводом становить 40 кг (рис. 5.8).



*Рис. 5.8. Експериментальний зразок дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з наважкою масою 40 кг*

Отримане значення максимальної маси завантаження робочого органу, враховуючи низьке енергоспоживання електромагнітного приводу, вказує на перспективність даної конструкції вібраційного столу. Також перевагою даного типу приводу є те, що відбувається миттєвий вихід на робочу частоту коливань, що унеможливорює, наприклад, ефект Зоммерфельда.

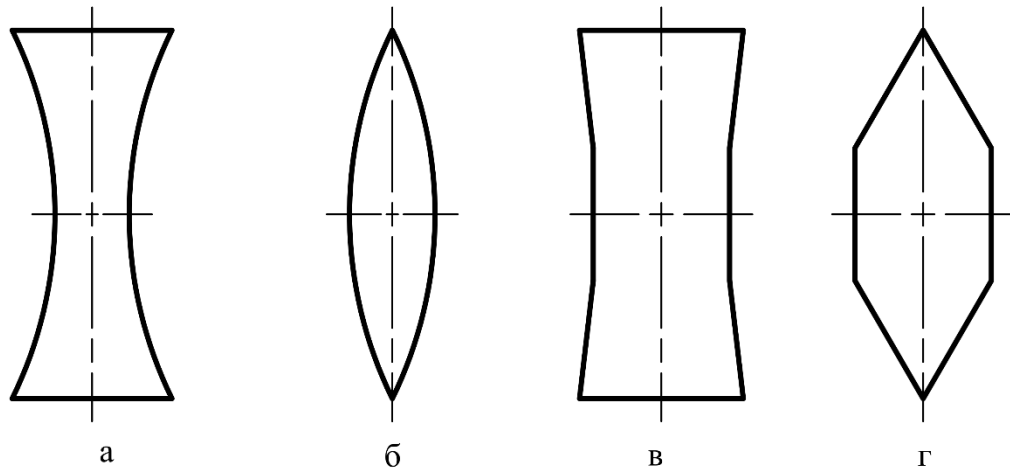
### **5.5. Оптимізація форми та підбір розмірів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу**

Для забезпечення високоефективних міжрезонансних режимів роботи вібраційним обладнанням, коливальні маси системи повинні володіти певними інерційно-жорсткісними параметрами, а також певною частотою власних коливань. Недоліком високоефективних міжрезонансних МКС є те, що третя реактивна маса повинна бути малою, а отже використання складних та габаритних конструкцій неможливо. Тому найдоцільніше використовувати в якості реактивної маси континуальні ділянки. Континуальна ділянка, яка є гнучким тілом, оптимально поєднує у собі інерційні та жорсткісні параметри, що шарнірно закріплена в проміжній масі. Таке рішення виглядає доволі перспективним. Проте є ймовірність, що розглянута в попередніх розділах конструкція вібраційного столу, в якій континуальна ділянка є звичайною прямокутною пластиною не буде оптимальним варіантом для забезпечення максимальної енергоефективності. В даному підрозділі запропоновано альтернативні форми пластин, що можуть використовуватися в якості реактивної маси міжрезонансного високоефективного вібраційного столу. Метою даних експериментальних досліджень є знаходження оптимальної форми пластини, що використовуватиметься у вібраційному столі в якості реактивної маси.

#### **5.5.1. Методика проведення експериментальних досліджень**

Запропоновано оптимізувати форму пластини, що виконує роль континуальної ділянки [57, 62, 131, 132]. Для цього розглянуто власне

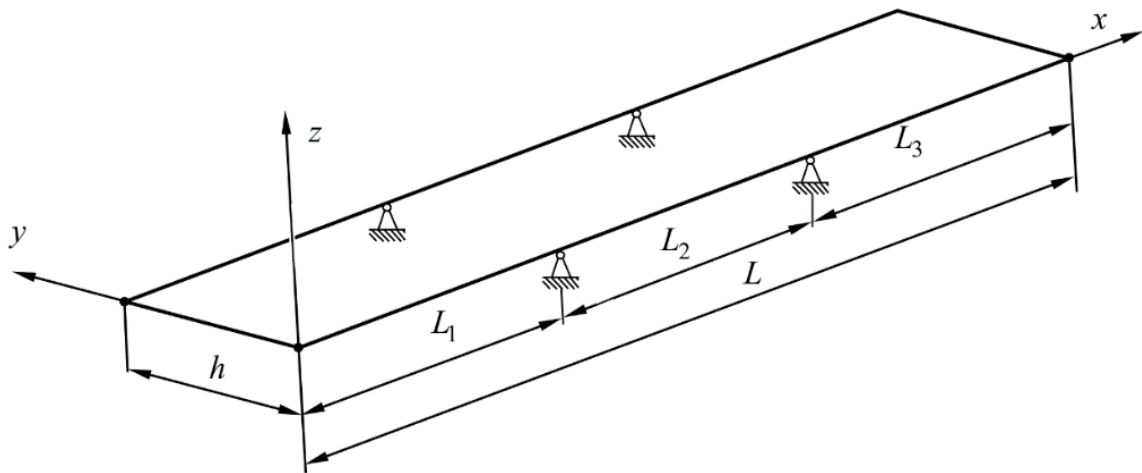
прямокутну пластину, а також деякі альтернативні варіанти пластин із змінним поперечним перерізом (рис. 5.9): параболічна впукла пластина (рис. 5.9, а); параболічна випукла пластина (рис. 5.9, б); Х-подібна пластина (рис. 5.9, в); ромбоподібна пластина (рис. 5.9, г).



*Рис. 5.9. Досліджувані альтернативні типи пластин із змінним поперечним перерізом: а – параболічна впукла; б – параболічна випукла; в – Х-подібна; г – ромбоподібна*

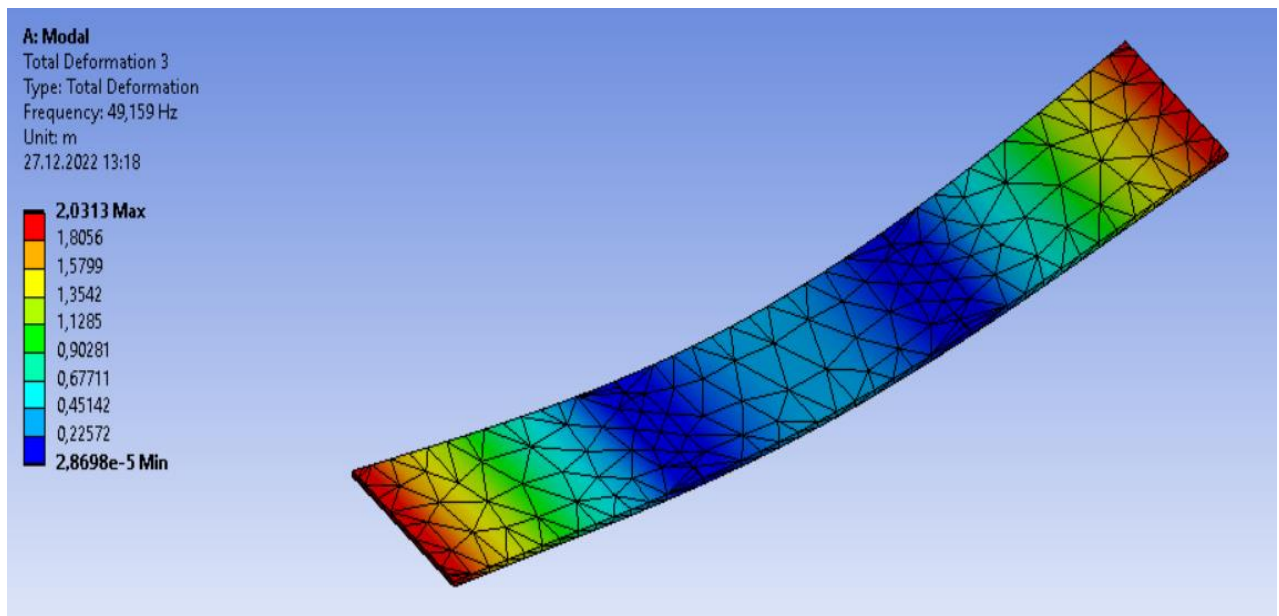
Найбільш важливим параметром під час проектування дискретно-континуальної МКС є перша власна частота пластини  $\omega_n$ . Саме точний підбір власної частоти коливань реактивної маси вібраційної машини дозволяє одержати енергоефективний робочий режим дискретно-континуальних вібраційних машин. Для забезпечення стабільної роботи вібраційної машини у міжрезонансній зоні коливань необхідно, щоб значення першої власної частоти коливань континуальної ділянки знаходилися у межах  $\omega_n = 49 \dots 49,5$  Гц. Також важливим параметром пластини є її кріпильні розміри. Оскільки пластина закріплюється у проміжній масі за допомогою шарнірного з'єднання у чотирьох точках по периметру пластини (рис. 5.10), необхідні значення кріпильних розмірів становлять  $L_2 = 176$  мм,  $h = 87,5$  мм.

На рис. 5.10 можна помітити, що кріплення пружної пластини у проміжній масі є доволі специфічним. Це насамперед зумовлено конструктивним виконанням проміжної маси і розташуванням шарнірів.



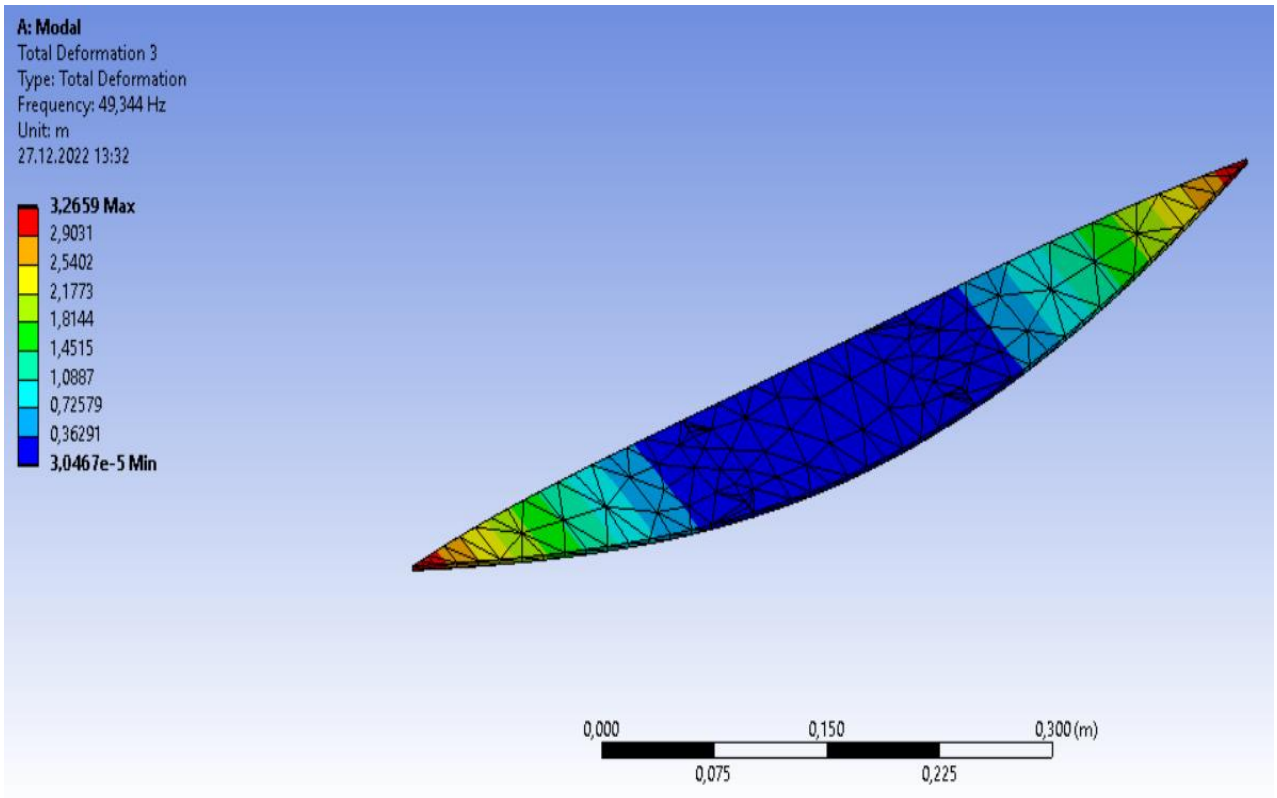
*Рис. 5.10. Розрахункова схема закріплення пластини*

Усі досліджувані типи пластин повинні забезпечувати дані умови. Розрахунок власних частот пластин проведено в програмному продукті ANSYS Workbench. Результати розрахунків показано на рис. 5.11 – 5.14.

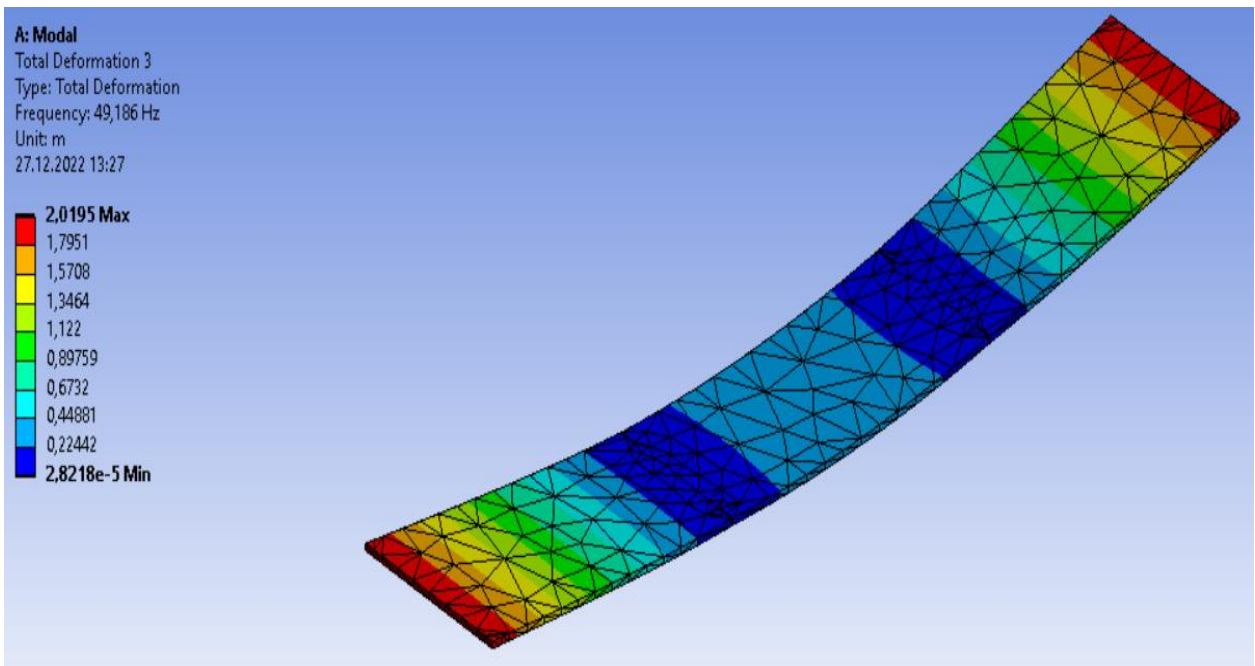


*Рис. 5.11. Результат розрахунку першої власної частоти коливань параболічної впуклої пластини*

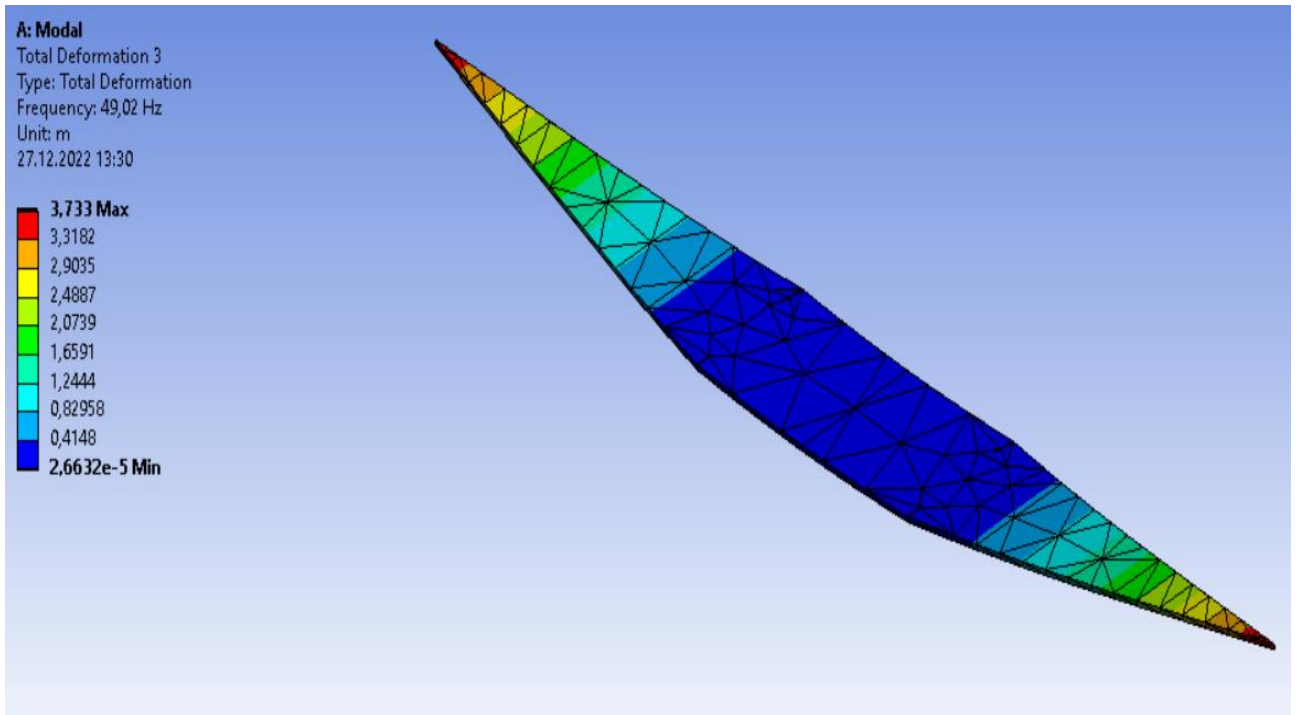




*Рис. 5.12. Результат розрахунку першої власної частоти коливань параболічної випуклої пластини*



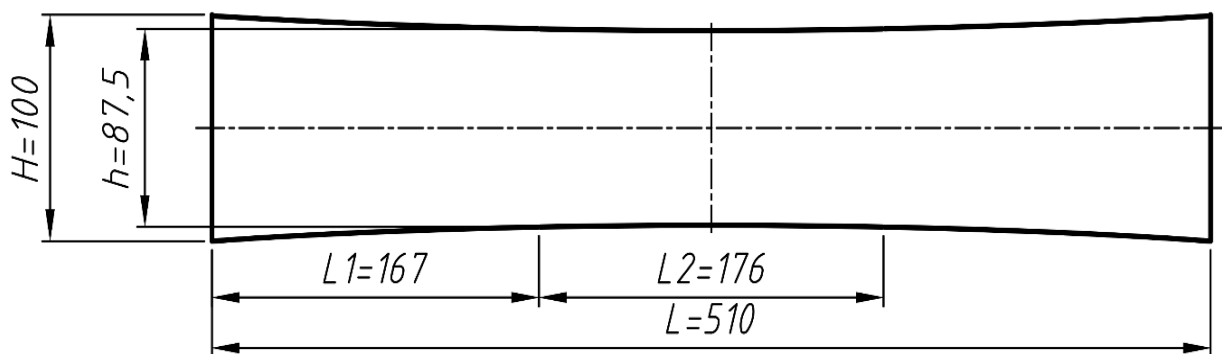
*Рис. 5.13. Результат розрахунку першої власної частоти коливань X-подібної пластини*



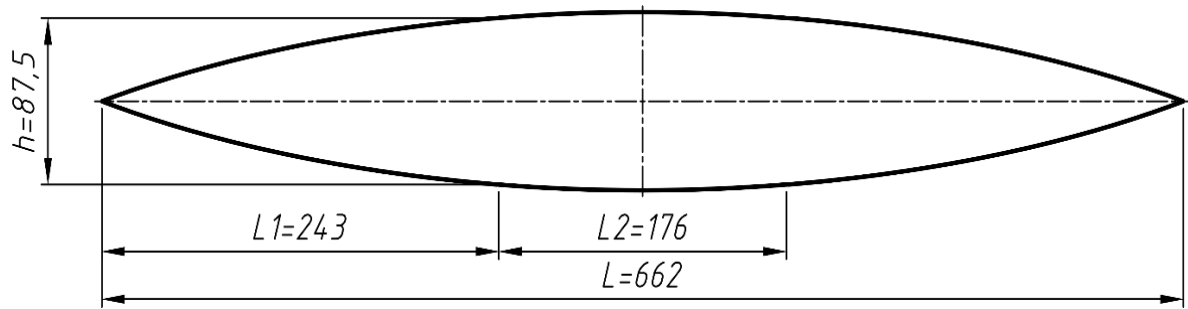
*Рис. 5.14. Результат розрахунку першої власної частоти коливань ромбоподібної пластини*

Як можна спостерігати з рис. 5.11 – 5.14, усі типи пластин виконують умову, при якій перша частота коливань континуальної ділянки повинна знаходитися в діапазоні  $\omega = 49 \dots 49,5$  Гц.

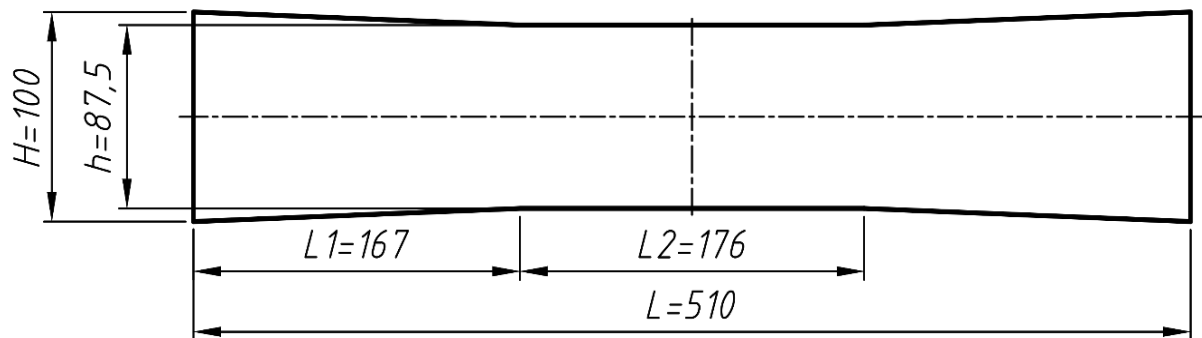
За допомогою проведених розрахунків в ANSYS Workbench, підібрані оптимальні геометричні параметри для усіх типів досліджуваних пластин зі змінним поперечним перерізом (рис. 5.15 – 5.4.18).



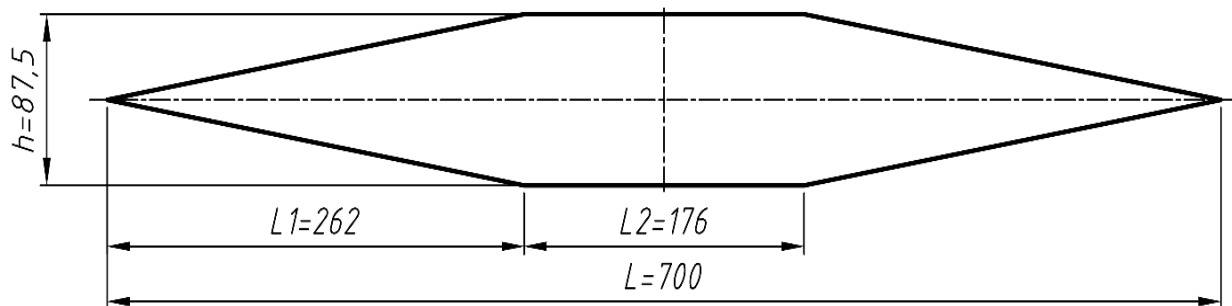
*Рис. 5.15. Геометричні розміри параболічної впуклої пластини.*



*Рис. 5.16. Геометричні розміри параболічної випуклої пластини.*



*Рис. 5.17. Геометричні розміри X-подібної пластини.*



*Рис. 5.18. Геометричні розміри ромбоподібної пластини.*

Усі спроектовані та зображені на рис. 5.15 – 5.18 пластини мають необхідні кріпильні розміри ( $L_2 = 176$  мм,  $h = 87,5$  мм). На основі отриманих креслень пластин із змінним поперечним перерізом виконано їх експериментальні зразки (рис. 5.19).



*Рис. 5.19. Експериментальні зразки досліджуваних пластин*

При дослідженні експериментальні зразки пластин по чергово встановлювалися у проміжній масі вібраційного столу. Вібраційний стіл під'єднувався до електромережі через латер, що змінює значення напруги живлення, яка передається на електромагніти. На робочий орган вібраційного стола ставилися наважки різного розміру. Маси наважок приведені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1.

## Маси наважок на робочий орган вібраційного столу

№ наважки	1	2	3	4
Маса, г	70	141	198	263

Для кожної наважки на робочому органі вібраційного столу визначалося значення напруги, при якій починався відбуватись її відрив від робочого органу. Дана методика застосовувалась для кожної з досліджуваних пластин (рис. 5.20).



а



б



в



г

**Рис. 5.20.** Коливання пластин під час роботи електромагнітів:  
а – параболічної вгуклої; б - параболічної випуклої; в – Х-подібної; г – ромбоподібної

На рис. 5.20 видно, що амплітуда коливань кінців у ромбоподібної та параболічної випуклої пластин є значно більша ніж у параболічної впуклої та Х-подібної. Це один з факторів, що може впливати на енергоефективність роботи обладнання.

### 5.5.2. Результати експериментів та їх аналіз

Експериментальні дослідження проводились із одиничними закріпленими пластинами різних форм, попередньо описаних в підрозділі 5.5.1. В процесі дослідження також змінювалася маса наважок, якими завантажувався робочий орган вібраційної машини. В таблиці 5.2 для різних форм пластин приведено залежність напруги живлення, при якій відбувається відрив наважок, від маси наважок.

Таблиця 5.2

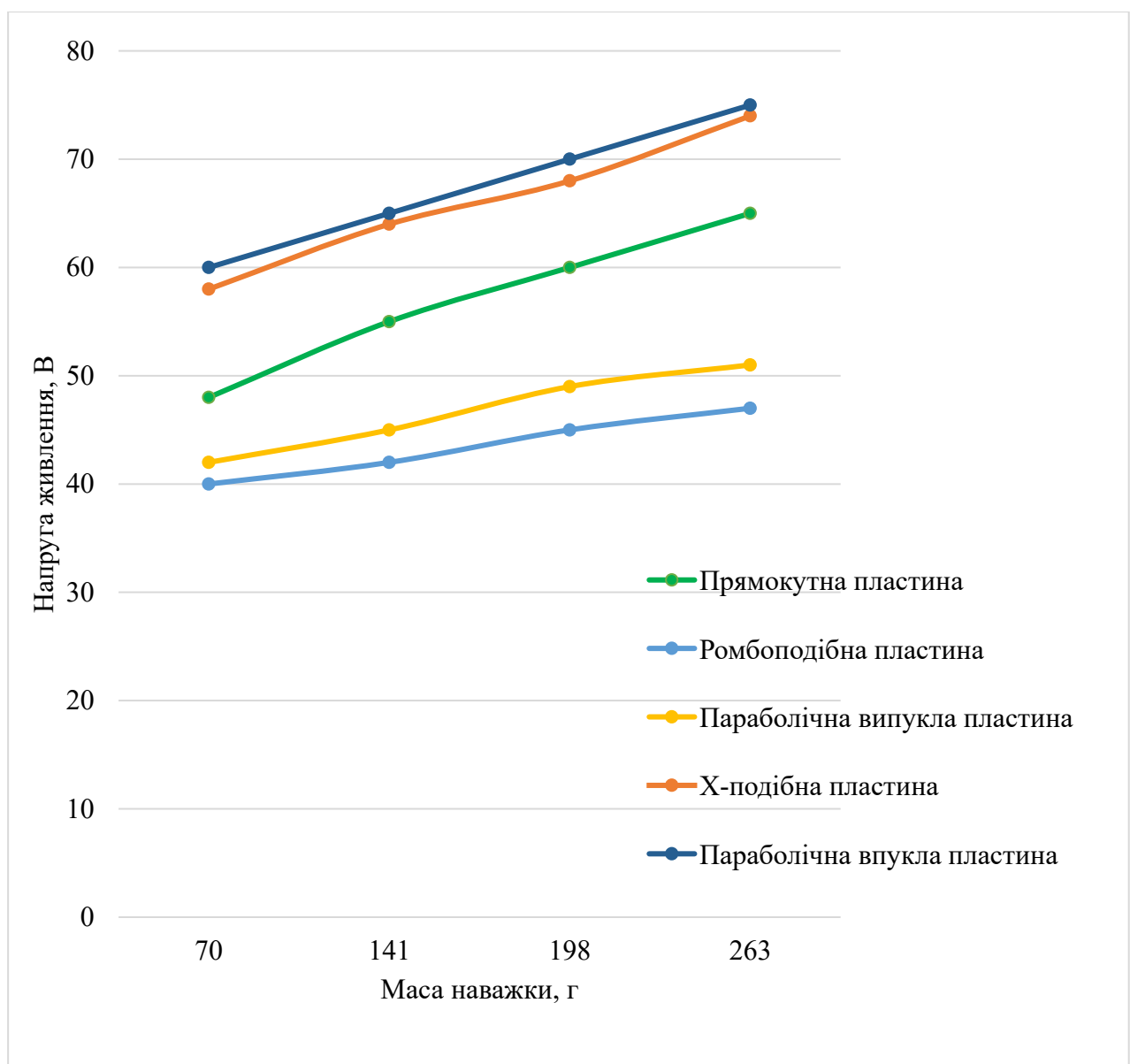
#### Залежність напруги живлення, при якій відбувається відрив наважок, від маси наважок (для різного типу пластин)

Маса наважки, г	Напруга підкидання для різного типу пластин, В				
	Прямокутна пластина	Ромбоподібна пластина	Параболічна випукла пластина	Х-подібна пластина	Параболічна впукла пластина
70	48	40	42	58	60
141	55	42	45	64	65
198	60	45	49	68	70
263	65	47	51	74	75

Із таблиці 5.2 видно, що найменші напруги живлення, при якій відбувається відрив наважок різної маси, спостерігаються у випадку, коли в якості реактивної маси встановлено ромбоподібну пластину (рис. 5.18). Деякі більші значення спостерігаються у випадку закріплення у вібраційному столі

параболічної випуклої пластини (рис. 5.16). Найбільші значення напруги зафіксовано при роботі в якості континуальної ділянки вібраційної машини параболічної впуклої пластини (рис. 5.15).

На основі отриманих у результаті експериментальних досліджень даних для кожної пластини побудовано графіки залежності напруги, при якій відбувається відрив наважок різних мас від робочого органу вібраційної машини, від маси наважок (рис. 5.21). Точками позначено експериментальні результати, зафіксовані під час дослідів.



*Рис. 5.21. Графік залежності напруги живлення, при якій відбувається відрив наважок, від маси наважок для різного типу пластин*

Підсумовуючи дані на рис. 5.21, можна зробити висновок, що найбільшою енергоефективністю серед досліджених зразків пластин володіє ромбоподібна пластина. Загалом очевидною є тенденція, коли при збільшенні крила пластини (відстань  $L_1$ ) збільшується енергоефективність вібраційного столу.

Отже, в результаті проведених експериментальних досліджень в пункті 5.5 можна зробити висновок, що ромбоподібна форма пластини є оптимальною при даному типі використання континуальної ділянки у вібраційній машині з електромагнітним приводом.

### **5.6. Узагальнення результатів теоретичних та експериментальних досліджень, що проведені в дисертаційній роботі. Алгоритм розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом**

Перевагами міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом є невелика кількість рухомих з'єднань, миттєвий вихід на робочу частоту коливань, та найважливіше, висока енергоефективність роботи.

Недоліком міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом є необхідність використання надлегкої реактивної маси. Тому для створення високоефективного міжрезонансного вібраційного технологічного обладнання з електромагнітним приводом в якості реактивної маси запропоновано застосувати континуальні ділянки з розподіленими параметрами. Для цього в другому розділі описано математичну модель еталонної тримасової міжрезонансної МКС, в яку закладено такі параметри, як інерційні значення активної  $m_1 = 118 \text{ кг}$ , проміжної  $m_2 = 45 \text{ кг}$  і реактивної  $m_3 = 0,36 \text{ кг}$  коливальних мас та значення жорсткостей резонансних пружних вузлів  $c_{12}$  та  $c_{23}$ , які набувають значень відповідно  $c_{12} = 3,455 \cdot 10^6 \text{ Н / м}$  та  $c_{23} = 3,517 \cdot 10^4 \text{ Н / м}$ . Також закладено два резонансних піки МКС, які знаходяться на частотах  $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад / с}$  та  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад / с}$ . Встановлено, що для збурення



міжрезонансної МКС із забезпеченням перевантаження на робочому органі  $\zeta = 4g$  необхідно створити збурювальну силу  $F_{03} = 27,488 H$ . Проте для розрахунку електромагнітів закладено значення збурювального зусилля  $F = 30 H$ . Порівняно з двомасовою МКС з електромагнітним приводом коефіцієнт додаткового динамічного підсилення коливань в розроблюваній МКС вібраційної машини становить  $D \approx 21$ , що вказує на її високу енергоефективність.

Запропоновано розрахунок параметрів континуальної ділянки міжрезонансної дискретно-континуальної вібраційної машини з електромагнітним приводом. Розраховано інерційно-жорсткісні параметри континуальної ділянки (пластини). Встановлено, що значення зведеної маси пластини становить  $m_{imp} = 0,364 \text{ кг}$ , а зведеної жорсткості  $-c_{imp} = 3,525 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ . Спроектвану континуальну ділянку синтезовано в модель міжрезонансної МКС, для якої було встановлено основні інерційно-жорсткісні параметри та побудовано амплітудно-частотну характеристику. Також для дискретно-континуальної міжрезонансної МКС побудовано амплітудно-частотну характеристику на широкому діапазоні частот. Вона вказує на полічастотність дискретно-континуальної МКС, що реагує на наявність континуальної ділянки як тіла із безмежною кількістю ступеней вільності.

Конструктивне виконання дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом зображено на рис. 5.22, а його конструктивні параметри відображені в табл. 5.3.

Запропонований дискретно-континуальний міжрезонансний вібраційний стіл з електромагнітним приводом призначений для ущільнення бетонних сумішей, що може використовуватися при формуванні бетонних та залізобетонних виробів.

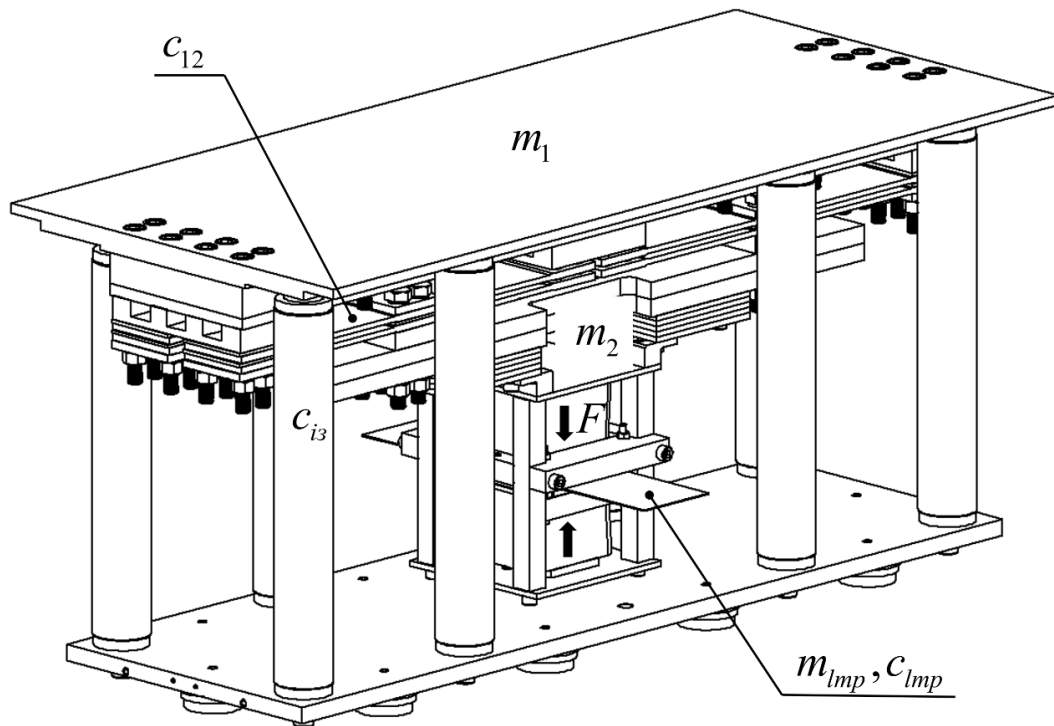


Рис. 5.22. Просторова модель вібраційного столу

Таблиця 5.3

**Конструктивні параметри міжрезонансного вібраційного столу**

Параметри, необхідні для проектування		Значення параметра
Інерційні	маса $m_1, \text{кг}$	118
	маса $m_2, \text{кг}$	45
	зведена маса $m_{\text{imp}}, \text{кг}$	0,364
Власні частоти системи	$\Omega_{\delta 1}, \text{Гц}$	49
	$\Omega_{\delta 2}, \text{Гц}$	51
Жорсткість $c_{12}, \text{Н / м}$		$3,455 \cdot 10^6$
Зведена жорсткість $c_{\text{imp}}, \text{Н / м}$		$3,525 \cdot 10^4$
Збурювальна сила $F, \text{Н}$		30

Вібраційний стіл з електромагнітним приводом приводиться в рух за допомогою знакозмінної сили збурення, що прикладається до третьої коливальної маси, яка власне і є континуальною ділянкою. Континуальна ділянка у вигляді пластини, що вільно прогинається на шарнірних опорах та має консольні виступи, ефективно передає збурення на другу (проміжну) коливальну масу. Проміжна маса, яка наділена лише інерційними характеристиками. Перша коливальна маса, що наділена лише інерційними характеристиками, кінематично приводить в рух активну масу, що є робочим органом вібраційної машини.

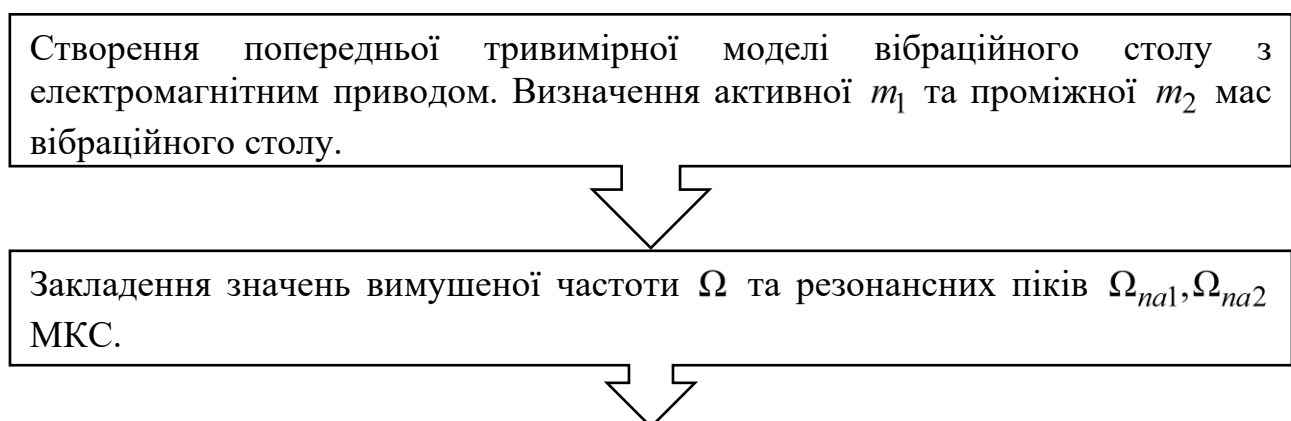
Експериментально було встановлено максимальне значення маси завантаження робочого органу запропонованого вібраційного столу з електромагнітним приводом, яке становить 40 кг.

В результаті проведених експериментальних досліджень по оптимізації континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом було визначено, що найбільшою енергоефективністю володіє ромбоподібна пластина.

Алгоритм розрахунку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом наведено в табл. 5.4.

*Таблиця 5.4*

**Узагальнений алгоритм розрахунку дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційного столу з електромагнітним приводом для проектування даного типу обладнання**



Визначення допустимого діапазону значень реактивної маси  $m_3$ , використовуючи нерівність:

$$0 < m_3 < \frac{-m_2(m_1 + m_2)(1 - \Lambda^2)^2}{m_2(1 - \Lambda^2)^2 - 4m_1\Lambda^2},$$

де  $\Lambda = \frac{\Omega_{na1}}{\Omega_{na2}}$  – співвідношення власних колових частот системи. Закладення певного значення реактивної маси, що знаходиться у встановленому діапазоні.

Визначення жорсткісних параметрів пружних вузлів  $c_{12}, c_{23}$  за виразами:

$$c_{12} = \frac{(m_2 + m_3)m_1\Omega_{na2}^2 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{na2}^2(\Lambda^2 - 1) - H \right]}{(m_1 + m_2 + m_3) \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{na2}^2(\Lambda^2 - 1) + (-H - 2m_1m_3\Omega_{na2}^2) \right]},$$

$$c_{23} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{na2}^2(\Lambda^2 + 1) - H}{2 \cdot (m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3,$$

$$\text{де } H = \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)m_2\Omega_{na2}^4 \left[ (m_1 + m_2 + m_3)m_2(\Lambda^2 - 1)^2 - 4m_1m_3\Lambda^2 \right]}.$$

Закладення амплітудного значення  $Y_1$  коливань робочого органу. Розрахувати перевантаження на робочому органі можливо за допомогою рівняння:

$$\zeta = \frac{Y_1 \cdot \omega^2}{g}.$$

Розрахунок сили збурення МКС для забезпечення необхідного перевантаження на робочому органі:

$$F = -\zeta g \frac{\left( m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^4 - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_2 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} - m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} + \right.}{\omega^2 \cdot m_3 \cdot c_{12}} \left. + m_1 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + m_3 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - m_1 \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \right)$$

Проектування схеми закріплення пластини у проміжній масі. Визначення першої власної частоти коливань пластини, що є континуальною ділянкою. Якщо тип закріплення пластини – шарнірне кріплення у чотирьох точках по периметру симетрично (із поділом пластини на 3 ділянки), можна використати наступні методи розрахунку:

- 1) за допомогою функцій Крилова із спрощенням до стержня (підрозділ 2.2);
- 2) за допомогою методу скінченних елементів в САЕ-програмі (п.2.3);
- 3) методом Релея-Рітца з використанням балочних функцій по двох координатах (п.2.4);
- 4) методом Релея-Рітца з припущенням, що прогин пластини відбувається по гіперболоїдній поверхні (п.2.4).

Варто зазначити, що за допомогою методу Релея-Рітца з використанням балочних функцій по двох координатах знаходяться також прогини  $w(x)$  ділянок пластини.

Перевірка пластини на міцність. Розподіл нормальних напружень на поверхні пластини можна встановити із рівняння:

$$\sigma(x) = E \frac{J_z \left( d^2 w(x) / dx^2 \right) y}{J_z} = \frac{E b_n}{2} \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

Розрахунок центра швидкостей ділянок стержня. Для випадку симетричної пластини, у якій збурювальна сила прикладається до її середини, можливий поділ пластини на чотири ділянки і встановлення центра швидкостей лише її половини. Координати точки зведення  $X_{cons}$  інерційної маси  $m_{cons}$  на половині пластини (ділянки 1 та 2) можна визначити з виразу:

$$X_{cons12} = \frac{X_{cons1} \cdot \int_0^{L_1} x_1 \cdot \chi_1(x_1) dx_1 + X_{cons2} \cdot \int_{L_1}^{L_f} x_2 \cdot \chi_2(x_2) dx_2}{\int_0^{L_1} x_1 \cdot \chi_1(x_1) dx_1 + \int_{L_1}^{L_f} x_2 \cdot \chi_2(x_2) dx_2}.$$

Розрахунок зведених мас та жорсткостей стержня:

$$m_{cons} = 2 \cdot \left[ m_{rm} \int_0^{L_1} (\chi_1(x_1) / \chi_{cons12})^2 dx_1 - m_{rm} \int_{L_1}^{L_f} (\chi_2(x_2) / \chi_{cons12})^2 dx_2 + \int_0^{L_1} \frac{m_{rm}}{3} \cdot x_1^2 \cdot \left( \frac{d^2 \chi_1(x_1)}{dx_1^2 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_1 - \int_{L_1}^{L_f} \frac{m_{rm}}{3} \cdot x_2^2 \cdot \left( \frac{d^2 \chi_2(x_2)}{dx_2^2 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_2 \right];$$

$$c_{cons} = 2 \cdot \left( E \cdot J \int_0^{L_1} \left( \frac{d^2 \chi_1(x_1)}{dx_1^2 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_1 + E \cdot J \int_{L_1}^{L_f} \left( \frac{d^2 \chi_2(x_2)}{dx_2^2 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_2 + k_\tau \int_0^{L_1} \left( \frac{d^3 \chi_1(x_1)}{dx_1^3 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_1 + k_\tau \int_{L_1}^{L_f} \left( \frac{d^3 \chi_2(x_2)}{dx_2^3 \chi_{cons12}} \right)^2 dx_2 \right).$$

Перевірка отриманих значень. Формування остаточної конструкції

## 5.7. Висновки до п'ятого розділу

1. Для проведення досліджень в даному розділі було запропоновано експериментальний зразок дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. В якості вимірювального обладнання до робочого органу вібраційного столу було приєднано датчик акселерометра/гіроскопа MPU-6050, який подавав зняті в процесі експерименту значення амплітуд коливань активної маси на мікроконтролерну плату Arduino Uno, що з'єднана з персональним комп'ютером.

2. Для перевірки відповідності характеристик експериментального зразка вібраційної машини із встановленими теоретично параметрами, було встановлено значення амплітуди коливань робочого органу. Визначена експериментально амплітуда коливань робочого органу 0,4 мм відповідає закладеному в МКС вібраційної машини значенню, а частота вимушених коливань робочого органу  $\nu_{fe} = 49,85 \text{ Гц}$  є близькою до розрахункового значення  $\nu_f = 50 \text{ Гц}$ , що свідчить про адекватність математичних моделей та методики розрахунку дискретно-континуальної міжрезонансної МКС вібраційного столу з електромагнітним приводом.

3. Перевірка значень власних частот дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом здійснювалася шляхом визначення переміщення робочого органу вібраційного столу під час резонансних режимів роботи. При цьому частота збурення електромагнітів змінювалася за допомогою латера. Отримані значення власних частот коливань експериментального зразка вібраційного столу  $\nu_{ne1} = 49,19 \text{ Гц}$  та  $\nu_{ne2} = 51,24 \text{ Гц}$  узгоджуються із закладеними при теоретичних розрахунках значеннями  $\nu_{n1} = 49 \text{ Гц}$  та  $\nu_{n2} = 51 \text{ Гц}$ .

4. Для майбутнього впровадження даного типу вібраційних машин в якості технологічного обладнання на підприємствах експериментально встановлено,

що максимальне значення маси завантаження робочого органу вібраційного столу з електромагнітним приводом становить 40 кг.

5. Запропоновано альтернативні варіанти пластин із змінним поперечним перерізом, що можуть використовуватися в якості реактивної маси міжрезонансного вібраційного столу, а саме: параболічну впуклу, параболічну випуклу, Х-подібну та ромбоподібну пластини. Метою даних експериментальних досліджень є знаходження оптимальної форми пластини як континуальної ділянки вібраційного столу. Запропоновано методику знаходження залежності напруги, при якій відбувається вібраційне підкидання наважок різних мас на робочому органі вібраційного стола для кожної із запропонованих пластин від маси наважок. В результаті проведених експериментальних досліджень встановлено, що оптимальною формою пластини є ромбоподібна.

6. Узагальнено результати теоретичних та експериментальних досліджень дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. Запропоновано алгоритм розрахунку вібраційного столу для його впровадження у промислове виробництво.



## ВИСНОВКИ

В дисертаційних дослідженнях розв'язана актуальна науково-прикладна задача, що полягає у розвитку методології створення високоефективних міжрезонансних вібраційних машин, в яких усунені недоліки, що унеможлилювали широке впровадження в промисловість такого типу обладнання. Для цього, базуючись на відомих підходах у створенні гібридних МКС вібраційних машин, була запропонована методологія створення дискретно-континуальних вібраційних машин з електромагнітним приводом, де у якості континуальної ділянки використано пластину, збурену від електромагнітних віброзбуджувачів.

Основними здобутками дисертаційної роботи є:

1. В результаті проведеного аналізу існуючих типів МКС, які беруться за основу при проектуванні вібраційного технологічного обладнання, встановлено, що для забезпечення високоефективних режимів роботи оптимальним рішенням є міжрезонансні МКС. Проаналізовано патенти та промислові зразки міжрезонансного вібраційного обладнання з інерційним, кривошипно-шатунним та електромагнітним типами приводів. Досліджено переваги та недоліки даних типів приводів для тримасових вібраційних машин та встановлено, що найдоцільнішим рішенням для подальшого розвитку високоефективних міжрезонансних вібраційних машин є використання електромагнітів в якості приводу. Це дозволяє мінімізувати кількість рухомих з'єднань та миттєво виходити на робочу частоту коливань.

Підтверджено, що для реалізації високоефективних міжрезонансних режимів роботи тримасовим вібраційним технологічним обладнанням необхідні надлегка реактивна маса та невелика жорсткість пружнього вузла, що її закріплює. Такими властивостями дійсно наділене гнучке тіло, що поєднує у собі необхідні значення інерційно-жорсткісних параметрів. Тож вирішено в якості реактивної маси енергоефективної міжрезонансної вібраційної машини з

електромагнітним приводом використати гнучке тіло, тобто континуальну ділянку у вигляді пластини, яка оптимально поєднає в собі інерційні та жорсткісні параметри. Для цього розроблено принципову схему такої дискретно-континуальної системи.

2. У зв'язку з тим, що у дискретно-континуальній системі важко встановити її реальні інерційно-жорсткісні параметри, в дисертаційній роботі розраховано параметри еталонної дискретної тримасової міжрезонансної системи, з якою будуть узгоджуватись параметри дискретно-континуальної системи. А саме встановлено, що за закладеного додаткового динамічного підсилення коливань  $D = 21$  в порівнянні з класичною двомасовою системою, та відомих інерційних значень активної та проміжної мас ( $m_1 = 118 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 45 \text{ кг}$ ), інерційне значення реактивної маси повинно становити  $m_3 = 0,36 \text{ кг}$ , а жорсткості пружних вузлів –  $c_{12} = 3,455 \cdot 10^6 \text{ Н / м}$ ,  $c_{23} = 3,517 \cdot 10^4 \text{ Н / м}$ .

3. Запропоновано розрахункову схему дискретно-континуальної міжрезонансної МКС, де активна та проміжна маси є дискретними, а реактивна маса є континуальною ділянкою у вигляді пластини. Важливим параметром під час синтезу дискретно-континуальної системи є власна частота коливань пластини. Оскільки умови закріплення пластини у вібраційній машині є складними, існуючі методи розрахунку не дозволяють отримати точний розв'язок. Тому в дисертаційній роботі запропоновано встановити першу власну частоту коливань пластини із спроектованим складним типом кріплення за допомогою наближених методів розрахунку.

Для розрахунку першої власної частоти пластини було використано чотири методи, а саме: метод із спрощенням пластини до стержня та використанням функцій Крилова; метод скінченних елементів у програмному продукті ANSYS Workbench; методологія з використанням гармонійних та балочних функцій по двох координатах та розроблена у дисертаційній роботі методологія визначення власної частоти пластини за допомогою методу Релея-Рітца з припущенням, що її прогин відбувається по гіперболоїдній поверхні. Дані методи дозволили

розраховувати першу власну частоту коливань пластини, як тіла з розподіленими параметрами, з достатньою точністю, що дозволяє використовувати їх при проектуванні даного типу вібраційних машин. Розраховане за допомогою вищезгаданих методів значення першої власної колової частоти коливань пластини становить близько  $\nu_n = 49 \text{ Гц}$ , що дозволяє отримати резонансний пік близько до частоти вимушених коливань  $\nu_f = 50 \text{ Гц}$  вібраційного столу з електромагнітним приводом.

З метою удосконалення адекватності параметрів пластини параметрам реактивної маси дискретної моделі було встановлено зведені масу та жорсткість пластини. Зведена маса становить  $m_{lmp} = 0,364 \text{ кг}$  а зведена жорсткість  $c_{lmp} = 3,525 \cdot 10^4 \text{ Н / м}$ , що узгоджується із параметрами реактивної маси еталонної дискретної міжрезонансної МКС.

Запропоновано математичну модель дискретно-континуальної міжрезонансної МКС з електромагнітним приводом. Для цього було сформовано залежності для визначення амплітуд коливань  $Y_1$  та  $Y_2$ , відповідно активної та проміжної мас МКС. При даних розрахунках два резонансних піки формуються на частотах  $\omega_{ndc1} = 306 \text{ рад / с}$  та  $\omega_{ndc2} = 328 \text{ рад / с}$ . Дані значення дещо відрізняються від закладених в математичну модель еталонної дискретної тримасової міжрезонансної МКС  $\Omega_{n1} = 306 \text{ рад / с}$  та  $\Omega_{n2} = 333 \text{ рад / с}$ . Проте дана похибка не є суттєвою, та дозволяє вібраційному столу працювати на частоті вимушених коливань  $\Omega_f = 314 \text{ рад / с}$  у міжрезонансній високоефективній зоні коливань. Встановлено, що дискретно-континуальна МКС є полічастотною і має безліч резонансних піків.

4. Як результат проведених теоретичних досліджень із перспективними структурами МКС, було запропоновано конструкцію міжрезонансного вібраційного столу, що отримує силове збурення від електромагнітів. В якості реактивної маси вібраційного столу використано континуальну ділянку у вигляді пластини, що кріпиться у проміжній масі. Для твердотілої моделі вібраційного

столу з електромагнітним приводом встановлено інерційні параметри коливальних мас та жорсткість системи резонансних пружних елементів. Система пружних елементів складається з восьми робочих ділянок, а жорсткість однієї робочої ділянки становить  $c_{i1} = 4,32 \cdot 10^5 \text{ Н / м}$ , що відповідає необхідному для забезпечення високоефективних міжрезонансних режимів роботи значенню жорсткості пружного вузла. Розраховано на міцність пластину, яка виконує роль реактивної маси МКС вібраційного столу. Виявлено, що найбільші нормальні напруження при чистому згині утворюються в місці шарнірного закріплення опор. Напруження в даних точках становить  $\sigma_{\max} = 409,8 \text{ МПа}$ . Допустиме напруження на згин для матеріалу пластини (сталі) становить  $[\sigma_{-1}] = 460 \text{ МПа}$ , тож попри великі амплітуди коливань вільних кінців пластини, які дозволяють створити необхідне збурення робочого органу, умова міцності для континуальної ділянки у вібраційній машині витримується.

За допомогою аналітичних методів проведено розрахунки параметрів електромагнітного приводу, що приводить в рух запропоновану дискретно-континуальну міжрезонансну МКС вібраційного столу, зокрема встановлено, що при значенні напруги  $U = 60 \text{ В}$  амплітудне значення сили струму становить  $I = 0,6 \text{ А}$ . Також розраховано амплітудне значення знакозмінної сили збурення  $F = 30 \text{ Н}$  електромагнітів. Встановлено, що отримані параметри електромагнітного приводу забезпечують необхідне значення амплітуди коливань робочого органу вібраційної машини. Висвітлені в дисертаційній роботі математичні моделі досліджень часових залежностей руху коливальних мас вібраційного столу з електромагнітним приводом дозволяють точно спрогнозувати рух активної коливальної маси в реальній конструкції. Використовуючи програмний продукт ANSYS Magnetostatic, проведено аналіз процесів, що протікають у тривимірному магнітному полі електромагнітного приводу. Розраховано та візуально відображено збурювальну силу електромагнітного приводу, яка діє на пластину, густину магнітного потоку в

електромагніті, інтенсивність магнітного поля та густину струму в електромагнітному приводі вібраційного столу. За допомогою методу скінченних елементів підтверджено точність досліджень часових залежностей руху коливальних мас за допомогою аналітичних методів.

5. Для проведення експериментальних досліджень було запропоновано лабораторний зразок дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом. Параметри та конструкція експериментального зразка вібраційного столу з електромагнітним приводом повністю співпадають із спроектованою тривимірною моделлю. В якості вимірювального обладнання до робочого органу вібраційного столу було приєднано датчик акселерометра/гіроскопа MPU-6050, який подавав зняті в процесі експерименту значення амплітуд коливань активної маси на мікроконтролерну плату Arduino Uno, що з'єднана з персональним комп'ютером. Для перевірки відповідності характеристик експериментального зразка вібраційної машини із встановленими теоретично параметрами, було встановлено значення амплітуди його вимушених коливань, що становить  $0,0004\text{ м}$ , та власні частоти коливань ( $\nu_{ne1} = 49,19\text{ Гц}$ ;  $\nu_{ne2} = 51,24\text{ Гц}$ ). Для майбутнього впровадження такого типу вібраційних машин з електромагнітним приводом в якості технологічного обладнання на підприємствах експериментально встановлено, що максимальна маса завантаження робочого органу вібраційного столу з електромагнітним приводом становить  $40\text{ кг}$ .

Проведено оптимізацію форми пластини як континуальної ділянки вібраційного столу. Запропоновано альтернативні варіанти пластин із змінним поперечним перерізом, що можуть використовуватися в якості реактивної маси міжрезонансного вібраційного столу, а саме: параболічну впуклу, параболічну випуклу, Х-подібну та ромбоподібну пластини. Для визначення ефективності зразків пластин, було запропоновано методику знаходження залежності напруги, при якій відбувається вібраційне підкидання наважок різних мас на робочому органі вібраційного стола, від маси наважок. В результаті проведених

експериментальних досліджень встановлено, що оптимальною формою пластини є ромбоподібна. Запропоновано алгоритм розрахунку вібраційного столу для його впровадження у промислове виробництво.

Отже, розроблений у дисертаційній роботі підхід дозволяє створювати вібраційне технологічне обладнання з електромагнітним приводом, реалізоване на основі гібридних дискретно-континуальних структур МКС. Даний тип обладнання може ефективно реалізовувати високоефективні міжрезонансні режими роботи та повноцінно розкрити динамічний потенціал перспективних дискретно-континуальних систем.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Академічна пошукова система Google Scholar.  
URL: <https://scholar.google.com.ua>
2. *Афтаназів І. С.* Підвищення надійності деталей машин поверхневим пластичним деформуванням: навч. посібник / *І. С. Афтаназів, А. П. Гавриш, П. О. Киричок та ін.* – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 516 с.
3. *Афтаназів І. С.* Резонансний електромагнітний віброкавітатор / *І. С. Афтаназів, Л. І. Шевчук, О.І. Строган* // Науковий вісник НЛТУ України, Львів, 2017. – № 27(3). – С. 124–130.
4. *Афтаназів І. С.* Віброрезонансні кавітатори для обробки води відкритих водойм / *І. С. Афтаназів, О.І. Строган, Л. Р. Струтинська* // Transfer of innovative technologies, 2020. – №. 3(1). – С. 58–60.
5. *Басараб В. А.* Дослідження полічастотного режиму коливань електромагнітної ударно-вібраційної системи / *В. А. Басараб* // Техніка будівництва. 2015. – №34. – С. 25–29.
6. *Берник П. С.* Конвеєрні вібраційні машини для оздоблювально-зміцнювальної обробки: навч. посібник / *П. С. Берник, І. П. Паламарчук* – Київ: Вища школа, 1996. – 237 с.
7. *Берник П. С.* Машини і обладнання для розмірно-зміцнюючої термоокислювальної та вібраційної обробки твёрдосплавних виробів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.02.02. Хмельницький, 1999. – 37 с.
8. *Берник П. С.* Алгоритм для визначення частоти та амплітуди коливань вібромашин / *П. С. Берник, Р. В. Чубик, С.А. Таянов* // Вібрації в техніці та технологіях, 2005. – № 2(40). – С. 1–6.
9. *Берник П. С.* Методика розрахунку дебалансного приводу резонансної вібраційної технологічної машини / *П. С. Берник, Р. В. Чубик* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2005. – № 39. – С. 12–25.
10. *Берник П. С.* Методика розрахунку потужності електродвигуна приводу

- дебалансного вала резонансної вібраційної технологічної машини / П. С. Берник, Р. В. Чубик // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", 2006. – № 560. – С. 19–27.
11. Берник П. С. Перехідні процеси у вібраційних технологічних машинах із дебалансним приводом / П. С. Берник, Р. В. Чубик // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2006. – № 40. – С. 25–34.
  12. Беспалов А. Л. Оптимізація приводу віброживильників. / А. Л. Беспалов // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2005. – № 39 – С. 35–38.
  13. Боровець В. М. Вплив робочого середовища на кінематику вібраційних машин / В. М. Боровець, Я. В. Боровець // Вібрації в техніці та технологіях. 2016. – №2(82). – С. 10–15.
  14. Ванін В. В. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко // Геометричне та комп'ютерне моделювання, 2009. – № 23. – С. 42-48.
  15. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкість руху: підручник / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
  16. Гаврильченко О. В. Багатомасова вібраційна площадка з електромагнітним приводом для ущільнення бетоноsumішей / О. В. Гаврильченко, О. С. Ланець, В. М. Боровець // Вібрації в техніці і технологіях, 2004. – № 1 (33). – С. 66–72.
  17. Гаврильченко О. В. Дослідження перехідного режиму роботи вібраційної машини з просторовим рухом робочого органу, створеної на основі теорії синфазних коливань / О. В. Гаврильченко, О. С. Ланець, В. М. Гурський, Я. В. Шпак // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2006. – № 556. – С. 23–31.
  18. Голенков Г. М. Електромеханічні тягові характеристики коаксіально-лінійного двигуна з постійними магнітами та магнітним підвісом /



- Г. М. Голенков, Д. І. Пархоменко* // Технічна електродинаміка, 2014. – №6. – С. 56–59.
19. *Гордєєв А. І.* Розвиток наукових основ проектування вібраційного обладнання для зміни властивостей води та її знезаражування / *А. І. Гордєєв* // Вісник Хмельницького національного університету, 2010. - №1. – С. 12–20.
  20. *Гуров А. П.* Експериментальне дослідження керованого електромагнітного вібраційного привода / *А. П. Гуров, О. О. Черно, Л. І. Бугрім, О. В. Поляков* // Вібрації в техніці та технологіях, 2018. – №3 (90). – С. 11–21.
  21. *Гурський В. М.* Вибір раціональних параметрів стержневої системи вібраційного оброблювального комплексу з електромагнітним приводом / *В. М. Гурський, О. С. Ланець, Я. В. Шпак* // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2009. – № 641. – С. 29–34.
  22. *Гурський В. М.* Вплив нелінійності зусилля електромагнітного приводу на динаміку вібраційних машин / *В. М. Гурський, О. С. Ланець, Я. В. Шпак, В. І. Лозинський* // Вібрації в техніці та технологіях, 2011. – № 1(61). – С. 25–31.
  23. *Гурський В. М.* Числовий параметричний синтез міжрезонансної віброударної системи / *В. М. Гурський, О. С. Ланець* // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2014. – № 788. – С. 13–20
  24. *Гурський В. М.* Раціональний синтез двочастотних резонансних вібраційних машин / *В. М. Гурський, І. В. Кузьо* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2015. – № 49. – С. 8–17.
  25. *Дейниченко Г. В.* Використання вібраційного впливу в процесі мембранного концентрування харчових рідин / *Г. В. Дейниченко, В. В. Гузенко, З. О. Мазняк* // Вібрації в техніці та технологіях, 2017. – №1(84). – С. 15–22.
  26. *Дєдов О. П.* Розповсюдження плоских хвиль напруження в пружно-пластичному середовищі під дією силового навантаження. / *О. П. Дєдов* // Техніка будівництва, 2010. – № 25. – С. 69–73.

27. Європейська база даних патентів. URL: <https://worldwide.espacenet.com>
28. *Зав'ялов В. Л.* Експериментальна оцінка енергетичних характеристик віброконвеєрної технологічної машини / *В. Л. Зав'ялов, В. П. Янович, В. І. Драчшин, В. І. Паламарчук* // *Вібрації в техніці та технологіях*, 2015. – №3(79). – С. 79–85.
29. *Ісакович-Лотоцький Р. Д.* Обґрунтування ефективності процесів зневоднення за допомогою вібраційного та віброударного навантаження / *Р. Д. Ісакович-Лотоцький, В. С. Любин* // *Вібрації в техніці та технологіях*, 2013. – №4(72). – С. 96–100.
30. *Качур О. Ю.* Аналіз кривошипно-шатунного приводу міжрезонансної вібраційної машини / *О. Ю. Качур* // Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Експлуатаційна та сервісна інженерія» (м. Харків, 15 – 16 жовтня 2020 р.), Харків: ХНТУСГ, 2020. – С. 9–11.
31. *Качур О. Ю.* Встановлення центра швидкостей стержня, як тіла з розподіленими параметрами, що перебуває в коливальному русі / *О. Ю. Качур* // V Міжнародна наукова конференція з нових тенденцій у науці та освіті «Theoretical and scientific bases of development of scientific thought», (м. Рим, Італія, 16 – 19 лютого 2021 р.), Рим, 2021. – С. 642–644.
32. *Кіндрацький Б. І.* Раціональне проектування машинобудівних конструкцій: монографія / *Б. І. Кіндрацький, Г. Т. Сулим*. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2003. – 280 с.
33. *Кіницький, Я. Т.* Аналітичні методи аналізу та синтезу механізмів / *Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський*. – Хмельницький: ХНУ, 2006. – 88 с.
34. *Корендій В. М.* Динаміка руху мобільного вібраційного робота з віброударним режимом функціонування / *В. М. Корендій, О. Ю. Качур* // *Вібрації в техніці та технологіях: тези доповідей XVII Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 140-річчю випуску інженерів-механіків у Львівській політехніці (Львів, 11–12 жовтня 2018 р.)*, Львів. – С. 68–69.

35. *Корендій В. М.* Моделювання роботи тримасового вібротранспортера з напрямленими коливаннями робочого органа / *В. М. Корендій, О. Ю. Качур, П. Р. Дмитерко, Ю. Я. Новіцький* // XIV Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (м. Львів, 23 – 24 травня 2019 р.): Матеріали симпозіуму, Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2019. – С. 136–138.
36. *Кузьо І. В.* Синфазні вібраційні машини з електромагнітним приводом для ущільнення бетоносумішей / *І. В. Кузьо, О. С. Ланець, Ю. П. Шоловій, Я. В. Шпак* // Вібрації в техніці та технологіях, 2007. – № 4 (49) – С. 33–36.
37. *Кузьо І. В.* Встановлення конструктивно-силових параметрів та дослідження руху коливальних мас у вібраційній машині з аероінерційним збуренням. / *І. В. Кузьо, О. В. Ланець, Я. В. Шпак* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2012. – Вип. 46. – С. 28 – 44.
38. *Ланець О. С.* Розрахунок тримасових механічних коливальних систем вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас / *О. С. Ланець* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2005. – Вип. 39. – С. 76–82.
39. *Ланець О. С.* Порівняльний аналіз механічних коливальних систем міжрезонансних вібраційних машин з електромагнітним приводом / *О. С. Ланець* // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Серія: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні, 2007. – № 583. – С. 58–68.
40. *Ланець О. С.* Додаткове підсилення коливань у високоефективних міжрезонансних вібраційних машинах з електромагнітним приводом / *О. С. Ланець, І. В. Кузьо, В. М. Гурський, Ю. П. Шоловій* // Вібрації в техніці та технологіях, 2008. – № 2(51) – С. 12–18.
41. *Ланець О. С.* Високоефективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): монографія / *О. С. Ланець*. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2008. – 324 с.
42. *Ланець О. С.* Розвиток міжрезонансних вібраційних машин з

- електромагнітним приводом / *О. С. Ланець* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2008. – № 42. – С. 3–18.
43. *Ланець О. С.* Практичне використання коефіцієнта додаткового динамічного підсилення коливань у розрахунку високоефективних міжрезонансних вібротрипів / *О. С. Ланець* // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Динаміка, міцність та проектування машин і приладів, 2009. – № 641. – С. 43–45.
44. *Ланець О. С.* Обґрунтування параметрів вібраційного бункерного живильника з електромагнітним приводом / *О. С. Ланець, Р. Я. Качмар, В. М. Боровець* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. 2016. – № 50. – С. 54 – 76.
45. *Ланець О. С.* Виявлення шляхів подальшого вдосконалення високоефективних міжрезонансних коливальних систем. / *О. С. Ланець, О. Ю. Качур* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2017. – № 51. – С. 62–65.
46. *Ланець Олександр*, Основи розрахунку та конструювання вібраційних машин. Книга 1. Теорія та практика створення вібраційних машин з гармонійним рухом робочого органа: навч. посібник / *О. Ланець*. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018.
47. *Ланець О. С.* Обґрунтування раціонального вибору моторів-вібраторів вібраційних машин / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. М. Боровець, І. А. Деревенько* // Вібрації в техніці та технологіях, 2019. – № 3(90).– С. 24–32.
48. *Ланець О. С.* Обґрунтування параметрів тримасової міжрезонансної вібраційної машини з інерційним приводом / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. М. Боровець, І. А. Деревенько* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2019. – № 53. – С. 13–22.
49. *Ланець О. С.* Аналіз енергетичної ефективності вібраційних машин з інерційним приводом / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. М. Боровець, І. А. Деревенько* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні

- та приладобудуванні, 2019. – № 53. – С. 101–108.
50. *Ланець О. С., Майструк П. В., Боровець В. М.* Тримасова вібраційна машина. Патент на корисну модель 141112 Україна, подано 17. 07. 2019, опуб. 25.03.2020.
  51. *Ланець О. С., Майструк П. В., Боровець В. М.* Тримасова вібраційна машина. Патент на корисну модель 141114 Україна, подано 17. 07. 2019, опуб. 25.03.2020.
  52. *Ланець О. С.* Обґрунтування раціонального вибору моторів-вібраторів вібраційних машин / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. М. Боровець, І. А. Деревенько* // Вібрації в техніці та технологіях: тези доповідей XVIII Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 55-річчю факультету автоматизації і інформаційних технологій Київського національного університету будівництва і архітектури (Київ. 23–25 жовтня 2019 р.), Київ: КНУБА. – С. 15–20.
  53. *Ланець О. С.* Обґрунтування принципової схеми тримасової вібраційної машини з інерційним приводом, здатної входити в міжрезонансну зону / *О. С. Ланець, І. В. Кузьо, Ю. П. Шоловій, П. В. Майструк* // Вібрації в техніці та технологіях: тези доповідей XVIII Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 55-річчю факультету автоматизації і інформаційних технологій Київського національного університету будівництва і архітектури (Київ. 23–25 жовтня 2019 р.), Київ: КНУБА. – С. 78–82.
  54. *Ланець О. С.* Встановлення власної частоти континуальної ділянки міжрезонансної вібромашини з використанням наближеного методу Релея-Рітца. / *О. С. Ланець, О. Ю. Качур, В. М. Боровець, П. Р. Дмитерко, І. А. Деревенько, А. Я. Зварич* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2020. – № 54. – С. 5–15.
  55. *Ланець О. С.* Розрахунок центра швидкостей ділянок стержня як реактивної маси дискретно-континуальної міжрезонансної вібромашини з електромагнітним приводом / *О. С. Ланець, П. В. Майструк* // Потураєвські

- читання: тези XIX Всеукраїнської науково-технічної конференції (Дніпро, 22 квітня 2021р.), Дніпро. – С. 33–34.
56. *Ланець О. С.* Формування високоефективної дискретної тримасової міжрезонансної коливальної системи вібраційної машини з електромагнітним приводом / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. М. Боровець, В. В. Майструк, Р. Я. Качмар* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2021. – № 55. – С. 62–75.
57. *Ланець О. С.* Оптимізація форми та підбір розмірів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібростола / *О. С. Ланець, П. В. Майструк, В. В. Майструк, І. А. Деревенько* // Енергоощадні машини і технології: тези III міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 17 – 19 травня 2022 року), Київ. – С. 50 – 54.
58. *Ланець О. С., Майструк П. В., Майструк В. В., Деревенько І. А.* Тримасова коливальна система. Патент на корисну модель 153676 Україна, подано 09. 02. 2023, опуб. 09. 08. 2023.
59. *Ловейкін В. С.* Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / *В. С. Ловейкін, А. В. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич* // Вісник ТДТУ: Механіка та матеріалознавство, 2010. – Том 15. – № 1. – С. 7–13.
60. *Майструк П. В.* Способи входу в міжрезонансну зону тримасових вібраційних машин з інерційним приводом / *П. В. Майструк* // Перспективи розвитку машинобудування та транспорту–2019: збірник тез доповідей I Міжнародної науково-технічної конференції (Вінниця. 13–15 травня 2019 р.), Вінниця: ПП "ТД "Едельвейс і К". – С. 250–252.
61. *Майструк П. В.* Розрахунок власної частоти коливань континуальних ділянок при створенні міжрезонансних вібростатів / *П. В. Майструк* // Експлуатаційна та сервісна інженерія: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (Харків, 27–28 травня 2020 р.), Харків. – С. 27 – 29.
62. *Майструк П. В.* Вплив геометричних розмірів пружної пластини зі

- складними граничними умовами кріплення на її першу власну частоту коливань / *П. В. Майструк* // Потураєвські читання: тези XIX Всеукраїнської науково-технічної конференції (Дніпро, 22 квітня 2021р.), Дніпро. – С. 35.
63. *Майструк П. В.* Розрахунок зведених інерційно-жорсткісних параметрів континуальної ділянки дискретно-континуального міжрезонансного вібростола з електромагнітним приводом / *П. В. Майструк* // Вібрації в техніці та технологіях: тези XIX Міжнародної науково-технічної конференції, (Київ, 23 – 25 травня 2023 року), Київ. – С. 20 – 23.
64. *Малащенко В. О.* Деталі машин. (2-е видання) / *В. О. Малащенко*, – Львів: Новий Світ – 2000, 2015. – 194 с.
65. *Малащенко В. О.* З'єднання змінної жорсткості: монографія / *В. О. Малащенко, В. В. Ніколайчук, О. Ю. Тимейчук* – Рівне: НУВГП – 2020. – 97 с.
66. *Назаренко І. І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: підручник / *І. І. Назаренко*. – Київ: КУНБА, 1999. – 488 с.
67. *Назаренко І. І.* Теорія і практика створення машин будіндустрії на основі синтезу систем "машина–середовище" / *І. І. Назаренко* // Техніка будівництва, 2002. – №13. – С. 6–14.
68. *Назаренко І. І., Баранов Ю. О., Свідерський А. Т.* Електромагнітна трамбівка. Патент на корисну модель 15850 U Україна, подано 02.02.2006, опубл. 17.07.2006.
69. *Назаренко І. І.* Вібраційні машини технологічного призначення із багаторежимними законами руху / *І. І. Назаренко, М. М. Ручинський* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2011. – № 45. – С. 329–335.
70. *Назаренко І. І.* Дослідження взаємодії бетонної суміші з робочим органом електромагнітної ударно-вібраційної установки/ *І. І. Назаренко, Ю. О. Баранов, В. А. Басараб* // Вібрації в техніці та технологіях, 2013. – №3(71). – С. 55–60.

71. *Назаренко І. І.* Стабілізація режиму роботи вібротрансмісера для формування малогабаритних виробів / *І. І. Назаренко, І. Ю. Мартинюк* // *Вібрації в техніці та технологіях*, 2014. – №4(76). – С. 73–79.
72. *Назаренко І.* Визначення напружень та деформацій у формувальній конструкції при просторовому навантаженні. / *І. Назаренко, В. Гайдайчук, О. Дедов, О. Дяченко* // *Східно-європейський журнал передових технологій*, 2018. – № 6 (7). – С. 13–18.
73. *Нестеренко М. П.* Математичне моделювання вібраційних машин для формування залізобетонних виробів з урахуванням впливу бетонної суміші на робочий орган / *М. П. Нестеренко, Д. С. Педь* // *Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського*, 2009. – № 1(54). – Ч. 1. – С. 78–80.
74. *Омельянов О. М.* Особливості застосування механічних коливань в технологічних процесах / *О.М. Омельянов* // *Вібрації в техніці та технологіях*. 2017. – №4 (87). – С. 129–134.
75. *Писаренко Г. С.* Опір матеріалів [2-ге вид.] / За ред. *Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський*. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
76. *Повідайло В. О.* Вібраційні процеси та обладнання: навч. посібник / *В. О. Повідайло*. – Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2004. – 248 с.
77. *Повідайло В. О.* Статичний розрахунок електромагнітних вібробудників вібраційних машин за допомогою ЕОМ / *В. О. Повідайло, О. В. Гаврильченко, О. С. Ланець* // Lviv Polytechnic National University Institutional Repository, 2000. URL: <http://ena.lp.edu.ua/bitstream/ntb/11225/1/01.pdf>.
78. *Поліщук Л. К.* Аналіз вільних коливань механічної системи стріли відвалоутворювача у вертикальній площині / *Л. К. Поліщук, Є. В. Харченко* // *Вібрації в техніці та технологіях*, 2011. – № 3. – С. 33–38.
79. *Потураев В. Н.* Вибрационная техника и технологии в энергоемких производствах: монографія / *В. Н. Потураев, В. П. Франчук, В. П. Надутый*. – Днепропетровск, 2002. – 190 с.



80. *Сілін Р. І.* Вібраційне обладнання на основі гідропульсатора / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв.* – Хмельницький: ХНУ, 2007. – 386 с., іл.
81. *Сілін Р. І.* Вібраційне обладнання для гідрокавітаційного впливу на склад та властивості води / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв* // Зб.пр. VI міжн. н-т. конференції «Повышение качества, надежности и долговечности технических систем и технологических процессов». Хургада (Єгипет). – Хмельницький: ХНУ, 2007. – С. 33–35
82. *Сілін Р. І.* Пристрій для кавітаційно-магнітної обробки води з електромагнітним приводом / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв, Є. А. Урбанюк* // Materialy IV mezinarodni vedecko – prakticka konference “Nastoleni moderni vedi – 2008”. Dil 9: Technicke vedy. – Praha: Publishing House “Education and Science”, 2008. – С.12–15
83. *Сілін Р. І.* Науково-технічні основи розроблення вібротехніки для впливу на властивості води / *Р. І. Сілін, А. І. Гордєєв* // Вібрації в техніці та технологіях, 2009. – № 4 (56) – С. 141 – 148
84. *Сілін Р. І.* Дослідження динамічної моделі резонансного вібраційного верстата для доведення плоских поверхонь / *Р. І. Сілін, В. В. Третько, А. І. Гордєєв* // Вібрації в техніці та технологіях, 2014. – №2(74). – С. 89–92.
85. *Станішевський С. О.* Вища математика / *С. О. Станішевський.* – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
86. *Стоцько З. А.* Динаміка робочого середовища вібраційних машин об'ємної оброблення / *З. А. Стоцько, Б. І. Сокіл, В. Г. Топільницький* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2000. – № 35. – С. 26–32.
87. *Топільницький В. Г.* Математичне моделювання динамічних процесів завантаження вібраційних технологічних машин / *В. Г. Топільницький, М. Б. Сокіл, Д. П. Ребот, Я. М. Кусий* // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. - 2017. – № 866. – С. 92–98.
88. *Топільницький В. Г.* Модель опису технологічного середовища

- оброблювальних систем вібраційного типу / *В. Г. Топільницький, Я. М. Кусий, Д. П. Ребот* // Вібрації в техніці та технологіях. – 2018. – № 1. – С. 5–11.
89. *Франчук В. П.* Определение зависимости эффективности грохочения от режимных параметров вертикального вибрационного грохота / *Франчук В. П., Надутый В. П., Левченко П. В.* // Вібрації в техніці та технологіях. 2011. №2 – С. 106 – 109.
90. *Харченко Є. В.* Визначення частот і форм вільних коливань складеного стрижня як тришарової конструкції / *Є. В. Харченко, Т. Ю. Підгайний* // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", 2009. – № 641. – С. 80–84.
91. *Харченко Є.* Аналіз динамічних процесів у прихопленій у свердловині колоні бурильних труб. / *Є. Харченко, А. Гутий, В. Гайдук* // Технічні вісті, 2019. – № 49, 50. – С. 22 – 27.
92. *Цуркан О. В.* Планування багатofакторного експерименту для визначення раціональних параметрів роботи вібраційної машини. / *О. В. Цуркан, Р. М. Горбатюк, Д. В. Присяжнюк* // Вібрації в техніці та технологіях, 2020. – № 2 (97). С. 5 – 14.
93. *Чабан В.* Математичне моделювання електромеханічних процесів : навч. посіб. для студ. електротехн. і мех. спец. вузів / *В. Чабан.* – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 1997. – 344 с.
94. *Черніков О. В.* Основні напрямки геометричного та комп'ютерного моделювання фізичних та технологічних процесів / *О. В. Черніков* // Геометричне та комп'ютерне моделювання, 2006. – № 19. – С. 168–182.
95. *Черно О. О.* Особливості динаміки керованого електромагнітного приводу вібраційної установки для ущільнення бетонних сумішей / *О. О. Черно, А. П. Гуров, С. М. Новогрецький* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2014. – № 48. – С. 87–96.
96. *Чубик Р. В.* Керовані вібраційні технологічні машини / *Р. В. Чубик, Л. В. Ярошенко* – Вінниця: ВНАУ, 2011. – 355 с.

97. *Шовкун О. П.* Електромагнітний вібраційний привід живильника / *О. П. Шовкун, І. Р. Козбур* // Матеріали ХІХ наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, (Тернопіль, 2016 р.) – С. 131–132.
98. *Янович В. П.* Експериментальна оцінка амплітудно-частотних характеристик віброконвеєрної технологічної машини / *В. П. Янович, В. І. Драчшин, В. І. Паламарчук, Т. Ю. Сизова* // Вібрації в техніці та технологіях, 2015. – №2(78). – С. 145–150.
99. *Ярошевич, М. П.* Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом: монографія / *М. П. Ярошевич, Т. С. Ярошевич.* – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.
100. *Ярошевич М. П.* Дослідження пускових режимів вібраційної машини з дебалансними збудниками, що самосинхронізуються / *М. П. Ярошевич, І. П. Забронець, А. В. Силивонюк* // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні, 2013. – Вип. 47. – С. 50 – 55.
101. *Albert R. Probert*, Linear vibratory conveyor, GB Patent 2,238,841A, February 06, 1991.
102. *Arthur W. Forman*, Improvements in Vibratory Feeders, GB Patent 1,256,225, July 12.1971.
103. *Arvin H.* The Flapwise Bending Free Vibration Analysis of Micro-rotating Timoshenko Beams Using the Differential Transform Method / *H. Arvin* // Journal of Vibration and Control, 2018. – № 24(20). – pp. 4868–4884.
104. *Belhaq M.* Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam / *M. Belhaq, A. Bichri, J. Hagopian, J. Mahfoud* // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011. – № 46(6). – pp. 828–833.
105. *Boaz Popper*, Three-Mass Electromagnetic Vibrating System, US Patent 5,144,176, September 01, 1992.
106. *Borković A.* Free vibration analysis of singly curved shells using the isogeometric finite strip method / *A. Borković, G. Radenković, D. Majstorović, S. Milovanović, D. Milašinović, R. Cvijić* // Thin-Walled Structures, 2020. – № 157. – pp. 107-125.

107. *Cherno A. A.* Control of electromagnetic vibratory drive using a phase difference between current harmonics / *A. A. Cherno* // Journal of Automation and Information Sciences, 2017. – № 49(7). – pp. 58–76.
108. *Chikh A.* Free vibration analysis of simply supported P-FGM nanoplate using a nonlocal four variables shear deformation plate theory / *A. Chikh* // Strojnicky časopis – Journal of Mechanical Engineering, 2019. – № 69(4). – pp. 9–24.
109. *Despotovic Z.* Modelling and control of electromagnetic vibratory actuator applied in vibratory conveying drives / *Z. Despotovic, A. Ribic, V. Sinik* // Infoteh – Jahorina, 2013. – № 12. – pp. 1049–1054.
110. *Franklin C. Pereny*, Vibrator, US Patent 4,117,381, September 26, 1978.
111. *Gulertan Vural, Albert Linz*, Vibratory Compacting Machine, US Patent 3909148A, September 30, 1975.
112. *Gursky V.* Optimal Synthesis and Implementation of Resonant Vibratory Systems / *Gursky V., Kuzio I., Korendiy V.* // Universal Journal of Mechanical Engineering, 2018. – № 6(2). – pp. 38–46.
113. *Hatch, M. R.* Vibration simulation using MATLAB and ANSYS / *Michael R. Hatch*. – Chapman & Hall/CRC, 2001. – 656 p.
114. *Jakhin B. Popper, Kyriat Motzkin*, Vibrating surface apparatus, US Patent 4,315,817A, February 16, 1982.
115. *James A. Flint, Arthur D. Holt*, Vibratory Feeder, US Patent 2,098,034, November 02, 1937.
116. *Jasinskas A.* Research on herbaceous plants compaction in container stores using vibrating compactors / *A. Jasinskas, E. Sarauskis, R. Domeika, G. Viselga, V. Kucinskas, E. Vaiciukevicius* // Journal of Vibroengineering, 2015. – № 17(5). – pp. 2247–2259.
117. *John C. O'Connor*, Vibration Producing Mechanism, US Patent 2,353,492, November 07, 1944.
118. *John M. Morris*, Vibratory drive mechanism, US Patent 3,180,158 April 27, 1965.
119. *Joseph W. Sherwen* (The General Electric Company Limited), Improvements in or relating to electro-magnetic vibrating equipment, GB Patent 664720 A, January

- 09, 1952.
120. *Joseph W. Sherwen* (The General Electric Company Limited), Improvements in or relating to Electro-Magnetic Vibrating Equipment, GB Patent 745518 A, February 29, 1956.
  121. *Josef Wölz, firm Westfalia - Cinnendahl - Gröppel A.-G.* (Bochum, Germany), Sifter or conveyer device, US Patent 2,179,442 A November 07, 1939.
  122. *Jr. Robert, M Carrier, John M Morris*, Resonant vibration exciter, US Patent 2,958,228 A November 01, 1960.
  123. *Kharchenko E. V.* Estimation of the in-service degradation of steel shapes for the boom of a clamp-forming machine / *E. V. Kharchenko, L. K. Polishchuk, O. I. Zvirko* // *Materials Science*, 2014. – № 49(4). – pp. 501–507.
  124. *Koch U.* State-space modelling and decoupling control of electromagnetic actuators for car vibration excitation / *U. Koch, D. Wiedemann, N. Sundqvist, H. Ulbrich* // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics*. (Spain, April 2009). – pp. 1–6.
  125. *Korendiy V. M.* Substantiation of parameters and modelling the operation of three-mass vibratory conveyer with directed oscillations of the working element / *V. M. Korendiy, O. Yu. Kachur, Yu. Ya. Novitskyi, V. A. Mazuryk, V. A. Sereda* // *Industrial Process Automation in Engineering and Instrumentation*, 2019. – № 53. – pp. 84–100.
  126. *Korendiy V.* Determination of inertia-stiffness parameters and motion modelling of three-mass vibratory system with crank excitation mechanism / *V. Korendiy, O. Lanets, O. Kachur, P. Dmyterko, R. Kachmar* // *Vibroengineering PROCEDIA*, 2021. – № 36. – pp. 7–12.
  127. *Kumar Y.* The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review / *Y. Kumar* // *Journal of Vibration and Control*, 2018. – № 24(7). – pp. 1205–1227.
  128. *Kurita Y.* Self-excited driving of electromagnetic-type vibratory machine / *Y. Kurita, Y. Muragishi* // *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, 1997. – № 63(1), Issue 605. – pp. 35–40.

129. *Kurita Y.* Resonance property and driving system of vibratory machine with regard to reaction of work / *Y. Kurita, Y. Muragishi* // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, 2001. – № 66(1), Issue 641. – pp. 38–44.
130. *Lanets O. S.* Derivation of analytical dependencies for determining inertial and stiffness parameters of vibratory machine / *O. S. Lanets, O. Yu. Kachur, V. M. Korendiy* // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science, 2020. – № 6(6). – pp. 1–10.
131. *Lanets Oleksii.* Approximate calculation of natural frequencies of oscillations of the plate with variable cross-section of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table / *Oleksii Lanets, Pavlo Maistruk, Volodymyr Maistruk, Iryna Derevenko* // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science, 2022. – № 8(2). – pp. 41–50.
132. *Lanets O.* Approximate calculation of natural frequencies of oscillations of the diamond-shaped plates of the discrete-continuous inter-resonance vibrating table / *O. Lanets, R. Kachmar, P. Maistruk, I. Derevenko, A. Hordieiev* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2023. – № 1277. – pp. 1–7.
133. *Li He, Zhao Qingrong, Zhang Hailongwen, Bang Chun,* Three-mass electromagnetic vibration feeder and adjustment method for electromagnetic vibration phase angle thereof, CN Patent 102502193 A, September 30, 2015.
134. *Maistruk P.* Approximate Calculation of the Natural Oscillation Frequency of the Vibrating Table in Inter-Resonance Operation Mode / *P. Maistruk, O. Lanets, V. Stupnytskyy* // Strojnicky časopis – Journal of Mechanical Engineering, 2021. – № 71(2). – pp. 151–166.
135. *Maistruk Pavlo.* Establishment of the natural frequency of oscillations of the two-dimensional continuous member of the vibrating table / *Pavlo Maistruk, Oleksii Lanets, Volodymyr Maistruk, Iryna Derevenko* // Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022. – № 52(2022). – pp. 199–214.
136. *Mikata Yoshitaka, Higuchi Sunao,* Electromagnetic Vibration Conveyance Feeder for Combination Balance or the Like, JP Patent S63282615 A,

- November 18, 1988.
137. *Mikata Yoshitaka, Higuchi Tadashi, Harada Shogo*, Two trough, electromagnetically vibratory feeder, EP Patent 0349693 A3, September 26, 1990.
  138. *Moulsdale Timothy, John Blackwall, Wright Machinery Limited (GB), Mendelewicz Ran (IL)*, Vibratory Conveyor, WO Patent 2006/125998A1, November 30, 2006.
  139. *Peter T. Jones, Kennewick*, Conveying Apparatus, US Patent 6,868,960 B2, March 22, 2005.
  140. *Popescu S.* The influence of the constructive and function parameters of the gravimetric vibration dosing systems for agro-foods bulk solids / *S. Popescu, D. Ola, V. Popescu* // Proceedings of 10-th International Congress on Mechanization and Energy in Agriculture, (Antalya, Turkie. 2008). – pp. 882–887.
  141. *Ralph A. Stearns, Bozrah, Conn*, Vibratory feeder, US Patent 5285890 A February 29, 1994.
  142. *Reddy J. N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2-nd ed. / *J. N. Reddy*. – Boca Raton, USA: CRC Press, 2007. – 568 p.
  143. *Richard B. Kraus*, Linear Drive for Vibratory Apparatus, CA Patent 2,518,736C, September 01, 2009.
  144. *Rocard Y.* Dynamique generals des vibrations / *Y. Rocard*. – Paris: Masson, 1949. – 459 p.
  145. *Ruchynskiy, M.* Simulation and development of energy-efficient vibration machines operating in resonant modes / *M. Ruchynskiy, M. Nazarenko, I. Pereginets, O. Kobylanskyi, P. Kisala, A. Abenov, Z. Amirgaliyeva* // Przegląd Elektrotechniczny, 2019. – №1(4). – pp. 62–66.
  146. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Sound Producing or Receiving Devices containing Two or More Vibratory Structures, GB Patent 148,412, October 10, 1921.
  147. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Sound Producing or Receiving Devices containing Two or More Vibratory Structures”, GB Patent 148,414,

October 10, 1921.

148. *Signal Gesellschaft*, Improvements in Vibratory Devices for Subaqueous Sound Signalling Apparatus, GB Patent 155,569, February 28, 1922.
149. *Sinik V.* Optimization of the operation and frequency control of electromagnetic vibratory feeders / *V. Sinik, Z. Despotovic, I. Palinkas* // *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2016. – №22(1). – pp. 24–30.
150. *Sokolov I.J.* Autoresonant vibro-impact system with electromagnetic excitation / *I. J. Sokolov, V. I. Babitsky, N. A. Halliwell* // *Journal of sound and vibration*, 2007. – №308. – pp.375–391.
151. *Sommerfeld A.* Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik / *A. Sommerfeld* // *VDI*, 1904. – № 18. – pp. 631–636.
152. *Thomas H. Falconer*, Three Mass Vibratory Feeder, US Patent 4,961,491, October 09, 1990.
153. *Timoshenko S. P.* Theory of Plates and Shells, 2-nd ed. / *S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger*. – New York, USA: McGraw-Hill, 1959. – 580 p.
154. *Tony L. Schmitz* Machining Dynamics. Frequency Response to Improved Productivity. Second Edition / *Tony L. Schmitz, K. Scott Smith*. – Springer, 2019. – 382 p.
155. *Tornabene F.* The GDQ method for the free vibration analysis of arbitrarily shaped laminated composite shells using a NURBS–based isogeometric approach / *F. Tornabene, N. Fantuzzi, M. Bacciocchi* // *Composite Structures*, 2016. – № 154. – pp. 190–218.
156. *Tsurkan O. V.* Kinetic features of vibrating and filtration dewatering of fresh-peeled pumpkin seeds. / *O. V. Tsurkan, O. O. Gerasimov, Y. A. Polyevoda, I. V. Tverdokhlib, T. I. Rimar, O. V. Stanislavchuk* // *INMATEH-Agricultural Engineering*, 2017. – № 52(2). – pp. 69–76.
157. *Vescovini, R.* On the application of the Ritz method to free vibration and buckling analysis of highly anisotropic plates / *R. Vescovini, L. Dozio, M. D'Ottavio, O. Polit* // *Composite Structures*, 2018. – № 192. – pp. 460–474.
158. *Wang Yun*, Three-mass asymmetric vibrating mill, CN Patent 104941764 A,



September 30, 2015.

159. *William R. Brown*, Three Mass Electromagnetic Feeder, US Patent 4,378,064, March 29, 1983.
160. *William W. Triggs* (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials, GB Patent 494,206A, October 21, 1938.
161. *William W. Triggs* (GB) (The Traylor Vibrator Company (US)), Improvements in and relating to Method of and Apparatus for Conveying and Conditioning Materials, GB Patent 504,782A, April 24, 1939.
162. *Yaroshevych N. P.* Dynamics start vibrating machines with unbalanced drive in case of flat vibrations of bearing body. / *N. P. Yaroshevych, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevych* // Науковий вісник Національного гірничого університету, 2015. – № 3, – pp. 39 – 45.
163. *Yaroshevych N. P.* Dynamics of Starting of Vibrating Machines with Unbalanced Vibroexciters on Solid Body with Flat Vibrations. / *N. P. Yaroshevich, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevich* // Applied Mechanics and Materials, 2016. – № 849, pp. 36 – 45.
164. *Yaroshevich N.* Slow oscillations in systems with inertial vibration exciters / *N Yaroshevich, V Puts, T Yaroshevich, O Herasymchuk* // Vibroengineering PROCEDIA, 2020. № 32, – pp. 20 – 25.
165. *Žur K.* Free vibration and buckling analyses of magneto–electro–elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher–order sinusoidal shear deformation theory / *K. Žur, M. Arefi, J. Kim, J. Reddy* // Composites Part B: Engineering, 2020. – № 182, – 107601.

## **ДОДАТКИ**

## **ДОДАТОК А**

**Акт впровадження дисертаційних досліджень у навчальний процес**

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор

з науково-педагогічної роботи  
Національного університету  
“Львівська політехніка”



Олег ДАВИДЧАК

## АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи  
на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD)

**МАЙСТРУКА Павла Володимировича**

“Синтез дискретно-континуальних міжрезонансних коливальних систем  
вібраційних машин з електромагнітним приводом”

у навчальному процесі кафедри “Робототехніка та інтегровані технології  
машинобудування” (РІТМ) Національного університету “Львівська політехніка”

**Комісія в складі:** голови – директора Інституту механічної інженерії та транспорту Національного університету “Львівська політехніка”, д.т.н., професора Олексія Ланця та членів – завідувача кафедрою РІТМ, д.т.н., професора Вадима Ступницького, заступника завідувача кафедрою РІТМ, завідувача НДЛ-40, к. т. н., доцента Володимира Боровця підтверджує впровадження науково-прикладних результатів за дисертаційною роботою на здобуття освітньо-наукового ступеня доктора філософії (PhD) аспіранта Павла Майструка “Синтез дискретно-континуальних міжрезонансних коливальних систем вібраційних

машин з електромагнітним приводом” у навчальний процес кафедри РІТМ і констатує:

- аспірантом Павлом Майструком впроваджено в курс дисципліни “Вібраційні процеси та обладнання виробництв” для здобувачів освітнього рівня магістр за спеціалізацією 8.131.00.01 “Роботомеханічні системи та комплекси” спеціальності 131 “Прикладна механіка” наступне: лабораторну установку дискретно-континуального міжрезонансного вібраційного столу з електромагнітним приводом та методичні вказівки до неї на тему “Вивчення конструкції та встановлення власних частот коливань міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного столу з електромагнітним приводом”.
- здобувачі на лабораторних заняттях ознайомлюються з принципом роботи та особливостями конструкції міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного столу з електромагнітним приводом, що призначений для ущільнення бетонних сумішей. Запропоновані методи розрахунку та проектування міжрезонансного дискретно-континуального вібраційного столу з електромагнітним приводом дозволяють здобувачам у подальшій інженерній та науковій практиках створювати високоефективні вібраційні машини.

**Голова комісії:**

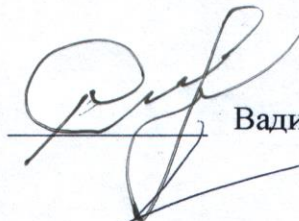
Директор Інституту механічної  
інженерії та транспорту, д. т. н.,  
професор



Олексій ЛАНЕЦЬ

**Члени комісії:**

Завідувач кафедри РІТМ, д. т. н.,  
професор



Вадим СТУПНИЦЬКИЙ

Заступник завідувача кафедри  
РІТМ, завідувач НДЛ-40, к. т. н.,  
доцент



Володимир БОРОВЕЦЬ

**Додаток В**  
**Дискретна модель тримасової коливальної системи**

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг]:	$m_1 := 118$
Проміжна маса, [кг]:	$m_2 := 45$
Перша власна частота коливальної системи, [рад/с]:	$\Omega_{n1} := 306$
Друга власна частота коливальної системи, [рад/с]:	$\Omega_{n2} := 333$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с]:	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 50$
Перевантаження на робочому органі, [-]:	$\zeta := 4$
Пришвидження вільного падіння, [м/с <sup>2</sup> ]:	$\frac{g}{\Lambda} := 9.81$
Співвідношення власних частот коливальної системи, [-]:	

$$\Lambda := \frac{\Omega_{n1}}{\Omega_{n2}} \quad \Lambda = 0.919 \quad (B1)$$

Максимально допустиме значення інерційного параметру реактивної маси, [кг]:

$$m_{3\max} := \frac{-m_2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot (1 - \Lambda^2)^2}{m_2 \cdot (1 - \Lambda^2)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot \Lambda^2} \quad m_{3\max} = 0.447 \quad (B2)$$

Приймаємо  $m_3 := 0.36$

Параметр Н становить:

$$H := \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{n2}^4 \cdot [(m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot (\Lambda^2 - 1)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Lambda^2]} \quad (B3)$$

Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну масу з проміжною, [Н/м]:

$$c_{12} := \frac{(m_2 + m_3) \cdot m_1 \cdot \Omega_{n2}^2 \cdot [(m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{n2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) - H]}{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot [(m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{n2}^2 \cdot (\Lambda^2 - 1) + (-H - 2 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \Omega_{n2}^2)]} \quad (B4)$$

$$c_{12} = 3.455 \times 10^6$$

Жорсткість пружного вузла, що з'єднує проміжну масу з реактивною, [Н/м]:

$$c_{23} := \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot m_2 \cdot \Omega_{n2}^2 \cdot (\Lambda^2 + 1) - H}{2 \cdot (m_2 + m_3) \cdot (m_1 + m_2 + m_3)} \cdot m_3 \quad c_{23} = 3.517 \times 10^4 \quad (B5)$$

Парціальна частота реактивної маси, [рад/с]:

$$\omega_p := \sqrt{\frac{c_{23}}{m_3}} \quad \omega_p = 312.545 \quad (B6)$$

Амплітуда активної маси на частоті вимушених коливань, [м]:

$$Y1 := \frac{\zeta \cdot g}{\omega^2} \quad Y1 = 3.976 \times 10^{-4} \quad (B7)$$

Амплітудне значення гармонійної сили збурення тримасової коливальної системи, [Н]:

$$F03 := (-Y1) \cdot \frac{m3 \cdot \omega^4 \cdot m2 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot m2 \cdot c12 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c12 \cdot m1 \dots + c23 \cdot m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 \dots + c23 \cdot m2 \cdot c12 + c23 \cdot c12 \cdot m1 - c23 \cdot m3 \cdot m1 \cdot \omega^2 + c23 \cdot m3 \cdot c12}{m3 \cdot c12} \quad (B8)$$

$$F03 = 27.488$$

Амплітудне значення коливань активної, проміжної та реактивної мас в залежності від колової частоти:

де  $\omega := 0 \dots 500$  рад/с - діапазон зміни колової частоти коливань системи

$$Y1(\omega) := \left[ \begin{array}{l} (-m3) \cdot F03 \cdot \frac{c12}{m3 \cdot \omega^4 \cdot m2 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot m2 \cdot c12 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c12 \cdot m1 \dots} \\ + m3 \cdot c23 \cdot c12 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c23 \cdot m1 - c23 \cdot m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 \dots \\ + c23 \cdot m2 \cdot c12 + c23 \cdot c12 \cdot m1 \end{array} \right] \quad (B9)$$

$$Y2(\omega) := m3 \cdot \frac{F03}{m3 \cdot \omega^4 \cdot m2 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot m2 \cdot c12 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c12 \cdot m1 \dots} \cdot (m1 \cdot \omega^2 - c12) + c23 \cdot c12 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c23 \cdot m1 \dots + m3 \cdot c23 \cdot c12 - c23 \cdot m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 + c23 \cdot m2 \cdot c12 \quad (B10)$$

$$Y3(\omega) := (-F03) \cdot \frac{m1 \cdot \omega^2 \cdot m2 - c12 \cdot m2 - c12 \cdot m1}{m3 \cdot \omega^4 \cdot m2 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot m2 \cdot c12 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c12 \cdot m1 - m3 \cdot \omega^2 \cdot c23 \cdot m1 \dots + m3 \cdot c23 \cdot c12 - c23 \cdot m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 + c23 \cdot m2 \cdot c12 + c23 \cdot c12 \cdot m1} \quad (B11)$$

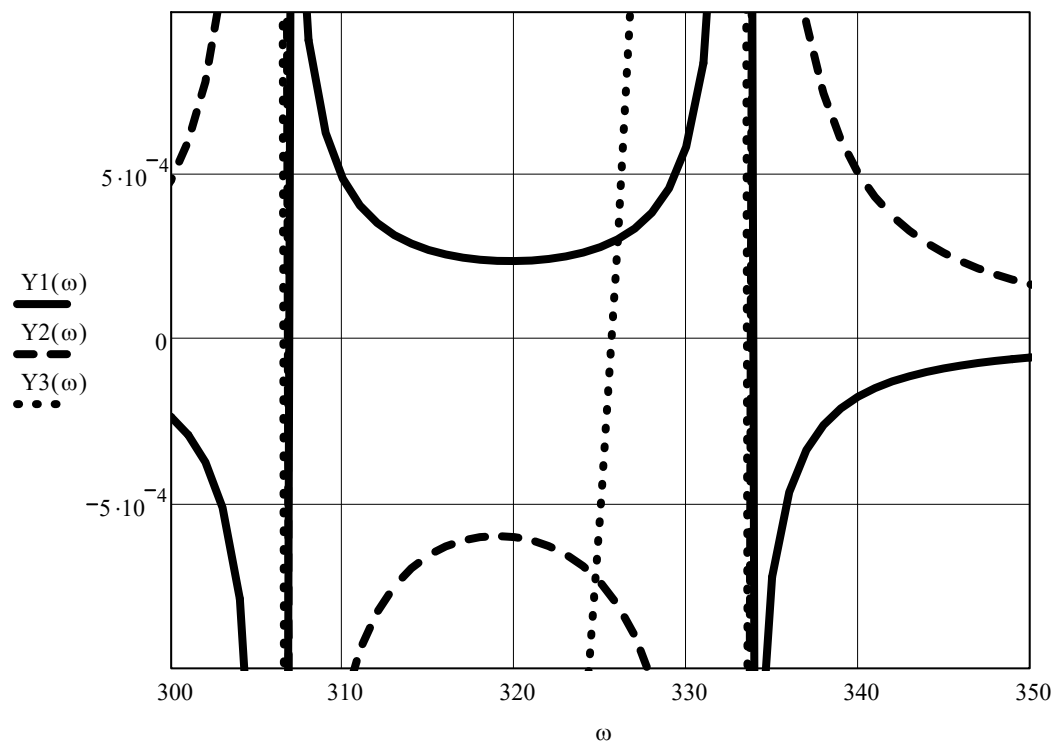


Рис. В.1. Амплітудно-частотна характеристика тримасової коливальної системи



## Додаток С

## Дискретна модель двомасової коливальної системи

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Активна маса, [кг]:	$m1 := 118$
Проміжна маса, [кг]:	$m2 := 45$
Друга власна частота коливальної системи, [рад/с]:	$\Omega n2 := 333$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с]:	$\omega := 314$
Перевантаження на робочому органі, [-]:	$\zeta := 4$
Пришвидщення вільного падіння, [м/с <sup>2</sup> ]:	$\frac{g}{\mu\mu} := 9.81$
Амплітуда коливань активної маси на частоті вимушених коливань, [м]:	

$$\overset{\mu\mu\mu}{Y1} := \frac{\zeta \cdot g}{\omega^2} \quad Y1 = 3.98 \times 10^{-4} \quad (C1)$$

Жорсткість резонансного пружного вузла, [Н/м<sup>2</sup>]:

$$\overset{\mu\mu}{c} := \frac{m1 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot \Omega n2^2 \quad c = 3.612 \times 10^6 \quad (C2)$$

Амплітудне значення гармонійної сили збурення двомасової коливальної системи, [Н]:

$$F02 := \left| Y1 \cdot \frac{m1 \cdot \omega^2 \cdot m2 - c \cdot m2 - c \cdot m1}{m2} \right| \quad F02 = 577.311 \quad (C3)$$

Амплітудне значення коливань активної та реактивної мас в залежності від колової частоти:

де  $\overset{\mu\mu}{\omega} := 0..500$  рад/с - діапазон зміни колової частоти коливань системи

$$\overset{\mu\mu\mu}{Y1}(\omega) := F02 \cdot \frac{m2}{m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 - c \cdot m1 - c \cdot m2} \quad (C4)$$

$$Y2(\omega) := (-m1) \cdot \frac{F02}{m2 \cdot \omega^2 \cdot m1 - c \cdot m1 - c \cdot m2} \quad (C5)$$

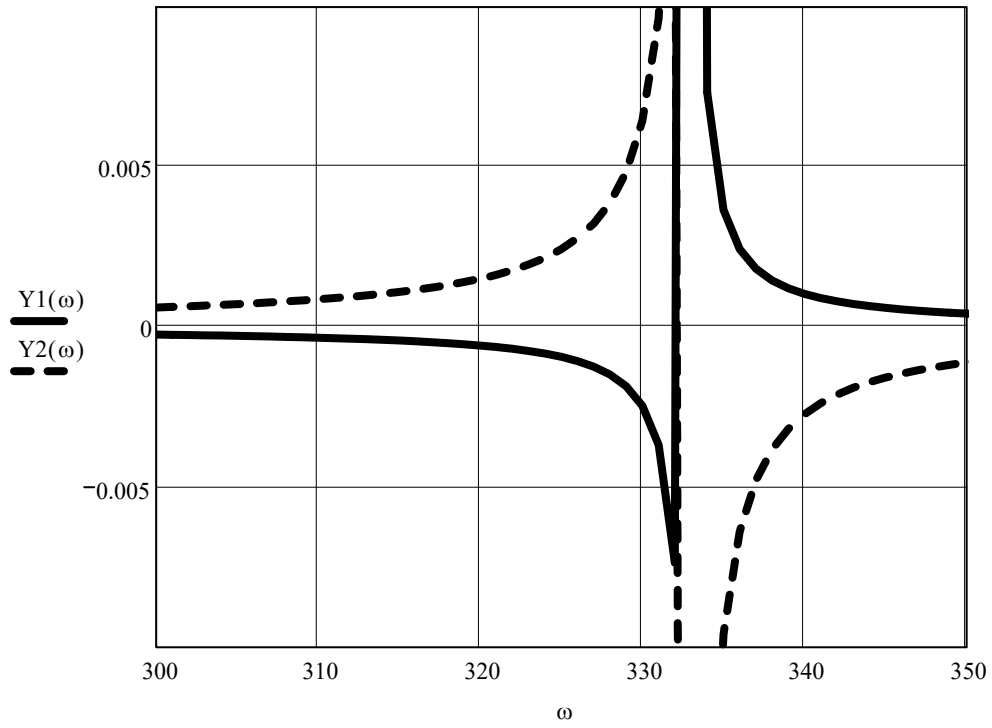


Рис. С.1. Амплітудно-частотна характеристика двомасової коливальної системи

Додаток D

Математична модель вільних коливань пластини, спрощеної до стержня. Перша власна частота коливань стержня

Запропонована розрахункова схема кріплення стержня зображена на рис. D.1.

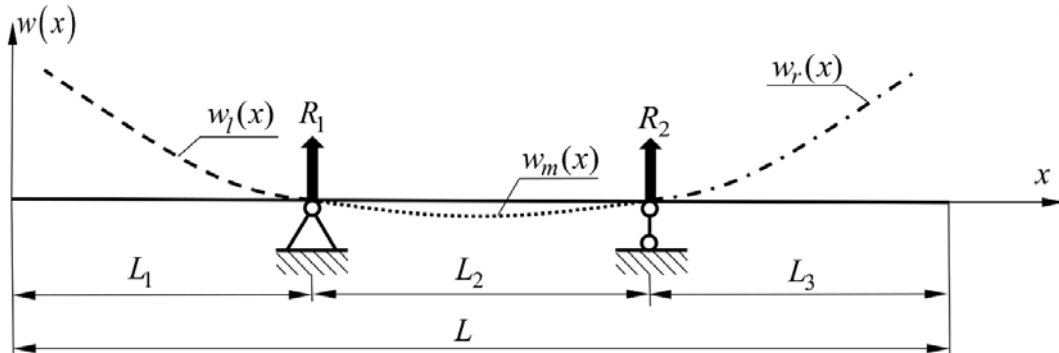


Рис. D.1. Розрахункова схема стержня з розподіленими параметрами, де  $L_1, L_3$  – відстані від лівого та правого кінців відповідно до лівої та правої опор;  $L_2$  – відстань між опорами;  $L$  – довжина стержня;  $R_1, R_2$  – реакції в опорах

Частотна матриця для розрахункової схеми (рис. D.1) набуде вигляду:

$$\Delta := \begin{pmatrix} U1(\xi x) & V1(\xi x) & T2(\xi x) & T3(\xi x) \\ T1(\xi x) & U1(\xi x) & S2(\xi x) & S3(\xi x) \\ S4(\xi x) & T4(\xi x) & 0 & 0 \\ S5(\xi x) & T5(\xi x) & V5(\xi x) & 0 \end{pmatrix} \quad (D1)$$

Визначник частотної матриці (D1) можна знайти з виразу:

$$|\Delta| \rightarrow \blacksquare \quad (D2)$$

Система з чотирьох рівнянь, що описують вільні коливання стержня набуде вигляду:

$$\begin{aligned} A \cdot U1(\omega) + B \cdot V1(\omega) + \frac{R1}{\alpha(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T2(\omega) + \frac{R2}{\alpha(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T3(\omega) &= 0 \\ A \cdot T1(\omega) + B \cdot U1(\omega) + \frac{R1}{\alpha(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S2(\omega) + \frac{R2}{\alpha(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S3(\omega) &= 0 \\ A \cdot S4(\omega) + B \cdot T4(\omega) &= 0 \\ A \cdot S5(\omega) + B \cdot T5(\omega) + \frac{R1}{\alpha(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot V5(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (D3)$$

Вихідні числові значення параметрів стержня приймаємо наступні:

Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:  $L1 := 0.182$

Відстань між опорами, [м]:  $L2 := 0.176$

Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:  $L3 := 0.182$

Довжина стержня стновить, [м]:

$$\underline{L} := L1 + L2 + L3 \quad L = 0.54 \quad (D4)$$

Позначимо відношення відстаней ділянок до загальної довжини стержня:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad (D5)$$

$$\gamma := \frac{L2}{L} \quad (D6)$$

$$\theta := \frac{L3}{L} \quad (D7)$$

Задамо діапазон значень змінної:  $\xi x := 0, 0.0001 \dots 5.5$

Функції Кривола набудуть вигляду:

$$S2(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi x \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi x \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi x \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi x \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi x \cdot (\beta)] + \cos(\xi x \cdot \beta)]$$

$$S5(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi x \cdot (\gamma + \beta)] + \cos[\xi x \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$T1(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi x) + \sin(\xi x))$$

$$T2(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi x \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi x \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi x \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi x \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T4(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi x \cdot \beta) + \sin(\xi x \cdot \beta))$$

$$T5(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi x \cdot (\gamma + \beta)] + \sin[\xi x \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$U1(\xi x) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi x) - \cos(\xi x))$$

$$V1(\xi_x) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi_x) - \sin(\xi_x))$$

$$V5(\xi_x) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi_x \cdot (\gamma)] - \sin[\xi_x \cdot (\gamma)]]$$

Знаходимо визначник частотної матриці (A1):

$$\begin{aligned} \Delta(\xi_x) := & U1(\xi_x) \cdot T4(\xi_x) \cdot S3(\xi_x) \cdot V5(\xi_x) - T1(\xi_x) \cdot T4(\xi_x) \cdot T3(\xi_x) \cdot V5(\xi_x) \dots \\ & + S4(\xi_x) \cdot U1(\xi_x) \cdot T3(\xi_x) \cdot V5(\xi_x) - S4(\xi_x) \cdot V1(\xi_x) \cdot S3(\xi_x) \cdot V5(\xi_x) \dots \\ & + (S4(\xi_x) \cdot T5(\xi_x)) \cdot T2(\xi_x) \cdot S3(\xi_x) - S4(\xi_x) \cdot T5(\xi_x) \cdot T3(\xi_x) \cdot S2(\xi_x) \dots \\ & + S5(\xi_x) \cdot T4(\xi_x) \cdot T3(\xi_x) \cdot S2(\xi_x) - S5(\xi_x) \cdot T4(\xi_x) \cdot T2(\xi_x) \cdot S3(\xi_x) \end{aligned} \quad (D8)$$

Рівняння осі абсцис:

$$\Delta 0(\xi_x) := 0 \quad (D9)$$

Графічна інтерпретація результату розрахунку визначника частотної матриці представлена на рис. D.2:

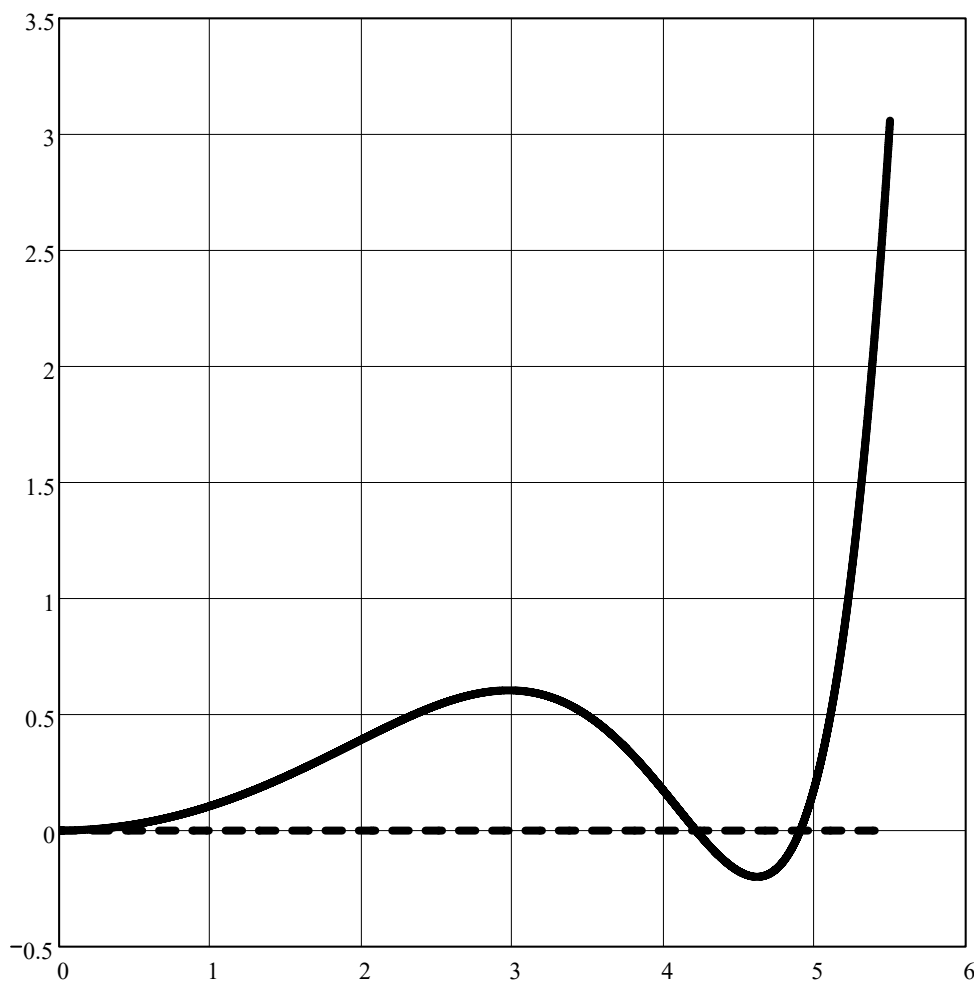


Рис. D.2. Графічний розв'язок визначника частотної матриці

Визначник частотної матриці набуває значення:  $\xi_x := 4.2146$

Вихідні числові значення параметрів приймаємо наступні:

Ширина стержня, [м]:  $h := 0.0875$   
 Товщина стержня, [м]:  $b_n := 0.0034$   
 Густина сталі, [кг/м<sup>3</sup>]:  $\rho := 7850$   
 Модуль пружності першого роду для сталі, [Па]:  $E := 2.1 \cdot 10^{11}$

Враховуючи, що стержень має прямокутний поперечний переріз, встановимо масу погонного метра стержня, [кг/м]:

$$m_{gm} := h \cdot b_n \cdot \rho \quad m_{gm} = 2.335 \quad (D10)$$

Відповідно маса стержня становитиме, [кг]:

$$m := m_{gm} \cdot L \quad m = 1.261 \quad (D11)$$

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії становитиме, [м<sup>4</sup>]:

$$J := \frac{h \cdot b_n^3}{12} \quad J = 2.866 \times 10^{-10} \quad (D12)$$

Власна частота стержня, як тіла з розподіленими параметрами, набуде значення, [рад/с]:

$$\omega_{nK} := \xi_x \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{m_{gm} \cdot L^4}} \quad \omega_{nK} = 309.235 \quad (D13)$$

Циклічна частота власних коливань стержня становить, [Гц]:

$$v_{nK} := \frac{\omega_{nK}}{2 \cdot \pi} \quad v_{nK} = 49.216 \quad (D14)$$

**Додаток Е**  
**Розрахунок власної частоти пластини з використанням балочних функцій по двох координатах**

Система з чотирьох рівнянь, що описують вимушені коливання стержня набуде вигляду:

Given

$$\begin{aligned}
 A \cdot U1 + B \cdot V1 + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot T2 + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot T3 + \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot TF &= 0 \\
 A \cdot T1 + B \cdot U1 + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot S2 + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot S3 + \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot SF &= 0 \\
 A \cdot S4 + B \cdot T4 &= 0 \\
 A \cdot S5 + B \cdot T5 + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot V5 + \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VF &= 0
 \end{aligned}
 \tag{E1}$$

Find(A, B, R1, R2) → ■

Вихідні числові значення параметрів стержня приймаємо наступні:

Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:	L1 := 0.182
Відстань між опорами, [м]:	L2 := 0.176
Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:	L3 := 0.182
Відстань від лівого кінця до точки прикладання сили, [м]:	LF := 0.27
Довжина стержня становить, [м]:	
$L := L1 + L2 + L3$	L = 0.54

(E2)

Позначимо відношення відстаней ділянок до загальної довжини стержня:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \kappa := \frac{LF}{L}
 \tag{E3}$$

Модуль пружності першого роду для сталі, [Па]:	E := 2.1 · 10 <sup>11</sup>
Ширина стержня, [м]:	h := 0.0033
Товщина стержня, [м]:	bn := 0.0875
Сила збурення, [Н]:	$F := 30$
Коефіцієнт Пуассона для сталі, [-]:	μ := 0.26
Густина сталі, [кг/м <sup>3</sup> ]:	ρ := 7850
Частота вимушених коливань, [рад/с]:	ω := 314

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії становитиме,  $[M^4]$ :

$$J := \frac{h^3 \cdot bn}{12} \quad (E4)$$

Враховуючи, що стержень має прямокутний поперечний переріз, встановимо масу погонного метру стержня,  $[кг/м]$ :

$$mrm := h \cdot bn \cdot \rho \quad (E5)$$

Множники:

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{mrm \cdot \omega^2}{E \cdot J}} \quad \xi L := L \cdot \xi \quad \xi L = 4.311 \quad (E6)$$

Функції Кривога набудуть вигляду:

$$T1 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L) + \sin(\xi L))$$

$$U1 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi L) - \cos(\xi L))$$

$$V1 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L) - \sin(\xi L))$$

$$S2 := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T2 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3 := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T3 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4 := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (\beta)] + \cos(\xi L \cdot \beta)]$$

$$T4 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L \cdot \beta) + \sin(\xi L \cdot \beta))$$

$$S5 := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (\gamma + \beta)] + \cos[\xi L \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$T5 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (\gamma + \beta)] + \sin[\xi L \cdot (\gamma + \beta)]]$$



$$V5 := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (\gamma)] - \sin[\xi L \cdot (\gamma)]]$$

$$SF := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L \cdot (1 - \kappa)] + \cos[\xi L \cdot (1 - \kappa)]]$$

$$TF := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - 0 - \kappa)] + \sin[\xi L \cdot (1 - 0 - \kappa)]]$$

$$VF := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L \cdot (1 - \beta - \kappa)] - \sin[\xi L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

Залежності для визначення постійних та реакцій опор:

$$A := (-F) \cdot T4 \cdot \frac{S3 \cdot T2 \cdot VF - S3 \cdot TF \cdot V5 - S2 \cdot VF \cdot T3 + SF \cdot V5 \cdot T3}{\xi^3 \cdot E \cdot J \cdot \left( \begin{array}{l} S3 \cdot T2 \cdot S5 \cdot T4 - S3 \cdot T2 \cdot T5 \cdot S4 - S3 \cdot U1 \cdot T4 \cdot V5 \dots \\ + S3 \cdot V1 \cdot S4 \cdot V5 - S2 \cdot S5 \cdot T4 \cdot T3 + S2 \cdot T5 \cdot S4 \cdot T3 \dots \\ + T1 \cdot T4 \cdot V5 \cdot T3 - U1 \cdot S4 \cdot V5 \cdot T3 \end{array} \right)}$$

$$B := F \cdot S4 \cdot \frac{S3 \cdot T2 \cdot VF - S3 \cdot TF \cdot V5 - S2 \cdot VF \cdot T3 + SF \cdot V5 \cdot T3}{\xi^3 \cdot E \cdot J \cdot \left( \begin{array}{l} S3 \cdot T2 \cdot S5 \cdot T4 - S3 \cdot T2 \cdot T5 \cdot S4 - S3 \cdot U1 \cdot T4 \cdot V5 \dots \\ + S3 \cdot V1 \cdot S4 \cdot V5 - S2 \cdot S5 \cdot T4 \cdot T3 + S2 \cdot T5 \cdot S4 \cdot T3 \dots \\ + T1 \cdot T4 \cdot V5 \cdot T3 - U1 \cdot S4 \cdot V5 \cdot T3 \end{array} \right)}$$

(E7)

$$R1 := (-F) \cdot \frac{S5 \cdot T4 \cdot S3 \cdot TF - S5 \cdot T4 \cdot SF \cdot T3 - T5 \cdot S4 \cdot S3 \cdot TF + T5 \cdot S4 \cdot SF \cdot T3 - VF \cdot S3 \cdot U1 \cdot T4 \dots + VF \cdot S3 \cdot V1 \cdot S4 + VF \cdot T1 \cdot T4 \cdot T3 - VF \cdot U1 \cdot S4 \cdot T3}{S3 \cdot T2 \cdot S5 \cdot T4 - S3 \cdot T2 \cdot T5 \cdot S4 - S3 \cdot U1 \cdot T4 \cdot V5 + S3 \cdot V1 \cdot S4 \cdot V5 - S2 \cdot S5 \cdot T4 \cdot T3 \dots + S2 \cdot T5 \cdot S4 \cdot T3 + T1 \cdot T4 \cdot V5 \cdot T3 - U1 \cdot S4 \cdot V5 \cdot T3}$$

$$R2 := F \cdot \frac{(-T2) \cdot S5 \cdot T4 \cdot SF + T2 \cdot T5 \cdot S4 \cdot SF + T2 \cdot VF \cdot T1 \cdot T4 - T2 \cdot VF \cdot U1 \cdot S4 - U1 \cdot T4 \cdot S2 \cdot VF \dots + U1 \cdot T4 \cdot V5 \cdot SF + V1 \cdot S4 \cdot S2 \cdot VF - V1 \cdot S4 \cdot V5 \cdot SF \dots + TF \cdot S2 \cdot S5 \cdot T4 - TF \cdot S2 \cdot T5 \cdot S4 - TF \cdot V5 \cdot T1 \cdot T4 + TF \cdot V5 \cdot U1 \cdot S4}{S3 \cdot T2 \cdot S5 \cdot T4 - S3 \cdot T2 \cdot T5 \cdot S4 - S3 \cdot U1 \cdot T4 \cdot V5 + S3 \cdot V1 \cdot S4 \cdot V5 - S2 \cdot S5 \cdot T4 \cdot T3 \dots + S2 \cdot T5 \cdot S4 \cdot T3 + T1 \cdot T4 \cdot V5 \cdot T3 - U1 \cdot S4 \cdot V5 \cdot T3}$$

$$A = 2.207 \times 10^{-3} \quad B = -1.737 \times 10^{-3} \quad R1 = -51.993 \quad R2 = -51.993$$

Множник:

$$Df := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \tag{E8}$$

Прогин ділянки 1:

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$W1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

$$W2(y) := \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{y}{bn}\right) \cdot 0.003 + 1$$

$$W3(x1, y) := W1(x1) \cdot W2(y)$$

Відношення кінетичної енергії прогину ділянки 1 до частоти коливань:

$$Kc := \int_0^{L1} \int_0^{bn} \rho \cdot h \cdot W3(x1, y)^2 dy dx1 \quad (E9)$$

$$Kc = 6.009 \times 10^{-7}$$

Потенційна енергія прогину ділянки 1:

$$Pc := \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L1} \int_0^{bn} \text{Df} \cdot \left[ \left[ \left( \frac{d^2}{dx1^2} W3(x1, y) \right) + \left( \frac{d^2}{dy^2} W3(x1, y) \right) \right]^2 \dots \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx1} \frac{d}{dy} W3(x1, y) \right)^2 - \frac{d^2}{dx1^2} W3(x1, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} W3(x1, y) \right] \right] dy dx1 \quad (E10)$$

$$Pc = 0.011$$

Прогин ділянки 2:

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$VV22(x1) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x1 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x1 - L1)]]$$

$$W4(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV22(x1)$$

$$W5(y) := \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{y}{bn}\right) \cdot 0.001 + 1$$

$$W6(x1, y) := W4(x1) \cdot W5(y)$$

Відношення кінетичної енергії прогину ділянки 1 до частоти коливань:

$$Km := \int_{L1}^{LF} \int_0^{bn} \rho \cdot h \cdot W6(x1, y)^2 dy dx1 \quad (E11)$$

$$K_m = 1.058 \times 10^{-8}$$

Потенційна енергія прогину ділянки 1:

$$P_m := \frac{1}{2} \cdot \int_{L1}^{LF} \int_0^{bn} Df \cdot \left[ \left[ \left( \frac{d^2}{dx1^2} W6(x1, y) \right) + \left( \frac{d^2}{dy^2} W6(x1, y) \right) \right]^2 + 2(1 - \mu) \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx1} \frac{d}{dy} W6(x1, y) \right)^2 - \frac{d^2}{dx1^2} W6(x1, y) \cdot \frac{d^2}{dy^2} W6(x1, y) \right] \right] dy dx1 \quad (E12)$$

$$P_m = 0.018$$

Перша власна частота коливань пластини:

$$vnR := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot Pc + 2 \cdot Pm)}{2 \cdot Kc + 2 \cdot Km}} \quad vnR = 49.6240986 \quad (E13)$$

$$\omega nR := \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot Pc + 2 \cdot Pm)}{2 \cdot Kc + 2 \cdot Km}} \quad \omega nR = 311.797 \quad (E14)$$

**Графічне відображення математичної моделі**

Прогин ділянки 1:

$$x1 := 0, 0.01 \dots 0.182$$

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

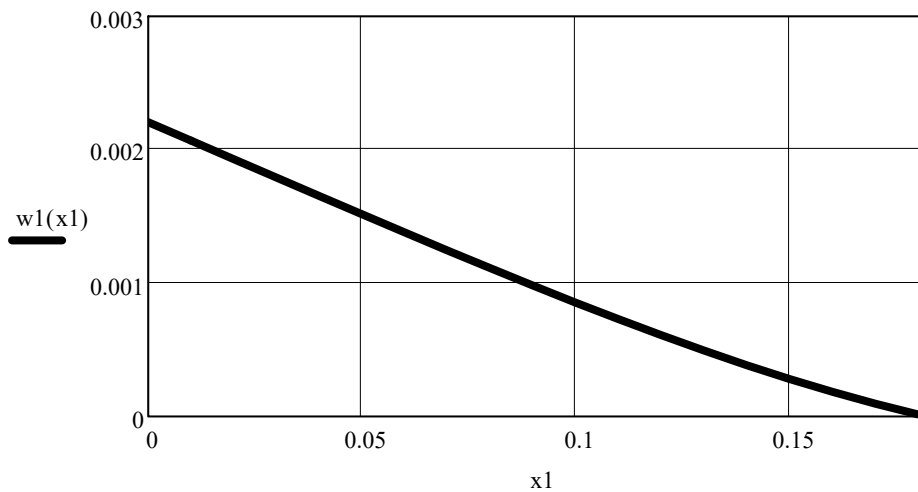


Рис. Е.1. Прогин ділянки 1

Прогин ділянки 2:

$$x2 := 0.182, 0.183 \dots 0.27$$

$$SS(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$TT(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV1(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$w2(x2) := A \cdot SS(x2) + B \cdot TT(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV1(x2)$$

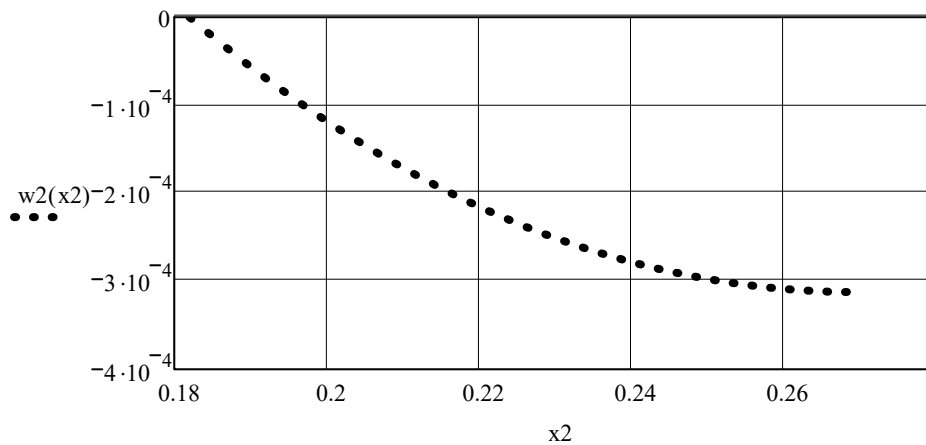


Рис. Е.2. Прогин ділянки 2

Прогин ділянки 3:

$$x3 := 0.27, 0.271 \dots 0.358$$

$$VV1(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x3 - L1)]]$$

$$VVF(x3) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x3 - LF)] - \sin[\xi \cdot (x3 - LF)]]$$

$$w3(x3) := A \cdot SS(x3) + B \cdot TT(x3) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV1(x3) + VVF(x3) \cdot \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J}$$

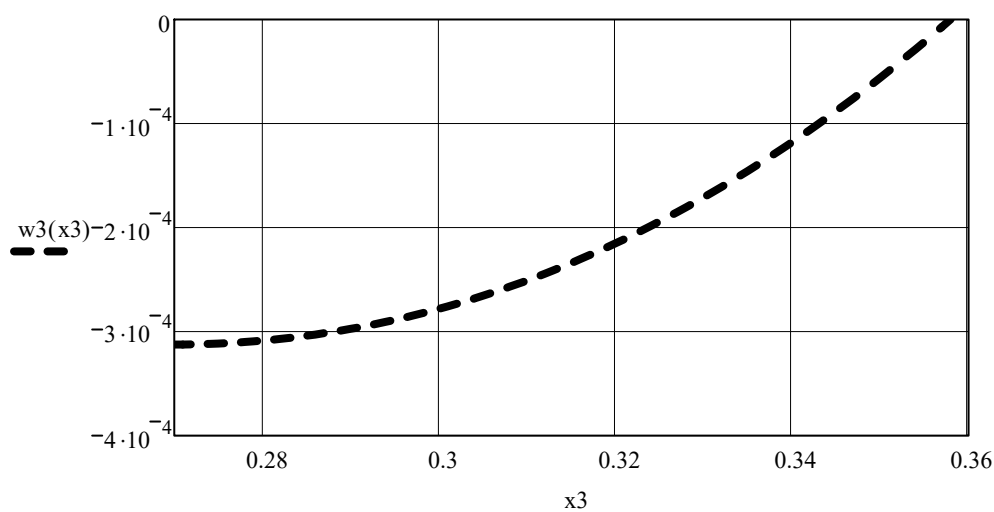


Рис. Е.3. Прогин ділянки 3

Прогин ділянки 4:

$$x4 := 0.358, 0.3581 \dots 0.54$$

$$VV2(x4) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x4 - L1 - L2)] - \sin[\xi \cdot (x4 - L1 - L2)]]$$

$$w4(x4) := A \cdot SS(x4) + B \cdot TT(x4) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV1(x4) + \frac{R2}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x4) + VVF(x4) \cdot \frac{F}{\xi^3 \cdot E \cdot J}$$

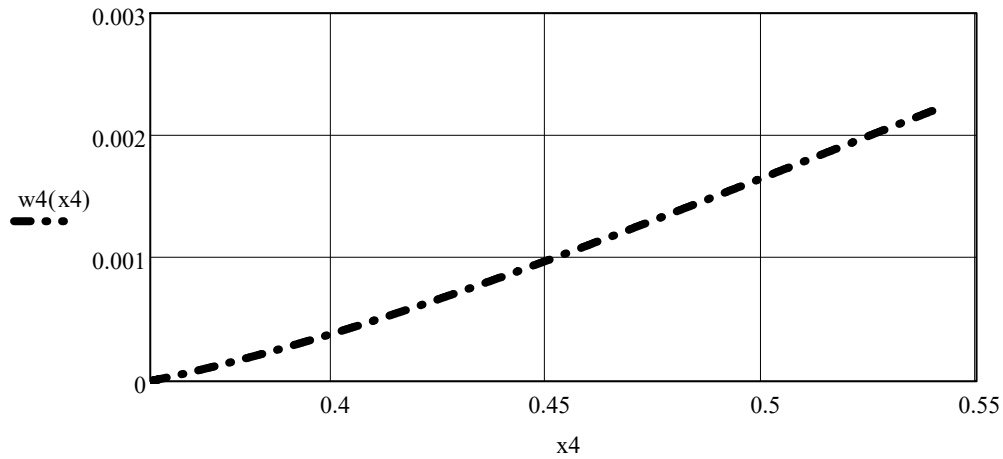


Рис. Е.4. Прогин ділянки 4

Прогин пластини:

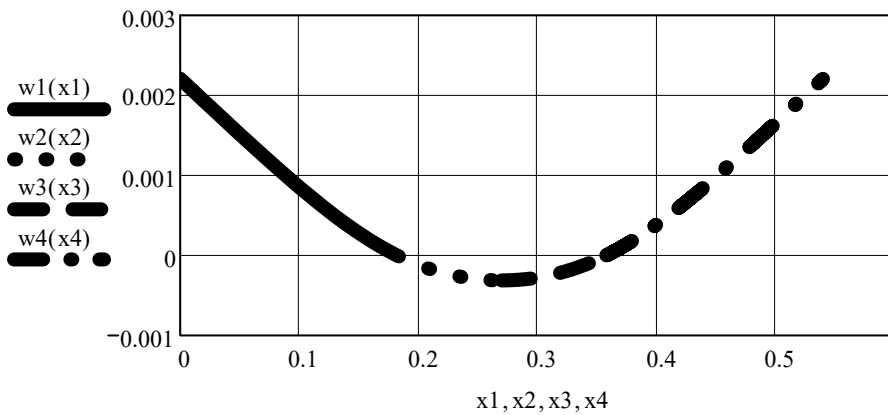


Рис. Е.5. Прогин пластини

Прогин ділянки 1 по двох координатах:

$$x1 := 0.0001, 0.01 \dots 0.182$$

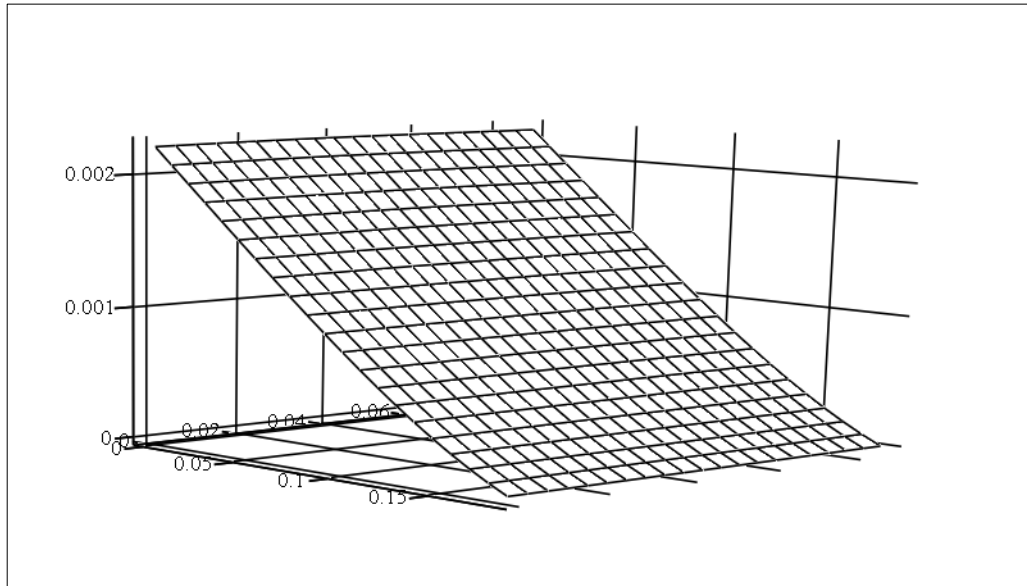
$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1)) \quad TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$\chi1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

$$z := 0.0001, 0.001 \dots 0.088$$

$$Wc(z) := \sin\left(\frac{\xi}{2} \cdot \frac{z}{bn}\right) \cdot 0.003 + 1$$

$$Gc(x1, z) := \chi1(x1) \cdot Wc(z)$$



Gc

Рис. Е.6. Прогин ділянки 1 по двох координагах

Прогин ділянки 2 по двох координагах:

$$x2 := 0.182, 0.183 \dots 0.27$$

$$SS2(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2)) \quad TT2(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

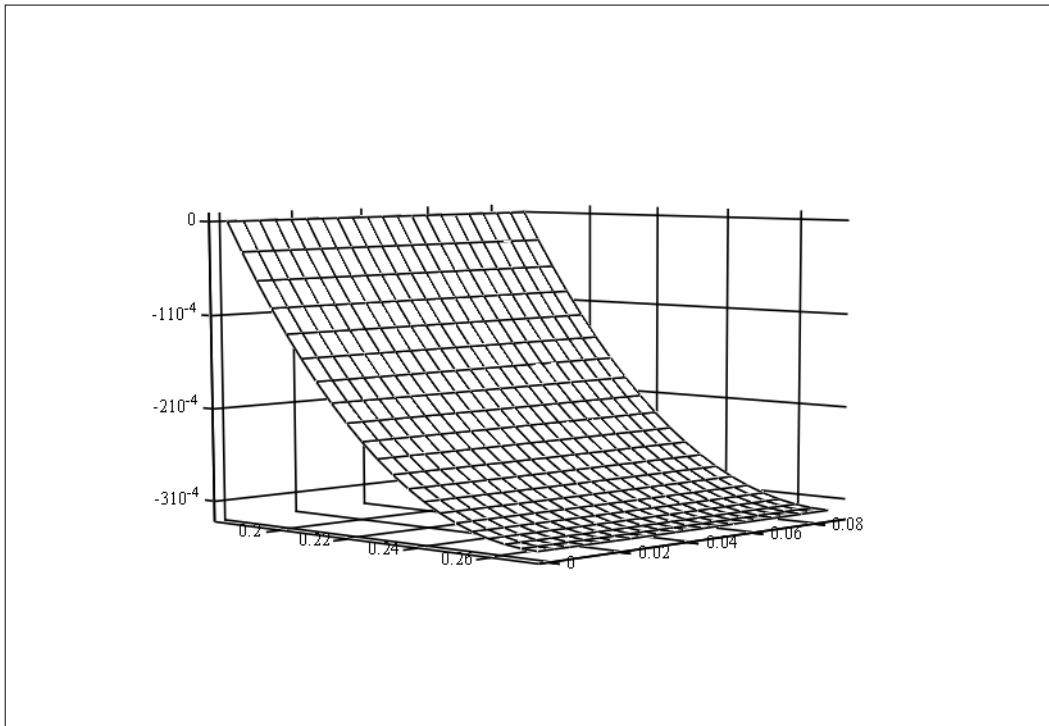
$$VV2(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$\chi2(x2) := A \cdot SS2(x2) + B \cdot TT2(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x2)$$

$$z := 0.0001, 0.001 \dots 0.088$$

$$Wm(z) := \sin\left(\frac{\xi}{2} \cdot \frac{z}{bn}\right) \cdot 0.001 + 1$$

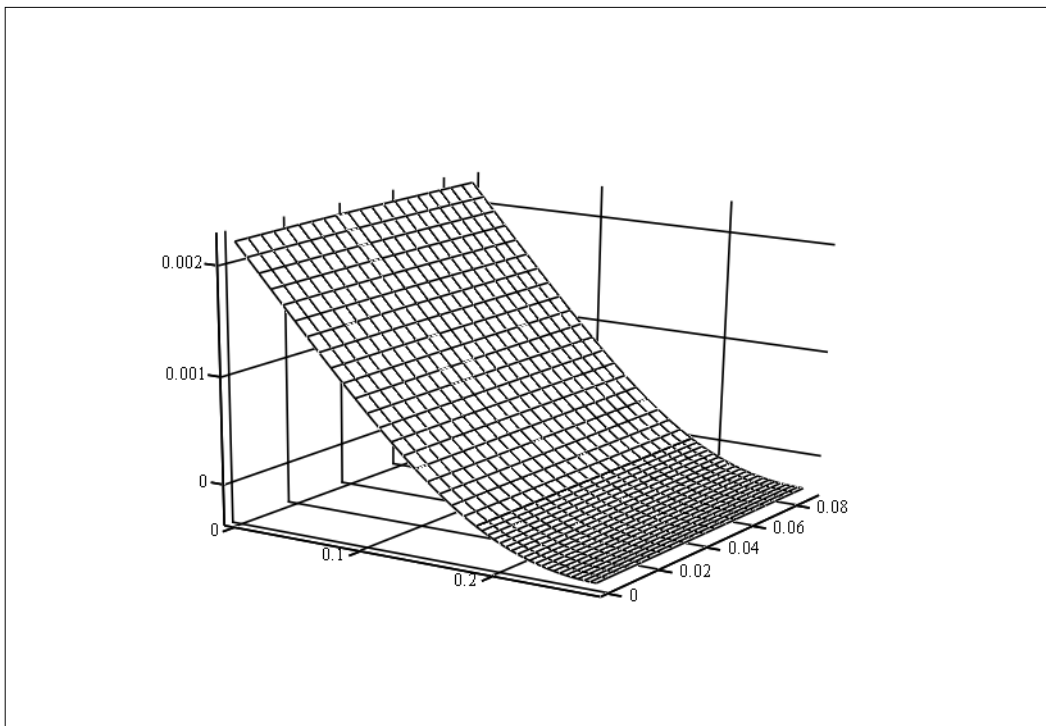
$$Gm(x2, z) := \chi2(x2) \cdot Wm(z)$$



$G_m$

Рис. Е.7. Прогин ділянки 2 по двох координатах

Прогин половини пластини двох координатах:



$G_m, G_c$

## Додаток F

## Розрахунок власної частоти пластини наближеним методом Релея-Рітца з використанням загального рівняння гіперboloїда

Запропонована розрахункова схема, де припускається, що прогин пластини відбуватиметься по гіперboloїдній поверхні, зображена на рис. F.1.

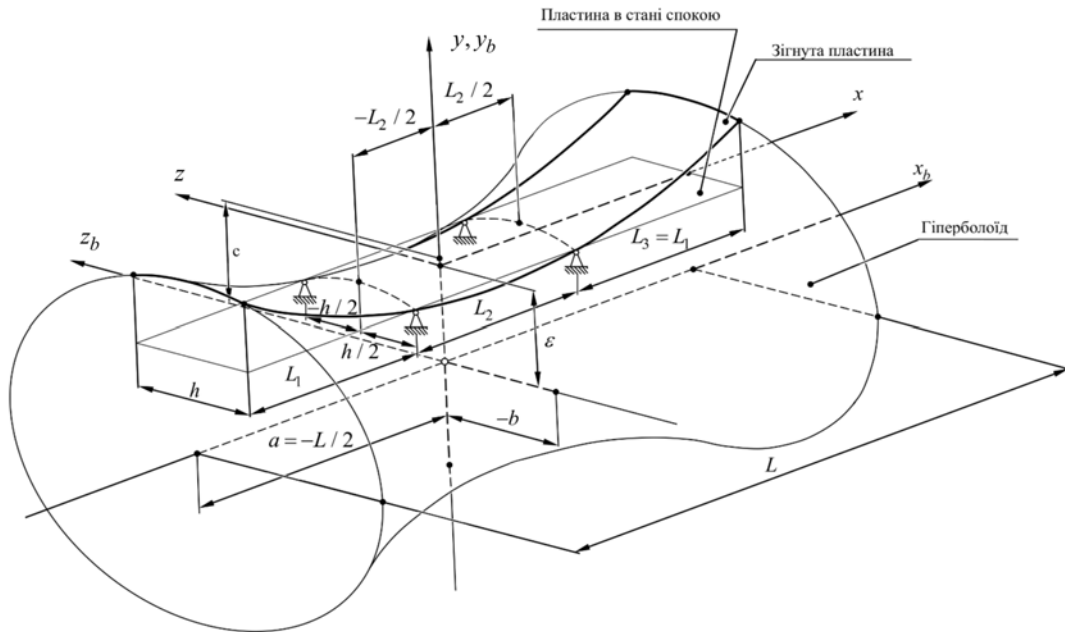


Рис. F.1. Розрахункова схема визначення власної частоти коливань пластини з припущенням, що коливання відбуваються по гіперboloїдній поверхні, де  $x, y, z$  – координати абсолютної системи відліку;  $x_b, y_b, z_b$  – координати відносної системи відліку;  $\varepsilon$  – зміщення відносної системи координат по осі  $Oz$ ;  $a, b, c$  – параметри гіперboloїда

Вихідні числові значення параметрів стержня приймаємо наступні:

Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:	$L_1 := 0.182$	
Відстань між опорами, [м]:	$L_2 := 0.176$	
Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:	$L_3 := 0.182$	
Довжина стержня стновить, [м]:	$L := L_1 + L_2 + L_3$	$L = 0.54$
Ширина стержня, [м]:	$h := 0.088$	
Товщина стержня, [м]:	$b_n := 0.0033$	
Густина сталі, [кг/м <sup>3</sup> ]:	$\rho := 7850$	
Модуль пружності першого роду для сталі, [Па]:	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	
Коефіцієнт Пуассона для сталі, [-]:	$\mu := 0.26$	
Параметр $b$ гіперboloїда, [-]:	$b := 0.6$	
Коефіцієнт співвідношення сторін $b/c$ , [-]:	$k := 1$	

(F1)



Рівняння прогину поверхні пластини набуває вигляду:

$$WH(x, z) := \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{b^2}\right]} - \sqrt{\left(\frac{b}{k}\right)^2 \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{L2}{2}\right)^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{b^2}\right]} \quad (F2)$$

Відношення кінетичної енергії до квадрату колової частоти пластини набуде значення, [Дж\*с<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>]:

$$KH := \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \cdot bn \cdot WH(x, z)^2 dz dx \quad KH = 5.648 \times 10^{-3} \quad (F3)$$

Множник D, необхідний для встановлення потенціальної енергії прогину пластини, можна знайти з виразу:

$$Df := \frac{E \cdot bn^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (F4)$$

Потенціальну енергію можна знайти з рівняння:

$$PH := \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Df \cdot \left[ \left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} WH(x, z) \right) + \left( \frac{d^2}{dz^2} WH(x, z) \right) \right]^2 \dots \right. \\ \left. + 2 \cdot (1 - \mu) \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} WH(x, z) \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} WH(x, z) \cdot \frac{d^2}{dz^2} WH(x, z) \right] \right] dz dx \quad (F5)$$

Вона становить  $PH = 553.29294$  Дж

Перша власна частота коливань пластини становить, [Гц]:

$$v_{nH} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{PH}{KH}} \quad v_{nH} = 49.8160122 \quad (F6)$$

**Додаток G**  
**Встановлення точки зведення, зведеної маси та зведеної жорсткості континуальної ділянки**

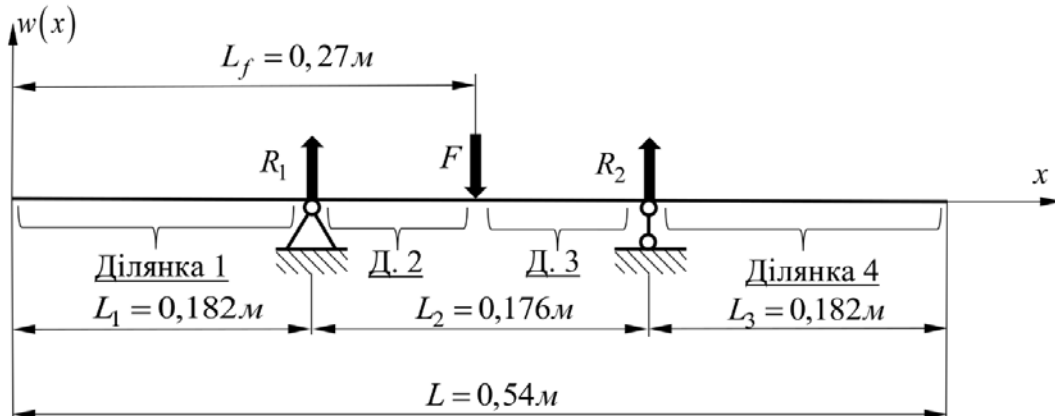


Рис. G.1. Розрахункова схема стержня з розподіленими параметрами, де  $L_1, L_3$  – відстані від лівого та правого кінців відповідно до лівої та правої опор;  $L_2$  – відстань між опорами;  $L$  – довжина стержня;  $R_1, R_2$  – реакції в опорах

Товщина стержня, [м]	$bn := 0.0034$
Ширина стержня, [м]	$h := 0.0875$
Густина сталі, [кг/м <sup>3</sup> ]	$\rho := 7850$
Модуль пружності першого роду, [Па]	$E := 2.1 \cdot 10^{11}$
Модуль пружності другого роду, [Па]	$G := 8.1 \cdot 10^{10}$
Загальна довжина стержня, [м]	$L := 0.54$
Довжина лівої ділянки стержня, [м]	$L1 := 0.182$
Довжина середньої ділянки стержня, [м]	$L2 := 0.176$
Довжина правої ділянки стержня, [м]	$L3 := 0.182$
Відстань до точки прикладання зусилля F, [м]	$LF := 0.27$
Величина зусилля F, [Н]	$F := 30$
Коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу, (-)	$ky := 1.2$
Частота вимушених коливань, [Гц]	$\nu := 50$
Частота вимушених коливань, [рад/с]	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot \nu \quad \omega = 314.159$
Постійні, [-]	$A := 0.002207$ $B := -0.001737$
Реакція в лівій опорі, [Н]	$R1 := -51.993$
Погонна маса стержня:	

$$m_{pm} := h \cdot bn \cdot \rho$$

(G1)

Момент інерції стержня прямокутного перерізу:

$$J := \frac{h \cdot b n^3}{12} \quad (G2)$$

Множник:

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{m r m \cdot \omega^2}{E \cdot J}} \quad (G3)$$

Площа поперечного перерізу стержня:

$$F_n := b n \cdot h \quad (G4)$$

Коефіцієнт:

$$k \tau := k_y \cdot \frac{(E \cdot J)^2}{G \cdot F_n} \quad (G5)$$

Коефіцієнти співвідношення довжин ділянок стержня, [-]:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad (G6)$$

Рівняння прогинів на лівій ділянці стержня (ділянка 1)

$$SS(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$TT(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$w1(x1) := A \cdot SS(x1) + B \cdot TT(x1)$$

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів ділянки 1, [м]:

$$X_{imp1} := \frac{\int_0^{L1} x1 \cdot w1(x1) dx1}{\int_0^{L1} w1(x1) dx1} \quad X_{imp1} = 0.068 \quad (G7)$$

Рівняння прогинів на ділянці 2

$$SS(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$TT(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$w2(x2) := A \cdot SS(x2) + B \cdot TT(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV(x2)$$

Точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів ділянки 2, [м]:

$$X_{\text{Imp2}} := \frac{\int_{L1}^{\text{LF}} x2 \cdot w2(x2) \, dx2}{\int_{L1}^{\text{LF}} w2(x2) \, dx2} \quad X_{\text{Imp2}} = 0.226 \quad (\text{G8})$$

Сумарна точка зведення інерційно-жорсткісних параметрів стержня, [м]

$$X_{\text{Imp12}} := \frac{X_{\text{Imp1}} \cdot \int_0^{L1} w1(x1) \, dx1 + X_{\text{Imp2}} \cdot \int_{L1}^{\text{LF}} w2(x2) \, dx2}{\int_0^{L1} w1(x1) \, dx1 + \left( \int_{L1}^{\text{LF}} w2(x2) \, dx2 \right)} \quad (\text{G9})$$

$$X_{\text{Imp12}} = 0.01$$

Амплітуда коливань зведеної маси

$$SS0 := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot X_{\text{Imp12}}) + \cos(\xi \cdot X_{\text{Imp12}}))$$

$$TT0 := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot X_{\text{Imp12}}) + \sin(\xi \cdot X_{\text{Imp12}}))$$

$$\chi0 := A \cdot SS0 + B \cdot TT0$$

#### Частка зведеної маси від лінійного переміщення

Частка зведеної маси від лінійного переміщення ділянки 1, [кг]

$$m_{\text{Imp1}} := m_{\text{rm}} \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{w1(x1)}{\chi0} \right)^2 \, dx1 \quad m_{\text{Imp1}} = 0.17 \quad (\text{G10})$$

Частка зведеної маси від лінійного переміщення ділянки 2, [кг]

$$m_{\text{Imp2}} := m_{\text{rm}} \cdot \int_{L1}^{\text{LF}} \left( \frac{w2(x2)}{\chi0} \right)^2 \, dx2 \quad m_{\text{Imp2}} = 6.134 \times 10^{-3} \quad (\text{G11})$$

**Частка зведеної маси від провертання**

Частка зведеної маси від провертання ділянки 1, [кг]

$$mlmp1s := \int_0^{L1} \left( \frac{mrm}{3} \cdot x1^2 \right) \cdot \left( \frac{\frac{d}{dx1} w1(x1)}{\chi0} \right)^2 dx1 \quad mlmp1s = 0.024 \quad (G12)$$

Частка зведеної маси від провертання ділянки 2, [кг]

$$mlmp2s := \int_{L1}^{LF} \left( \frac{mrm}{3} \cdot x2^2 \right) \cdot \left( \frac{\frac{d}{dx2} w2(x2)}{\chi0} \right)^2 dx2 \quad mlmp2s = 5.436 \times 10^{-3} \quad (G12)$$

**Частка зведеної жорсткості від згину**

Частка зведеної жорсткості від згину ділянки 1, [Н/м]

$$clmp1 := E \cdot J \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{d^2}{dx1^2} \frac{w1(x1)}{\chi0} \right)^2 dx1 \quad clmp1 = 5.635 \times 10^3 \quad (G13)$$

Частка зведеної жорсткості від згину ділянки 2, [Н/м]

$$clmp2 := E \cdot J \cdot \int_{L1}^{LF} \left( \frac{d^2}{dx2^2} \frac{w2(x2)}{\chi0} \right)^2 dx2 \quad clmp2 = 1.199 \times 10^4 \quad (G14)$$

**Частка зведеної жорсткості від дотичних сил**

Частка зведеної жорсткості від дотичних сил ділянки 1, [Н/м]

$$clmp1t := k\tau \cdot \int_0^{L1} \left( \frac{d^3}{dx1^3} \frac{w1(x1)}{\chi0} \right)^2 dx1 \quad clmp1t = 2.542 \quad (G15)$$

Частка зведеної жорсткості від дотичних сил ділянки 2, [Н/м]

$$clmp2t := k\tau \cdot \int_{L1}^{LF} \left( \frac{d^3}{dx2^3} \frac{w2(x2)}{\chi0} \right)^2 dx2 \quad clmp2t = 7.525 \times 10^{-3} \quad (G16)$$

Сумарна зведена маса стержня, [кг]

$$m_{\text{лmp}} := (m_{\text{лmp1}} - m_{\text{лmp2}} + m_{\text{лmp1s}} - m_{\text{лmp2s}}) \cdot 2 \quad (\text{G17})$$

$$m_{\text{лmp}} = 0.364$$

Сумарна зведена жорсткість стержня, [Н/м]

$$c_{\text{лmp}} := (c_{\text{лmp1}} + c_{\text{лmp2}} + c_{\text{лmp1t}} + c_{\text{лmp2t}}) \cdot 2 \quad (\text{G18})$$

$$c_{\text{лmp}} = 3.525 \times 10^4$$

Перша власна частота коливань стержня, [рад/с]

$$\omega_{\text{лmp}} := \sqrt{\frac{c_{\text{лmp}}}{m_{\text{лmp}}}} \quad \omega_{\text{лmp}} = 311.413 \quad (\text{G19})$$

$$v_{\text{лmp}} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c_{\text{лmp}}}{m_{\text{лmp}}}} \quad v_{\text{лmp}} = 49.563$$

**Додаток Н**

**Дискретно-континуальна модель міжрезонансної коливальної системи**

Задаємо реакції опор:

$$\begin{aligned}
 & F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) - F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - (T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{TF}(\omega) - T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{SF}(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 & + 0 - (S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{SF}(\omega) \cdot T3(\omega) - Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\
 & + 0 - (Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) + F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\
 & + 0 - (Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 & + 0 - (T5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot S3(\omega) - F \cdot \mathbf{VF} \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 & + T5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 & + 0 - (S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{TF}(\omega)) \dots \\
 R1 := & \frac{\dots}{S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots} \tag{H1} \\
 & + 0 - (T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 & + 0 - (S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega)) \dots \\
 & + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{VF}(\omega) + T2(\omega) \cdot Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + 0 - (T2(\omega) \cdot Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) + T2(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \dots \\
 & + 0 - (T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{SF}(\omega) - T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot U1(\omega)) \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{SF}(\omega) + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{SF}(\omega) \dots \\
 & + F \cdot \mathbf{TF}(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) - F \cdot \mathbf{TF}(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\
 & + F \cdot \mathbf{TF}(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot F \cdot \mathbf{VF}(\omega) \dots \\
 & + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot Y2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J - V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \dots \\
 & + V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 - F \cdot \mathbf{TF}(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) - U1(\omega)^2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2 \cdot V5(\omega) \dots \\
 R2 := & \frac{\dots}{(-S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) + S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega)) \dots} \tag{H2} \\
 & + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \dots \\
 & + S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - (T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega))
 \end{aligned}$$

Given

$$-m1 \cdot X1 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (X1 - X2) = 0$$

$$-m2 \cdot X2 \cdot \omega^2 + c12 \cdot (X2 - X1) = R2 + R1 + F$$

Find(X1, X2) → ■

Параметри коливальної системи

Активна маса, [кг]:	$m1 := 118$
Проміжна маса, [кг]:	$m2 := 45$
Резонансне налагодження, [-]:	$z := 0.965$
Циклічна частота вимушених коливань, [Гц]:	$\nu := 50$
Колова частота вимушених коливань, [рад/с]:	$\underline{\underline{\Omega}} := 2 \cdot \pi \cdot \nu \quad \omega := \Omega$

Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:  $L1 := 0.182$

Відстань між опорами, [м]:  $L2 := 0.176$

Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:  $L3 := 0.182$

Відстань від лівого кінця до точки прикладання сили, [м]:  $LF := 0.27$

Довжина пластини стновить, [м]:

$$\underline{\underline{L}} := L1 + L2 + L3 \quad (H3)$$

Позначимо відношення відстаней ділянок до загальної довжини пластини:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \kappa := \frac{LF}{L} \quad (H4)$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11}$$

Ширина пластини, [м]:  $h := 0.0034$

Товщина пластини, [м]:  $bn := 0.0875$

Сила збурення, [Н]:  $\underline{\underline{F}} := 30$

Коефіцієнт Пуассона для сталі, [-]:  $\mu := 0.26$

Густина сталі, [кг/м<sup>3</sup>]:  $\rho := 7850$

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу стержня відносно нейтральної лінії стновитиме, [м<sup>4</sup>]:

$$\underline{\underline{J}} := \frac{h^3 \cdot bn}{12} \quad (H5)$$

Враховуючи, що стержень має прямокутний поперечний переріз, встановимо масу погонного метру стержня, [кг/м]:

$$mrm := h \cdot bn \cdot \rho \quad (H6)$$

Множник:

$$\xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{mrm \cdot \omega^2}{E \cdot J}} \quad (H7)$$

Жорсткість пружного вузла [Н/м<sup>2</sup>]:

$$c12 := m1 \cdot \frac{m2}{m1 + m2} \cdot \left(\frac{\Omega}{z}\right)^2 \quad c12 = 3.453 \times 10^6 \quad (H8)$$



Приймаємо  $c_{12} := 3.455 \times 10^6$

Діапазон значень частоти коливань

$$\omega := 200, 200.1 \dots 25000$$

Функції Кривола:

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) - \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L) + \sin(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L) - \cos(\xi(\omega) \cdot L))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \cos(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta) + \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (\beta + \gamma)]]$$

$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma) - \sin(\xi(\omega) \cdot L \cdot \gamma))$$

$$TF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

$$SF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

$$VF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] - \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

Амплітуди коливальних мас системи:

$$\begin{aligned}
 \overset{\text{www}}{Y1}(\omega) := & -F \cdot c12 \cdot \left[ \begin{aligned}
 & U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) + T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\
 & + T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) \dots \\
 & + 0 - TF(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \dots \\
 & + 0 - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) - T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) + TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \dots \\
 & + VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - VF(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + 0 - TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega) + VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 & + S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) - T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + TF(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega)
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}
 \tag{H9}$$

$$\begin{aligned}
 & (-T2(\omega)) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 & + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 0 - S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 0 - T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
 & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 0 - V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
 & + V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 & + 0 - U1(\omega)^2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + U1(\omega)^2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V5(\omega) \cdot c12 - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) + T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\
 & + T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) \dots \\
 & + 0 - TF(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\
 & + S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \dots \\
 & + 0 - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) - T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) + TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \dots \\
 & + VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - VF(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 & + 0 - VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\
 & + 0 - TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega) + VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 & + S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) - T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) \dots \\
 & + 0 - T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + TF(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \\
 Y2(\omega) := & \frac{(m1 \cdot \omega^2 - c12) \cdot (F) \cdot \left( \begin{aligned} & (-T2(\omega)) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + 0 - c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\ & + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + 0 - T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\ & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\ & + 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\ & + V1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - U1(\omega)^2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\ & + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ & + 0 - T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \end{aligned} \right)}{(-T2(\omega)) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots}
 \end{aligned}
 \tag{H10}$$

$$\begin{aligned}
& + 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + U1(\omega)^2 \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot V5(\omega) \cdot c12 - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + V1(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + c12 \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^4 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + 0 - c12 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + m2 \cdot \omega^2 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
& + c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
& + 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
& + 0 - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2
\end{aligned}$$

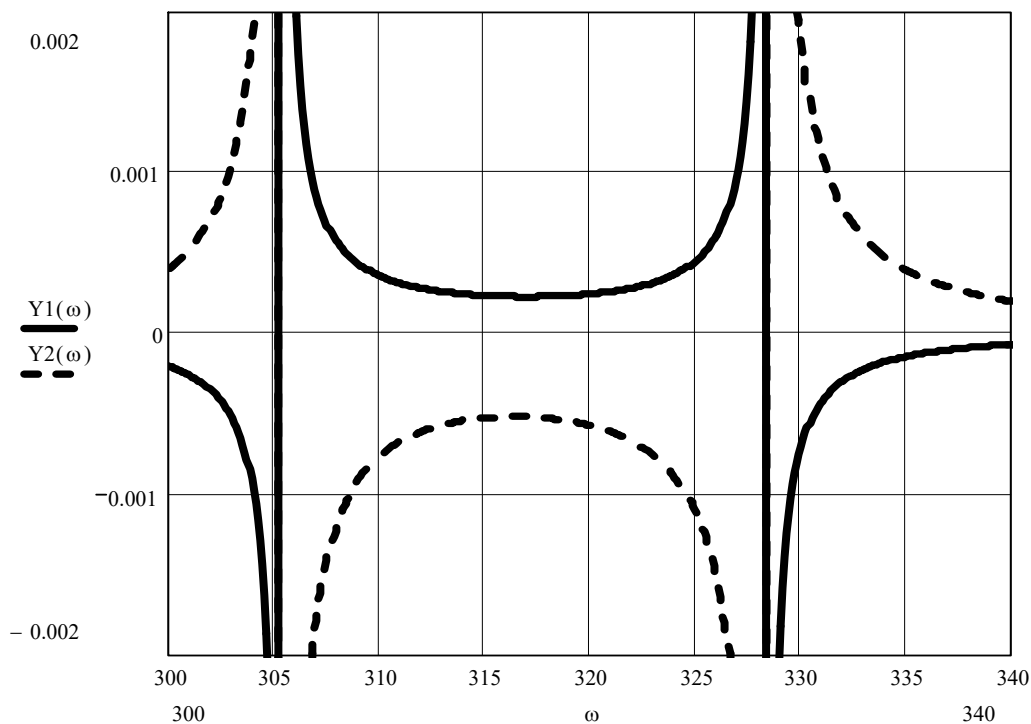


Рис. Н.1. Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуальної системи

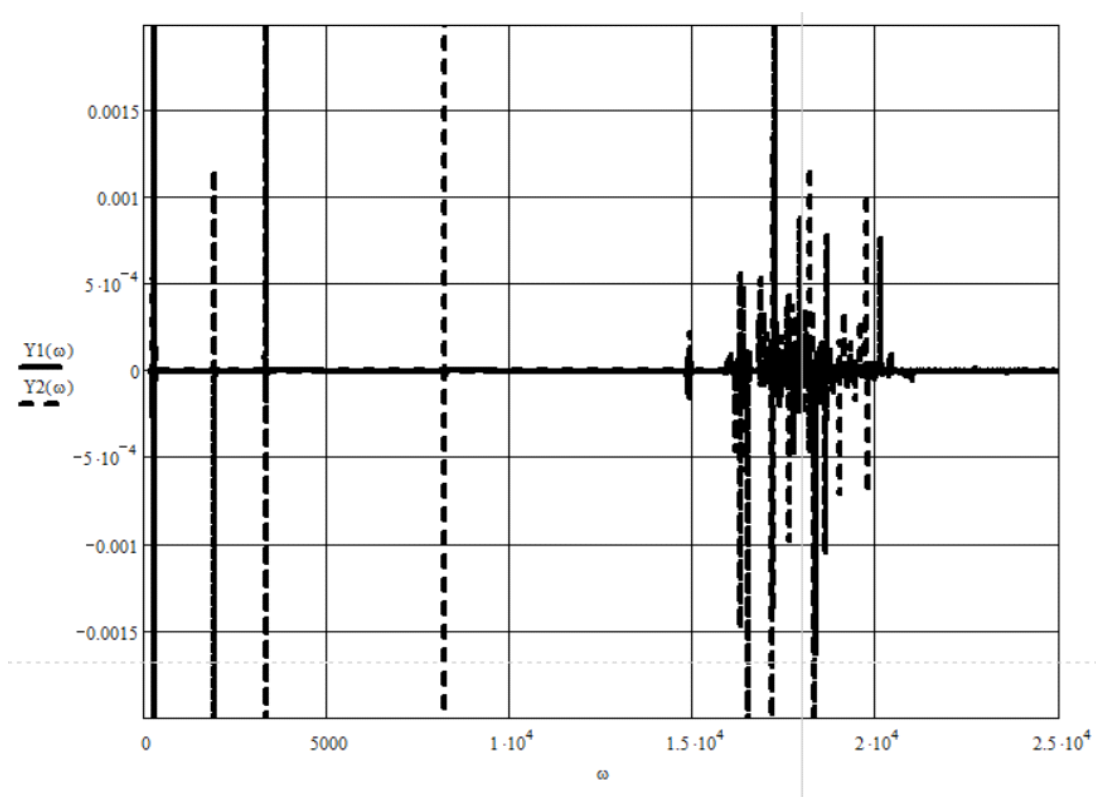


Рис. Н.2. Амплітудно-частотна характеристика дискретно-континуальної системи на широкому діапазоні частот

**Додаток I**  
**Прогин континуальної ділянки при різних частотах збурення в**  
**складі дискретно-континуальної міжрезонансної коливальної**  
**системи**

Система з чотирьох рівнянь, що описують вимушені коливання пластини набуде вигляду:

Given

$$\begin{aligned}
 A \cdot U1(\omega) + B \cdot V1(\omega) + \frac{R1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T2(\omega) + \frac{R2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot T3(\omega) + \frac{F}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot TF(\omega) &= 0 \\
 A \cdot T1(\omega) + B \cdot U1(\omega) + \frac{R1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S2(\omega) + \frac{R2}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot S3(\omega) + \frac{F}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot SF(\omega) &= 0 \\
 A \cdot S4(\omega) + B \cdot T4(\omega) &= Y2(\omega) \\
 A \cdot S5(\omega) + B \cdot T5(\omega) + \frac{R1}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot V5(\omega) + \frac{F}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VF(\omega) &= Y2(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Find(A, B, R1, R2) → ■

Вихідні числові значення параметрів пластини приймаємо наступні:

Активна маса, [кг]:	$m1 := 118$
Проміжна маса, [кг]:	$m2 := 45$
Жорсткість пружного вузла, [Н/м <sup>2</sup> ]:	$c12 := 3.455 \cdot 10^6$
Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:	$L1 := 0.182$
Відстань між опорами, [м]:	$L2 := 0.176$
Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:	$L3 := 0.182$
Відстань від лівого кінця до точки прикладання сили, [м]:	$LF := 0.27$
Довжина пластини становить, [м]:	

$$L := L1 + L2 + L3$$

Позначимо відношення відстаней ділянок до загальної довжини пластини:

$$\beta := \frac{L1}{L} \quad \gamma := \frac{L2}{L} \quad \theta := \frac{L3}{L} \quad \kappa := \frac{LF}{L} \tag{13}$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11}$$

Ширина пластини, [м]:	$h := 0.0034$
Товщина пластини, [м]:	$bn := 0.088$
Сила збурення, [Н]:	$F := 30$
Коефіцієнт Пуассона для сталі, [-]:	$\mu := 0.26$

Густина сталі, [кг/м<sup>3</sup>]:

$$\rho := 7850$$

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу пластини відносно нейтральної лінії створимо, [м<sup>4</sup>]:

$$J := \frac{h^3 \cdot bn}{12} \quad (14)$$

Враховуючи, що пластина має прямокутний поперечний переріз, встановимо масу погонного метра пластини, [кг/м]:

$$mrm := h \cdot bn \cdot \rho \quad (15)$$

Множники:

$$\omega := 0, 1 \dots 4000$$

$$\xi(\omega) := \sqrt[4]{\frac{mrm \cdot \omega^2}{E \cdot J}} \quad \xi L(\omega) := L \cdot \xi(\omega) \quad (16)$$

Функції Кривої:

$$T1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L(\omega)) + \sin(\xi L(\omega)))$$

$$U1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi L(\omega)) - \cos(\xi L(\omega)))$$

$$V1(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L(\omega)) - \sin(\xi L(\omega)))$$

$$S2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta)] + \cos[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta)]]$$

$$T2(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta)] + \sin[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta)]]$$

$$S3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \cos[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$T3(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta - \gamma)] + \sin[\xi L(\omega) \cdot (1 - \beta - \gamma)]]$$

$$S4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L(\omega) \cdot \beta] + \cos(\xi L(\omega) \cdot \beta)]$$

$$T4(\omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi L(\omega) \cdot \beta) + \sin(\xi L(\omega) \cdot \beta))$$

$$S5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi L(\omega) \cdot (\gamma + \beta)] + \cos[\xi L(\omega) \cdot (\gamma + \beta)]]$$

$$T5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L(\omega) \cdot (\gamma + \beta)] + \sin[\xi L(\omega) \cdot (\gamma + \beta)]]$$



$$V5(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi L(\omega) \cdot (\gamma)] - \sin[\xi L(\omega) \cdot (\gamma)]]$$

$$TF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] + \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

$$SF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\cosh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] + \cos[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

$$VF(\omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)] - \sin[\xi(\omega) \cdot L \cdot (1 - \beta - \kappa)]]$$

Залежність амплітуди проміжної маси від частоти коливань:

$$Y2(\omega) := (m1 \cdot \omega^2 - c12) \cdot (F) \cdot \frac{\begin{aligned} &U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) + T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \dots \\ &+ T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) - V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot VF(\omega) \dots \\ &+ 0 - TF(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\ &+ S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \dots \\ &+ S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) + S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \dots \\ &+ 0 - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) - T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\ &+ 0 - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) + TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \dots \\ &+ VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) + U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\ &+ 0 - VF(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) + V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\ &+ 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot SF(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\ &+ 0 - VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot SF(\omega) \dots \\ &+ 0 - TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot U1(\omega) + VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\ &+ S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) - T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot TF(\omega) \dots \\ &+ 0 - T2(\omega) \cdot VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) + TF(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \end{aligned}}{\begin{aligned} &(-T2(\omega)) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ 0 - c12 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ m2 \cdot \omega^4 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\ &+ 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ 0 - S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ 0 - T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ T5(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\ &+ 0 - \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ 0 - T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot c12 \dots \\ &+ T2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot c12 \dots \\ &+ 0 - T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\ &+ T5(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \end{aligned}} \quad (17)$$



$$\begin{aligned}
 &+ 0 - m2 \cdot \omega^4 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \dots \\
 &+ c12 \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot m1 \cdot \omega^2 \dots \\
 &+ 0 - m2 \cdot \omega^2 \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot c12 \dots \\
 &+ 0 - U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot m1 \cdot \omega^2
 \end{aligned}$$

Постійні та реакція в лівій опорі:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) := & \frac{
 \begin{aligned}
 &T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot F \cdot VF(\omega) - T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \dots \\
 &+ 0 - [T4(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot F \cdot SF(\omega) \cdot V5(\omega) + (T4(\omega)) \cdot T2(\omega) \cdot F \cdot VF(\omega) \cdot S3(\omega)] \dots \\
 &+ T4(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) + T4(\omega) \cdot F \cdot TF(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot S3(\omega) \dots \\
 &+ Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot U1(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) + Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega)) \dots \\
 &+ Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot V5(\omega)
 \end{aligned}
 }{
 \begin{aligned}
 &\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot [S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega)) \dots \\
 &+ S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \dots \\
 &+ 0 - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega)
 \end{aligned}
 } \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &T3(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) + T3(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot F \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (T3(\omega) \cdot S2(\omega) \cdot Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) + T3(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot V5(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (T3(\omega) \cdot F \cdot SF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) + T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot S3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (T2(\omega) \cdot F \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) - T2(\omega) \cdot Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega)) \dots \\
 B(\omega) := & \frac{
 \begin{aligned}
 &+ U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot S3(\omega) + F \cdot TF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot S3(\omega)
 \end{aligned}
 }{
 \begin{aligned}
 &\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot [S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega)) \dots \\
 &+ S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega)
 \end{aligned}
 } \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &F \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) - F \cdot VF(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot F \cdot TF(\omega) - T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot F \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot F \cdot SF(\omega) \cdot T3(\omega) - Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) + F \cdot VF(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - Y2(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot S4(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (T5(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot S3(\omega) - F \cdot VF(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ T5(\omega) \cdot T3(\omega) \cdot T1(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) + S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot V1(\omega) \dots \\
 R1(\omega) := & \frac{
 \begin{aligned}
 &+ 0 - (S5(\omega) \cdot \xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J \cdot Y2(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T3(\omega) - S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot S3(\omega) \cdot F \cdot TF(\omega))
 \end{aligned}
 }{
 \begin{aligned}
 &S2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot T3(\omega) - S2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot T3(\omega) \dots \\
 &+ 0 - (T1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega) - U1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega) \cdot T3(\omega)) \dots \\
 &+ 0 - (S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot S5(\omega) \cdot T4(\omega) - S3(\omega) \cdot T2(\omega) \cdot T5(\omega) \cdot S4(\omega)) \dots \\
 &+ S3(\omega) \cdot U1(\omega) \cdot T4(\omega) \cdot V5(\omega) - S3(\omega) \cdot V1(\omega) \cdot S4(\omega) \cdot V5(\omega)
 \end{aligned}
 } \quad (110)
 \end{aligned}$$

Прогини ділянки 1:

$$x1 := 0, 0.001 .. 0.182$$

$$SS1(x1, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x1) + \cos(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$TT1(x1, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x1) + \sin(\xi(\omega) \cdot x1))$$

$$WW1(x1, \omega) := A(\omega) \cdot SS1(x1, \omega) + B(\omega) \cdot TT1(x1, \omega)$$

Прогини ділянки 2:

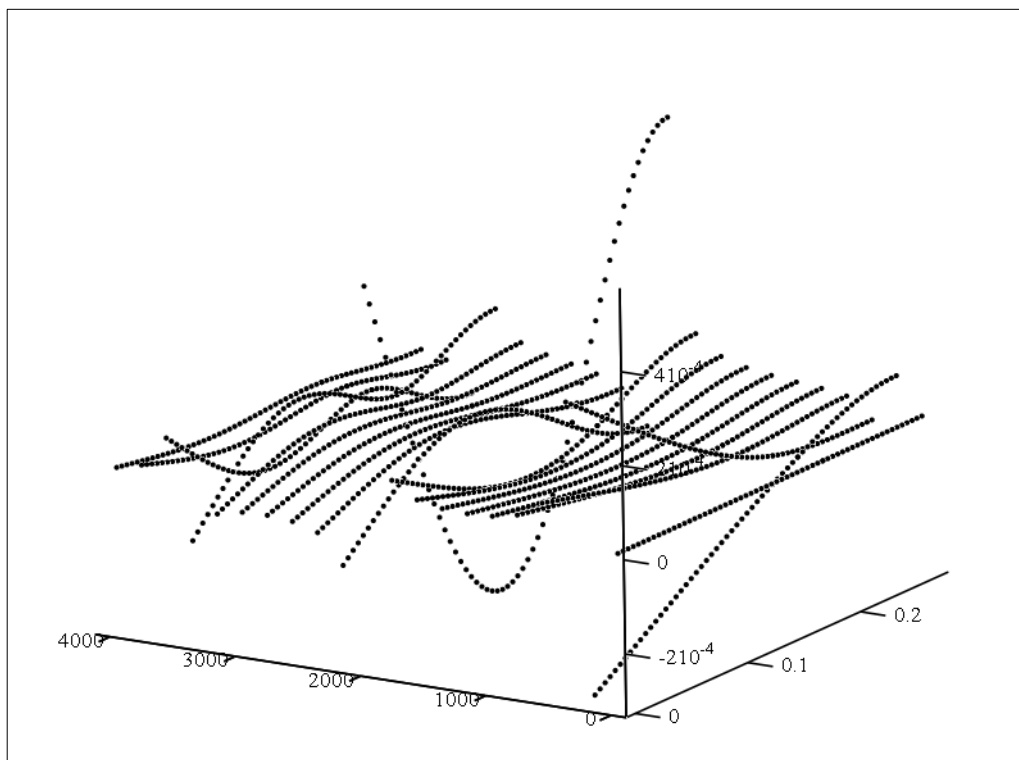
$$x2 := 0.182, 0.183 .. 0.27$$

$$SS2(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi(\omega) \cdot x2) + \cos(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$TT2(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi(\omega) \cdot x2) + \sin(\xi(\omega) \cdot x2))$$

$$VV2(x2, \omega) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi(\omega) \cdot (x2 - L1)]]$$

$$WW2(x2, \omega) := A(\omega) \cdot SS2(x2, \omega) + B(\omega) \cdot TT2(x2, \omega) + \frac{R1(\omega)}{\xi(\omega)^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x2, \omega)$$



WW1, WW2

Рис. І.1. Графік залежності прогину половини пластини від частоти її коливань:

## Додаток J

## Розрахунок на міцність континуальної ділянки вібраційного стола з електромагнітним приводом

Ділянка 1:

$$S1(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x1) + \cos(\xi \cdot x1))$$

$$T1(x1) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x1) + \sin(\xi \cdot x1))$$

$$w1(x1) := A \cdot S1(x1) + B \cdot T1(x1)$$

$$\frac{d^2}{dx1^2} w1(x1) \rightarrow A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right)$$

$$\sigma1(x1) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ \left. + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) \right] \quad (J1)$$

Ділянка 2:

$$S2(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\cosh(\xi \cdot x2) + \cos(\xi \cdot x2))$$

$$T2(x2) := \frac{1}{2} \cdot (\sinh(\xi \cdot x2) + \sin(\xi \cdot x2))$$

$$VV2(x2) := \frac{1}{2} \cdot [\sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] - \sin[\xi \cdot (x2 - L1)]]$$

$$w2(x2) := A \cdot S2(x2) + B \cdot T2(x2) + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot VV2(x2)$$

$$\frac{d^2}{dx2^2} w2(x2) \rightarrow$$

$$\sigma2(x2) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ \left. + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x2 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \right] \quad (J2)$$

Вихідні числові значення параметрів пластини приймаємо наступні:

Відстань від лівого кінця до лівої опори, [м]:

L1 := 0.182

Відстань між опорами, [м]:

L2 := 0.176

Відстань від правого кінця до правої опори, [м]:

L3 := 0.182

Довжина пластини становить, [м]:

$$\underline{L} := L1 + L2 + L3 \quad (J3)$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11}$$

Ширина пластини, [м]:

$$h := 0.0034$$

Товщина пластини, [м]:

$$bn := 0.088$$

Коефіцієнт Пуассона для сталі, [-]:

$$\mu := 0.2$$

Густина сталі, [кг/м<sup>3</sup>]:

$$\rho := 7850$$

Частота вимушених коливань, [рад/с]:

$$\omega := 314$$

Момент інерції прямокутного поперечного перерізу пластини відносно нейтральної лінії становитиме, [м<sup>4</sup>]:

$$\underline{J} := \frac{h^3 \cdot bn}{12} \quad (J4)$$

Враховуючи, що пластини має прямокутний поперечний переріз, встановимо масу погонного метру пластини, [кг/м]:

$$mrm := h \cdot bn \cdot \rho \quad (J5)$$

Постійні та реакції в опорах:

$$\underline{A} := 0.002207 \quad B := -0.001737 \quad R1 := -51.993$$

Множник:

$$\xi := \sqrt[4]{\frac{mrm \cdot \omega^2}{E \cdot J}}$$

Згинальний момент та напруження ділянки 1:

$$x1 := 0, 0.001 .. 0.182$$

$$M1(x1) := E \cdot J \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) \right]$$

$$\sigma 1(x1) := \frac{E \cdot bn}{2} \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x1) \cdot \xi^2 \right) \right]$$

Згинальний момент та напруження ділянки 2:

$$x2 := 0.182, 0.183 .. 0.27$$

$$M2(x2) := E \cdot J \cdot \left[ A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ \left. + B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x2) \cdot \xi^2 \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x2 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x2 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \right]$$

$$\sigma_2(x_2) := \frac{E \cdot b n}{2} \cdot \left[ \begin{aligned} &A \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \cosh(\xi \cdot x_2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\xi \cdot x_2) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ &+ B \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sinh(\xi \cdot x_2) \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\xi \cdot x_2) \cdot \xi^2 \right) \dots \\ &+ \frac{R1}{\xi^3 \cdot E \cdot J} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sinh[\xi \cdot (x_2 - L1)] \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin[\xi \cdot (x_2 - L1)] \cdot \xi^2 \right] \end{aligned} \right]$$

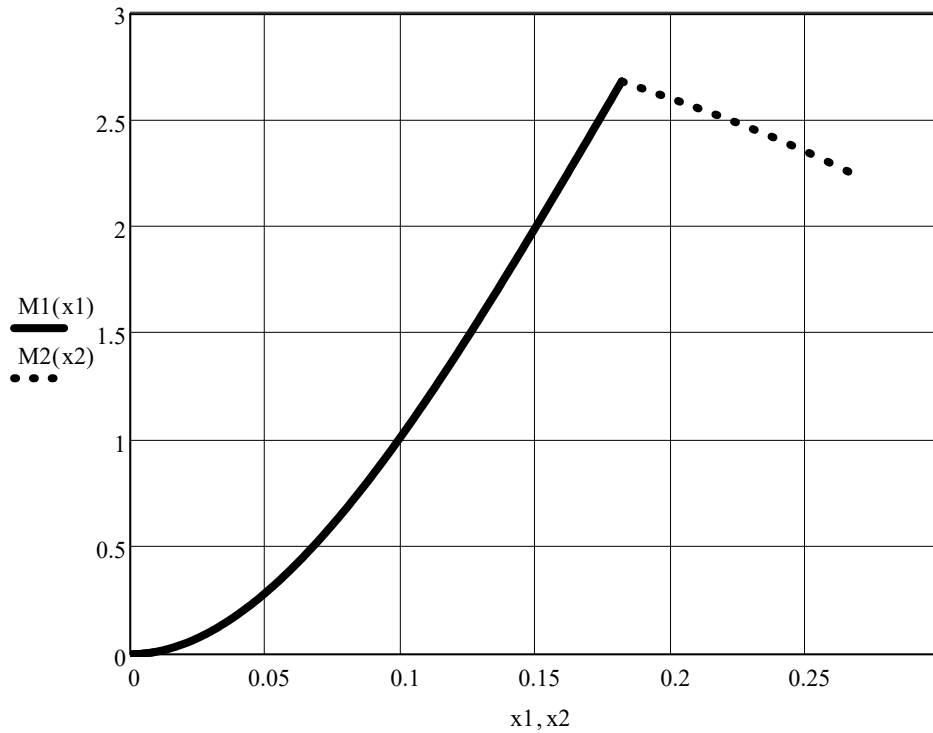


Рис. J.1. Графік згинальних моментів, що виникають в половині пластини

x := 0.182

M1(x) → 2.6844350635197746087

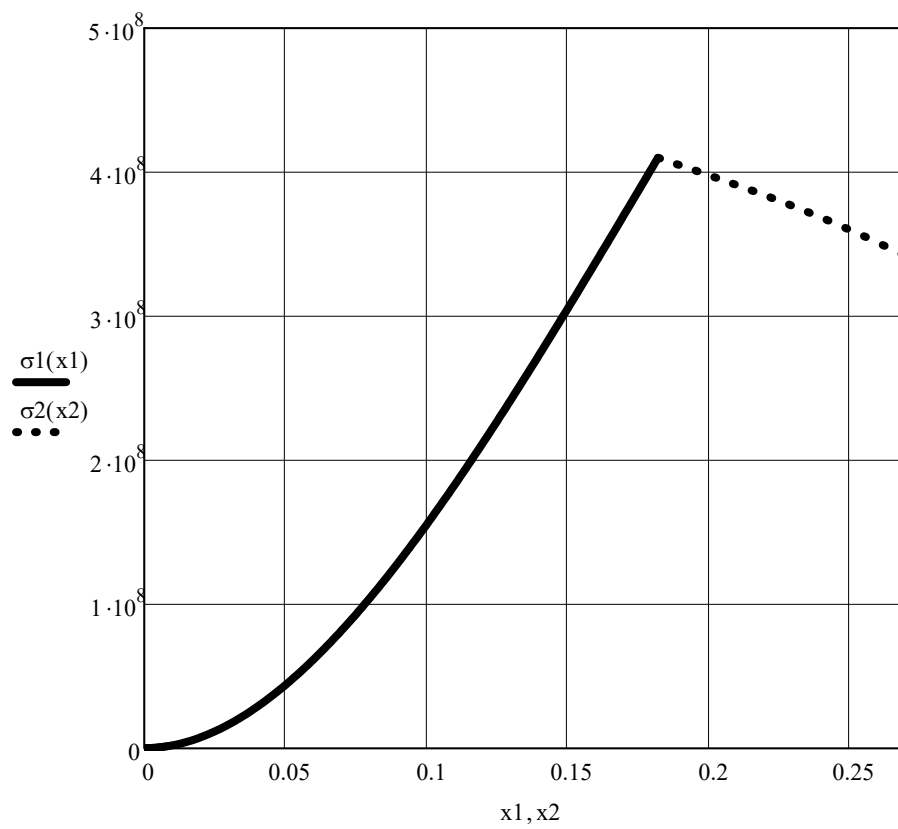


Рис. J.2. Графік напружень в половині пластини

 $x := 0.182$  $\sigma_1(x) \rightarrow 409795704.79133542775$



**Додаток К**  
**Дослідження процесів, що протікають в електромагнітному приводі**

Вихідні числові значення параметрів електромагнітного приводу приймаємо наступні:

Висота якоря, [м]:		$t_y := 0.02$
Ширина вікна під обмотку, [м]:		$\underset{ww}{c} := 0.021$
Висота вікна під обмотку, [м]:		$h := 0.044$
Зазор між статором і якорем електромагніта, [м]:		$\Delta a := 0.002$
Довжина середньої лінії магнітопроводу, [м]:		$\underset{ww}{l} := 0.251$
Відносна максимальна амплітуда коливань, [м]:		$A_m := 0.001$
Кількість витків котушки, [-]:		$\phi := 540$
Ширина полюса, [м]:		$a_m := 0.021$
Товщина полюса, [м]:		$b_m := 0.045$
Дійсна площа січення полюсів, [м <sup>2</sup> ]:		$p := 0.0035$
Колова частота, [рад/с]:	$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 50$	$\omega = 314.159$
Повітряний проміжок:	$x := \Delta a \quad \delta_o := \frac{\Delta a}{2}$	$\delta_{o1} := 0.8 \cdot \delta_o$
Амплітудне значення напруги джерела живлення, [В]:		$U := 60$
Кут відкривання тиристора, [рад]:		$\alpha_1 := \frac{0 \cdot \pi}{180}$
Кут зсуву фаз між переміщенням та зусиллям, [рад]:		$\xi_m := \frac{-\pi}{4}$
Опір котушки, [Ом]:		$\underset{ww}{R} := 14.9$
Магнітна постійна пустоти, [Гн/м]:		$\mu_o := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$
Площа полюсів магнітопроводу становить, [м <sup>2</sup> ]:		

$$S_m := a_m \cdot b_m$$

$$S_m \rightarrow .945e-3$$

(K1)

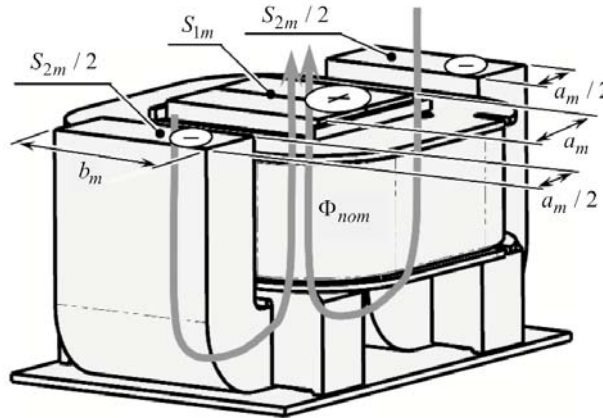


Рис. К.1. Ш-подібне осердя з котушкою електромагніту, де  $a_m = 0,021\text{ м}$  - ширина полюсів магнітопроводу,  $b_m = 0,045\text{ м}$  - товщина полюсів магнітопроводу,  $S_{1m} = S_{2m} = a_m \cdot b_m = 0,000945\text{ м}^2$  - площа полюсів магнітопроводу. Сірими стрілками показаний напрям магнітного потоку  $\Phi_{nom}$ .

Коефіцієнт враг, що враховує потоки випуклості електромагнітного поля можна знайти з виразу, [-]:

$$k_p := 1.6 + [170 \cdot (\Delta a)]^2 \quad k_p = 1.716 \quad (K2)$$

Провідність полюсів магнітопровода можна знайти з наступних виразів:

$$GE1 := \mu_0 \cdot a_m \cdot \frac{b_m}{\Delta a} \quad (K3)$$

$$GE2 := \mu_0 \cdot a_m \cdot \frac{b_m}{\Delta a} \quad (K4)$$

Індуктивність котушки електромагніту становить, [Гн]:

$$L_m := 2 \cdot k_p \cdot \phi^2 \cdot \frac{GE1 \cdot GE2}{GE1 + GE2} \quad L_m = 0.297 \quad (K5)$$

Для встановлення часової залежності зміни напруги опишемо функцію зміни напруги за допомогою ряду Фур'є та умови,

де  $t := 0, 0.0001 \dots 3$  - проміжок часу, впродовж якого проводимуться дослідження, [с];

$$U(t) := U \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_1) \quad \text{- функція напруги;} \quad (K6)$$

$$UM(t) := \begin{cases} U(t) & \text{if } 0 < U(t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{- умова;} \quad (K7)$$

Для підстановки у ряд Фур'є повторно визначаємо значення напруги, [В]:  $U := 60$

Власне, сам ряд Фур'є матиме вигляд:

$$UM(t) := \left( \frac{U}{\pi} \right) + \left( \frac{U}{2} \right) \cdot \sin(\omega \cdot t) - \left( \frac{2 \cdot U}{\pi} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{1 \cdot 3} \right) + \left( \frac{\cos(4 \cdot \omega \cdot t)}{3 \cdot 5} \right) + \dots \right] + \left[ \left( \frac{\cos(6 \cdot \omega \cdot t)}{5 \cdot 7} \right) \right] \dots + \left[ \left( \frac{\cos(8 \cdot \omega \cdot t)}{7 \cdot 9} \right) + \left( \frac{\cos(10 \cdot \omega \cdot t)}{9 \cdot 11} \right) \right] \quad (K8)$$

Прирівнюємо значення:  $U(t) := UM(t)$

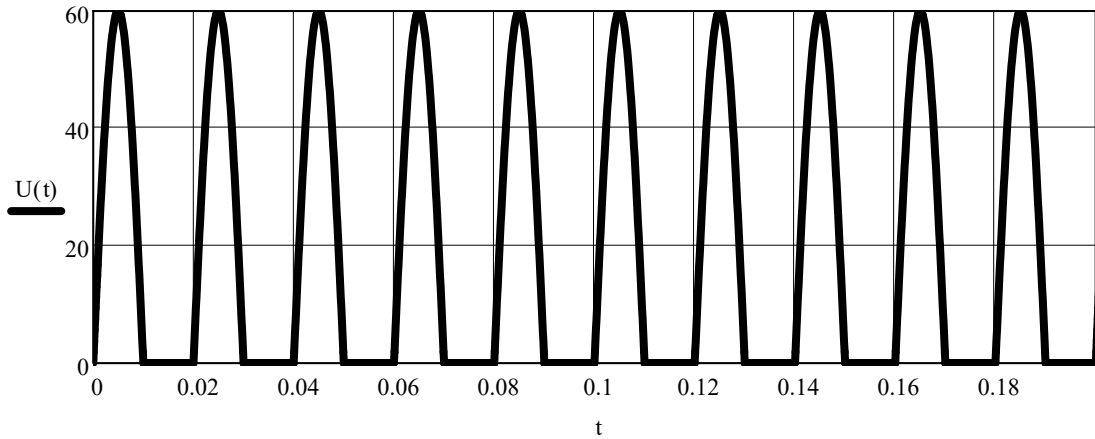


Рис. К.2. Графік залежності зміни напруги в часі

Повторно визначаємо значення напруги, [В]:

$$U := 60$$

Струм, що протікає в колі ЕВВ, можна знайти за наступними залежностями:

$$Z(t) := \left( 1 - \frac{Am}{\Delta a} \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m) \right) \cdot (U) \cdot e^{-\frac{Am}{\Delta a} \frac{R}{\omega \cdot Lm} \cos(\omega \cdot t + \xi_m)} \quad (K9)$$

$$Y := \frac{Am \cdot \sin(\alpha 1 - \xi_m)}{2 \cdot \Delta a \cdot \omega \cdot Lm} \quad (K10)$$

$$\Xi(t) := \left[ \frac{\sin(\alpha 1) \cdot (R \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega \cdot Lm \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t))}{\omega \cdot Lm} \right] \quad (K11)$$

$$\Theta(t) := \left( \frac{\omega \cdot Lm}{\omega^2 Lm^2 + R^2} \right) \cdot \left[ \frac{\cos(\alpha 1) \cdot (R \cdot \sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot Lm \cdot \cos(\omega \cdot t))}{\omega \cdot Lm} \right] + \Xi(t) + Y \quad (K12)$$

$$O(t) := \left[ \frac{\sin(\alpha 1 + \xi_m) \cdot (R \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + 2 \cdot \omega \cdot Lm \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t))}{2 \cdot \omega \cdot Lm} \right] \quad (K13)$$

$$\Lambda_m(t) := \frac{Am \cdot R}{\Delta a \cdot (4 \cdot \omega^2 Lm^2 + R^2)} \cdot \left[ \frac{\cos(\alpha 1 + \xi_m) \cdot (R \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) - 2 \cdot \omega \cdot Lm \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t))}{2 \cdot \omega \cdot Lm} \right] + O(t) \quad (K14)$$

$$Nm(t) := \left( \frac{\omega \cdot Lm}{\omega^2 Lm^2 + R^2} \right) \cdot \left[ \frac{-\cos(\alpha 1) \cdot (\omega \cdot Lm)}{\omega \cdot Lm} \right] + \left( \frac{R \cdot \sin(\alpha 1)}{\omega \cdot Lm} \right) + \frac{Am \cdot \sin(\alpha 1 - \xi_m)}{2 \cdot \Delta a \cdot \omega \cdot Lm} \quad (K15)$$

$$\Phi_m(t) := \left[ \frac{Am \cdot R}{\Delta a \cdot (4 \cdot \omega^2 Lm^2 + R^2)} \right] \cdot \left[ \frac{(-\cos(\alpha 1 + \xi_m)) \cdot (2 \cdot \omega \cdot Lm)}{2 \cdot \omega \cdot Lm} \right] + \left( \frac{R \cdot \sin(\alpha 1 + \xi_m)}{2 \cdot \omega \cdot Lm} \right) \quad (K16)$$

$$\text{Величина струму: } k(t) := Z(t) \cdot \left[ \Theta(t) + \Lambda_m(t) - \left[ e^{-\frac{R}{Lm} t} \cdot (Nm(t) + \Phi_m(t)) \right] \right] \quad (K17)$$

$$\text{Умова: } i_{may}(t) := \begin{cases} Z(t) \cdot \left[ \Theta(t) + \Lambda_m(t) - \left[ e^{-\frac{R}{Lm} t} \cdot (Nm(t) + \Phi_m(t)) \right] \right] & \text{if } k(t) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (K18)$$

Прирівнюємо значення:  $i(t) := i_{may}(t)$

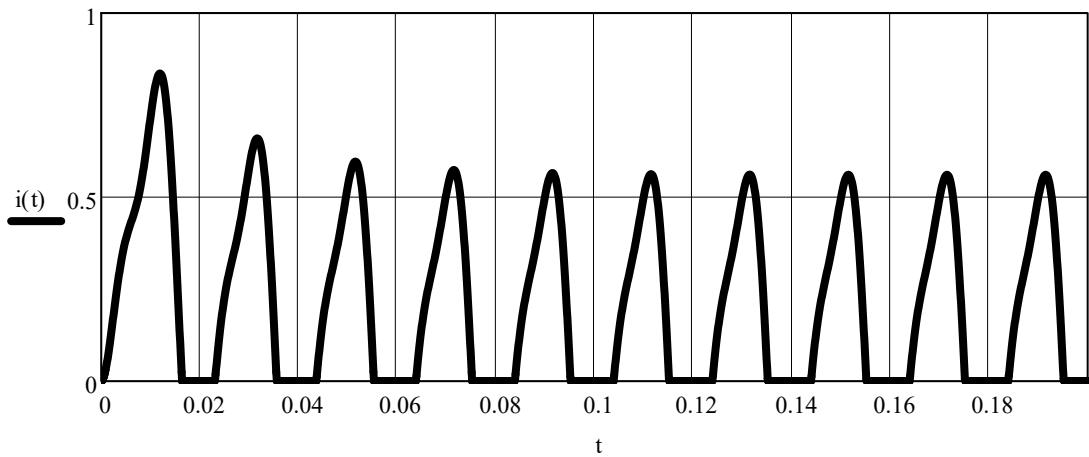


Рис. К.3. Графік залежності зміни сили струму в часі

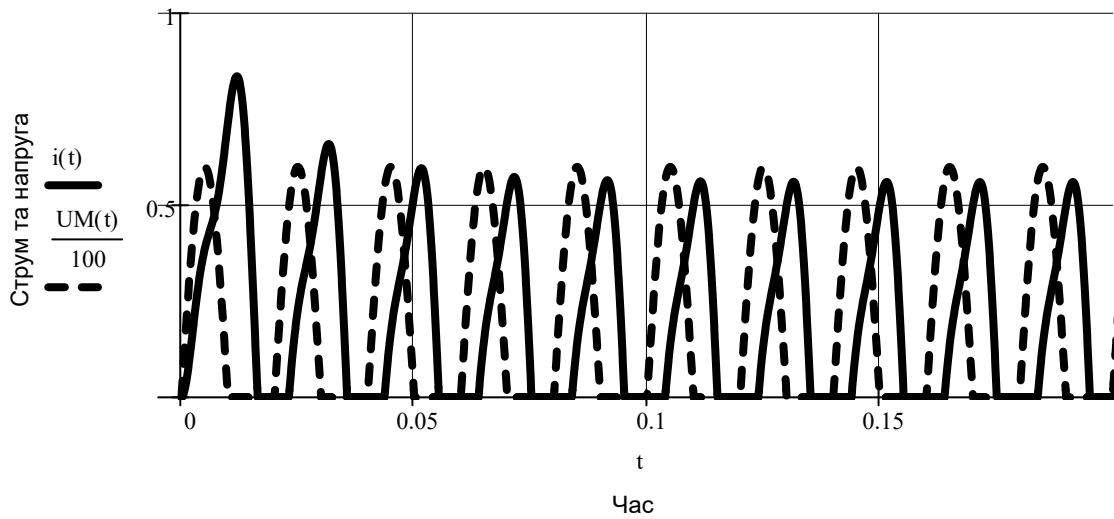


Рис. К.4. Графік залежності зміни сили струму та напруги в часі

Провідність полюсів магнітопровода можна також знайти з виразів:

$$GE1 := \mu_0 \cdot am \cdot \frac{bm}{\Delta a - Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m)} \quad (K19)$$

$$GE2 := \mu_0 \cdot am \cdot \frac{bm}{\Delta a - Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m)} \quad (K20)$$

Закони зміни провідності робочого повітряного проміжку між осердям з котушкою і якорем вібробуджувача на першому та другому полюсах відповідно визначаються з рівнянь:

$$GE1(t) := \mu_0 \cdot am \cdot \frac{bm}{\Delta a - Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m)} \quad (K21)$$

$$GE2(t) := \mu_0 \cdot am \cdot \frac{bm}{\Delta a - Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m)} \quad (K22)$$

Закони зміни сумарної провідності робочого повітряного проміжку між осердям з котушкою і якорем вібробуджування визначимо з рівняння:

$$GG(t) := 2 \cdot \frac{GE1(t) \cdot GE2(t)}{GE1(t) + GE2(t)} \quad (K23)$$

Сила збурення першого електромагніту може бути встановлена з виразу:

$$F1(t) := \frac{(\phi \cdot imay(t))^2}{kp} \cdot \left[ (-1) \cdot \mu_o \cdot am \cdot \frac{bm}{(\Delta a - Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m))^2} \right] \quad (K24)$$

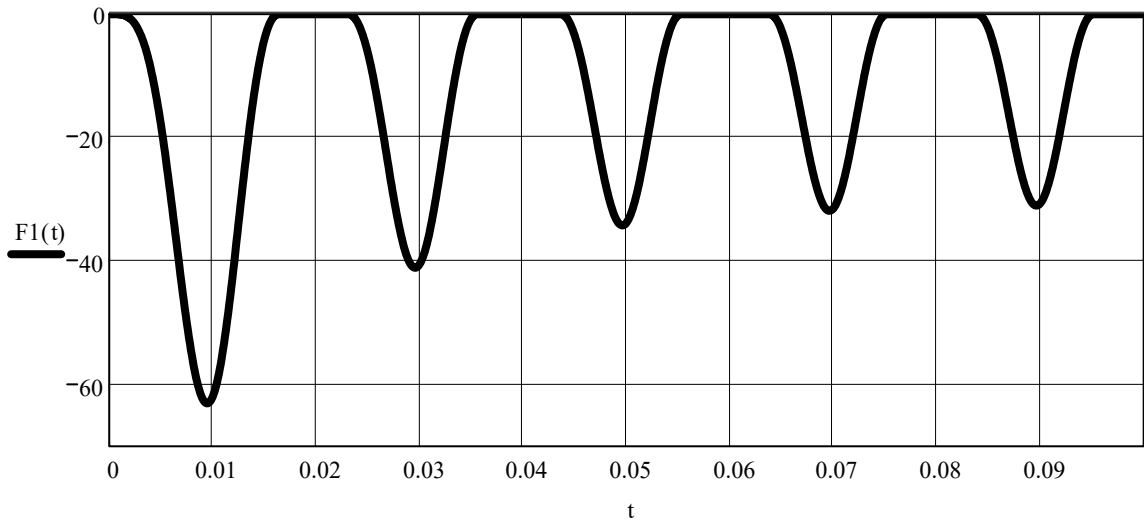


Рис. К.5. Графік зміни сили збурення першого електромагніту в часі

Сила збурення другого електромагніту може бути встановлена з виразу:

$$F2(t) := \frac{-\left(\phi \cdot imay\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right)^2}{kp} \cdot \left[ (-1) \cdot \mu_o \cdot am \cdot \frac{bm}{(\Delta a + Am \cdot \sin(\omega \cdot t + \xi_m))^2} \right] \quad (K25)$$

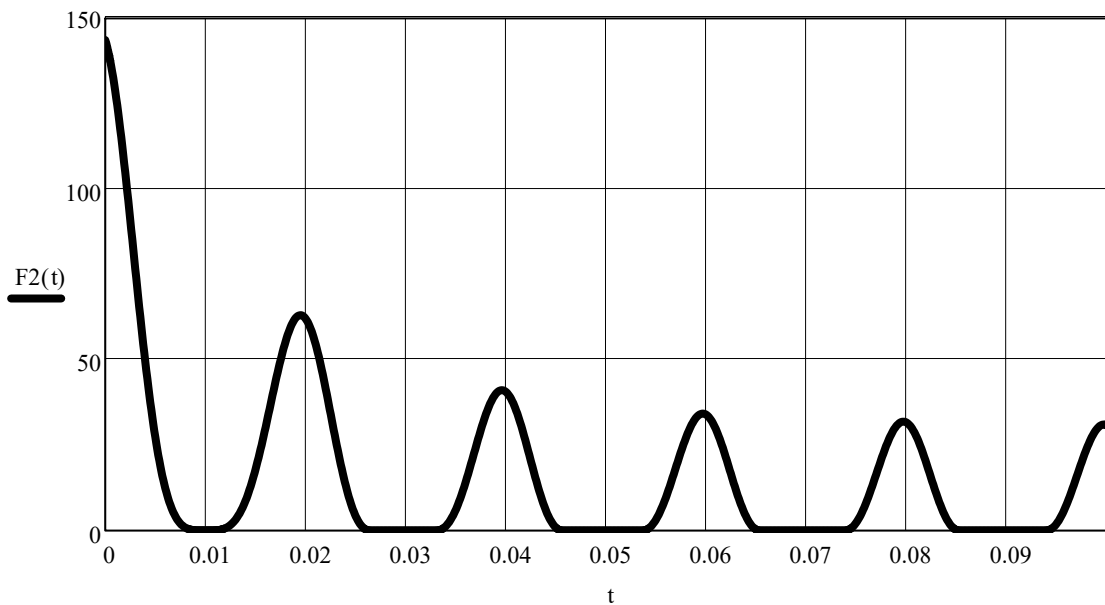


Рис. К.6. Графік зміни сили збурення другого електромагніту в часі

Сумарна сила збурення вібромашини може бути представлена як сума сил збурення першого та другого електромагнітів:

$$\underline{F}(t) := F_1(t) + F_2(t) \quad (K26)$$

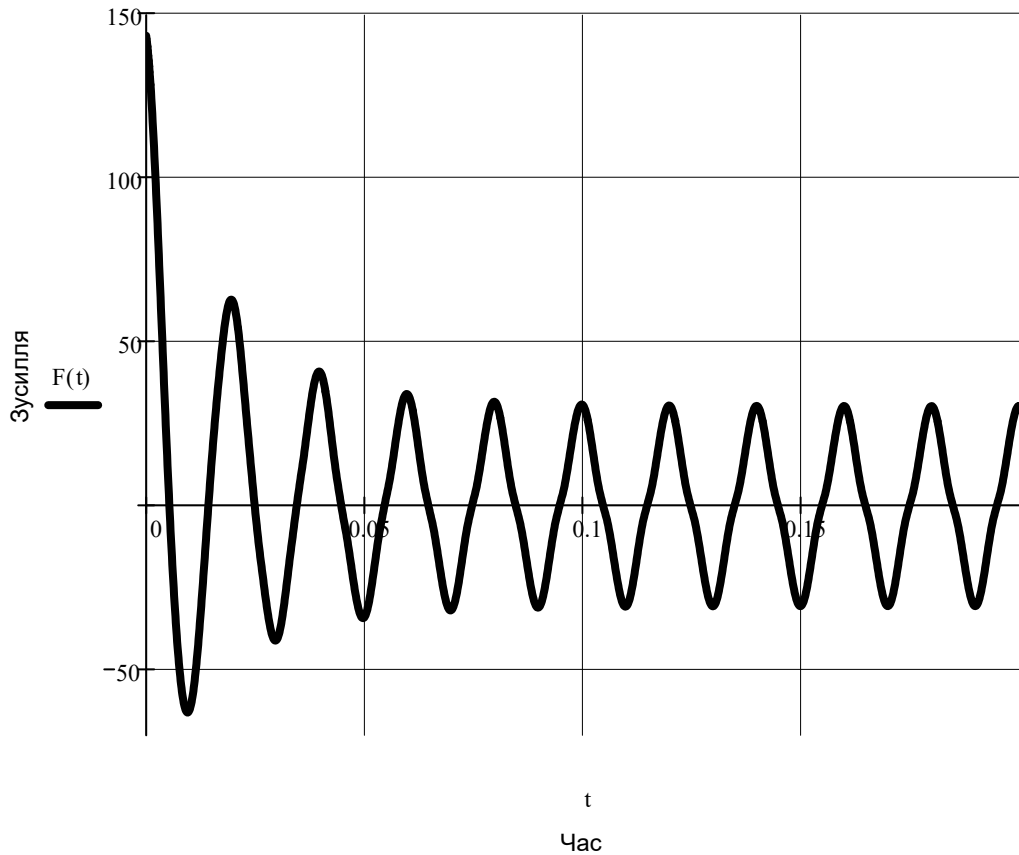


Рис. К.7. Графік зміни результуючої сили збурення вібраційної машини в часі

Вихідні числові значення інерційно-жорсткісних параметрів вібраційної машини приймаємо наступні:

Активна маса, [кг]:	$m_1 := 118$
Проміжна маса, [кг]:	$m_2 := 45$
Реактивна маса, [кг]:	$m_3 := 0.2$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує активну масу з проміжною, [Н/м]:	$c_{12} := 3.531 \times 10^6$
Жорсткість пружного вузла, що з'єднує проміжну масу з реактивною, [Н/м]:	$c_{23} := 1.939 \times 10^4$

Рівняння, що описує рух активної маси, має наступний вигляд:

$$\underline{Y}_1(t) := m_3 \cdot F(t) \cdot \frac{c_{12}}{(-m_3) \cdot \omega^4 \cdot m_2 \cdot m_1 + m_3 \cdot \omega^2 \cdot m_2 \cdot c_{12} + m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} \cdot m_1 \dots} \quad (K27)$$

$$+ m_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{23} \cdot m_1 - m_3 \cdot c_{23} \cdot c_{12} \dots$$

$$+ c_{23} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot m_1 - c_{23} \cdot m_2 \cdot c_{12} - c_{23} \cdot c_{12} \cdot m_1$$

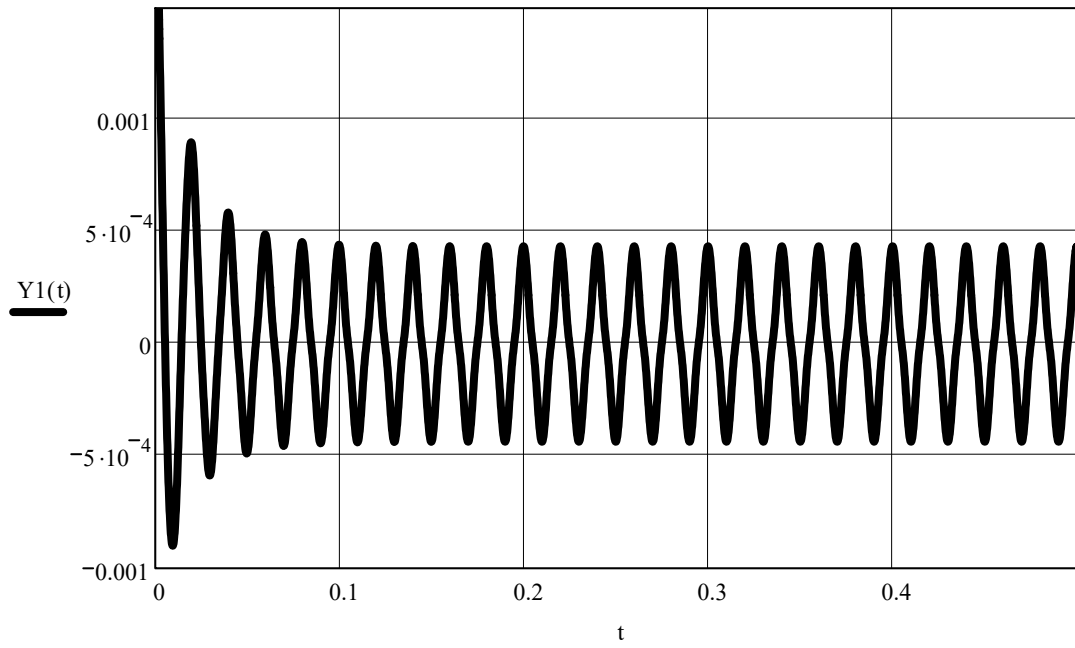


Рис. К.8. Амплітуда коливань активної маси високоефективної міжрезонансної вібраційної машини з електромагнітним приводом