

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ВАКАРЧУК АНАСТАСІЯ БОРИСІВНА**

УДК: 621.3.049:004.222

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**АНАЛІЗ ВПЛИВУ ДИНАМІКИ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ НА**  
**ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ЦИФРОВИМ**  
**КЕРУВАННЯМ**

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

14 «Електрична інженерія»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ /А.Б.Вакарчук/

Науковий керівник:

**Мороз Володимир Іванович, д.т.н., професор**

Гоголюк Оксана Петрівна, д.т.н., професорка

Львів – 2023

## АНОТАЦІЯ

Вакарчук А.Б. Аналіз впливу динаміки числових методів на характеристики електромеханічних систем з цифровим керуванням. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (14 «Електрична інженерія»). Національний університет «Львівська політехніка». Львів, 2023.

Дисертація присвячена вирішенню науково-технічної проблеми розвитку теорії та методів аналізу динамічних режимів електромеханічних систем на основі застосування числових методів та аналізу їх впливу на характеристики електромеханічних систем.

У роботі досліджено вплив числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь на поведінку цифрової моделі з коригуванням методів шляхом вибору відповідного кроку інтегрування. У цифрових системах реального часу, якими є електромеханічні системи, крок інтегрування є фіксованим і наперед заданим, що також має певний вплив на поведінку системи. Тому, з погляду задач електроенергетики та електромеханіки, актуальним залишається вивчення впливу різних підходів та методів на систему, яка моделюється та досліджується, як прототип реальних систем для побутового чи промислового застосування.

У розділі 1 «Аналіз стану проблеми, постановка задачі досліджень» виконано аналіз літературних джерел за тематикою роботи. Розглянуто теоретичні засади числових методів, їх застосування та реалізація. Наведено основні відомості про використання числових методів на основі існуючих досліджень та публікацій.

У розділі 2 «Аналіз числових методів інтегрування як елементів цифрових систем» наведено методи аналізу поведінки числових методів, підходи до їх вивчення та реалізації. Під час аналізу числових методів, які базуються на

принципі інтегрування проаналізовано їхні переваги, недоліки та підходи до виключення, або навпаки подальшого використання для досліджень. Проведені дослідження їх ефективності, стійкості та відповідності задачам електромеханіки. виконано дослідження для дискретизації цифрових систем керування за допомогою числових методів. Для цього, їх розглянуто як цифрові фільтри, які є складовою частиною цифрової системи. Аналіз таких цифрових фільтрів реалізовано за допомогою z-перетворень.

У процесі досліджень було з'ясовано, що кожен числовий метод (як цифровий фільтр) починає від себе додавати вплив на результуючу цифрової моделі, тобто, на поведінку моделі накладається поведінка числового методу. В якості одного способу виявлення цього явища обрано класичний метод частотних характеристик, а також запропоновано для аналізу використати розподіл нулів/полюсів дискретної системи на комплексній площині. За допомогою останнього методу було отримано наочний результат накладання поведінки числових методів на поведінку моделі. Поява нових додаткових нулів та полюсів дискретної системи порівняно з неперервним прототипом відчутно ускладнює результуючу цифрову модель системи. Таким чином, проведені дослідження показали доцільність використання числових методів низьких порядків з метою збереження кількості нулів/полюсів.

У розділі 3 «Метод відповідності нулів і полюсів як раціональний метод синтезу цифрових систем» досліджено ефективність застосування z-перетворення, а саме – методу відображення нулів/полюсів, для створення моделей реального часу. Здійснено ретроспективний аналіз засад виникнення методу та описано основні принципи його реалізації і застосування. Вивчено ефективність реалізації методу відображення нулів і полюсів для аналізу електромеханічних систем. На прикладі моделювання динамічних ланок першого та другого порядків наведено спосіб застосування методів, переваги та нюанси такого застосування. Зроблено узагальнюючий висновок про те, що Z-

перетворення дає змогу отримати прості та ефективні рекурентні формули моделювання на основі методу відображення полюс/нуль.

У розділі 4 «Експериментальні дослідження. Верифікація результатів» описано розроблені здобувачкою комп'ютерні моделі електротехнічних систем. На їх основі було проведено експериментальні дослідження та наведено результати експерименту з мікроконтролером.

У процесі виконання досліджень за темою дисертації було з'ясовано, що кожен числовий метод (як цифровий фільтр) починає вносити вплив на результуючу цифрову модель. Таким чином, зроблено висновок, що на поведінку моделі накладається поведінка числового методу. В якості одного зі способів виявлення цього явища обрано класичний метод частотних характеристик, а також запропоновано використати розподіл нулів/полюсів дискретної системи на комплексній площині для проведення аналізу. На останньому і було отримано наочний результат накладання поведінки числових методів на поведінку моделі. Поява нових додаткових нулів та полюсів дискретної системи порівняно з неперервним прототипом відчутно ускладнює результуючу цифрову модель системи. Отримані в процесі виконання досліджень результати дозволять здійснювати моделювання досліджуваних електромеханічних систем із вищою точністю.

Ключові слова: електротехнічні системи, електромеханічні системи, числові методи, дискретизація систем, чисельне інтегрування, z-перетворення, метод нулів/полюсів, комп'ютерне моделювання, цифрові моделі.

**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ  
ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ**

**Статті у наукових періодичних виданнях України, які включено до  
міжнародних наукометричних баз:**

1. Moroz V., Vakarchuk A. (2022). Frequency features of the numerical method sampling of digital control systems. *Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»*. Випуск 2, 201-209. DOI: 10.15588/1607-3274-2022-2-19

**Статті у науковому періодичному фаховому виданні України за  
спеціальністю:**

2. Moroz V., Vakarchuk A. (2020) Influence of the numerical method sampling on the digital pid-controller behavior. *Науковий журнал Електроенергетичні та електромеханічні системи*. Випуск 2 (1), 35-45. DOI:10.23939/sepes2020.01s.035/

3. Moroz V., Vakarchuk A. (2022) Application of the zeros and poles matched method for modeling of electrical systems. *Науковий журнал «Електроенергетичні та електромеханічні системи»* Випуск 4 (1), 72–87. DOI: 10.23939/sepes2022.01.072

**Публікація колективної монографії закордоном:**

4. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Implementacja regulatora PID w cyfrowych układach regulacji. Колективна монографія «Możliwości i horyzonty ekoinnovazioneści. Wyzwania transformacji energetycznej i klimatycznej». 257–270, ISBN 978-83-67033-27-5, e-ISBN 978-83-67033-28-2, 15.12.2021 r.

**Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації, а саме  
матеріали та тези міжнародних і вітчизняних науково-технічних та  
наукових конференцій:**

5. Мороз В., Вакарчук А.Б. (2020) Дослідження впливу числових інтеграторів на поведінку цифрових систем, *Міжнародна конференція OPTIMA-2020, м.Кам'янець-Подільський*, 55-57, УДК 519.62 : 621.3
6. Мороз В., Вакарчук А. (2021) Раціональність використання числових інтеграторів високого порядку в цифрових ПД-регуляторах, *V-а Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод»*, Краматорськ, 238-240, УДК 004+681.5+61+62-83-52 С 91, ISBN 978-966-379-988-9
7. Мороз В., Вакарчук А. (2021) Числові інтегратори в розрахунках електричних кіл. *Науково-технічна конференція підрозділів Вінницького національного технічного університету, ОКЕУ-2021*, Вінниця, 203-207. ISBN 978-966-641-884-8
8. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Numerical Integrators on Electrical Circuits' Transient Calculation. *IEEE 22<sup>nd</sup> International Conference «Computational problems of electrical 2021»*. University of West Bohemia, Pilsen, Czech Republic. DOI: 10.1109/CPPE54040.2021.9585266
9. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Why High-Order Integrators Not Rational on Electrical Systems' Computer Calculation. *IEEE 20th International Conference on Modern Electrical and Energy System*, Кременчук, DOI: 10.1109/MEES52427.2021.9598791
10. Мороз В., Вакарчук А. (2022) Використання методу відображення нулів і полюсів для моделювання. *Electrical and Power Engineering and Electromechanics*, Одеса. 64-65 УДК 519.711.3 : 681.5.017

## **ABSTRACT**

Vakarchuk A.B. Analysis of the influence of the dynamics of numerical methods on the characteristics of electromechanical systems with digital control. Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy in the specialty 141 "Electric power, electrical engineering and electromechanics" (14 "Electrical engineering"). Lviv Polytechnic National University. Lviv, 2023.

The dissertation is devoted to the solution of the scientific and technical problem of the theory and methods development to analyze dynamic modes of electromechanical systems based on the application of numerical methods and analysis of their influence on the characteristics of electromechanical systems.

The PhD thesis is devoted to the investigation of the influence of numerical methods of ordinary differential equations solving based on the behavior of a digital model with its adjustment by choosing the appropriate integration step. In real-time digital systems, such as electromechanical systems, the integration step is fixed and predetermined that also has some influence on the behavior of the system. Therefore, from the point of view of the tasks of electric power engineering and electromechanics, it remains expedient to conduct a research of the influence of various approaches and methods on the system, which is modeled and studied as a prototype of real systems for domestic or industrial use.

In the Chapter 1 "Analysis of the state of the problem, formulation of the research problem" the analysis of literary sources connected with the topic of the work is conducted. The theoretical base of numerical methods, their application and implementation are considered. The basic information about the numerical methods usage based on existing research and publications has been analyzed.

Chapter 2, "Analysis of Numerical Methods of Integration as Elements of Digital Systems," presents methods intended for analyzing the behavior of numerical methods, and implementation. In the analysis of numerical methods based on the principle of integration, their advantages, disadvantages, and approaches for their further usage are

presented. Their efficiency, stability, and relevance to electromechanics problems are investigated. The explicit Adams formulas are analyzed for the discretization of digital control systems using numerical methods. For this purpose, they are considered as digital filters that are an integral part of a digital system. The analysis of such digital filters was implemented using z-transforms.

During the research conducting, it was found that each numerical method (as a digital filter) causes its own influence on the resulting digital model, that is, the behavior of the model is superimposed on the behavior of the numerical method. The classical method of frequency response was chosen as one way to detect this phenomenon. It was also proposed to use the distribution of zeros/poles of a discrete system on the complex plane for analysis. In fact, the last one was used to obtain an evident result of the superposition of the behavior of numerical methods on the behavior of the model. The emergence of new additional zeros and poles of the discrete system compared to the continuous prototype significantly complicates the resulting digital model of the system. Thus, the studies have shown that it is advisable to use low-order numerical methods to keep the number of zeros/poles.

Chapter 3, "The Method of Zeroes and Poles Matching as a Rational Method for Digital Systems Synthesizing," investigates the effectiveness of the z-transform using, namely, the method of zeroes/poles mapping, to create real-time models. The historical foundations of the method and its basic principles of implementation and application are analyzed. The effectiveness of the implementation of the zero-pole mapping method for the analysis of electromechanical systems is studied. In the Chapter, on the example of modeling dynamic links of the first and second orders, the analysis of the methods applying, advantages and nuances of such application are presented. The Z-transform allows obtaining simple and efficient recurrent modeling formulas based on the pole/zero mapping method.

In Chapter 4, "Experimental Research. Verification of Results" describes the computer models of electrical systems on the basis of which the experimental studies were conducted and the results of the experiment with a microcontroller are presented.



During the research, it was found out that each numerical method (as a digital filter) adds its own influence on the resulting digital model. So, the behavior of the model is superposed with the behavior of the numerical method. The classical method of frequency response was chosen as one way to detect this phenomenon, and we also proposed to use the distribution of zeros/poles of a discrete system on the complex plane for analysis. In fact, the last method was used as the basis for the visual result of imposing the behavior of numerical methods on the behavior of the model. The appearing of new additional zeros and poles of the discrete system compared to the continuous prototype significantly complicates the resulting digital model of the system. The results obtained in the process of the research will allow us to model the experimental electromechanical systems with higher accuracy

Keywords: electrical systems, electromechanical systems, numerical methods, system discretization, numerical integration, z-transform, zero/pole method, computer modeling, digital models.

## **THE RESEARCHER LIST OF PUBLICATIONS WHICH CONTAIN THE MAIN SCIENTIFIC RESULTS OF THIS DISSERTATION**

### **Publications in scientific editions of Ukraine, which are included in international science-computer databases:**

1. Moroz V., Vakarchuk A. (2022). Frequency features of the numerical method sampling of digital control systems. *Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»*. Випуск 2, 201-209. DOI: 10.15588/1607-3274-2022-2-19

### **Publications in scientific professional editions of Ukraine:**

2. Moroz V., Vakarchuk A. (2020) Influence of the numerical method sampling on the digital pid-controller behavior. *Науковий журнал Електроенергетичні та електромеханічні системи*. Випуск 2 (1), 35-45. DOI:10.23939/sepes2020.01s.035/

3. Moroz V., Vakarchuk A. Application of the zeros and poles matched method for modeling of electrical systems. *Науковий журнал «Електроенергетичні та електромеханічні системи»* Випуск 4 (1), 72–87. DOI: 10.23939/sepes2022.01.072

### **Publication of a collective monograph abroad:**

4. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Implementacja regulatora PID w cyfrowych układach regulacji. Колективна монографія «Możliwości i horyzonty ekoinnovazioneści. Wyzwania transformacji energetycznej i klimatycznej». 257–270, ISBN 978-83-67033-27-5, e-ISBN 978-83-67033-28-2, 15.12.2021 r.

### **Publications that testify to the approbation of the dissertation materials, namely the materials and abstracts of international and national scientific and technical conferences:**

5. Мороз В., Вакарчук А.Б. (2020) Дослідження впливу числових інтеграторів на поведінку цифрових систем, *Міжнародна конференція OPTIMA-2020, м.Кам'янець-Подільський*, 55-57, УДК 519.62 : 621.3
6. Мороз В., Вакарчук А. (2021) Раціональність використання числових інтеграторів високого порядку в цифрових ПІД-регуляторах, *V-а Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод»*, Краматорськ, 238-240, УДК 004+681.5+61+62-83-52 С 91, ISBN 978-966-379-988-9
7. Мороз В., Вакарчук А. (2021) Числові інтегратори в розрахунках електричних кіл. *Науково-технічна конференція підрозділів Вінницького національного технічного університету, ОКЕУ-2021*, Вінниця, 203-207. ISBN 978-966-641-884-8
8. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Numerical Integrators on Electrical Circuits' Transient Calculation. *IEEE 22<sup>nd</sup> International Conference «Computational problems of electrical 2021»*. University of West Bohemia, Pilsen, Czech Republic. DOI: 10.1109/CPEE54040.2021.9585266
9. Moroz V., Vakarchuk A. (2021) Why High-Order Integrators Not Rational on Electrical Systems' Computer Calculation. *IEEE 20th International Conference on Modern Electrical and Energy System*, Кременчук, DOI: 10.1109/MEES52427.2021.9598791
10. Мороз В., Вакарчук А. (2022) Використання методу відображення нулів і полюсів для моделювання. *Electrical and Power Engineering and Electromechanics*, Одеса. 64-65 УДК 519.711.3 : 681.5.017

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	13
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	20
1.1. Методи розрахунку динаміки електротехнічних систем.....	20
1.1.1. Числові методи аналізу динамічних процесів .....	22
1.1.2. Операторні методи аналізу динамічних процесів .....	39
1.2. Інтеграл згортки та рекурентні рівняння.....	44
Висновки до розділу 1 .....	51
РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ІНТЕГРУВАННЯ ЯК ЕЛЕМЕНТІВ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ.....	53
2.1. Частотний аналіз методів інтегрування як числових фільтрів.....	53
2.2. Аналіз цифрових моделей на підставі числових методів інтегрування методів нулів і полюсів.....	66
Висновки до розділу 2 .....	78
РОЗДІЛ 3 МЕТОД ВІДПОВІДНОСТІ НУЛІВ І ПОЛЮСІВ ЯК РАЦІОНАЛЬНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ .....	80
3.1. Метод відповідності нулів і полюсів як базовий метод z-перетворення. .	85
3.2. Формування методом нулів і полюсів цифрових моделей елементарних динамічних ланок.....	90
Висновки до розділу 3 .....	106
РОЗДІЛ 4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	107
Висновки до розділу 4 .....	113
ВИСНОВКИ.....	115
Список використаних джерел .....	117
Додатки.....	125

## ВСТУП

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Використання числових методів математиками є доволі визначене та просте, адже рівняння - це не реальна система, яка має свою поведінку, властивості, особливості та інші характеристики. Тож, з погляду математики, питання застосування числових методів для розв'язування рівнянь та задач є вичерпаним. Уже відомим є факт впливу числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь на поведінку цифрової моделі. Також відомо, що коригування такого впливу здійснюється шляхом вибору відповідного кроку інтегрування. Але в цифрових системах реального часу, якими є електромеханічні системи, крок інтегрування є фіксованим і наперед заданим, що також має певний вплив на поведінку системи [1]. Тому, в царині формулювання та розв'язування задач електроенергетики та електромеханіки, актуальним залишається вивчення впливу різних підходів та методів на систему, яка моделюється та досліджується, як прототип реальних об'єктів побутових чи промислових споживачів електричної енергії.

Суперечливим питанням залишається авторство та точний час винайдення інтегральної схеми, що перевернула електронну промисловість. Історики та науковці по-різному оцінюють внески Джека Кілбі та Роберта Нойса, як і справедливість присудження Нобелівської премії першому. Або згадки інших винахідників у процесах становлення мікропроцесорних систем. Втім, доконаним залишається факт, що саме сукупний результат винахідників у кінці 50-их років минулого століття дав початок швидкому прогресу в галузі обчислювальної техніки. Десять років потому, замовлення компанією Busicom 12 мікросхем Intel створило умови для нового кроку вперед - рішення розробників Intel поєднати кілька схем в одну і стало початком епохи мікропроцесорної техніки.

Історія розвитку мікропроцесорів нараховує кількох передових компаній-виробників, багато поколінь, етапів вдосконалень, спроб та помилок.

Із виходом мікропроцесорів за межі персональних комп'ютерів, відбулось швидке поширення на іншу техніку та технологічні рішення і як наслідок - поступовий перехід на цифрові системи.

У зв'язку із масштабним використанням цифрових систем, постала потреба у розробці нових алгоритмів, детальному вивченню наявних на той час методів обробки та передачі інформації та їх удосконаленню. Водночас, доцільною була і є робота над покращенням швидкості та точності роботи із великим потоком даних, в тому числі їх обчисленні, передачі та трансформації для систем, відмінних від цифрових.

Рішенням такого вивчення є комп'ютерне моделювання, яке дозволяє створювати різні комбінації станів та режимів реальних об'єктів, досліджувати реакцію на зовнішні чинники або зміни в системі.

Створення моделі - це засіб, що сприяє у поясненні, розумінні або удосконаленні системи. Це основний інструмент, що дає можливість прогнозувати наслідки дії вхідних сигналів на досліджуваний об'єкт.

Математичне моделювання здатне вирішити цілий ряд проблем та запитів:

- Складність системи. Економічна перевага математичного моделювання цілком виправдовує себе, коли необхідно знайти рішення, яке через складність або масштаб моделі неможливий, наприклад в лабораторії.
- Перевірка. Математична модель одразу може бути перевірена на справедливість складених рівнянь.
- Оцінка реакції. Окрім створення моделі, можна одразу дослідити її поведінку та реакцію під час дії зовнішніх збудників, та навіть змоделювати альтернативи дій внаслідок такого впливу [2].

Окрім природнього глобального прогресу та розвитку різних галузей, де застосовується моделювання, є ряд локальних властивостей систем, що призводять до зміни їх поведінки та виникнення складних проблем в її роботі:

1. Мінливість. Кожній системі притаманно включення або виключення елементів – протягом тривалого часу жодна система не є незмінною.

2. Вплив навколишнього середовища. Приналежність будь-якої системи до іншої, більшої системи, означає, що її стан піддається впливу середовища, що подане в системі зовнішніми даними.

3. В кожній системі є місце поведінки, яка не піддається прогнозуванню.

4. Зношування частин системи – зрозумілим є зниження ефективності її роботи та погіршення характеристик через тривалий період роботи.

5. Взаємозалежність. Оскільки велика система складається із простіших підсистем, будь-яка дія, через неможливість її ізоляції, матиме вплив на решту складових системи.

6. Організація структури. Виконання кінцевої мети або цілі системи вимагає досконалої побудови ієрархії та структури [4].

Таким чином, комп'ютерне моделювання цифрових систем повинно враховувати всі особливості об'єктів, що підлягають вивченню та дослідженню шляхом моделювання.

**Актуальність досліджень.** Поява доступних комп'ютерних і мікропроцесорних систем призвела до широкого впровадження цифрових систем керування, які, відповідно до свого призначення, працюють у режимі реального часу. До таких систем належать також і системи з використанням моделей реального часу чи навіть з вищою швидкістю – наприклад, системи керування зі спостерігачами, з еталонними моделями. Типовим прикладом є задача оперативного керування стійкістю електроенергетичних систем та системи Smart-Grid з використанням прогностичних комп'ютерних моделей, які повинні працювати на 1-2 порядки швидше реального часу. Синтез таких цифрових систем відбувається шляхом дискретизації неперервного прототипу (наприклад, опис системою звичайних диференціальних рівнянь) за допомогою аналітичних перетворень або числових методів.

У випадку використання числових методів для дискретизації систем реального часу у процесі досліджень відкинуті декілька груп числових методів,.

Про це в нас також було дослідження та розгорнуто наведено аргументи в тексті дисертації. Але дуже коротко ці причини звучать так:

- однокрокові методи (наприклад, Рунге-Кутта) потребують проміжного похідного значення між двома точками кроку (періоду) дискретизації, в системах реального часу це фізично неможливо;

- неявні багатокрокові методи для своїх розрахунків використовують інформацію з майбутнього кроку, який в реальній системі ще не відбувся, відповідно інформації з наступного кроку отримати неможливо.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напрямку досліджень, передбачених Державною науково-технічною програмою "Енергоефективні та ресурсозберігаючі технології генерування, перетворення та використання енергії", а також напрямам наукових досліджень кафедр електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем ("Створення спеціальних мікропроцесорних і комп'ютерних систем керування"), та теоретичної і загальної електротехніки ("Математичне моделювання динамічних процесів в електротехнічних та електронних колах і системах") Національного університету "Львівська політехніка.

**Мета і завдання досліджень.** Метою дисертаційної роботи є дослідження та вивчення властивостей числових методів, їх відповідність для використання у комп'ютерному моделюванні та процесах дискретизації та впливу на систему, яка досліджується. Наступним завданням дисертаційної роботи є дослідження числових методів як цифрових фільтрів: способи реалізації, поведінка та вплив на досліджувану систему.

**Об'єкт дослідження.** Електротехнічні, електромеханічні та електроенергетичні системи реального часу, зокрема, цифрові системи керування та комп'ютерні моделі реального часу.

**Предмет дослідження.** Методи дискретизації неперервних систем.



**Методи досліджень.** Виконані в роботі дослідження ґрунтуються на теорії динамічних аналогових та цифрових систем, числових методах аналізу перехідних процесів лінійних і нелінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами та z-перетвореннями.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Розвинуто теорію дискретних систем з огляду на використання числових методів як складових елементів цифрових систем керування та комп'ютерних моделей реального часу. Окрім цього:

- застосовано метод нулів/поліосів для створення цифрових моделей дискретних систем або їх елементів;
- показано неефективність використання числових методів високих порядків для цифрових моделей реального часу;
- вперше для аналізу впливу числових інтеграторів на електромеханічні системи реального часу було застосовано метод відображення нулів/поліосів. Це дозволило використати рекурентні рівняння, та дослідити їх на стійкість до різних кроків дискретизації.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати та висновки доцільності або ж неефективності використання числових методів дозволяють розвинути підходи подальшого їхнього використання.

#### **Практичне значення одержаних результатів.**

Розроблена методика аналізу впливу числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь дозволить підвищити ефективність моделювання цифрових електромеханічних систем. Експериментальні дослідження поведінки цифрової моделі з коригуванням шляхом вибору відповідного кроку інтегрування дозволять спрогнозувати поведінку цифрових системах реального часу, що є суттєвим внеском в покращення теорій керування та динамічних систем.

Отримані автором результати доцільно використовувати в освітянських, науково-дослідних установах, відділах і конструкторських бюро моделювання та

симулювання режимів і процесів електротехнічних та електромеханічних систем, задіяних у обслуговуванні та експлуатації складних електромеханічних систем з елементами керування.

**Впровадження результатів досліджень.** Результати досліджень, отримані під час виконання даної дисертаційної роботи, використовуються:

- у навчальному процесі Національного університету “Львівська політехніка” під час викладання дисципліни “Моделювання електротехнічних систем та їх елементів”, яка викладається для магістрів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка в Національному університеті “Львівська політехніка”;
- у науково-дослідній роботі під час виконання ініціативних дослідних тем кафедри теоретичної та загальної електротехніки, та кафедри електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем Інституту енергетики та систем керування Національного університету “Львівська політехніка”.

У додатку дисертації наведено акт впровадження, що підтверджує впровадження результатів роботи в Національному університеті “Львівська політехніка”.

**Особистий внесок здобувача.** Результати наукових досліджень, які представлені у дисертаційній роботі та виносяться на захист, отримані автором самостійно та у співавторстві наукового керівника. За темою дисертації загалом опубліковано 10 наукових праць. Основні положення та результати дисертаційної роботи, що були отримані автором, опубліковані у співавторстві у працях [1, 17, 47, 53, 62, 63, 80-83 ] присвячені вивченні числових методів, їх ефективності та доцільності їх використання для задач електротехніки та електромеханіки.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації представлено й обговорено на:

- Міжнародній конференції OPTIMA-2020, м.Кам'янець-Подільський, 14-15 травня 2020 року;
- V-а Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод», Краматорськ, 23–24 квітня 2021 року ;
- Науково-технічній конференції підрозділів Вінницького національного технічного університету, ОКЕУ-2021, Вінниця, 10 березня 2021;
- IEEE 22<sup>nd</sup> International Conference «Computational problems of electrical 2021». University of West Bohemia, Pilsen, Czech Republic, 15-17 вересня 2021 року;
- Electrical and Power Engineering and Electromechanics, Одеса, 12 травня 2022 року.

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у одній колективній монографії за кордоном, а також 10 друкованих працях, з них 3 у наукових фахових виданнях України, в тому числі 1 статті у виданнях, що включені до наукометричної бази Scopus; 6 матеріалів конференцій, з яких 2 - у виданнях, що включені до наукометричної бази даних Scopus. Опубліковані праці в повній мірі відображають зміст дисертаційної роботи, що підтверджується посиланнями в її тексті.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота загальним обсягом 148 сторінок з основною частиною 115, яка складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та анотації і списку використаних джерел з 83 найменування і 5 додатків на 20 сторінках; містить 51 рисунок і 3 таблиці.

## **РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

Відомі напрацювання у царині математичних розрахунків та моделювання дозволяють знаходити рішення для чи не усіх задач сьогодення. У різних галузях по-різному застосовують математичні підходи та методи для аналізу, розрахунку та пошуку рішення проблем. Електрична інженерія не є винятком, особливо за умови тотальної комп'ютеризації та автоматизації роботи об'єктів енергетики. Окрім цього, розвиток сучасної напівпровідникової техніки зумовлює ширше використання цифрових систем керування замість аналогової елементної бази.

Зважаючи на такі зміни, при розробці цифрових систем перед інженерами постає питання вибору напрямку, за допомогою якого результат розробки виконуватиме поставлену задачу.

Багато математичних підходів та методів досліджених математиками-теоретиками не можуть достеменно забезпечити усі потреби під час розробки та розрахунку реальних систем. Більшість математичних рішень вивчені та застосовані на ідеальних системах, за ідеальних умов та прийняті вважати винятково точними.

На практиці математичне та комп'ютерне моделювання електротехнічних систем має ряд невивчених та недосліджених напрямків, які б включали в себе відповідність сучасному апаратному забезпеченню цифрових систем електротехніки, необхідної стійкості та точності.

### **1.1. Методи розрахунку динаміки електротехнічних систем**

Реакція на збурення під час роботи електротехнічної системи, наприклад, коротке замикання, відключення будь-якого елементу енергосистеми, зміни параметрів обладнання, є проявом динамічних властивостей системи. Таким чином, основним застосунком для задач електротехніки та електромеханіки виступають звичайні диференціальні рівняння, для роботи з якими застосовують аналітичні та наближені методи. Втім, об'єкти електротехніки та електромеханіки це складні механізми, в яких відбувається багато процесів.

Якщо ці процеси описувати диференціальними рівняннями для подальших розрахунків та аналізу, то отримаємо складну систему диференціальних рівнянь. Аналітичні методи є доволі узагальнені та не є достатньо адаптивні під кожен тип задачі, що уже саме по собі виключає широкий перелік задач, їх порядок, складність та об'єм, які могли б бути розв'язані аналітичними методами.

Створення та реалізація математичної моделі вимагає досконалого вивчення об'єкту моделювання – системи. А також, аналіз її властивостей, основних рис, характерні властивості та особливості функціонування [4].

Визначення характеристик системи, для якої буде відбуватись моделювання, дозволяє обрати форму представлення динамічних об'єктів. Кожна з форм має свої недоліки та переваги під час реалізацій та отриманні результатів. До того ж, важливим є створення моделі, яка і буде визначальною у виборі методу та принципу подальшого моделювання.

У зв'язку із тим, що частим явищем є моделювання реальних явищ чи складних конструкцій, вартісною роботою в постановці задачі є вдало вибрані зв'язки та характеристики явищ, істотних для задачі, які необхідно включити до математичної моделі.

Час, коли популярними та доцільними були аналітичні (точні) методи для вивчення математичних моделей, фактично закінчився у ХХ столітті. Їх місце, як інструмента дослідницької та проектувальної роботи, зайняли числові методи. [5]

Автор підручника «Основи числових методів» В.Г.Мусіяка [5], наводить дуже просте пояснення такої заміни в галузі досліджень. Розглянемо приклад.

Прогин гнучкої прямолінійної пружної балки  $u$  за чистого згину (за умови відношення висоти балки та довжини прольоту більше ніж 10) визначають наступним рівнянням:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)^{-1,5} = \frac{M}{El(x)} \quad (1.1)$$

Серед елементарних функцій не існує такої, що буде розв'язком цього нелінійного звичайного диференціального рівняння 2-го порядку.

Якщо у порівнянні із довжиною балки прогин  $u$  невеликий, то рівняння (1.1) можна значно спростити, нехтуючи величиною  $(\frac{du}{dx})^2$ . І як результат отримати звичайне лінійне диференціальне рівняння вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{El(x)} \quad (1.2)$$

Отже, рівняння (1.2) є наближеним ( $u \approx y$ ) рівнянням балки, яке інтегрується точно, якщо інтегралу від правої частини є відповідник у елементарних функціях [5].

В.Г.Мусіяка [5] на простому прикладі демонструє, що у випадку точнішої та складнішої математичної моделі, іноді складно отримати або й зовсім неможливо аналітичний розв'язок. Таким чином, підтверджується потреба у розв'язанні прикладних задач числовими методами для необхідної повноти та точності моделей.

Саме на цьому етапі аналітичні методи втрачають свою актуальність під час розв'язку диференціальних рівнянь, які описують задачі з електротехніки, адже, аналітичні методи передбачають знаходження точного розв'язку, що обмежується складністю задач електротехніки.

Звідси і виникла потреба пошуку шляхів розв'язання задач електротехніки з більшою точністю та можливістю створювати моделі без обмежень у об'ємах та складності.

### **1.1.1. Числові методи аналізу динамічних процесів**

Завдяки Готфріду Лейбніцу, який в 17 столітті розробив та застосував у задачах механіки та динаміки диференціальні рівняння, науковцям-сучасникам залишилось адаптувати це рішення під особливості кожної галузі. Електротехніка не виняток, тому типовим рішенням для задач електромеханіки є подача математичної моделі у вигляді диференціального рівняння, або ж

частіше - системи таких рівнянь, у нормальній формі Коші, та розв'язати застосувавши числовий метод [8].

Зручність задачі Коші представлена виглядом рівняння, в якому похідна визначена виразом певної функції [77], що можна застосовувати і для складної системи рівнянь, яка описує об'єкт електротехніки.

Більшість диференціальних рівнянь не можуть бути вирішені точно в силу своїх особливостей чи специфіки динамічної системи, яку описують. В таких випадках вирішенням проблеми є наближення розв'язку числовими методами [9].

Слід відзначити, що числові методи дозволяють отримувати наближений результат у вигляді множини числових значень, які обчислені для певної дискретної множини точок для відрізка інтегрування, що дозволяє в подальшій роботі працювати не лише із аналітичним розв'язком, а із значеннями.

Основний розподіл класичних числових методів слід зробити за ознакою кроковості - однокрокові та багатокрокові.

*Однокрокові методи.*

Одним з прикладів реалізації однокрокового методу є метод Ейлера типу

$$y' = f(y, x) \quad (1.3)$$

За твердженнями авторів «Машинні методи математичних розрахунків» Дж.Форсайта, М.Малькгольма та К.Моулера [77], використання однокрокового методу Ейлера має два суттєві недоліки: похибка інтегрування та похибка округлення. Похибка інтегрування – це властивість даного методу в частині арифметичних розрахунків, адже всі обчислення не виконуються з безмежною точністю. А похибкою округлення вважають властивість машини та програми, яка реалізовує обчислення, і виникає ця похибка з тієї ж причини – відсутність точного розв'язку та неможливість його знаходження. Такий підхід має місце для нескладного моделювання динамічної системи, теоретичних розрахунків та приблизних результатів, втім, для використання в задачах елетротехніки ймовірно потребуватиме додаткових дій [7].

Найбільш відомою є формула чотирьохетапного явного методу четвертого порядку точності або ж Рунге-Кутти (1.4):

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n), \\
 k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для оцінки похибки у випадку використання формул (1.4) використовують оцінку похибки на основі формул різної точності. Тобто, використання двох наближених значень в одній точці. Тут слід згадати правило Рунге (1.7) – метод емпіричної оцінки похибки, який базується на порівнянні результатів обчислення, проведеному з різними кроками  $h$ . І якщо у випадку правила Рунге використовують одне наближення в точці розв’язку, то оцінка похибки на основі формул різної точності використовує дві формули різних порядків точності  $p$  та  $s$  з однаковим кроком. Пропонується детальніше розглянути однокроковий метод Рунге-Кутта з точки зору оцінки похибки та обсягу обчислень.

В процесі вивчення цього методу, досліджень та вдосконалення, науковці пробували різні комбінації та модифікації. Почнімо з комбінації незалежних формул. Для виразу (1.5) значення  $\alpha_i, \beta_i, p_{q,i}$  обирають так, щоб комбінація збігалась з розкладом в ряд Тейлора за умови довільних правих частин  $f(x, t)$  та кроку  $h$  до максимально можливої степені.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \sum_{i=1}^q p_{q,i} k_i(h), \\
 k_1(h) &= hf(t_0, x_0), \\
 k_2(h) &= hf(t_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{2,1} k_1(h)), \\
 k_3(h) &= hf(t_0 + \alpha_q h, x_0 + \beta_{q,1} k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Тоді комбінація незалежних формул базуватиметься на комбінації двох формул типу (1.5):



$$\begin{aligned}
x_i^p &= x_0 + \sum_{i=1}^r p_{r,i} k_i, \\
k_1 &= hf(t_0, x_0), \\
k_i &= hf(t_0 + \alpha_i h, x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} k_j).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

та

$$\begin{aligned}
x_1^s &= x_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{p}_{r,i} \tilde{k}_i, \\
\tilde{k}_1 &= hf(t_0, x_0), \\
\tilde{k}_i &= hf(t_0 + \tilde{\alpha}_i h, x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\beta}_{i,j} \tilde{k}_j).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

У такому випадку, якщо  $p > s, r \geq \tilde{r}$ , то локальні похибки матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
\rho^p &= x(t_0 + h) - x_1^p = O(h^{p+1}), \\
\rho^s &= x(t_0 + h) - x_1^s = O(h^{s+1}).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

І як наслідок, оцінка локальної похибки формули (1.9):

$$\rho^s = x_1^p - x_1^s + O(h^{p+1}) \tag{1.9}$$

Якщо для (1.9) знехтувати членами вищого порядку малості і отримати (1.7), тоді оцінка похибки вимагатиме  $r + \tilde{r} - 1$  обчислень.

$$\rho^s \cong x_1^p - x_1^s \tag{1.10}$$

Водночас, якщо обрати метод комбінації спеціальних формул і прийняти, що коефіцієнти для (1.6) та (1.7)  $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i, \beta_{i,j} = \tilde{\beta}_{i,j}, i=1,2,\dots,r$ , тоді  $k_i = \tilde{k}_i, i=1,2,\dots,r$  і локальна похибка (1.9) для (1.7) матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\rho^s &\cong x_1^p - x_1^s = \sum_{i=1}^r q_i k_i \\
q_i &= p_i - \tilde{p}_i, i=1,2,\dots,\tilde{r} \\
q_i &= p_i, i=r+1,2,\dots,\tilde{r}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Тут варто зауважити, що оцінки (1.10) та (1.11) асимптотичного характеру, адже вони враховують лише члени головного порядку. Як наслідок такі оцінки доцільні та справедливі за досить малих значень кроку інтегрування [10].

Методи Рунге-Кутта мають прості та надійні алгоритми, забезпечують бажану точність обчислень і є доволі поширеними на практиці, їх легко програмувати і вони мають числову стійкість для широкого класу задач. Методи Рунге-Кутта через свою «властивість» однокроковості, не використовують інформацію про поведінку функції з попередніх кроків, взамін роблять спроби звертання до функції у проміжку між кроками. В різній залежності від формули можуть бути і  $\frac{h}{2}$ , і  $\frac{h}{4}$ , і навіть  $\frac{3h}{8}$ .

За рахунок своєї точності та «лаконічності» рівнянь, метод Рунге-Кутта та підходи комбінації рівнянь до оцінки похибки, могли б відмінно застосовуватись для розрахунку динаміки електротехнічних та електромеханічних систем. Однак, електротехнічні та електромеханічні системи працюють із рівномірним кроком. Тобто, у випадку застосування таких однокрокових методів, з'являється потреба підбирати крок дискретизації.

Розглянемо інший однокроковий метод – метод середніх напруг. Вперше цей метод був описаний в праці професора О.Г.Плахтини [77]. Метод є стійким до збурень, які з'являються через округлення чисел у комп'ютерних програмах під час чисельної алгебраїзації диференціальних рівнянь. Загальна інтерпретація методу полягає в наступних діях:

Рівняння, що описують електромеханічні системи записують у вигляді рівняння (1.12)

$$\vec{f}\left(\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dx}, x\right) = 0 \quad (1.12)$$

$$K\vec{y} + \vec{B} = 0 \quad (1.13)$$

З початковими умовами  $x = x_0, \vec{y} = \vec{y}_0$ .

У рівняннях (1.12-1.13)  $x$  – аргумент, найчастіше значення часу,  $\vec{y}$  – вектор часу,  $\frac{d\vec{y}}{dx}$  – вектор похідних функцій,  $K$  – визначник системи алгебраїчних рівнянь,  $\vec{B}$  – вектор абсолютних значень системи алгебраїчних рівнянь.

Після інтегрування, векторне диференціальне рівняння (1.14) матиме наступний вигляд:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \vec{f}\left(\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dx}, x\right) dx = 0 \quad (1.14)$$

Припускаючи, що вектор  $\vec{y}$  представлено у вигляді усіченого ряду Тейлора на кроці інтегрування:

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \sum_{k=1}^m \frac{d^k \vec{y}}{dx^k} \frac{\Delta x^k}{k!} \quad (1.15)$$

Підставивши вираз вектора  $\vec{y}$  у вигляді усіченого ряду Тейлора на кроці інтегрування у вираз (1.14), система векторних рівнянь виглядатиме наступним чином:

$$\vec{E} - R\vec{y}_1 - \frac{\vec{F}(\vec{y}_1)}{\Delta x} = 0 \quad (1.16)$$

$$K\vec{y}_1 + \vec{B}_1 = 0 \quad (1.17)$$

Для системи векторних рівнянь (1.16-1.17)  $\vec{y}_1$  вектор змінних  $\vec{y}$  в кінці кроку інтегрування;  $\vec{F}(\vec{y}_1)$  – нелінійна функція  $\vec{y}_1$  (наприклад, залежність величини магнітного потоку від струму намагнічення при насиченні магнітопроводу);  $R$  – матриця, яка є вектором середніх параметрів на кроці інтегрування; вирази  $\vec{E}$  та  $R$  – функції параметрів ряду Тейлора та рівняння (1.12). Кількість членів ряду Тейлора  $m$  відповідає порядок методу – метод середніх напруг на кроці інтегрування першого, другого,  $m$ -го порядку.

Наведені вирази (1.12-1.17) є загальним описом методу. Розглянемо застосування методу середніх напруг на прикладі конкретної електричної вітки,

яка містить джерело електрорушійної сили, індуктивність, ємність та опір і представлена наступним виразом:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (u + e - u_R - u_C - u_L) dt = 0 \quad (1.18)$$

Для (1.18)  $u$ ,  $e$ ,  $u_R$ ,  $u_C$ ,  $u_L$  миттєві значення прикладеної напруги, електрорушійної сили, та напруг на елементах вітки;  $t_0$  – значення часу на початку кроку інтегрування,  $\Delta t$  – значення кроку інтегрування.

Миттєві значення напруг на резисторі та конденсаторі визначаються виразами (1.19):

$$u_R = u_{R0} + \Delta u_R, u_C = u_{C0} + \Delta u_C \quad (1.19)$$

Де  $u_{R0}$ ,  $u_{C0}$  – значення напруг на початку кроку інтегрування, а  $\Delta u_R$ ,  $\Delta u_C$  – зміна напруги на кроці інтегрування. Останні представлені виразами (1.20)

$$\begin{aligned} \Delta u_R &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{(k)} u_{R0}}{dt^{(k)}} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!} \\ \Delta u_C &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{(k)} u_{C0}}{dt^{(k)}} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Де  $\frac{d^{(k)} u_{R0}}{dt^{(k)}}$ ,  $\frac{d^{(k)} u_{C0}}{dt^{(k)}}$  похідні від напруг на резисторі та конденсаторі  $k$ -порядку на початку кроку інтегрування.

З рівнянь (1.18-1.20) враховуючи відомі залежності між напругами та струмами для елементів гілки, в роботі [79] отримано рівняння (1.23), в якому невідомі струм в кінці кроку інтегрування  $i_1$  та середня напруга  $U$  у вітці:

$$\begin{aligned} U + E - u_{R0} - u_{C0} + \left( \frac{R}{m+1} + \frac{\Delta t}{C} \cdot \frac{2 - (m+1)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} + \frac{L_0}{\Delta t} \right) i_0 - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{R \Delta t^k}{(k+1)!} \cdot \frac{m-k}{m+1} + \frac{\Delta t^{k+1}}{C(k+2)!} \cdot \frac{(m+1)(m+2) - (k+1)(k+2)}{(m+1)(m+2)} \right) \frac{d^{(k)} i_0}{dt^{(k)}} - \\ - \left( \frac{R}{m+1} + \frac{\Delta t}{C(m+1)(m+2)} + \frac{L_1}{\Delta t} \right) i_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для (1.21)  $i_0$  – величина струму на початку кроку інтегрування;  $L_0$ ,  $L_1$  – індуктивність гілок на початку та в кінці кроку інтегрування;  $m$  – порядок

методу;  $U = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u dt, E = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} e dt$  - середні значення напруги та електрорушійної сили на кроці інтегрування.

Однокроковий метод середніх напруг на кроці інтегрування дає високу точність розрахунку, стабільність роботи моделі. Метод забезпечує неперервну роботу real-time цифрової моделі у взаємодії з фізичними об'єктами та дозволяє не лише аналізувати процеси, а і виконувати аналіз впливу на ці процеси.

Метод середніх напруг на кроці інтегрування попри цілу низку переваг та сфер застосування, підходить для роботи із електричними системами або системами, для яких можна скласти електричну заступну схему.

### *Багатокрокові методи*

Основною відмінністю багатокрокових від вище розглянутих однокрокових є використання інформації з попередніх кроків, що робить обчислення більш економічними [6].

Електротехнічна система є динамічною системою, описати яку можна диференціальним рівнянням. Основою та очевидним підходом для звичайних диференціальних рівнянь є задача Коші, як основна математична модель:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), x \in [a, b] \quad (1.22)$$

або

$$y' = f(x, y) \quad (1.23)$$

Для (1.23) початкові умови  $y(x_0) = y_0$  у рівновіддалених точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а крок  $h = x_{i+1} - x_i$ . Для обчислення наближених значень інтегральної функції його розв'язання використовують формулу Ейлера (1.24)[10]:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (1.24)$$
$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Для приближення значень  $y(t_k) \approx y_k$ , генерується масив точок  $\{t_k, y_k\}$ . Для побудови такого масиву точок, обирають інтервал, умовно  $[a; b]$ , та розділяють на  $M$  однакових інтервалів. Звідси,

$$t_k = a + kh \quad (1.25)$$

для  $k = 0, 1, \dots, M$

а  $h$  є довжиною кроку і дорівнює:

$$h = \frac{b - a}{M} \quad (1.26)$$

Але, на переконання J.H. Mathews та K.D.Fink [12] не всі задачі Коші мають явне рішення і часто, рішення для якогось рівняння, наприклад  $y' = t^3 + y^2$  при початкових умовах  $y(0)=0$ , немає. Водночас, наближення Ейлера (інша назва – наближення ламаних) це найпростіший числовий метод, хоча на практиці для обчислень він застосовується доволі рідко, через притаманну йому малу точність. Але навіть за таких умов, наближення Ейлера є основою для пояснення функціонування та побудови класичних багатокрокових числових методів [13].

Науковці часто вдаються до дискусій щодо числових методів, втім спільною є думка, що найвідомішими та найефективнішими серед багатокрокових методів, є формули Адамса [6]. Це різницеві методи чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, які володіють кращою стійкістю в порівнянні з однокроковим методом Рунге-Кутта. У відмінності з однокроковими методами, методи Адамса складаються з двох частин: стартова процедура для визначення, а друга – багатокрокова формула для знаходження наближеного значення точного розв'язку. Формули Адамса належать до методів, які не накопичують похибку, це дозволяє використовувати їх на дуже довгих проміжках інтегрування. В тому числі, вони ефективні для коливних задач, наприклад, моделювання електроприводів з пружними зв'язками в механічній частині приводу.

Формули Адамса в свою чергу мають наступний розподіл:

- явні формули Адамса (Адамса-Бешфорта) – для пошуку значення змінної необхідно мати значення змінної та похідних у попередньому кроці;
- неявні формули Адамса (Адамса-Малтона) – для пошуку значення змінної посилаються на значення змінної та похідних у шуканій точці.

Сам вигляд формул Адамса наступний:

- явні формули 1-5-го порядку (1.27) :

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + hy'_i; \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(3y'_i - y'_{i-1}); \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{12}(23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2}); \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}) \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{720}(1901y'_i - 2774y'_{i-1} + 2616y'_{i-2} - 1274y'_{i-3} + 251y'_{i-4})
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

- неявні формули Адамса (1.27)

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + hy'_{i+1}; \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(y'_{i+1} + y'_i); \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{12}(5y'_{i+1} + 8y'_i - 5y'_{i-1}); \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}(9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}) \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{720}(251y'_{i+1} - 646y'_i + 264y'_{i-1} - 106y'_{i-2} + 19y'_{i-3})
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Та оцінка похибки явних (1.20) та неявних (1.21) формул Адамса:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &= \frac{1}{2} h^2 y_{i+1}'' \\
\varepsilon_{i+1} &= \frac{5}{12} h^3 y_{i+1}''' \\
\varepsilon_{i+1} &= \frac{3}{8} h^4 y_{i+1}^{IV} \\
\varepsilon_{i+1} &= \frac{251}{720} h^5 y_{i+1}^V \\
\varepsilon_{i+1} &= \frac{95}{288} h^6 y_{i+1}^{VI}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &= -\frac{h^2}{2} y_{i+1}'' \\
\varepsilon_{i+1} &= -\frac{h^3}{12} y_{i+1}''' \\
\varepsilon_{i+1} &= -\frac{h^4}{8} y_{i+1}^{IV} \\
\varepsilon_{i+1} &= -\frac{19}{720} h^5 y_{i+1}^V \\
\varepsilon_{i+1} &= -\frac{3}{160} h^6 y_{i+1}^{VI}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Найпростіший спосіб дослідити та порівняти числові методи – отримати графічний розв’язок. В роботі запропоновано розв’язок реакції формул на стрибкоподібний сигнал. Отримані результати порівнюються з аналітично розв’язком, який є точним.

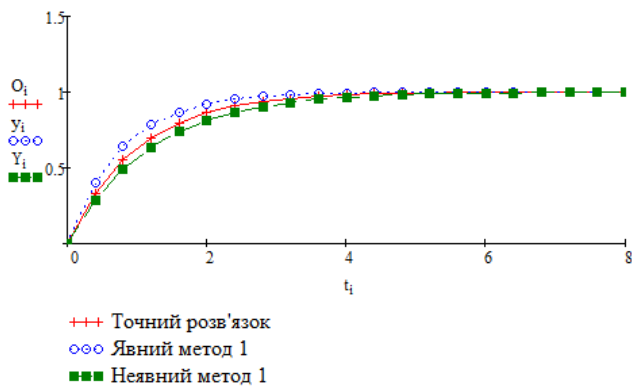
Спершу розглянемо відмінності кожного порядку явного та неявного методу.

Об’єктом дослідження є інтегрування стрибкоподібного сигналу, для якого аналітичний розв’язок буде рівняння:

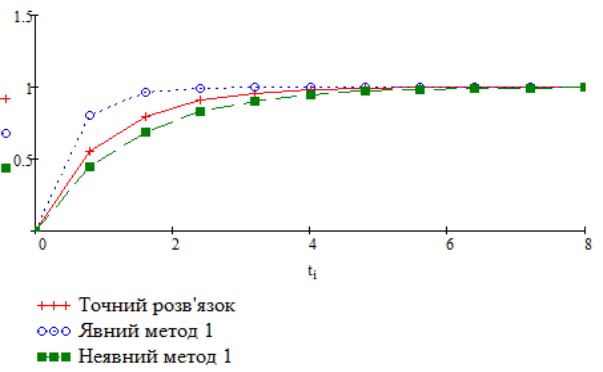
$$y(t) = f(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \tag{1.29}$$

Розв’язки виконані для кроків  $h=0,4$  та  $h=0,8$ .



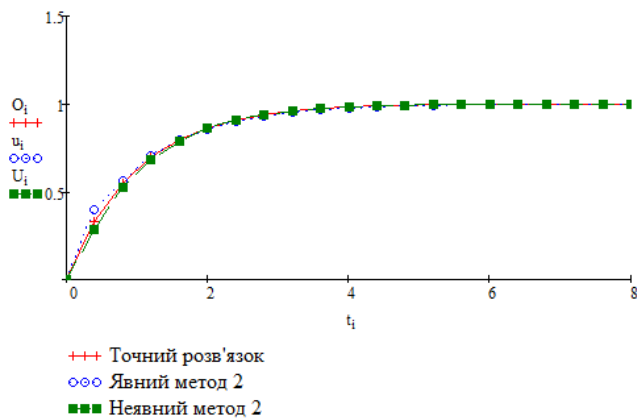


а) крок  $h=0,4$

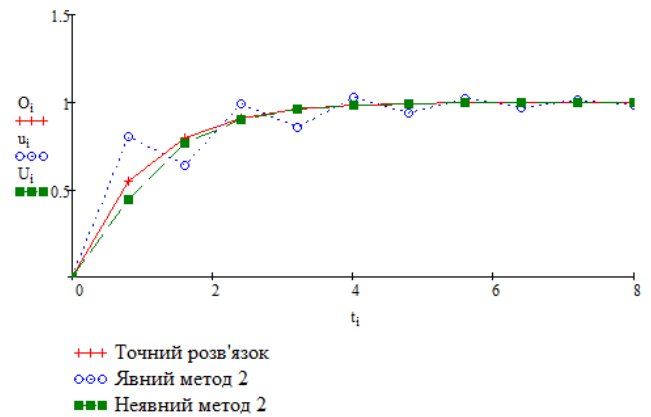


б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.1 – Графічний розв'язок реакції на стрибкоподібний сигнал явного та неявного методів Адамса 1-го порядку

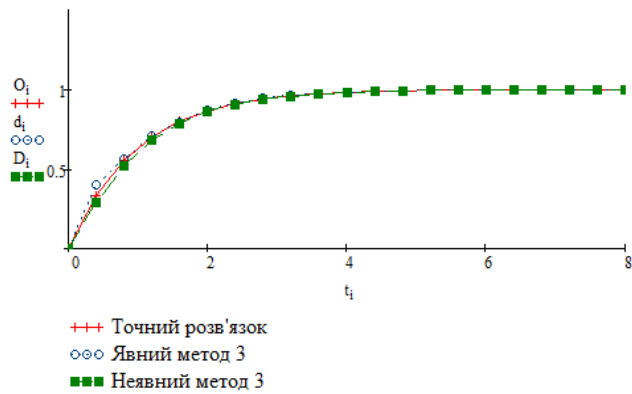


а) крок  $h=0,4$

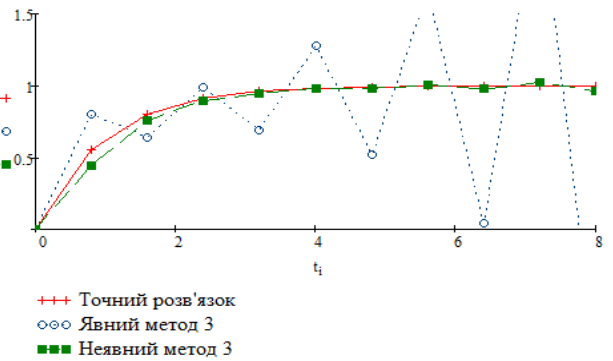


б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.2 – Графічний розв'язок реакції на стрибкоподібний сигнал явного та неявного методів Адамса 2-го порядку

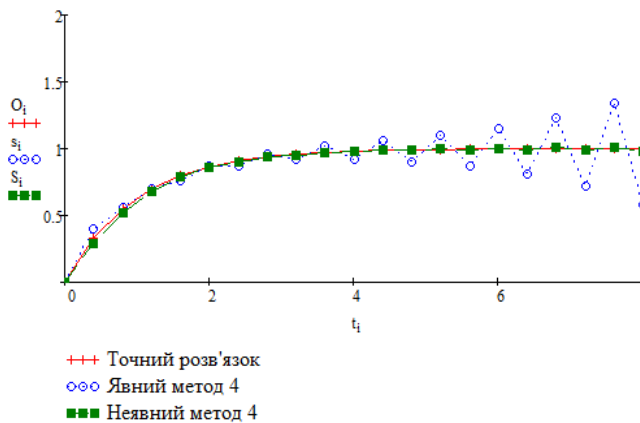


а) крок  $h=0,4$

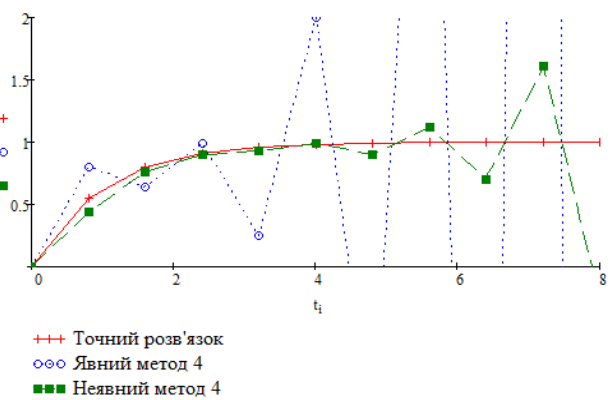


б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.3 – Графічний розв'язок реакції на стрибкоподібний сигнал явного та неявного методів Адамса 3-го порядку

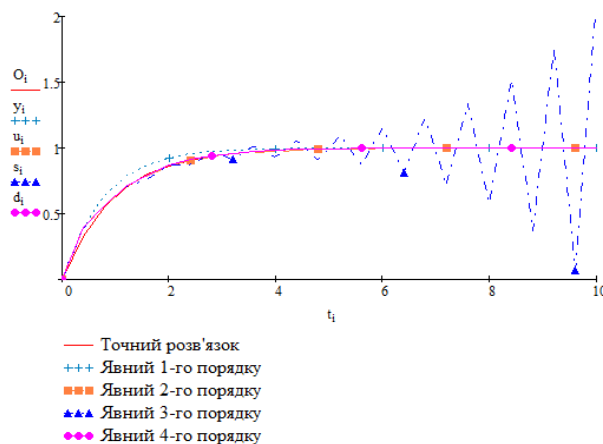


а) крок  $h=0,4$

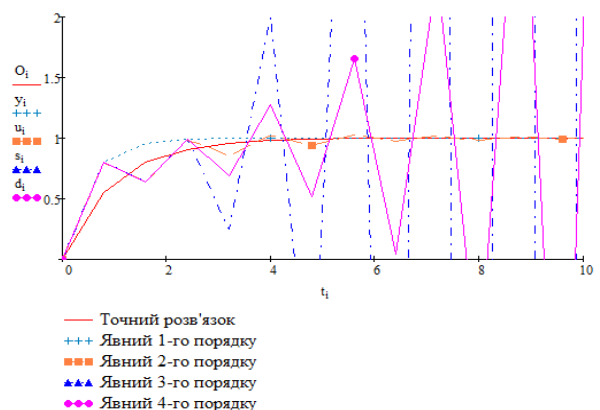


б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.4 – Графічний розв'язок реакції на стрибкоподібний сигнал явного та неявного методів Адамса 4-го порядку

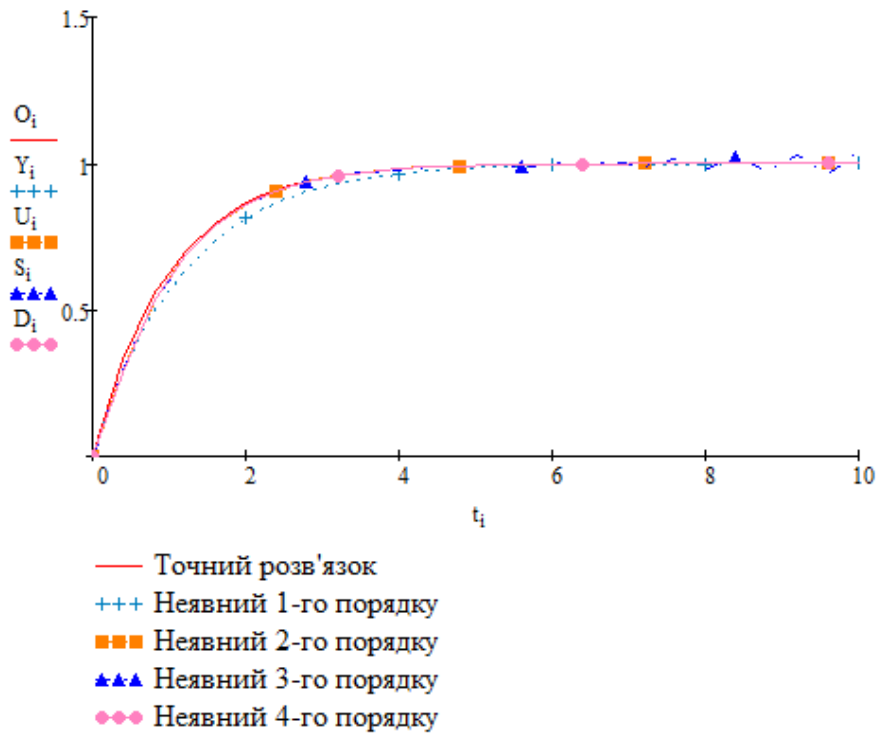


а) крок  $h=0,4$

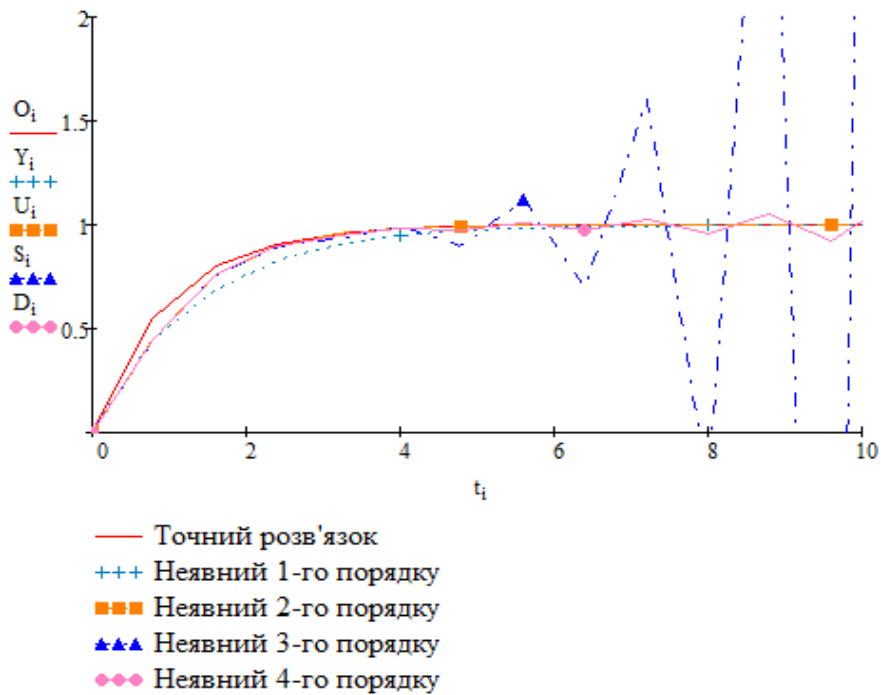


б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.5 – Порівняльний графік реакції явного методу Адамса 1-5-го порядку на стрибкоподібний сигнал



а) крок  $h=0,4$



б) крок  $h=0,8$

Рисунок 1.6 – Порівняльний графік реакції неявного методу Адамса 1-5-го порядку на стрибкоподібний сигнал

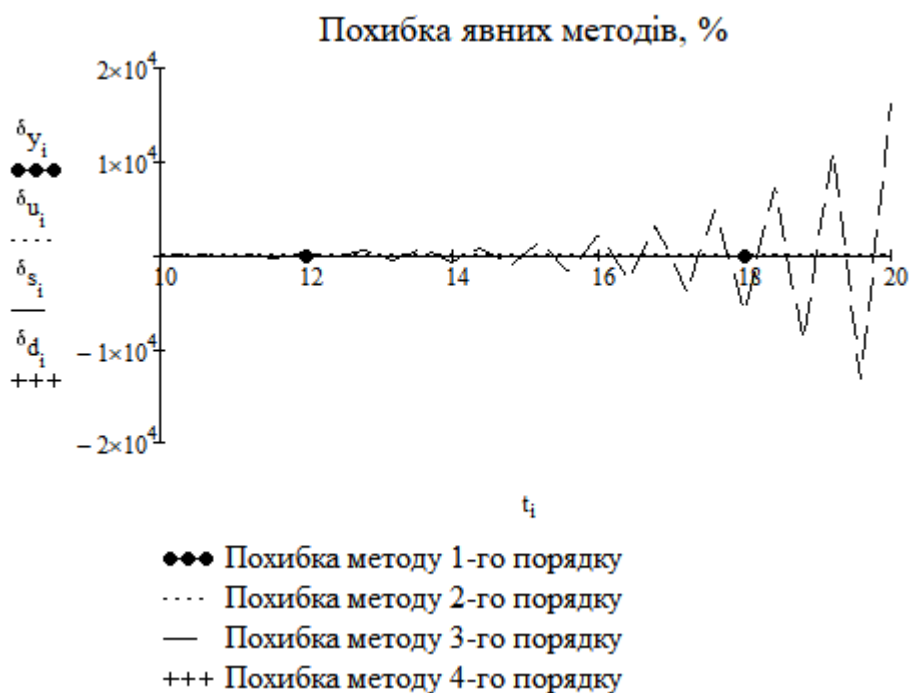
Текст програми розрахунку в математичному середовищі Mathcad наведені в Додатку А та Додатку Б.

Для наочності результатів обрано методи від 1-го до 4-го порядків, оскільки:

- на розв'язку 4-го порядку вже почала втрачатись стійкість методів обидвох типів формул Адамса;
- похибка також почала зростати на 4-му порядку.

З отриманих результатів, можна зробити висновок, що явні методи значно швидше втрачають стійкість: уже на третьому порядку з'являються коливання, а на рівнянні четвертого порядку стійкість зникає майже одразу після подачі імпульсного сигналу, що ставить під загрозу роботу системи у випадку застосування явних методів високого порядку.

Що ж відбувається з похибкою методів, що розглядаються.



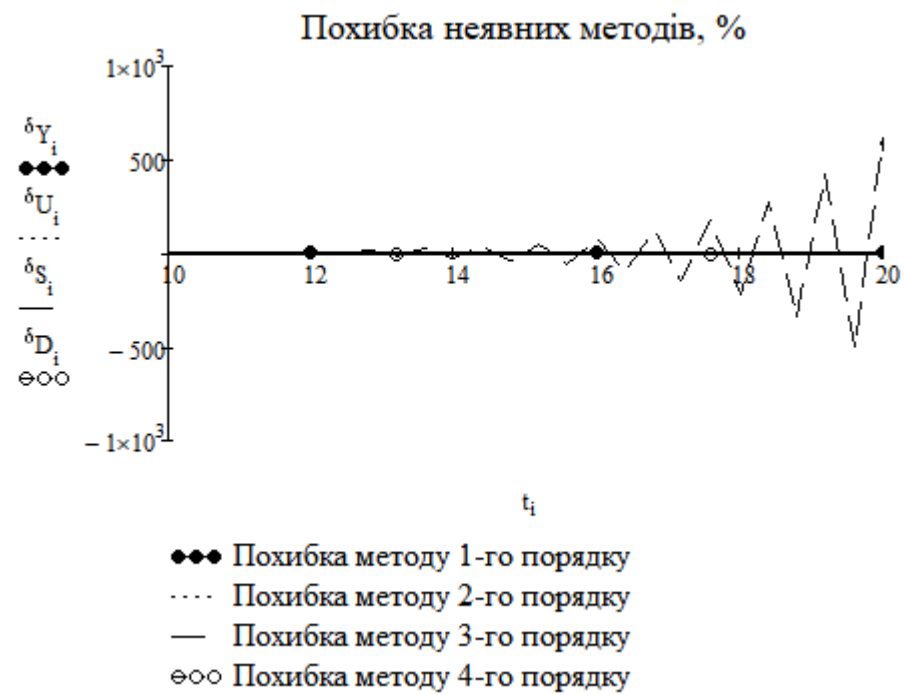
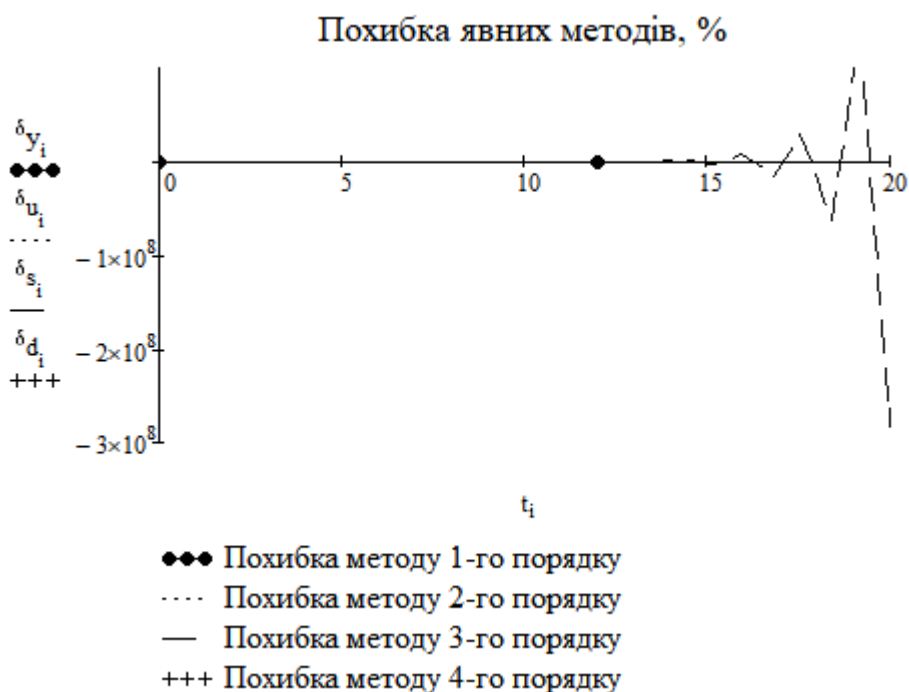


Рисунок 1.7 – Графічний результат оцінки похибок явного та неявного методу 1-4-го порядку для кроку  $h=0,4$



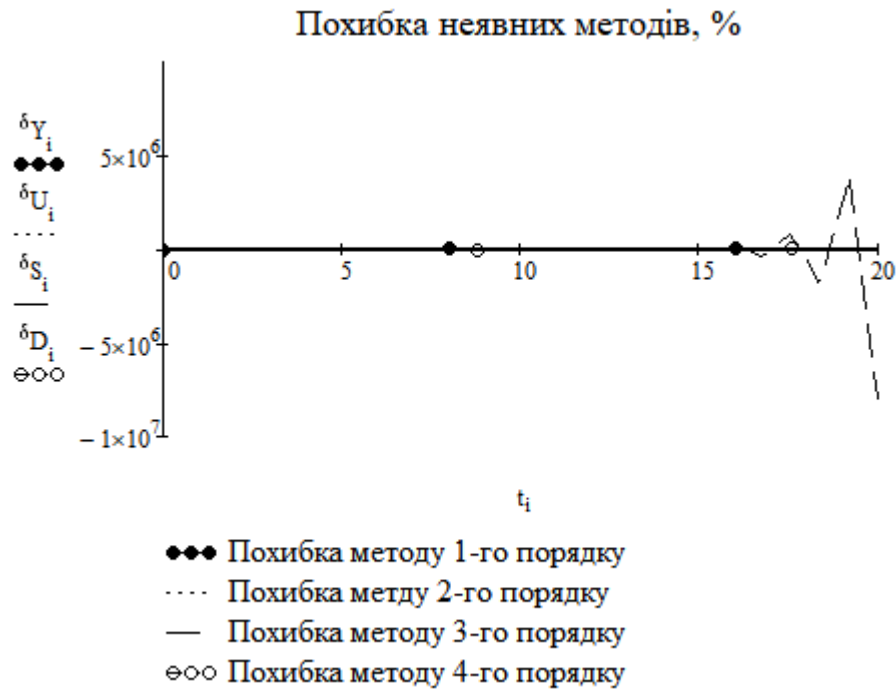


Рисунок 1.8 – Графічний результат оцінки похибок явного та неявного методу 1-4-го порядку для кроку  $h=0,8$

На рисунку 1.7 оцінка похибки виконана до кроку розв’язування  $h=0,4$  на проміжку на проміжку  $t_{max}=20$  с для явних та неявних методів. Верхня межа значень на вказаному проміжку становить  $1,636 \cdot 10^4$  для явних методів та  $623,7$  для неявних методів, для аналогічно проміжку для кроку розв’язку  $h=0,8$  (рисунок 1.8) найбільше значення похибки зафіксовано на рівні  $10^8$  для явних методів та  $5 \cdot 10^6$  для неявних методів.

Як графічний, так і числовий результат підтвердив накопичення меншої похибки у неявних методів.

Здавалось б на цьому етапі вибір стає очевидним – доцільно використовувати та випробувати неявні методи Адамса. В них краща стійкість розв’язку та менше накопичення похибок навіть із збільшенням кроку  $h$ . Основна функціональна відмінність неявного методу від явного полягає у тому, що для прогнозування та розв’язку, на кожному новому кроці, рівняння неявного методу бере інформацію з наступного, ще не виконаного кроку. Неявні методи виправдовують своє застосування під час моделювання та прогнозування математичних моделей. Однак, враховуючи, що у даній роботі суб’єктом

дослідження є електротехнічні системи, робота яких відбувається в режимі реального часу, вони втрачають свою актуальність та доцільність використання.

### 1.1.2. Операторні методи аналізу динамічних процесів

Наслідком подальшого вивчення та пошуку нових підходів до вирішення задач динаміки, описаних диференціальними рівняннями були інтегральні та операторні методи.

Найбільш поширеними та застосованими є перетворення Лапласа. Це пояснюється переліком можливостей, які доволі лаконічно та обґрунтовано описано у працях J. M. Smith [3]:

- перетворення періодичних функцій з кінцевими розривами (або розривами похідних) в прості алгебраїчні функції;
- перетворення операцій інтегрування та диференціювання за часом в операції множення та ділення частотної області;
- перетворення інтегро-диференціальних рівнянь в алгебраїчні;
- у випадку вирішення диференціальних рівнянь здійснює визначення похідних постійних;
- дослідження стійкості лінійних систем за їх реакцією на імпульсний сигнал у зручній формі [3].

Нехай для функції часу  $f(t)$  за умови  $t > 0$ , її інтегралом буди вираз (1.30)

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.30)$$

Кожній такій функції  $f(t)$  відповідає функція  $F(s)$ , яка з функцією  $f(t)$  пов'язана наступним виразом:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.31)$$

Тобто, вираз (1.31) можна вважати перетворенням, приймаючи це як перехід від функції  $f(t)$  до функції  $F(s)$  виконаний інтегралом (1.22). Власне такий перехід і є перетворенням Лапласа, для якого  $f(t)$  є оригіналом, а  $F(s)$  –

відображенням. Julius Deutsch [14] у своїх працях щодо перетворень Лапласа називає весь процес перетворення перекладом з однієї мови на іншу. Функції, з якими здебільшого працюють інженери, це завжди рішення функціональних рівнянь – диференціальні, різницеві та інтегральні, відповідно над такими функціями реалізується певна операція: диференціювання, складання різниць, інтегрування. Істинне значення перетворення Лапласа полягає в тому, що воно має характер відображення. Тобто, функції з поля оригіналів та виконані над ними операції, замінює функціями та операціями в полі зображень, в якому і відображення функцій, і операції над ними значно простіші та зрозуміліші [14].

У виразах (1.32) та (1.33) наведено приклад застосування методу Лапласа для функції. Електротехнічні системи є динамічними об'єктами, які описують диференціальними рівняннями, тому розглянемо теоретичні засади використання перетворення Лапласа саме для них.

За приклад оберемо диференційне рівняння першого порядку (1.32):

$$y' + c_0 y = f(t) \quad (1.32)$$

Запишемо вираз у проміжному вигляді:

$$sY(s) - y(+0) + c_0 Y(s) = F(s) \quad (1.33)$$

Рівнянням відображення для (1.32) при цьому буде наступне:

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s + c_0} + y(+0) \frac{1}{s + c_0} \quad (1.34)$$

Таким чином, відображення  $Y(s)$  для функцію  $y(t)$  знайдемо, і наступним кроком буде пошук відповідного оригіналу для отриманого відображення. Для більшості оригіналів існує таблиця відповідності із уже виведеними та відомими відображеннями. У випадку із виразом (1.25), який за Julius Deutsch найкраще демонструє процес перетворень, в таблиці відповідності для відображення  $\frac{1}{s + c_0}$  існує оригінал –  $e^{-c_0 t}$ . Тому для (1.34) для першого доданку одразу знаходимо оригінал, а для другого доданку відповідає згортка оригіналу, а загальний оригінал для  $Y(s)$  виглядатиме наступним чином:



$$y(t) = f(t) \cdot e^{-c_0 t} + y(+0)e^{-c_0 t} = e^{-c_0 t} \int_0^t f(\tau) e^{-c_0 \tau} d\tau + y(+0)e^{-c_0 t} \quad (1.35)$$

Отриманий оригінал після такого методу перетворень і є розв'язком диференціального рівняння (1.34). Резюмуючи розглянутий процес: для безпосереднього розв'язку диференціального рівняння, яке початковий вигляд мала в області оригіналів замінюється розв'язком з області відображень за допомогою перетворення Лапласа. Розв'язок з області відображень в свою чергу є алгебраїчним рівнянням, яке в наступному етапі з використанням зворотного перетворення Лапласа переходить з області відображень в область оригіналів і дає розв'язок першопочаткової задачі.

Для сучасних науковців спрощенням цих обчислень та отримання результатів можливе завдяки математичним застосункам, наприклад Mathcad.

Розглянемо приклад моделювання та розв'язку електротехнічної системи за допомогою перетворення Лапласа у математичному середовищі Mathcad на прикладі електротехнічної системи, схема якої наведена на рисунку 1.8.

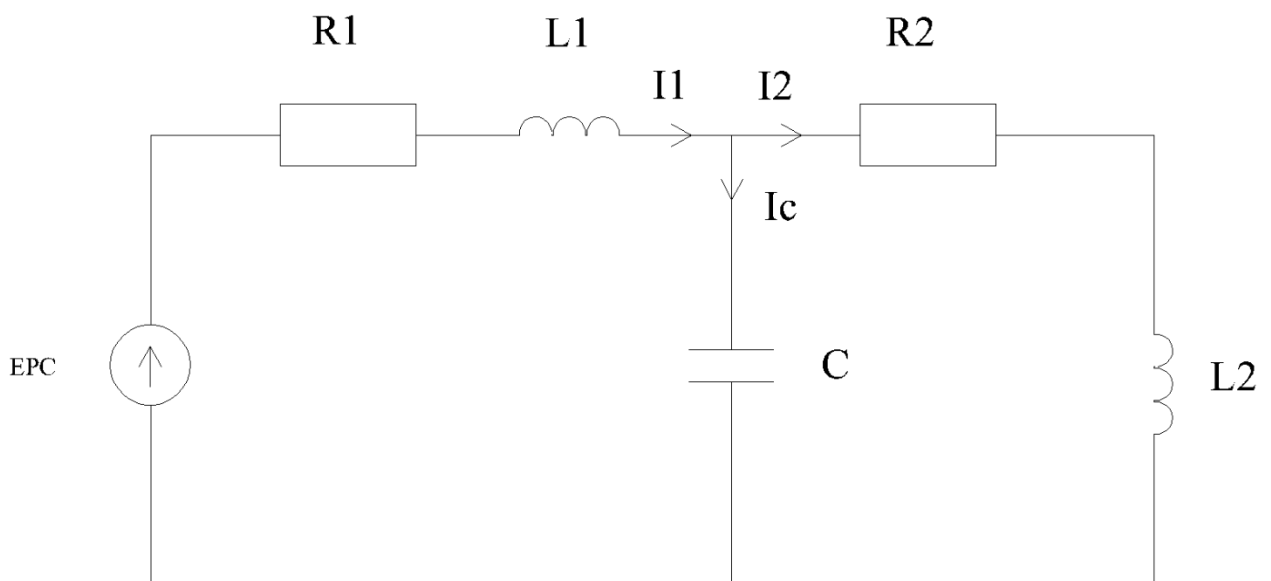


Рисунок 1.9 – Схема електричного кола

Для електричного кола (рисунок 1.9) задані параметри електрорушійної сили  $E$ , опорів  $R1$  та  $R2$ , а також параметри котушок індуктивності та ємності конденсатора  $L1$ ,  $L2$ ,  $C$ . Завданням є знайти напругу на конденсаторі.

Для параметрів струму, опору, індуктивності та ємності відомі відображення за Лапласом, таким чином, сумарний опір паралельних віток знаходимо за виразом (рівняння 1.27-1.32 подані у вигляді реалізації розв'язку в застосунку Mathcad):

$$Z_2(s) := \frac{(s \cdot L_2 + R_2) \cdot \left(\frac{1}{s \cdot C}\right)}{(s \cdot L_2 + R_2) + \frac{1}{s \cdot C}} \quad (1.36)$$

Тоді відображення струму  $I_1$  :

$$I_1(s) := \frac{\frac{E}{s}}{(R_1 + s \cdot L_1) + Z_2(s)} \quad (1.37)$$

А напруга у вітці із сумарним опором  $Z_2$ :

$$U_{Z_2}(s) := \frac{E}{s} - I_1(s)(R_1 + s \cdot L_1) \quad (1.38)$$

Вирази (1.36-1.38) після «складання» схеми, виконуємо розрахунок «розкладаючи» схему:

$$I_C(s) := \frac{U_{Z_2}(s)}{\left(\frac{1}{s \cdot C}\right)} \quad (1.39)$$

І вираз для пошуку напруги на конденсаторі:

$$U_C(s) := \frac{1}{s \cdot C} \cdot I_C(s) \quad (1.40)$$

Після цього, маючи отриманий розв'язок в області відображень, можемо знайти розв'язок в області оригіналів як часову залежність за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$u_C(t) := U_C(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Та, власне, знайти графічний розв'язок у вигляді часової характеристики напруги на конденсаторі:

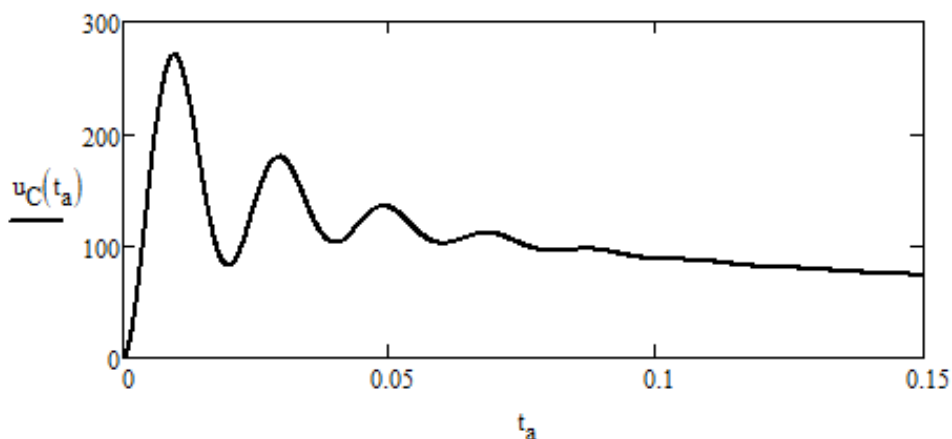


Рисунок 1.10 – Графік часової залежності для напруги на конденсаторі  
Текст програми розв'язку наведений в Додатку В.

Як можна зрозуміти із не складного прикладу розв'язування електротехнічної задачі, відповідності оригіналів та відображень перетворень Лапласа, в комплексі із математичними застосунками, дозволяють отримати необхідний розв'язок задач доволі прикладного характеру.

Перетворення Лапласа є хорошим способом отримання аналітичного розв'язку. На відміну від абсолютно точних розв'язків, які мають доволі обмежені можливості, метод за Лапласом має багато готових напрацьованих раніше розрахункових рішень, дозволяє комбінувати, переходити між областями визначень та отримувати результат. Але в контексті цифрових систем перетворення Лапласа в оригінальному вигляді не відповідають параметрам таких об'єктів з двох причин:

- електротехнічні та електромеханічні системи дуже часто складного характеру, тоді їх моделювання, розв'язок або аналіз не зможуть охопити перетворення Лапласа;
- перетворення за Лапласом дозволяють аналізувати та досліджувати безперервні аналогові системи.

## 1.2. Інтеграл згортки та рекурентні рівняння

Використання лише одного типу реалізації динамічних ланок, в даному випадку, ланки першого порядку, дозволяє отримати динамічні ланки будь-якого типу. Це в свою чергу дає змогу під час моделювання динаміки електричних систем реалізувати універсальний спосіб такого моделювання.

Спершу зазначимо, що для електротехнічної системи, що перебуває в русі за ненульової початкової умови (1.42), реакція системи, що буде знайдена за допомогою інтегралу згортки, описується рівнянням (1.43) [15, 48]:

$$y(t) \Big|_{t=0} = y_0 \quad (1.42)$$

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^t x(\tau) \cdot w(t-\tau) d\tau \quad (1.43)$$

Інтеграл згортки [15] для ненульової початкової умови  $y_0$  визначатиметься наступним рівнянням:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{T} \cdot x(t-\tau) d\tau = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot x(\tau) d\tau \quad (1.44)$$

На прикладі, що розглядається в цій частині роботи, порядок апроксимації для аперіодичної ланки обмежується третім порядком, оскільки отримані результуючі вирази є дуже складними. Такі результуючі вирази є малопридатними для практичного використання, до того ж рівень точності не зростає.

Для знаходження інтегралу згортки доволі ефективним методом є використання прямого та зворотного перетворення Лапласа. У випадку, якщо аналітичний вираз сигналу або збурення  $x(t)$  відсутній, то в основі використання прямого та перетворення Лапласа є реалізація його апроксимації поліномом.

Наприклад, у випадку апроксимації сигналу збурення поліномом першого порядку  $x^*(t) = b \cdot t + a$  за неявною схемою процедура є простою та зрозумілою, до того ж не вимагає значних обчислювальних ресурсів:

1) для заданого полінома першого порядку і визначеного інтервалу кроку (дискретності)  $h$  знаходять коефіцієнти апроксимації  $a, b$  за відомим співвідношенням:

$$\begin{cases} b \cdot h + a = x_{i+1}; \\ a = x_i; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_i; \\ b = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}; \end{cases} \quad (1.45)$$

2) визначається відображення за Лапласом  $X^*(s)$  знайденої апроксимації сигналу  $x^*(t)$  за неявною схемою:

$$L(x^*(t)) = X^*(s) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h \cdot s^2} + \frac{x_i}{s} \quad (1.46)$$

Для аперіодичної ланки першого порядку властивим є характеристичний поліном  $A(s) = T \cdot s + 1$ . Це дозволяє таким ж чином записати вільну від ненульових початкових умов складову:

$$y_0(t) = L^{-1}\left(\frac{T}{T \cdot s + 1} \cdot y(0)\right) = y(0) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.47)$$

Враховуючи формулу вільної від ненульових початкових умов складову  $Y_0(s)$  для елементарних динамічних ланок та відображення сигналу збурення  $X^*(s)$ , можна знайти реакції на зовнішнє збурення для кожної з ланок.

Для аперіодичної ланки отримаємо:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(X^*(s) \frac{1}{T \cdot s + 1} + \frac{y(0)}{T \cdot s + 1}\right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) = y(0)e^{-\frac{t}{T}} + x_{i+1} - x_i e^{-\frac{t}{T}} - \frac{T}{h}(x_{i+1} - x_i)(1 - e^{-\frac{t}{T}}) &\quad (1.48) \end{aligned}$$

Беручи до уваги (1.36-1.48), отримуємо рекурентне рівняння для опису динаміки аперіодичної ланки з використанням апроксимації сигналу поліномом першого порядку:

$$y_{i+1} = y_i e^{-\frac{h}{T}} + x_{i+1} - x_i e^{-\frac{h}{T}} - \frac{T}{h} (x_{i+1} - x_i) (1 - e^{-\frac{h}{T}}) \quad (1.49)$$

Власне, на цьому етапі варто згадати, що у випадку, коли апроксимація сигналу  $x(t)$  допустима поліномами низьких порядків, тоді z-перетворення є ефективним методом отримання рекурентних рівнянь для знаходження інтегралу згортки. Така ефективність є за умови розкладання системи на елементарні динамічні ланки.

Отже, для аперіодичної ланки першого порядку характеристичним поліномом є

$A(s) = Ts + 1$ , з коефіцієнтами  $a_1 = T$ ,  $a_0 = 1$ . Імпульсна характеристика для

такої ланки матиме вигляд  $w(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ . Виконавши аналогічні дії, реакція на ненульові початкові умови виглядатиме:

$$y_0(t) = L^{-1} \left( \frac{a_1 \cdot y_0}{A(s)} \right) = L^{-1} \left( \frac{T}{T \cdot s + 1} \cdot y_0 \right) = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (1.50)$$

Відповідно, інтеграл згортки з врахуванням такої ж умови матиме наступний вигляд:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T} \cdot x(t-\tau) d\tau = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot x(\tau) d\tau \quad (1.51)$$

В таблиці 1.1 наведено рекурентні формули за явними обчислювальними схемами для дискретної моделі ланки першого порядку.

Рекурентні формули за явними обчислювальними схемами для  
дискретної моделі ланки першого порядку.

Порядок полінома	Рекурентна формула
0	$y_{i+1} = y_i e^{\frac{-h}{T}} + (1 - e^{\frac{-h}{T}}) \cdot x_i$
1	$y_{i+1} = y_i e^{\frac{-h}{T}} + \left(1 - e^{\frac{-h}{T}}\right) \cdot x_i + \left(1 - \frac{T}{h} \left(1 - e^{\frac{-h}{T}}\right)\right) \cdot (x_i - x_{i-1})$
2	$y_{i+1} = y_i e^{\frac{-h}{T}} + (1 - e^{\frac{-h}{T}}) x_i + (x_i - x_{i-1}) - \frac{T}{2h} (3x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}) (1 - e^{\frac{-h}{T}}) +$ $+ (x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}) \left(1 - \frac{T}{h} \left(1 - \frac{T}{h} (1 - e^{\frac{-h}{T}})\right)\right)$
3	$y_{i+1} = y_i e^{\frac{-h}{T}} + (1 - e^{\frac{-h}{T}}) x_i + 3x_i - 6x_{i-1} + 4x_{i-2} - x_{i-3} +$ $+ \frac{T}{6h} ((11x_i - 18x_{i-1} + 9x_{i-2} - 2x_{i-3}) e^{\frac{-h}{T}} - 26x_i + 57x_{i-1} - 42x_{i-2} + 11x_{i-3}) +$ $+ \frac{T^2}{h^2} ((-2x_i + 5x_{i-1} - 4x_{i-2} + x_{i-3}) e^{\frac{-h}{T}} + 3x_i - 8x_{i-1} + 7x_{i-2} - 2x_{i-3}) +$ $+ \frac{T^3}{h^3} (x_i - 3x_i + 3x_{i-1} - x_{i-2}) (1 - e^{\frac{-h}{T}})$

Розглянемо на прикладі вище наведені теоретичні основи застосування рекурентних формул для моделювання.

Нехай електротехнічна система описана системою диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, t); \\ \vdots \\ T_n \frac{dy_n}{dt} + y_n = f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, t), \end{cases} \quad (1.52)$$

З відповідними початковими умовами: 
$$\begin{cases} y_{10} = y_1(0); \\ \vdots \\ y_{n0} = y_n(0), \end{cases}$$

де  $T_1, \dots, T_n$  – власні сталі часу електротехнічної системи;

- $y_1, \dots, y_n$  – проміжні координати стану електротехнічної системи;
- $x_1, \dots, x_n$  – зовнішні збурення електротехнічної системи;
- $f_1, \dots, f_n$  – відповідні функції;
- $y_{10}, \dots, y_{n0}$  – відповідні початкові умови.

Для електротехніки та електромеханіки така форма запису є традиційною та відповідає декомпозиції (розкладу) електротехнічної системи на елементарні аперіодичні ланки (або одиничні дійсні полюси). У такому разі, кожна з проміжних координат визначатиметься інтегралом згортки для ненульових початкових умов [15,16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = y_{10} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \tau) d\tau; \\ \vdots \\ y_n(t) = y_{n0} \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + \frac{1}{T_n} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_n}} \cdot f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

Отримані функції є доволі складними, тому для їх спрощення можна в даній системі рівнянь змінити функції їхніми поліноміальними апроксимаціями, порядок яких буде визначатись точністю, яка необхідна.

Враховуючи, що ці перетворення є ілюстративними і з точки зору компромісу між необхідною точністю та простотою отриманих виразів, достатньо буде замінити функції  $f_1, \dots, f_n$  їхніми апроксимаціями шляхом використання поліномів першого порядку (трапеціями). Таким чином, на проміжку  $t_i \leq t < t_{i+1}$  кожна функція буде апроксимуватись лінійною залежністю для явної схеми:

$$f(t) = \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot t + f_i \quad (1.54)$$

де  $f_{i-1}, f_i$  значення функції відповідно в точках  $t_{i-1}, t_i$ .



Підставивши отримані вирази у систему рівнянь 1.45 на проміжку  $t_i \leq t < t_{i+1}$  для явної обчислювальної схеми система рівнянь матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = y_1(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot \left( \frac{f_{1i} - f_{1i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \tau + f_{1i} \right) d\tau; \\ \vdots \\ y_n(t) = y_n(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + \frac{1}{T_n} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_n}} \cdot \left( \frac{f_{ni} - f_{ni-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \tau + f_{ni} \right) d\tau; \end{array} \right. \quad (1.55)$$

У системі рівнянь 1.55 позначаємо  $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = h$  і приймаємо  $t_i = 0$ . Після аналітичного інтегрування розв'язок системи диференціальних рівнянь як системи рекурентних рівнянь для явної обчислювальної схеми виглядатиме наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1i+1} = y_{1i} e^{-\frac{h}{T_1}} + (1 - e^{-\frac{h}{T_1}}) \cdot f_{1i} + \left( 1 - \frac{T_1}{h} \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_1}}) \right) \cdot (f_{1i} - f_{1i-1}); \\ \vdots \\ y_{ni+1} = y_{ni} e^{-\frac{h}{T_n}} + (1 - e^{-\frac{h}{T_n}}) \cdot f_{ni} + \left( 1 - \frac{T_n}{h} \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_n}}) \right) \cdot (f_{ni} - f_{ni-1}). \end{array} \right. \quad (1.56)$$

У разі нескінченно великої сталої часу  $T_i$  (що відповідає операції чистого інтегрування), рекурентні рівняння переходять відповідно у явні формули Адамса другого порядку. Таке можливо, наприклад, в результаті інтегрування швидкості для процесу знаходження переміщення механічної частини електроприводу.

Якщо застосовувати апроксимацію функції  $f_1, \dots, f_n$  поліномом другого порядку, результатом будуть значно складніші вирази. Тому їх використання

може бути нераціональним у цифрових електромеханічних системах з обчислювальними пристроями, якщо їх оперативна пам'ять малого обсягу, а швидкодія є недостатньо високою.

Знайдені за таким алгоритмом рекурентні рівняння є стійкими для будь-якого кроку розв'язування, адже мають властивість сильної стійкості. Це дозволяє вибрати крок інтегрування для досліджуваної системи звичайних диференціальних рівнянь (1.52) за допомогою системи рекурентних рівнянь (1.55) вже не з умови стійкості числового методу, а очікуваним рівнем точності та деталізації процесу, який досліджується. Водночас, у випадку збільшення кроку інтегрування, є два несприятливих фактори:

1) фазна похибка або фазний зсув. Найбільше проявляється для явних схем апроксимації. В такому випадку використання апроксимації вхідного сигналу (збурення) неявною схемою першого порядку (трапеціями) є найкращим варіантом, адже схема доволі проста та точна. Під час комп'ютерного моделювання та досліджень замкнених систем автоматичного керування фазна похибка може призвести до нестійкої цифрової моделі, зокрема і за наявності стійкого неперервного прототипу.

2) втрата інформації з умови теореми відліків Шеннона-Котельникова. Таке можливо, коли через великий крок (період дискретизації) система не пропускає високочастотні складові робочого спектру сигналу. Цей фактор є менш критичним з двох причин:

а) якщо система автоматичного керування спроектована правильно, то вона вже є низькочастотним фільтром, тому кількість вищих складових у робочому спектрі є незначною;

б) якщо невелика частина вищих складових спектру втрачається, це зазвичай не призводить до фазних похибок (зсувів) і не впливає на стійкість системи.

Якщо застосовувати пропонований спосіб апроксимації інтегралу згортки для розв'язування диференціальних рівнянь, можна відслідкувати аналогію

щодо традиційних числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, які теж апроксимують обидві складові інтегралу згортки:

1) для функції  $f_1, \dots, f_n$  - порядок апроксимаційного полінома не перевищує порядок числового методу. Тому є можливість оцінити його значення за кількістю послідовних відліків функції, що використовує метод або за його дискретною функцією;

2) для імпульсної перехідної функції – для звичайного диференціального рівняння першого порядку це є згасаюча експонента, яку числовий метод інтегрування апроксимує відповідною залежністю, яка узгоджується з порядком рівняння.

Варто зазначити, що порядок апроксимацій може бути різним в загальному випадку, це зумовлено різницею в поведінці числових методів [16].

Що в результаті дає запропонований спосіб одержання рекурентних рівнянь для моделювання:

- можливість досліджувати систему з будь-яким кроком без втрати стійкості числового розв'язку;
- можливість реалізовувати системи реального часу.

## **Висновки до розділу 1**

1. Виконано огляд та аналіз класичних методів аналізу динамічних режимів електротехнічних систем. Розглянуто одно- та багатокрокові методи, метод Лапласа, z-перетворення та інтегралу згортки як прикладні методи аналізу перехідних процесів електротехнічних та електромеханічних систем та зроблено висновок про їх ефективність та доцільність застосування для розв'язування технічних та математичних задач різного типу.

2. Проведено аналіз методів Адамса, який довів ефективність неявних формул Адамса у порівнянні явних формул. Неявні методи стійкіші та менше накопичують похибку. Неявні формули Адамса кращі під час моделювання,

проведення аналізу динамічних процесів, але не можуть використовуватись для реалізації цифрових моделей real-time.

3. Проведено аналіз операторних методів, а саме методу перетворення Лапласа. Ефективність перетворення Лапласа дає високу точність результату та готових рішень для виконання перетворень. Перетворення Лапласа оптимальне рішення для задач аналогових систем, однак не можуть застосовуватись для цифрових систем.

4. Встановлено, якщо розглядати електротехнічні системи як цифрові, то найефективнішим методом буде використання передавальних функцій та рекурентних рівнянь для моделювання та аналізу лінійних електротехнічних систем. Такий підхід дозволяє забезпечити стійкість розв'язку для будь-якого кроку, до моменту втрати інформації, а також можна застосовувати до систем, які працюють в умовах реального часу.

## **РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ІНТЕГРУВАННЯ ЯК ЕЛЕМЕНТІВ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ**

Функціонал будь-якої цифрової системи складається з двох частин: апаратної та програмної. Апаратна складова практично не має принципових відмінностей у більшості і так не численних виробників. Технічну частину не надто як є змінювати, але все ж можливо несуттєво коригувати додаванням тієї чи іншої технічної складової. Тоді як програмну частину цифрової системи повністю реалізують відповідно до потреб функціонування самої системи. Наприклад, один і той самий контролер (за апаратною частиною не видозмінений) використовують для керування приводом жорсткого диску, і в побутовій техніці, і в промисловості [17]. Але відмінність програмного забезпечення, визначальною частиною якого є забезпечення математичне – програмне виконання числових методів в алгоритмах керування, дозволяє адаптувати технічно однакову систему, під широкий спектр галузей використання.

Згідно з даними Міжнародної асоціації інженерів електриків (IEEE) до 95% мікроконтролерів за своєю будовою та функціоналом є ПД-регуляторами [18]. Такі регулятори містять операції інтегрування та диференціювання. За своєю природою, згадані операції інтегрування та диференціювання це комбінації із застосування тих чи інших числових методів. Використання таких підходів дозволяє реалізувати складні закони регулювання під час роботи із системами автоматичного керування, чим і користуються виробники контролерів.

### **2.1. Частотний аналіз методів інтегрування як числових фільтрів**

Як уже було згадано, використання однокрокових числових методів ускладнюють моделювання цифрових систем потребою вибору відповідного кроку. До того ж, однокрокові методи для розрахунків потребують проміжних

значень похідної. У системах автоматичного керування інформацію про поведінку функції інтегрування в проміжку між значеннями оперативного сигналу можна отримати виконавши дробування кроку, але це зменшуватиме швидкість розрахунків. Щодо неявних методів, то для його використання необхідно мати значення з майбутнього, ще не виконаного кроку, що для дискретних систем є неможливим. Таким чином, для подальшого аналізу використовуватимуться лише явні багатокрокові методи.

Існують дослідження, результати яких доводять неефективність використання у математичному моделюванні числових методів вищих порядків [19]. Тому, має місце припущення, що аналогічна ситуація буде у випадку використання числового методу як числового інтегратора вищого порядку при моделюванні цифрових ПД-регуляторів – нераціональним та недоцільним.

У прикладній математиці уже відомо про певний вплив числових методів на поведінку цифрової моделі під час розв'язування диференціальних рівнянь, якщо така система коректується вибором відповідного кроку інтегрування. Натомість, у цифрових моделях реального часу крок, з яким відбувається інтегрування, є фіксованим і наперед введеним під час проектування такої системи. Це також накладає певний відбиток на поведінку цифрової моделі.

Якщо розглядати числові методи в контексті математики, моделювання та розрахунків, то порядок методу може залежати від складності досліджуваної системи або необхідної точності чи етапів розрахунків. У контексті електротехніки та систем автоматичного керування доцільність використання того чи іншого порядку числового методу залишається не вивченим.

Перш ніж досліджувати уже згадану недоцільність, або ж навпаки, доцільність використання числових методів різних порядків, важливо встановити доконаний факт існування впливу числового методу на систему, що дискретизується.

Для дослідження цього явища та його аналізу можна використати найпростіший приклад моделі технічного об'єкту – аперіодичну ланку першого

порядку . Передавальна функція такої моделі

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.1)$$

Вираз 2.1 відповідає звичайному диференціальному рівнянню 2.2:

$$Ty' + y = f \quad (2.2)$$

де  $T$  - стала часу,  $y$  - змінна,  $f$  - збурення.

Максимальна простота тестового об'єкту в даному випадку дозволяє нескладними засобами знайти тестовий розв'язок, який можна прийняти за еталонний та використовувати для порівняння у подальших дослідженнях. Окрім цього, якщо застосовувати апарат теорії автоматичного керування (щодо дискретних систем), щоб могли проаналізувати та знайти причини відмінностей у поведінці цифрових інтеграторів (якщо розглядати їх в ролі цифрових фільтрів), то такий тестовий об'єкт цілком виправдовує свою нескладну структуру, як вже було згадано у статті [2].

Щоб візуалізувати результати розрахунків та процесів дискретизації застосовано один із основних інструментів для аналізу систем керування та елементів таких систем згідно з класичною теорією автоматичного керування – метод частотних характеристик. Метод частотних характеристик користується популярністю та широким використанням в теорії та практиці автоматичного керування. Це зумовлено властивістю методу здатність представити суму гармонійних сигналів реальних збурень, що діють на систему автоматичного керування.

Неявну формулу Адамса третього порядку (2.3) із досліджень наведених у роботі [1] використано як приклад процесу отримання дискретної моделі у формі рекурентного рівняння для системи реального часу з фіксованим кроком інтегрування  $h$ .

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5x_{i+1} + 8x_i - x_{i-1}) \quad (2.3)$$

Після підстановки значення похідної та спрощення в (2.3), отримуємо рекурентну формулу:

$$y_{i+1} = \frac{(12-8h)y_i + hy_{i-1} + h(5f_i - f_{i-1})}{12+5h} \quad (2.4)$$

Враховуючи теорему заміщення відому з праць Eliahu I.Jury та Katsuhiko Ogata [20, 21] отримано дискретну передавальну функцію для формули :

$$W_{AM3}(z) = \frac{h(5z + 8 - z^{-1})}{(12T + 5h)z - 12T + 8h - hz^{-1}} \quad (2.5)$$

За таким ж принципом отримано дискретні передавальні функції цифрових моделей на основі явних і неявних формул Адамса 1-4-го порядку. За допомогою засобів MATLAB побудовано частотні характеристики отриманих функцій цифрових моделей та результат аналітичного розв'язку (рисунок 2.1).

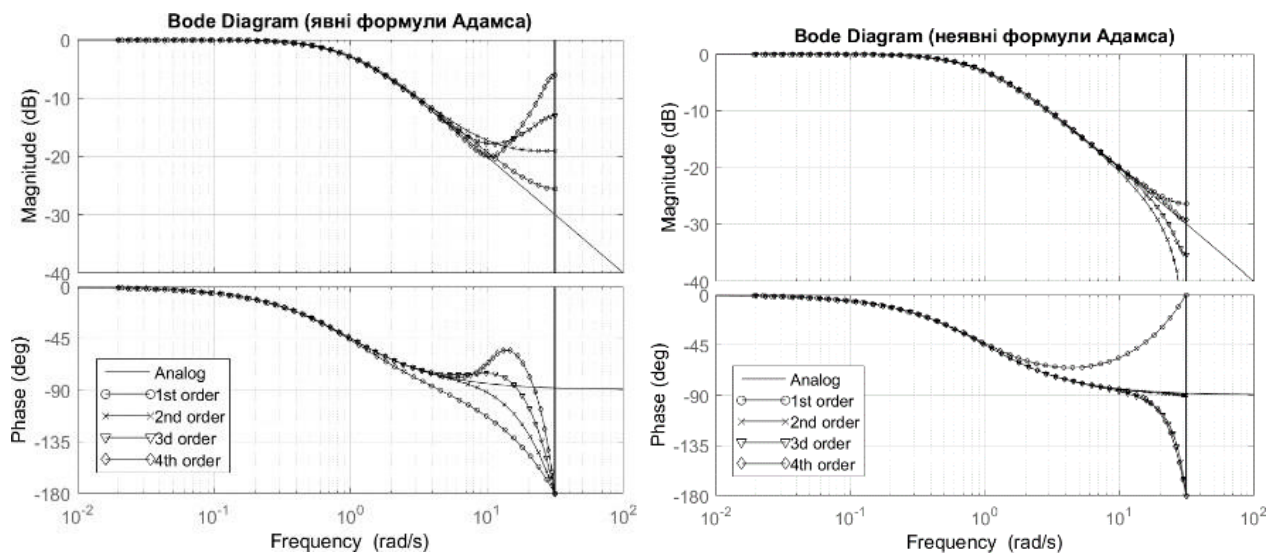


Рисунок 2.1 – Частотні характеристики дискретних передавальних функцій цифрових моделей на основі явних і неявних формул Адамса 1-4-го порядку.

Власне, з отриманих графічних результатів можна зробити висновок, що частотні характеристики числових інтеграторів здійснюють вплив на поведінку синтезованих цифрових систем.

Після перших отриманих результатів та підтвердження одного з припущень, слід дещо детальніше окреслити принцип вибору програмного забезпечення та інструментів.



Відомі математичні застосунки Mathcad та MATLAB (в тому числі вбудована бібліотека Control System Toolbox) містять готові реалізації типових методів дискретизації. Це певною мірою спрощує процес синтезу математичної частини виконання алгоритмів керування для подальших програмних реалізацій у цифрових системах керування. Таке спрощення, у вигляді автоматизації всього процесу синтезу математичного забезпечення математичної складової, супроводжується іншими перевагами:

- значне скорочення часу розробки завдяки уникненню великої кількості аналітичних перетворень у процесі синтезу;
- зниження кількості ймовірних людських помилок у математичних виразах завдяки вбудованим типовим рішенням згаданих застосунків;
- прискорення процесу розробки через відсутність потреби розробника розуміти процеси дискретизації (зокрема, щодо фізичних процесів системи).

Використання уже згаданих застосунків не є ідеальним рішенням, адже разом з перевагами та комплексним рішенням, має ряд недоліків:

- вибір методу за замовчуванням – розробник не аналізує переваги або недоліки застосування того чи іншого методу для автоматизації процесу дискретизації неперервних систем;
- через відсутність потреби розуміти математичну основу процесів дискретизації та використання готових стандартних рішень може знижувати рівень фахової підготовки розробника;
- автоматизовані готові рішення не спонукають розробника цифрових систем шукати оптимальні та раціональні розв'язки, які можуть підвищити ефективність цифрової системи [17].

Втім, слід віддати належне тому факту, що для наукових досліджень, які і так передбачають нестандартні підходи, використання математичних застосунків Mathcad та MATCAD виправдане своїми результатами.

Операція інтегрування є базовим елементом більшості алгоритмів

керування. Тому саме числові методи інтегрування є одними з базових методів дискретизації неперервних систем. Очевидно, що в такому разі вибір числового інтегратора матиме вплив на поведінку системи, яка пройде процес дискретизації. Враховуючи з'ясований та встановлений раніше факт впливу числового інтегратора на поведінку системи як явище, та наведений вище факт особливості використання числових методів інтегрування, наступним кроком логічно буде дослідити вплив вибору числового інтегратора на поведінку системи.

Найпоширенішим серед розробників методом дискретизації неперервного прототипу є використання традиційних інженерних методів, наприклад, з-перетворення, підстановка Тастина тощо. Популярність цих методів неодноразово згадувалась в роботах Eliahu I.Jury [9,20], Karl J Astrom, Bjorn Witternmark [18], Richard C.Dorf, Robert H.Bishop [8]. Це добре знайомі та відпрацьовані методи теорії автоматичного керування для неперервних систем, які, окрім цього, доволі вдало можна реалізувати за допомогою уже згаданого математичного застосунку MATLAB [22, 23]. Іншою причиною такої популярності того ж таки методу Тастина серед інженерів є достатня простота методу для дискретизації неперервних систем, які до того ж не потребують аналітичної роботи від розробників-інженерів.

Слід зазначити, що більшість систем керування, які представлені математичною моделлю, можуть зводитись до структурних схем, де інтегратор є базовим елементом [8]. Зокрема це стосується і ПД-регулятора, поширеність якого уже була згадана раніше. У випадку представлення регулятора за допомогою математичної моделі та перехід до цифрових систем від аналогового інтегратора до його дискретного аналога – числового інтегратора, структура моделі залишається без змін. Таким чином, відмінність поведінки числового інтегратора порівняно з аналоговим буде основною відмінністю у поведінці цифрового регулятора та його аналогового прототипу.

Продовжуючи вивчення поведінки числових методів та розглядаючи їх як

цифровий фільтр, актуальним інструментом досліджень залишається один з методів класичної теорії керування – аналіз частотних характеристик. Такий підхід дає змогу отримати інформацію про поведінку числових методів інтегрування та дослідити їхній можливий вплив на поведінку цифрової системи керування. Водночас, варто зазначити, що аналіз частотних характеристик числових інтеграторів з використанням підходу z-перетворення розглядався в класичних роботах Elijah Jury [9, 20] та Julius Tou [26]. Так, на той час це був обмежений перелік відомих числових методів: метод Сімпсона, метод трапецій та метод прямокутників.

Використання найпростіших числових інтеграторів у комп'ютерних системах розглядаються як частковий випадок та потенційну можливість реалізації. Тому дослідження та аналіз частотних характеристик числових інтеграторів різних порядків з метою дискретизації аналогових систем може підвищити ефективність синтезованих цифрових систем.

Для дослідження обрано дві елементарні структури (рисунок 2.2).

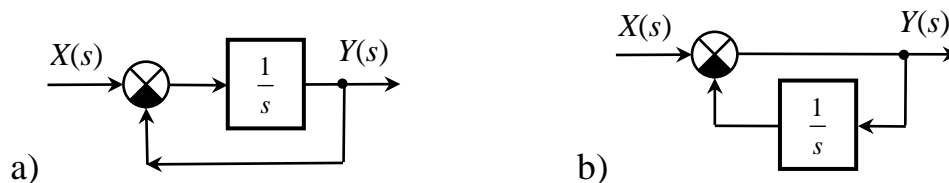


Рисунок 2.2 – Структурна схема тестових ланок

Такий вибір об'єкту дослідження дасть змогу дослідити вплив методу числового інтегрування в двох типах закритих систем – прямий канал та коло зворотного зв'язку. Завдяки примітивності обидвох структур є змога мінімізувати вплив як структури та принципу її роботи, так і складності системи на поведінку неперервного прототипу, що дискретизується числовим інтегратором. Таким чином, від можливих варіантів структурних перетворень можна відмежуватись, надавши перевагу лише двом базовим перетворенням (рисунок 2.2) і зосередити увагу виключно на впливі методу дискретизації, який реалізовується.

Згідно з Leon O. Chua, Pen-Min Lin [24] та E.Hairer, S.Norset, G.Wanner [25],

формули Адамса все ще є найефективнішими серед всього переліку багатокрокових методів, тому для подальшого вивчення числових інтеграторів та їх поведінки було обрано саме їх.

Аналогічно для отримання дискретної передавальної функції для цифрового інтегратора застосовано алгоритм виразів 2.3-2.4. Отримані дискретні передавальні функції операторів числового інтегрування для всіх цифрових інтеграторів 1-6-го порядку з використанням явних формул Адамса наведені в Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Дискретні передавальні функції операторів числового інтегрування

Порядок методу	Числовий інтегратор
	Цифрова передавальна функція інтегратора
1	$y_{i+1} = y_i + hx_i$
	$W_1(z) = \frac{h}{z-1}$
2	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3x_i - x_{i-1})$
	$W_2(z) = \frac{h}{2} \frac{(3z-1)}{z^2-z}$
3	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23x_i - 16x_{i-1} + 5x_{i-2})$
	$W_3(z) = \frac{h}{12} \frac{(23z^2 - 16z + 5)}{z^3 - z^2}$
4	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55x_i - 59x_{i-1} + 37x_{i-2} - 9x_{i-3})$
	$W_4(z) = \frac{h}{24} \frac{(55z^3 - 59z^2 + 37z - 9)}{z^4 - z^3}$
5	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(1901x_i - 2774x_{i-1} + 2616x_{i-2} + 274x_{i-3})$
	$W_5(z) = \frac{h}{720} \frac{(1901z^4 - 2772z^3 + 2616z^2 + 251)}{z^5 - z^4}$

6	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1440} (4277x_i - 7923x_{i-1} + 9982x_{i-2} - 7298x_{i-3} - 2877x_{i-5} - 475x_{i-5})$
	$W_6(z) = \frac{h}{1440} \frac{(4277z^5 - 7923z^4 - 7298z^3 + 2877z - 475)}{z^6 - z^5}$

Отримані цифрові передавальні функції інтеграторів використано для аналізу частотних характеристик за допомогою функції bode у засобах Control System Toolbox [22, 23].

Отже, перший приклад порівняння ідеального неперервного інтегратора та явних формул Адамса 1-6-го порядку реалізовано з часом дискретизації  $h=0,1$  с (рисунок 2.3).

Варто звернути увагу, що ідеальний аналоговий інтегратор має спадну характеристику з даними: нахил  $-20$  дБ/декаду та постійна фаза  $-90$  град.

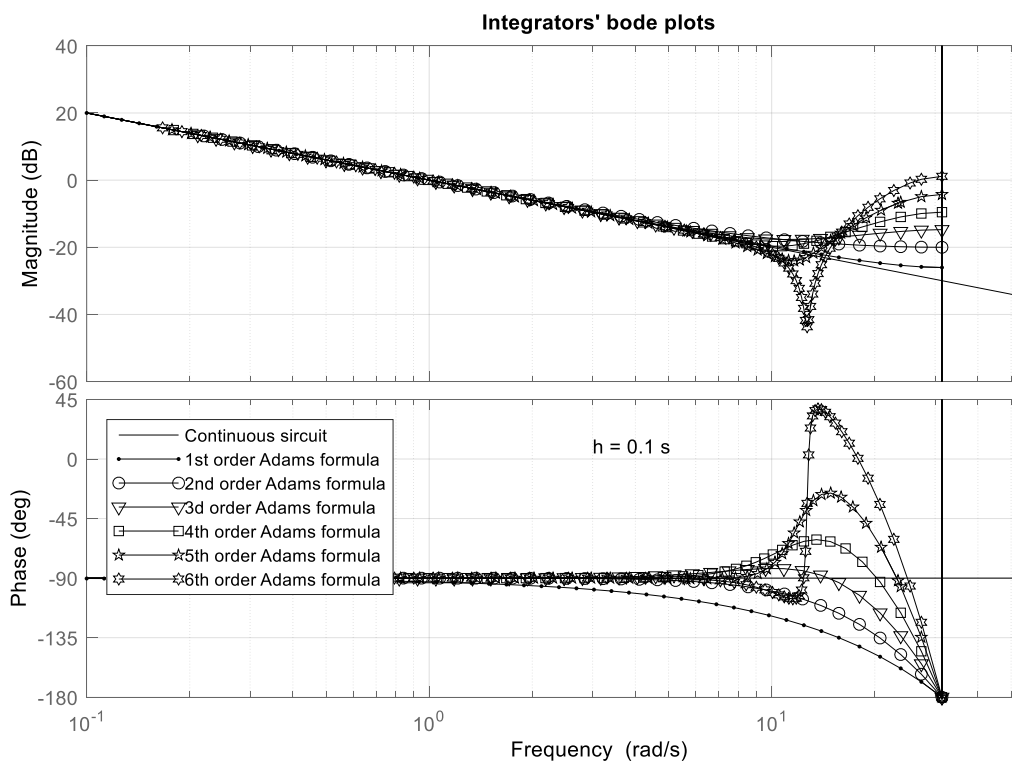


Рисунок 2.3 – Графік для числових явних інтеграторів 1-6-го порядку та часу дискретизації  $h = 0,1$  с.

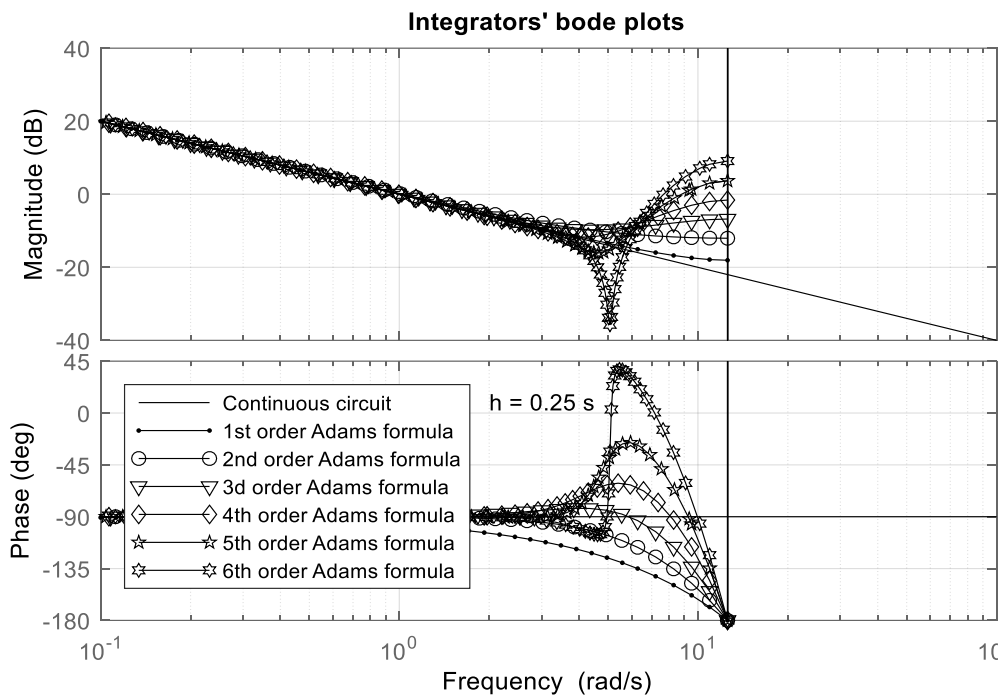
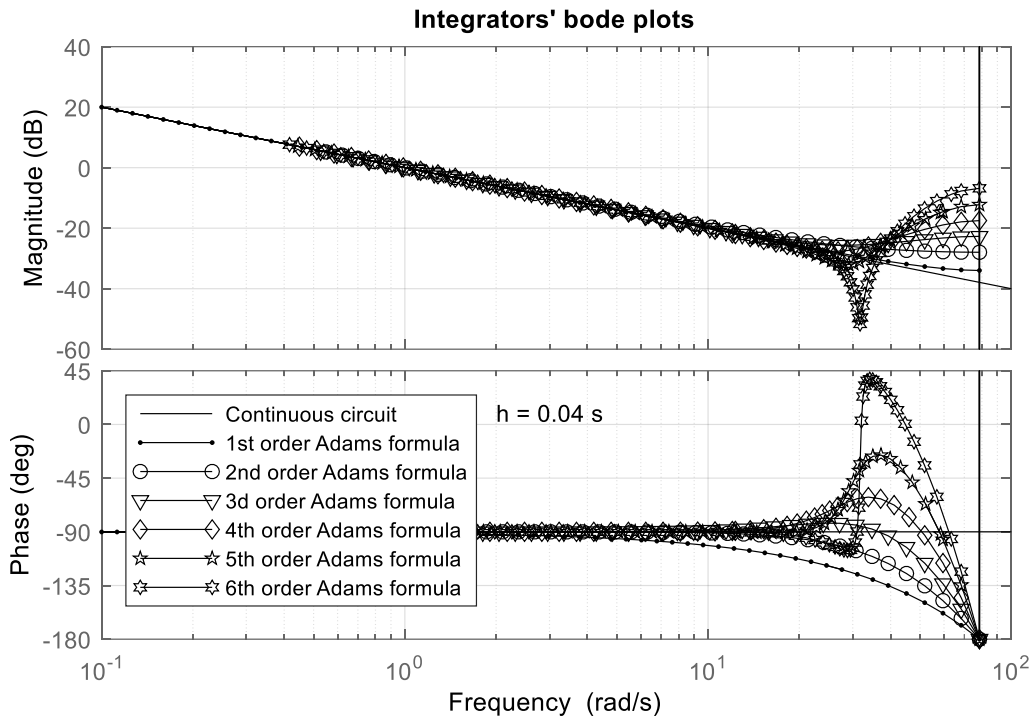


Рисунок 2.4 – Графіки для числових явних інтеграторів 1-6-го порядку та часу дискретизації  $h = 0,04 \text{ c}$  та  $h = 0,25 \text{ c}$

На цьому етапі можна відзначити дві речі:

1. Спостерігається значна різниця в частотних характеристиках (як за фазою, так і за амплітудою) цифрових інтеграторів високого порядку у порівнянні із аналоговим інтегратором, особливо – на вищих частотах.

2. Період дискретизації практично не впливає на форму частотних характеристик (рисунок 2.4).

Висновки до другого пункту не стали відкриттям чи несподіванкою, в той час як висновки до першого пункту є дещо неочікувані. Це зумовлено тим, серед науковців існує популярна думка, що чим вищий порядок формули інтегрування, тим вища точність операції. Але отримані результати свідчать про абсолютно протилежне: зі збільшенням порядку збільшуються і амплітудні та фазні похибки на високих частотах. В тому числі, з ростом порядку методу, характер таких похибок стає більше нелінійним, що виключає змогу вносити будь-яку корекцію.

Окрім отриманих результатів дослідження частотних характеристик числових інтеграторів, за допомогою частотного аналізу проведено дослідження поведінки числових інтеграторів, коли застосовують їхні цифрові відповідники замість операції неперервного інтегрування для двох випадків тестових структур на рисунку 2.2. Завдяки такому підходу можна дослідити вплив структури системи керування зі зворотнім зв'язком та вплив місця розміщення інтегратора на частотні характеристики тестової замкненої системи з цифровим інтегратором.

Отже, структура на рисунку 2.2, а – розміщення числового інтегратора у прямому каналі. Така будова відповідає звичайній інерційній ланці першого порядку, для якої амплітудна характеристика спадаюча після частоти зрізу та з показниками  $-20$  дБ/декаду та плавна зміна від нуля до  $-90$  град.

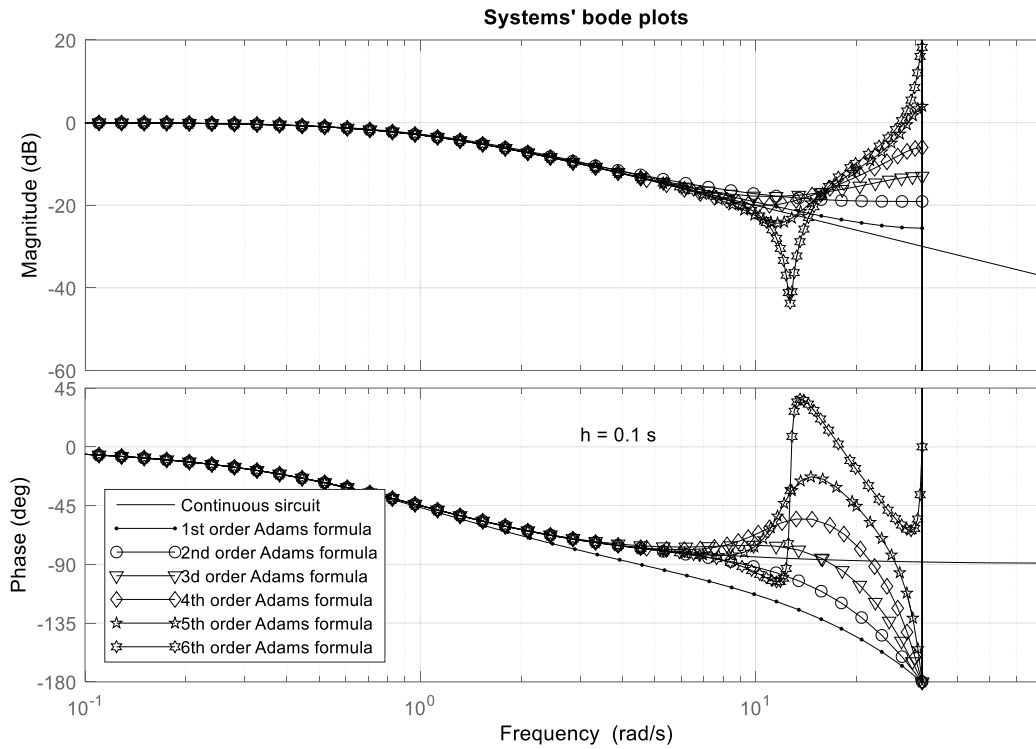


Рисунок 2.5 – Частотні характеристики схеми Рисунок 2.2 (а) з використанням числових інтеграторів.

Структура на рисунку 2.2, b – розміщення числового інтегратора у колі зворотного зв'язку. Це відповідає операції реального диференціювання, для якого амплітудна характеристика зростаюча до частоти зрізу та з показниками +20 дБ/декаду та плавна зміна фази від +90 град. до нуля. Дещо неочікуваним є факт, що у випадку кола зворотного зв'язку ефект від числових інтеграторів високих порядків зменшився (рисунок 2.6).



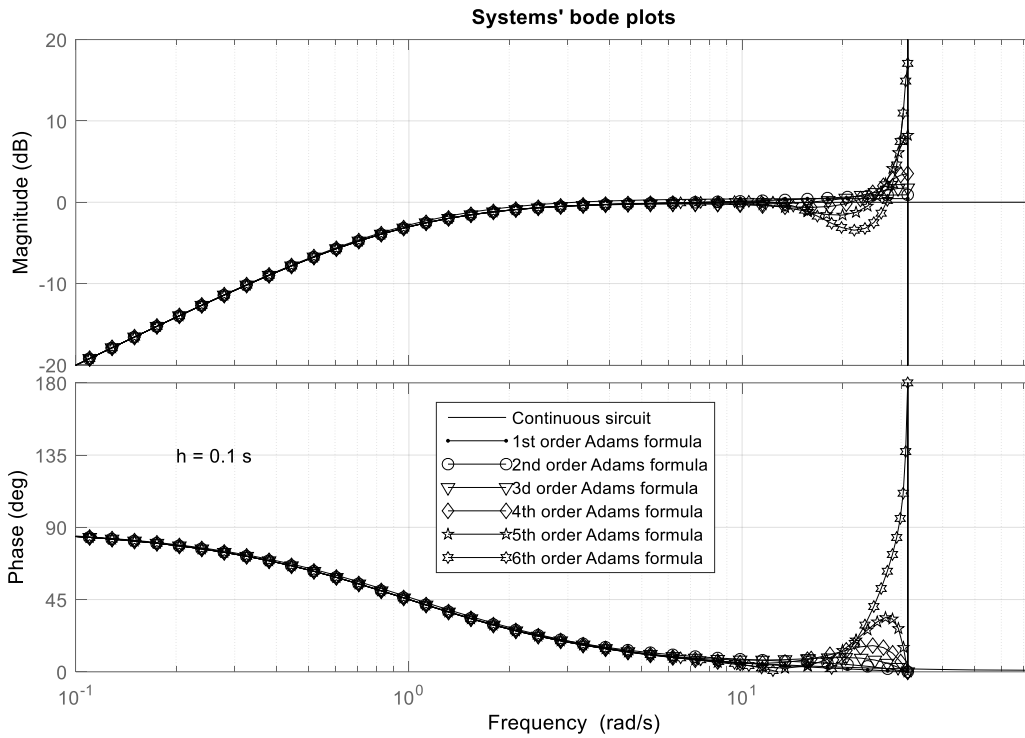


Рисунок 2.6 – Частотні характеристики схеми Рисунок 2.2 (b) з використанням числових інтеграторів

Проаналізувавши отримані частотні характеристики числових інтеграторів можна зробити кілька висновків:

- найраціональнішим для використання з огляду на поведінку частотних характеристик тестових систем з рисунку 2.2. є інтегратори першого та другого порядків. У випадку використання саме цих інтеграторів, амплітудні та фазні похибки від процесу дискретизації будуть найменші для обидвох структур об'єкту синтезованої цифрової системи та незалежно від місця розміщення в ній числового інтегратора.

- ефективність застосування числових інтеграторів високого порядку є сумнівною та потребує додаткових досліджень з використанням інших методів [17].

## **2.2. Аналіз цифрових моделей на підставі числових методів інтегрування методів нулів і полюсів**

Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь із застосуванням відомих числових методів і записом диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші можна вважати традиційним підходом у моделюванні електротехнічних систем. Найпоширеніша проблема такого підходу це зростання часу розрахунку та накопичення похибок, хоч і відноситься це здебільшого до складних електротехнічних систем [28, 29]. Тому, використовувати класичні форми методів у таких випадках найчастіше виявляється неефективним, в тому числі для задач низького порядку [27, 32]. Цей фактор є одним з ключових, адже активний розвиток енергетичних об'єктів зумовлює кількість об'єктів у досліджуваній системі, які представлені математичними моделями. Як наслідок, вимоги до програмного забезпечення, які реалізують дослідження також зростають. Певною проблемою для відповідності цим вимогам є деякі обмеження традиційних методів моделювання [27, 32]. Одним із варіантів вирішення цієї проблеми може бути додатковий аналіз числових методів, відмінний від класики теорії автоматичного керування – частотних характеристик. Це дозволить визначити, які формули числового інтегрування є ефективнішими для задач динаміки електротехнічних систем [25].

Вартує все ж зазначити, що проблема використання стратегій автоматичного кроку розв'язування за замовчуванням вважається вирішеною [24, 25, 31, 32]. Дотримання такої позиції дійсно відчутно покращує процес числового інтегрування. З цієї причини дослідження впливу числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [25] на розрахунок динаміки електротехнічних систем практично не зустрічаються у літературних джерелах. Аналогічна ситуація із розв'язуванням задач динаміки з фіксованим кроком, зокрема, системи з моделями реального часу [21] – ця проблема залишається малодослідженою.

Беручи за основу звичайне диференціальне рівняння (2.2), яке для наочності подальших перетворень можна записати у формі рівняння (2.6):

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (2.6)$$

Де  $y(t)$  – вихідна координата (реакція системи).

Відповідником в теорії автоматичного керування є передавальна функція 2.1.

Вихідну координату динамічної системи на проміжку кроку розв'язування  $t \in (0, h)$  як її реакцію на вхідне збурення  $x(t)$ , можна описати інтегралом згортки з нульовими початковими умовами [8, 33]:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot w(t - \tau, y) d\tau \quad (2.7)$$

Де  $x(t)$  – вхідний сигнал або збурення,  $w(t, y)$  – динамічна характеристика системи, яка задана її імпульсною перехідною функцією.

Якщо розглядати випадок, коли задачі динаміки розв'язують за допомогою відповідних числових методів (наприклад, числові методи для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь), буде відбуватись апроксимація цілого інтегралу згортки. До того ж, в такому випадку ймовірно просте врахування ненульових початкових умов. З таких умов, зрозуміло, що апроксимація інтегралу згортки числовим методом буде реалізована з певною похибкою, які здебільшого неможливо оцінити із необхідною точністю.

Натомість, у випадку нульових початкових умов для лінійних або лінеаризованих систем можна обрати пряме і зворотне перетворення за Лапласом (метод Хевісайда), які дають можливість записати інтеграл згортки у вигляді добутку відображень [6, 10, 11].

$$y(t) \Rightarrow Y(s) \quad (2.8)$$

$$\int_0^t x(\tau) \cdot w(t - \tau, y) d\tau \Rightarrow X(s) \cdot W(s) \quad (2.9)$$

У разі застосування зворотного перетворення Лапласа, такий спосіб опису динаміки системи дає змогу отримати аналітично точний розв'язок для лінеаризованих та лінійних систем. Така дія – це необхідність, адже отриманий точний розв'язок можна використовувати як еталон для оцінки похибок, які з'являються під час використання числових методів для знаходження інтегралу згортки.

Повертаючись до передавальних функцій, як способу опису динаміки електротехнічної системи, варто зазначити, що поведінка такої системи однозначно буде залежати від розміщення нулів і полюсів відповідної до обраного числового методу передавальної функції на комплексній площині [6]. Враховуючи це, якщо використовувати числові методи, щоб розв'язати задачі динаміки, дискретна передавальна функція цифрової моделі, в результаті, мала б точно відтворити таку ж саму кількість нулів і полюсів, як і в аналоговому прототипі.

Отже, для тестової інерційної ланки, форма диференціального рівняння та передавальна функція якої відповідно вирази 2.6 та 2.1, а поведінку такої ланки визначає один полюс:

$$\frac{1}{Ts + 1} \xrightarrow{\text{zeros/poles}} P_1 = \frac{-1}{T} \quad (2.10)$$

За умови значення сталої часу (інерційності)  $T=1$  с, перехідна характеристика цієї системи матиме вигляд:

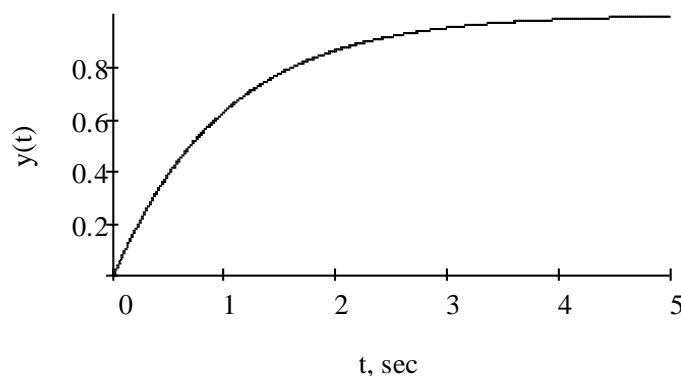


Рисунок 2.7 – Графік перехідної характеристики інерційної ланки першого порядку

Отже, у випадку використання класичного методу розв'язування задач динаміки для створення цифрової моделі ланки першого порядку, як вже згадувало, припускаємо, що модель повинна мати лише один дійсний полюс. Для ілюстративності та враховуючи дослідження в пункті 2.1, використано явні методи Адамса лише з 1-5-го порядку [4, 24].

Процес отримання цифрової моделі у формі передавальної функції на прикладі явного методу Адамса першого порядку виглядатиме наступним чином:

$$\left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{T} \cdot y'_i; \\ y' = \frac{x - y}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow y_{i+1} = y_i \cdot \left(1 - \frac{h}{T}\right) + \frac{h}{T} \cdot x_i \Rightarrow \frac{\frac{h}{T}}{z - \left(1 - \frac{h}{T}\right)} \quad (2.11)$$

І згідно із теоремою заміщення:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i \cdot z = y_{i+1} \\ y_i \cdot z^{-1} = y_{i-1} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Як можна бачити на прикладі одержаної цифрової моделі на основі числового методу першого порядку, вона має один дискретний полюс, як і аналоговий прототип.

Для аналогії та наочності доцільно навести приклад переходу до дискретної передавальної функції цифрової моделі на рисунку 2.7 з використанням явної формули Адамса третього порядку:

$$\left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12T} (23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2} - 2y'_{i-3}); \\ y' = \frac{x - y}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{23h \cdot z^3 - 16h \cdot z + 5h}{12T \cdot z^3 + (23h - 12T) \cdot z^2 - 16h \cdot z + 5h} \quad (2.11)$$

Проаналізувавши отримане рівняння, можна побачити, що конкретно в цьому випадку – метод третього порядку), отримана цифрова модель має три дискретні полюси та два дискретні нулі, яких не було у неперервному прототипі.

Це і є характерною ознакою того, що поведінка цифрової моделі у порівнянні із аналоговою, зазнає змін.

У Таблиці 2.2 зведено отримані дискретні передатні функції цифрових моделей для інерційної ланки першого порядку з використанням явних методів Адамса 1-5-го порядку для встановлення та відображення кількості нулів-полісів.

Таблиця 2.2

Передатні функції дискретної моделі числових методів

Порядок методу	Числовий метод / передатна функція дискретної моделі	Кількість нулів/полісів
1	$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_i$	0/1
	$W_1(z) = \frac{h}{T \cdot z - (T - h)}$	
2	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3y'_i - y'_{i-1})$	1/2
	$W_2(z) = \frac{3h \cdot z - h}{2T \cdot z^2 + (3h - 2T) \cdot z - h}$	
3	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23y'_i - 16y'_{i-1} + 5y'_{i-2})$	2/3
	$W_3(z) = \frac{23h \cdot z^2 - 16h \cdot z + 5h}{12T \cdot z^3 + (23h - 12T) \cdot z^2 - 16h \cdot z + 5h}$	
4	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3})$	3/4
	$W_4(z) = \frac{55h \cdot z^3 - 59h \cdot z^2 + 37h \cdot z - 9h}{24T \cdot z^4 + (55h - 24T) \cdot z^3 - 59h \cdot z^2 + 37h \cdot z - 9h}$	
5	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} \cdot (1901y'_i - 2774y'_{i-1} + 2616y'_{i-2} - 1274y'_{i-3} + 251y'_{i-4})$	4/5
	$W_5(z) = \frac{1901h \cdot z^4 - 2774h \cdot z^3 + 2616h \cdot z^2 - 1274h \cdot z + 251h}{720T \cdot z^5 + (1901h - 720T) \cdot z^4 - 2774h \cdot z^3 + 2616h \cdot z^2 - 1274h \cdot z + 251h}$	

Вищезгадані теоретичні припущення пропонувано дослідити на прикладі простої електричної схеми першого порядку (рисунок 2.8) за допомогою комп'ютерних чисельних експериментів. Для обраної моделі шукана величина –

напруга на конденсаторі  $U_C(t)$ . Для перемикання джерела напруги  $E$  з нульовими координатами знайдено перехідний процес для напруги. Причиною такого вибору є достатня наочність та показовість, оскільки комп'ютерний розрахунок для цієї схеми можна перевірити за допомогою операторного числення – порівнюючи із результатом з використанням методу Хевісайда [10, 11].

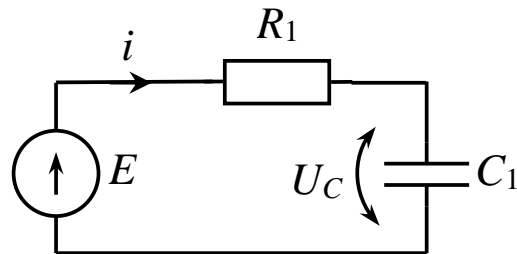
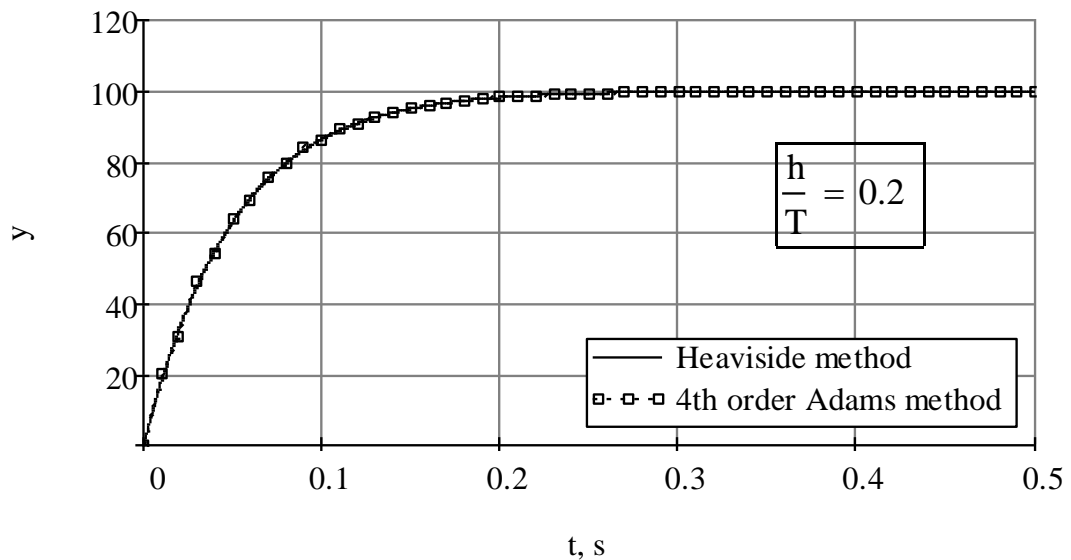


Рисунок 2.8 – Тестове електричне коло – ланка першого порядку

Реалізуючи таке нескладне дослідження, можна спостерігати появу додаткових нулів і полюсів у дискретній моделі, що очевидно змінюватиме її поведінку (рисунок 2.9).



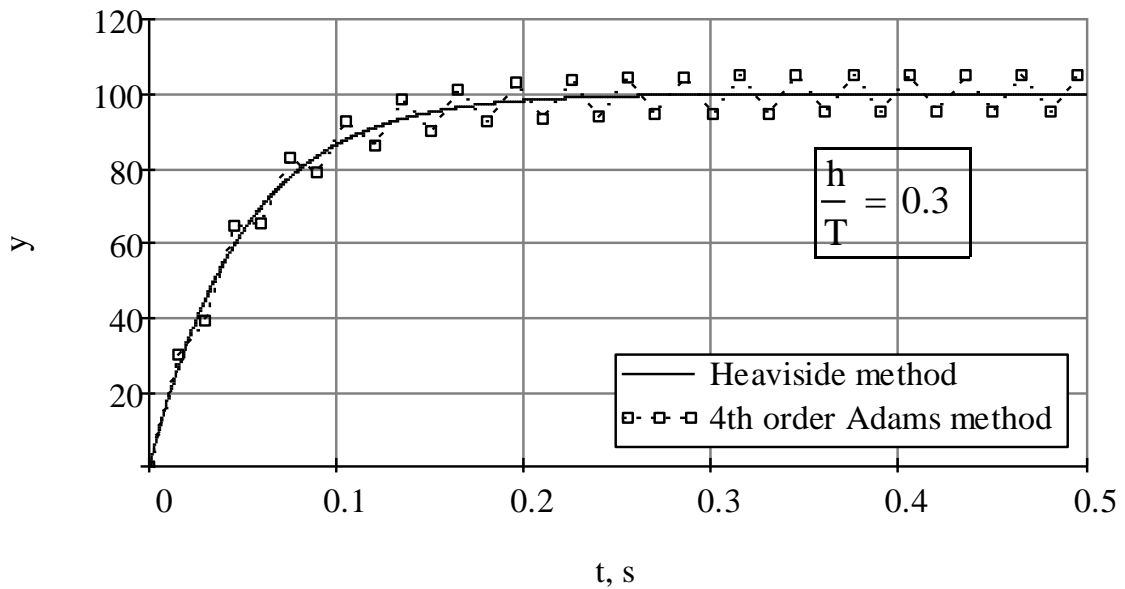


Рисунок 2.9 – Ступінчаста характеристика цифрової моделі четвертого порядку для  $h/T=0.2$  та  $h/T=0.3$

Також доволі наочною стала поява коливань у перехідній характеристиці дискретної моделі як наслідок виходу одного з її полюсів на межу стійкості.

Такий аналіз продемонстрував, що використання числових інтеграторів вищих порядків змінює кількість нулів та полюсів у цифровій моделі, що у свою чергу впливає на її поведінку.

Вивчення та розрахунки перехідних процесів в електричних колах пройшли досить довгий шлях, беручи початок у застосуванні символічних методів з використанням уже згаданого методу Хевісайда [10, 11]. Наступним етапом було «ручне» обчислення: буквально із використанням лише паперу з ручкою та математичних таблиць. Еволюційним та прогресивним шляхом це дійшло до новітніх комп'ютерних методів розрахунку, де вже використовували сучасні математичні застосунки та відповідні обчислювальні засоби [12, 13, 14].

Як вже було згадано, підхід із застосування опису електричної системи звичайними диференціальними рівняннями та їхнє розв'язування числовими методами (в тому числі з використанням числових інтеграторів) є математично основою сучасних способів моделювання та аналізу [4, 15].



Втім, враховуючи повідомлення розробників математичних програм [16] та інженерів-практиків, що при комп'ютерному аналізі електричних (і не лише) систем у математичних застосунках виникають несподіванки у результатах та поведінці системи після застосування числових методів [15], дослідження поведінки самих методів залишається актуальним.

Тож, повертаючись до безперервних систем, для наступного дослідження взято систему другого порядку, як простий та наочний приклад. Використовуючи метод зіставлення полюс/нуль [2, 6, 13, 20], застосований до передавальної функції другого порядку:

$$\frac{1}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)} \quad (2.12)$$

зрозуміло, що така безперервна система має пару полюсів:

$$\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad (2.13)$$

Значення коефіцієнтів визначають дійсні або складні спряжені полюси, таким чином, безперервна система другого порядку має лише два полюси, які і визначають її відповідну поведінку.

Обрану систему другого порядку у канонічній формі спостереження у вигляді структурної моделі наведено на рисунку 2.10.

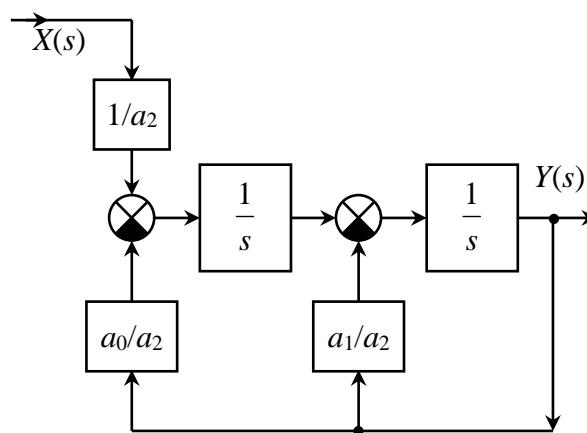


Рисунок 2.10 – Структурна схема моделі передавальної функції другого порядку з використанням канонічної форми спостерігача

Позначення на структурній моделі:

$a_0, a_1, a_2$  – поліноміальні коефіцієнти безперервної передавальної функції другого порядку;

$X(s)$  – вхідний сигнал в області Лапласа;

$Y(s)$  – вихідний сигнал в області Лапласа.

Для переходу від безперервної функції другого порядку до дискретної передавальної функції другого порядку за допомогою цифрового інтегратора, безперервні інтегратори (з передавальною функцією  $\frac{1}{s}$ ) замінено цифровою передавальною функцією вибраного методу числового інтегрування.

На цьому етапі доцільно перевірити, чи в дискретній моделі, яка описана дискретною передавальною функцією, залишилось два полюси, як і було у аналоговому прототипі.

Для цього потрібно знайти відповідну дискретну передавальну функцію для системи другого порядку, передавальна функція якої за канонічною формою спостереження (рисунок 2.10) має вигляд:

$$W_2(s) = \frac{1}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)} \quad (2.14)$$

Для виразу 2.14, замінивши інтегратори з передавальною функцією  $\frac{1}{s}$  (рисунок 2.10) цифровими інтеграторами з дискретною передавальною функцією  $W_i(z)$  справедливим буде наступний вираз:

$$W_2(z) = \frac{W_i^2(z)}{a_0W_i^2(z) + a_1W_i(z) + a_2} \quad (2.15)$$

Слід зауважити, що полюси цифрових інтеграторів додаються до дискретної передавальної функції цифрового прототипу безперервної системи. Ось як це перевірити на простому прикладі:

- неявний числовий інтегратор другого порядку має таку дискретну передавальну функцію:

$$W_2^{AM}(z) = \frac{\frac{h}{2}(z+1)}{z-1} \quad (2.16)$$

- якщо у рівнянні 2.15 змінити  $W_i(z)$  на  $W_2^{AM}(z)$ , то дискретна передавальна функція, яка отримана шляхом дискретизації на основі неявного числового інтегратора другого порядку матиме наступний вигляд:

$$W_2(z) = \frac{h^2 \cdot (z^2 + 2z + 1)}{d_2 z^2 + d_1 z + d_0} \quad (2.17)$$

Для рівняння 2.17 поліноміальні коефіцієнти дискретної передавальної функції другого порядку будуть:

$$d_0 = a_0 h^2 - 2a_1 h + 4a_2;$$

$$d_1 = 2a_0 h^2 - 8a_2;$$

$$d_2 = a_0 h^2 + 2a_1 h + 4a_2.$$

У цьому випадку, коли перетворення та аналіз стосується неявного методу не високого порядку, не виявлено значного впливу на поведінку цифрової системи порівняно з безперервною. Це зумовлено тим, що отримана цифрова системи має два дискретні полюси і два нові дискретні нулі, які в свою чергу не є критичними. І це було б зручним висновком та умовною причиною на цьому етапі завершити дослідження, якби не той факт, що для динамічних систем реального часу, якими представлені електротехнічні та електромеханічні системи, неявні методи були виключені.

Тому аналогічні перетворення розглянуто для явного методу вищого порядку.

Для явного числового інтегратора четвертого порядку, передавальна функція має вигляд:

$$W_4^{AB}(z) = \frac{\frac{h}{24}(55z^3 - 59z^2 + 37z - 9)}{z^4 - z^3} \quad (2.18)$$

Після дії заміни  $W_i(z)$  на  $W_4^{AB}(z)$ , у рівнянні (2.18) за реалізації процесу дискретизації на основі явного числового інтегратора Адамса четвертого порядку, отримано дискретну передавальну функцію вигляду:

$$\frac{W_4(z)}{h^2} = \frac{81z^6 + 342z^5 + 271z^4 - 172z^3 + 63z^2 - 10z + 1}{d_6z^6 + d_5z^5 + d_4z^4 + d_3z^3 + d_2z^2 + d_1z + d_0} \quad (2.19)$$

Для виразу (2.19) поліноміальні коефіцієнти дискретної передавальної функції четвертого порядку:

$$d_0 = a_0 h^2$$

$$d_1 = -10a_0 h^2$$

$$d_2 = 63a_0 h^2 - 24a_1 h$$

$$d_3 = -172a_0 h^2 + 144a_1 h$$

$$d_4 = 271a_0 h^2 - 576a_1 h + 576a_2$$

$$d_5 = 342a_0 h^2 + 240a_1 h - 1152a_2$$

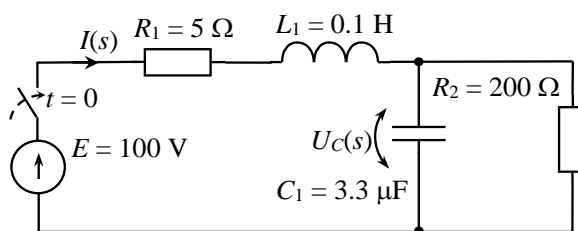
$$d_6 = 81a_0 h^2 + 216a_1 h + 576a_2$$

В отриманому виразі (2.19) є шість незалежних від розміру кроку  $h$  дискретних нулів та шість дискретних полюсів. Водночас значення коефіцієнтів полінома знаменника залежить від розміру кроку  $h$ , що у свою чергу, утворює рух дискретних полюсів у комплексній площині у залежності від кроку  $h$ . Для деяких значень кроку, такі полюси виходитимуть за межі області стабільності дискретної передавальної функції.

Але, окрім вище зазначеного, найголовнішим висновком є те, що поведінка системи з шістьма нулями та полюсами відмінна від поведінки системи лише з двома полюсами. Відповідно, збільшення числа полюсів через збільшення порядку числового інтегратора для вибірки безперервної системи лише погіршуватиме ситуацію.

Пропонується розглянути на практичному експериментальному прикладі за допомогою комп'ютерного моделювання та розрахунків. Експеримент на прикладі простого електричного кола, схема якого на рисунку 2.11, а параметр напруги конденсатора  $U_C(t)$  невідома змінна. Така проста електрична схема може

бути невід'ємною частиною для різних електричних систем, тому дослідження на її прикладі є наочними.



Рисунку 2.11 – Схема електричного кола для тестування

Перехідний процес в колі знайдено для перемикання джерела напруги  $E$  з початковим нулем. Як вже було згадано, оскільки розрахунок для такої схеми можна перевірити, порівнявши з методом Хевісайда [1, 2], такий приклад є показовим.

Для кола на рисунку 2.11 з використанням перетворення Лапласа в позначенні оператора, напруга на конденсаторі  $U_c(s)$  матиме наступний вигляд:

$$U_c(s) = I(s) \cdot \frac{R_2 C_1 s}{R_2 + C_1 s} \quad (2.20)$$

$$\text{де } I(s) = \frac{E}{Z(s)} \text{ та } Z(s) = R_1 + L_1 s + \frac{R_2 C_1 s}{R_2 + C_1 s}.$$

Після нескладних алгебраїчних перетворень в області оператора Лапласа, напруга на конденсаторі матиме вигляд:

$$U_c(s) = \frac{R_2 \frac{E}{s}}{L_1 C_1 R_2 s^2 + (R_1 R_2 C_1 + L_1) s + R_1 + R_2} \quad (2.21)$$

Отриманий вираз (2.21) можна використати для отримання напруги на конденсаторі часової області  $U_c(t)$  для перевірки отриманих результатів комп'ютерного моделювання на основі оберненого перетворення Лапласа [1, 2]. Аналогічно до уже виконаних розрахунків та перетворень, поведінка системи буде визначатись парою полюсів, адже частина  $\frac{1}{s}$  передавальної функції, яка виробляє кроковий відгук, не враховується.

Результати для порівняння комп'ютерного моделювання із символічним рішенням, з використанням зворотного перетворення Лапласа, отриманого на основі рівняння (2.21) наведені на рисунку 2.12.

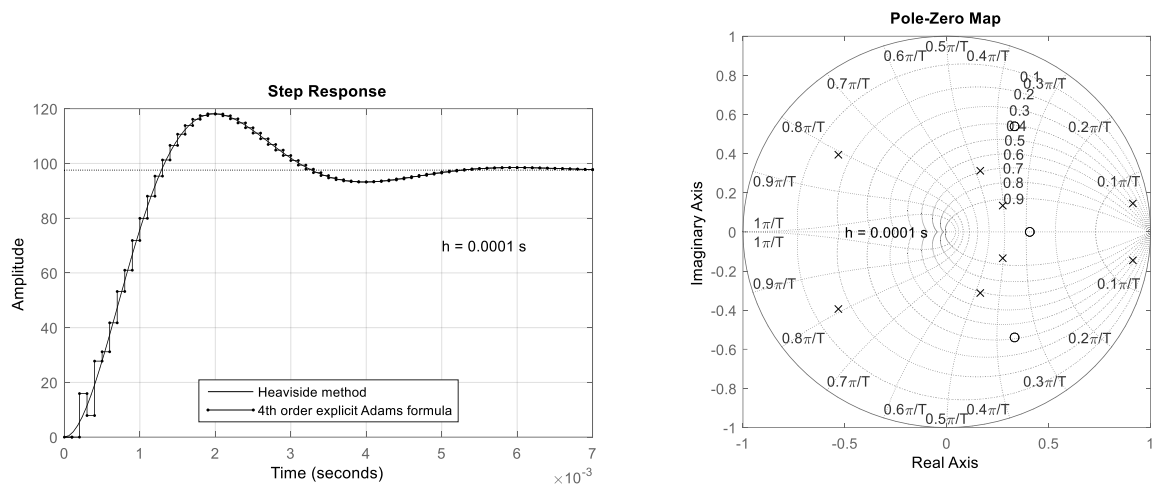


Рисунок 2.12 – Результати комп'ютерного моделювання та символічного розрахунку

Як можна побачити на рисунку 2.12 збільшення порядку числових інтеграторів збільшує кількість нулів та полюсів дискретної передавальної функції моделі, що у свою чергу, ускладнює поведінку такої моделі у порівнянні із початковою безперервною системою. Окрім цього, із збільшенням порядку чисельного методу, зростає чутливість дискретних передавальних функцій до розміру кроку. Це зумовлено розширенням діапазону відображення нулів/полюсів на комплексній площині. Використання цифрових моделей ПД-регуляторів, які отримані за використання різних класичних методів дискретизації, дає можливість за допомогою апарату теорії автоматичного керування здійснювати аналіз і пошук відмінностей у поведінці цифрових регуляторів, якщо розглядати їх як цифрові фільтри [2, 3].

## Висновки до розділу 2

1. Виконано детальний аналіз числових методів інтегрування як елементів цифрових систем як засобів законів регулювання під час роботи із системами автоматичного керування, що дозволило вибрати метод дослідження.

Проведено дослідження цифрових моделей на підставі числових методів інтегрування методів нулів і полюсів.

2. За рахунок мінімізації амплітудних та фазових похибок від процесу дискретизації, найраціональнішим є використання інтеграторів невисокого порядку – першого та другого (рисунки 2.3-2.4). Такий висновок справедливий не залежно від структури синтезованої цифрової системи та місця розміщення в ній числового інтегратора. Формули високого порядку вносять значні похибки у змодельовану замкнену систему (рисунок 2.2).

3. У випадку аналізу за допомогою методу нулів/полюсів, отримані дискретизацією аналогового прототипу з використанням числових методів високого порядку, також продемонстрував неефективність застосування методів високого порядку. Методи ускладнюють результуючу комп'ютерну модель, оскільки вносять в дискретну передавальну функцію цифрової моделі додаткові нулі і полюси, що має вплив на поведінку системи (рисунок 2.9). Тому числові методи високого порядку є неефективними для моделювання електротехнічних систем.

## РОЗДІЛ 3 МЕТОД ВІДПОВІДНОСТІ НУЛІВ І ПОЛЮСІВ ЯК РАЦІОНАЛЬНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ

Зростання кількості обчислювальної потужної техніки в комплексі сучасних комп'ютерних систем, дає змогу збільшувати діапазон задач в електротехніці, та електроенергетиці зокрема, які можна вирішити. Як наслідок, такі можливості впливають на появу розвинених мікроконтролерних систем, за допомогою яких, інтелектуальні закони керування в цій галузі стають доступними та ймовірними. Як вже було згадано, такі процеси розвитку апаратної частини не можуть відбуватись без розвитку програмного забезпечення, яке робить можливості сучасних комп'ютерних систем зрозумілими для користувачів із різним рівнем підготовки.

Цей прогрес полегшує не лише процес розв'язування, а і самої постановки задачі. Наприклад, задача аналізу динаміки великої енергетичної системи та дослідження її стійкості під час її роботи в реальному часі [27]. Такий аналіз та дослідження дають змогу оперативно керувати великими системами, зокрема, через розвиток технологій SmartGrid оперативне керування є актуальним та необхідним.

Динамічний розвиток електротехніки та вихід електротехнічних систем на новий рівень потребує нових підходів, які з достатньою точністю в умовах роботи в реальному часі швидко надаватимуть інформацію про проблему та варіанти швидкого вирішення. Тому необхідністю стає пошук та створення нових методів для розробки ефективних та швидкодіючих комп'ютерних моделей електротехнічних систем, які в свою чергу зможуть бути вбудовані в роботу сучасних систем з імпульсними елементами.

Певним традиційним підходом є розв'язування задач динаміки технічних систем за допомогою опису системи, яку досліджують, звичайним диференціальним рівнянням з використанням розв'язку за прикладом Siddhartha Kumar Haitian and Anshan Gupta [27]. Звісно, числові методи відповідно до задачі



використовують як найбільш універсальний спосіб [25, 35]. Враховуючи, що класичні числові методи це апроксимація розв'язку, який обмежений розкладом в ряд Тейлора [25]. Ряд Тейлора у свою чергу існує лише у випадку гладких неперервних диференційованих функцій. В той час, як більшість задач електротехніки представлені не гладкою та диференційованою функцією, наприклад, аналіз імпульсних систем, комутації обладнання тощо. Не ідеальним, проте частковим вирішенням цього є нові алгоритми адаптації кроку розв'язування числового методу до поведінки самої функції. Для прикладу, пошук точки комутації, яку вибирають у ролі початкової умови для наступного кроку [25].

У працях професора А.Ф.Верланя [36, 37, 38] та професора Р.В.Фільца [39, 40] є напрацювання аргументів та висновків щодо переваг інтегральних методів розв'язування задач динаміки технічних систем. До таких інтегральних методів можна віднести і операторні методи, включно з z-перетворенням, ефективність якого для розв'язування широкого спектру задач динаміки продемонстрована як його творцями Eliahu I. Jury та Julius T. Tou у роботах [20, 26], так і більш сучасними дослідниками – Jon M. Smith [3].

Авторами досліджень [20, 26, 42] конструктивно та просто пояснюється недолік традиційного підходу до розв'язування задач динаміки – під час операції диференціювання втрачається частка інформації. Наприклад, в процесі реалізації операції диференціювання полінома, така операція призведе до зниження його порядку. Звісно, якщо враховувати початкові умови (задача Коші), то у випадку розв'язування диференціальних рівнянь можна відновити втрачену інформацію. Проте, якщо будуть використовуватись числові методи з'являється інша проблема – виникає числова нестійкість та накопичуються похибки у функції розв'язку. З точки зору технічних явищ, пояснення цьому також просте: диференціатор (математичний відповідник – операцію диференціювання) чутливий до шумів і завад, і чим вища частота завад, тим суттєвіший її вплив. У випадку числових методів, такими шумами і завадами є похибки арифметичного

округлення, похибка методу тощо. Водночас, інтегральні методи є не є вразливими до розривів функції розв'язку і доволі безпроблемно розв'язують задачі динаміки з імпульсними елементами [36-40].

Завдяки своїй ефективності, підхід з використанням z-форм став одним з основних інженерних способів проектування та моделювання широкого спектру дискретних систем. В тому числі моделювання цифрових регуляторів систем керування – цифрових фільтрів. Підхід з використанням z-форм – це наближений спосіб отримати дискретну передавальну функцію, що базується на аналоговому

прототипі за допомогою заміни неперервної операції інтегрування  $\frac{1}{s}$  її

дискретною апроксимацією  $\frac{h}{2} \cdot \frac{1+z^{(-1)}}{1-z^{(-1)}}$ , що є відповідником неявної формули

трапеції [41]. Але і такий спосіб має свій недолік – невисока точність, яка із збільшенням кроку зменшується. Це у свою чергу зумовлює той факт, що підстановка Тастіна здебільшого застосовується у цифрових системах та комп'ютерних моделях, в яких робоча частота принаймні в 10-15 разів нижча, ніж частота відліків, що визначається теоремою відліків Котельникова-Шеннона [41].

Значний обсяг аналітичної роботи є одним з основних недоліків використання z-перетворення для комп'ютерних моделей. До того ж, його доволі складно автоматизувати навіть із застосуванням сучасних комп'ютерних програм. Із ростом складності об'єкту моделювання, складність процесу побудови дискретної моделі зростатиме непропорційно, спонукаючи до розкладу всієї моделі на простіші складові. Це також призводить втрати точності через появу додаткових вузлів дискретизації [9, 26, 41]. Використання підходів, що використовують спрощені способи переходу до дискретних передавальних функцій, як білінійне перетворення чи z-форми, призведе до зменшення точності та залежності від періоду дискретизації [41].

Усі способи пошуку реакції динамічних систем на зовнішнє збурення зводяться до пошуку інтегралу згортки тим чи іншим способом (рисунок 3.1).

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot w(t - \tau, y) d\tau} \rightarrow y(t)$$

Рисунок 3.1 – Зображення задачі пошуку реакції  $y(t)$  електротехнічної системи.

Пряме знаходження інтегралу згортки для більшості задач є складним процесом, іноді навіть неможливим. Проблема полягає в тому, що повинні бути відомі або аналітично задані не лише складові інтегралу згортки:

- вхідний сигнал або збурення  $x(t)$ ;
- динамічна характеристика системи у вигляді імпульсної перехідної функції  $w(t, y)$ ,

а й спосіб інтегрування сумарного підінтегрального виразу.

Динамічна характеристика керованої електротехнічної системи в більшості випадків відома або задана. Втім, задана вона, зазвичай, не безпосередньо часовою залежністю, наприклад, її імпульсної перехідної функції  $w(t)$ . Знаходження аналітичного виразу для такої функції в окремих випадках часто зводиться до нетривіальної задачі, але подається однією з двох традиційних форм:

- у вигляді передавальної функції  $W(s)$ . В такому випадку визначення інтегралу згортки найчастіше реалізовується операторний метод на основі перетворення Лапласа;
- у вигляді системи звичайний диференціальний рівнянь. В такому випадку інтеграл згортки визначається числовими методами.

Опис вхідного сигналу або збурення  $x(t)$ , на відміну від імпульсної перехідної функції, найчастіше є невідомим. Звісно, не у випадку, коли вхідний сигнал це одинична стрибкоподібна функція  $l(t)$  або інший тестовий сигнал, що можна описати аналітично. У більшості випадків, в тому числі у комп'ютерному моделюванні або в системі автоматичного регулювання, оскільки сигнал на вході  $x(t)$  є довільним, то аналітичний опис є невизначеним.

Іншим ускладнюючим фактором для цифрових систем (зокрема, для комп'ютерних моделей) є необхідність оперувати сигналами лише за їхніми відліками  $x(t_i)$ , як наслідок інформація в проміжках між ними втрачається. В такому випадку стає недоступним прямий шлях визначення інтегралу згортки. Тому важливим моментом у знаходженні інтегралу згортки, є побудова процесу перетворення сигналу для визначення аналітичного виразу, який опише вхідний сигнал або збурення  $x(t)$ .

Апроксимація всього інтегралу згортки за допомогою числового інтегратора є одним з традиційних підходів для вирішення такої задачі. Як вже було згадано раніше, одним з популярних способів апроксимації є розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують динаміку системи, із використанням відповідних числових методів. Властивість числових методів апроксимувати одночасно аналітично невизначений сигнал  $x(t)$  та імпульсну перехідну функцію  $w(t)$  (в чому взагалі немає необхідності, адже її точний опис вже є відомий), є причиною основного недоліку числових методів під час розв'язування задач.

У випадку, коли мова йде про реальні електромеханічні системи, межа інтегрування в часовому проміжку є фіктивною починаючи з  $-\infty$ , а також інформації про початкове значення вихідної координати  $y(t)$  не передбачається, тому приймається за основу, що спочатку динамічна система перебувала в стані повного спокою. Таким чином, за умови традиційного підходу, інтеграл згортки шукають для нульових умов. Тому для розрахунку динаміки електромеханічних систем, актуальною залишається проблема визначення інтегралу згортки для системи, що вже перебуває в русі в певний заданий момент часу, тобто не в нульових початкових умовах. Окрім цього, інтеграл згортки не може бути розбитим на окремі проміжки інтегрування за умовою часу, як інші визначені інтеграли, тому потрібно знайти спосіб визначення інтегралу згортки у визначеному проміжку інтегрування з врахуванням початкового значення вихідної координати.

### **3.1. Метод відповідності нулів і полюсів як базовий метод z-перетворення.**

На етапі виникнення необхідності визначення вибірки дискретних значень сигналу у вигляді послідовності чисел, z-перетворення для інженерів стало певним рішенням для таких задач. Така вибірка дискретних значень була потрібною інженерам зв'язку та для дослідження управління вибіркою даних в телеметричних системах. Однак і в застосуванні z-перетворення виникла проблема – отримання дискретної передавальної функції  $W(z)$ , яка б описувала систему. Наступним викликом після отримання такої дискретної передавальної функції стало знаходження вихідного сигналу в часовій області  $y(t)$ . Для цього виклику пропонуваним рішенням було отримання рекурентної формули, за використанням якої можна обчислювати послідовні значення для шуканої вихідної функції [60].

Попри згадані перешкоди на різних етапах застосування z-перетворення, варто відзначити і велику перевагу операції. За допомогою z-перетворення, аналогічно як і за допомогою перетворення Лапласа, якщо відомий вхідний сигнал і система лінійна, то можна отримати аналітично точний розв'язок для вихідного сигналу. Однак і це не універсальним рішенням для моделювання, адже в складних системах зі зворотними зв'язками вхідні сигнали внутрішніх блоків в більшості випадків є результируючою сумою сигналів з вихідних сигналів попередніх блоків та зворотних зв'язків. Для таких випадків отримати аналітичний вираз перетворення Лапласа для вхідного сигналу кожного блоку чи системи окремо практично неможливо. Тому на практиці застосовують процедури перетворення вхідного сигналу на його апроксимації простішими функціями, для яких існує перетворення Лапласа.

Доволі не складно опрацювати процес знаходження вихідного сигналу системи за допомогою z-перетворення, яке як і перетворення Лапласа, є аналітичним процесом. Водночас розуміння необхідності процесу перетворення

(або апроксимації) вхідного сигналу та його фізичного змісту в z-перетворенні є нетривіальною задачею.

У випадку, коли неможливо знайти аналітичний вираз для сигналу на входу блоку, який досліджується, можна використати пристрої, які в теорії автоматичного керування називають фіксаторами. Фіксатори на певному проміжку довжиною кроку  $h$  виконують апроксимацію (фіксацію) довільного вхідного сигналу частинами поліномів невисокого порядку, найчастіше – не вище першого. За таких умов передавальна функція відповідного фіксатора стає аналітичним описом вхідного сигналу. Звісно, цей опис є наближеним, оскільки поліноміальна апроксимація для довільної кривої виконується лише з певним наближенням (певною точністю).

Вже згадувалось, що розвиток математичних застосунків для символної або аналітичної математики дає можливість спростити процес отримання дискретних передавальних функцій для систем, які описані неперервними передавальними функціями з використанням перетворення Лапласа. Для цього використовують метод відповідності (відображення) нулів і полюсів. Нижче наведено короткий алгоритм такого використання [11, 12, 13].

1. Для неперервної передавальної функції моделі системи, яка досліджується, знаходять всі нулі  $Z_i$  ( $i = 1 .. m$ ) і полюси  $P_j$  ( $j = 1 .. n$ ), де порядок полінома чисельника дорівнює  $m$ , а порядок полінома знаменника –  $n$ , водночас  $n \geq m$ .
2. Перехід до дискретної передавальної функції, яка записана у формі нулів і полюсів з використанням співвідношення [13]  $z = e^{sh}$ , де  $h$  – крок часової дискретизації:
  - дискретні нулі визначити виразом  $Z_{(d_i)} = e^{(z_i h)}$ , де  $i = 1 .. m$ ;
  - дискретні полюси визначити виразом  $P_{(p_j)} = e^{(p_j h)}$ , де  $j = 1 .. n$ .
3. Пошук для дискретної передавальної функції відкоректованого коефіцієнта передачі  $K^*$ .

Узагальнений вигляд описаного способу:

$$\begin{aligned}
K \frac{\sum_{i=1}^m (s - Z_i)}{\sum_{j=1}^n (s - P_j)} &\Rightarrow K^* \frac{\sum_{i=1}^m (z - e^{Z_i \cdot h})}{\sum_{j=1}^n (z - e^{P_j \cdot h})} \Rightarrow \\
\Rightarrow K^* &= \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - P_j)} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\prod_{j=1}^n (z - e^{P_j \cdot h})}{\prod_{i=1}^m (z - e^{Z_i \cdot h})}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Знову слід зауважити, що для моделей систем лінійного та лінеаризованого характеру, або у випадку відомих вхідних сигналів, метод наведений вище дає аналітично точний результат [14, 15].

Для того, щоб спростити процес використання методу (3.1), застосовують розкладання передавальної функції електричної системи на елементарні динамічні ланки. Тобто, шукають дискретні передавальні функції (або ж – реакції) для всіх елементарних, більш простіших складових, після чого сумують для одержання остаточної реакції системи. У випадку, коли система містить нелінійні елементи, можна застосувати принцип кусково-лінійної апроксимації. Такий підхід дозволяє розглядати електричну систему як лінійну на кожному окремому інтервалі. Реалізуючи кусково-лінійну апроксимацію, часовий інтервал дискретності можна обрати достатньо малим з умови зменшення похибок кусково-лінійної апроксимації. Для того, щоб використовувати такий принцип апроксимації для реальних електротехнічних систем, які можна описати правильною дробово-раціональною передавальною функцією (або декількома такими функціями), порядок полінома знаменника повинен перевищувати порядок полінома чисельника. Справедливість цієї умови полягає в тому, що посилаючись на основну теорему алгебри (або ж теорема розкладання Хевісайда), можна розкласти передавальну функцію такої системи на елементарні складові, дроби типу  $\frac{b}{s}$ ,  $\frac{b}{s+a}$  і  $\frac{c \cdot s + d}{s^2 + p \cdot s + q}$  (рисунок 2 і рисунок

3):

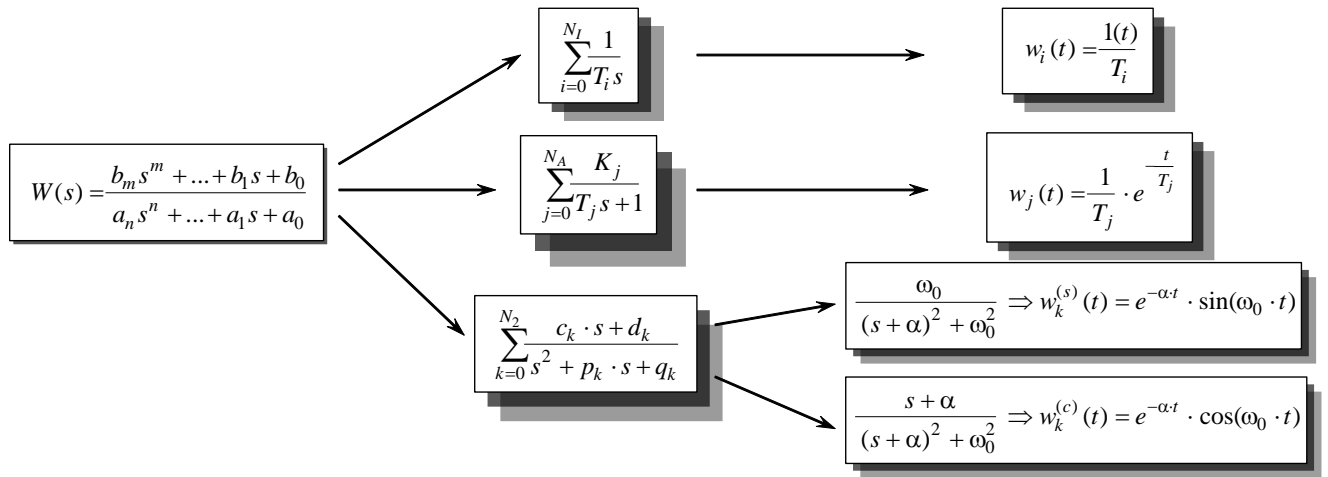


Рисунок 3.2 – Схема розкладання передавальної функції на елементарні складові

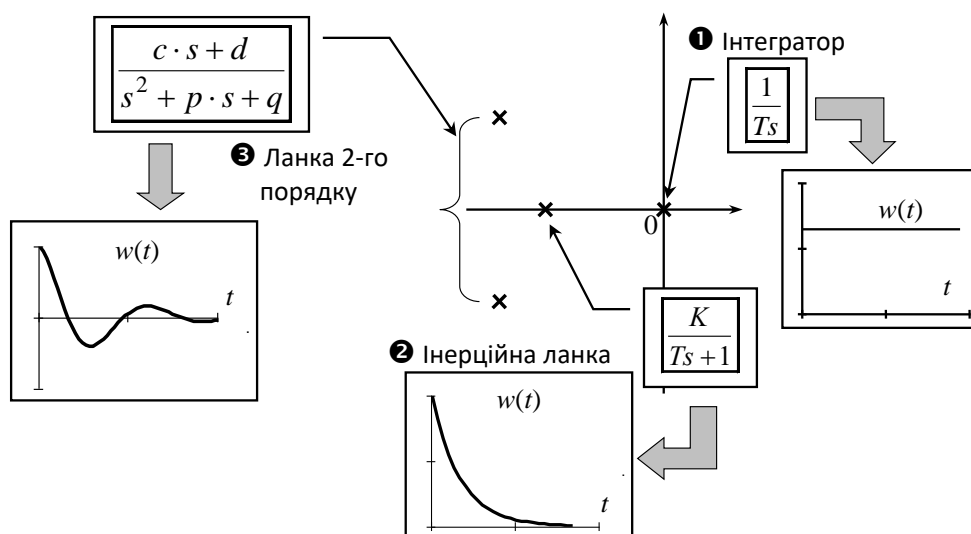


Рисунок 3.3 – Розміщення полюсів елементарних динамічних ланок та відповідні їм імпульсні перехідні характеристики

Для рисунку 3.3:

- $\frac{b}{s}$  - відповідник інтегруючої ланки (або нульового полюсу), яка має передавальну функцію  $\frac{1}{T \cdot s}$  та імпульсну перехідну функцію  $w(t) = \frac{1(t)}{T}$ ;
- $\frac{b}{s+a}$  - відповідник ланки першого порядку (або дійсного полюсу), передавальна функція та імпульсна перехідна функція  $\frac{K}{T \cdot s + 1}$  та  $w(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$  відповідно;



-  $\frac{c \cdot s + d}{s^2 + p \cdot s + q}$  - складова, яка враховує пару комплексно-спряжених полюсів і

є сумою двох складових з відповідними ваговими коефіцієнтами:

- Коефіцієнт, передавальна функція якого  $\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ , а імпульсна

перехідна функція -  $w(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$  (синусна складова);

- Коефіцієнт, передавальна функція якого  $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ , а імпульсна

перехідна функція -  $w(t) = e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$  (косинусна складова).

Для застосування паралельної декомпозиції електротехнічної системи, використання розкладання повної передавальної функції системи на елементарні складові з імпульсними перехідними характеристиками  $w_i(t)$  є неабияким рішенням. Адже паралельна декомпозиція, в свою чергу, необхідна для подальшого знаходження відгуку цілої системи як суми відгуків елементарних складових (рисунок 3.4).

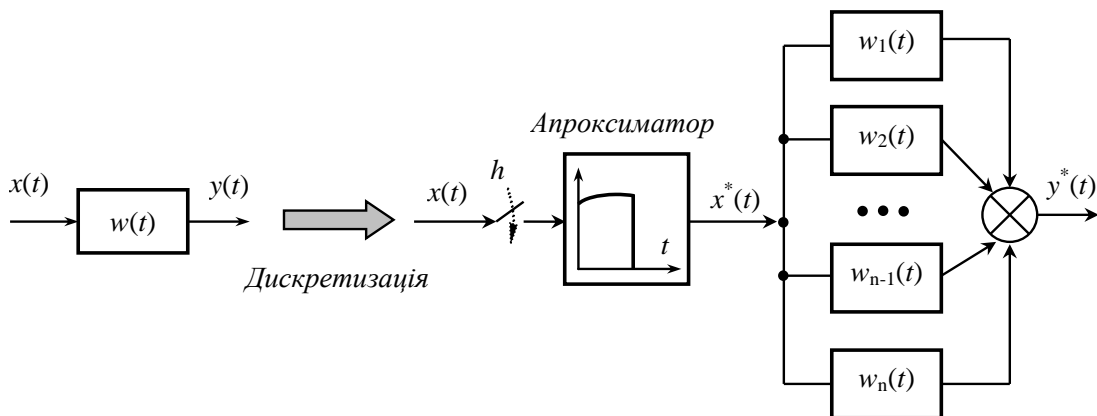


Рисунок 3.4 – Паралельна декомпозиція неперервної передавальної функції

Два аргументи щодо суттєвої переваги паралельної декомпозиції відносно інших способів:

- у випадку паралельної декомпозиції вводиться лише один вузол (точка) дискретизації перервного сигналу  $x(t)$ , щоб створити його дискретну апроксимацію  $x^*(t)$ . Це зменшує сумарні похибки через втрату інформації під час переходу до дискретної системи;

- щоб значно зменшити вплив поганої обумовленості характеристичного рівняння дискретної передавальної функції зі зменшенням кроку, корені характеристичного рівняння неперервної передавальної функції визначають з наступним отриманням їхнього дискретного відображення в одиничному колі (для дискретної системи). Це дозволяє зменшити чутливість синтезованої дискретної системи (якщо конкретніше, то отриманого рекурентного рівняння) до похибок округлення та обмеженої розрядності обчислювального пристрою) [43].

### 3.2. Формування методом нулів і полюсів цифрових моделей елементарних динамічних ланок

Якщо зводити всі можливі варіанти знаходження перехідних процесів динамічних ланок до невеликого набору, можна виробити оптимальний варіант побудови обчислювальної схеми. Отримані таким способом рекурентні формули є абсолютно стійкими для будь-яких періодів дискретизації, а у випадку математичного чи комп'ютерного моделювання – кроку розв'язування.

У випадку, коли інтегратор неперервний, буде лише один нульовий полюс, який відповідає одиничному дискретному полюсу. За отриманою дискретною передавальною функцією, рекурентне рівняння для моделювання матиме вигляд:

$$\frac{1}{Ts} \Rightarrow \frac{h/T}{z-1} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{T} \cdot x_i \quad (3.2)$$

Ланка першого порядку є відповідником одиничного дійсного полюсу і є аналогом звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x.$$

Власне, ця умови відповідності і зумовлює універсальність ланки

першого порядку як базового елемента в процесах синтезу цифрових систем, в тому числі і під час комп'ютерного моделювання. Застосовуючи відображення одиничного полюса, можна отримати цифрову модель ланки першого порядку:

$$\frac{K}{Ts+1} \Rightarrow \frac{\left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right)K}{z - e^{-\frac{h}{T}}} \Rightarrow y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot K \cdot x_i \quad (3.3)$$

Для неперервної передавальної функції ланки другого порядку  $\frac{c \cdot s + d}{s^2 + p \cdot s + q}$ , застосування методу відповідності нулів/полісів отримано дискретну передавальну функцію та відповідну рекурентну формулу:

$$\begin{aligned} \frac{c \cdot s + d}{s^2 + p \cdot s + q} &\Rightarrow \frac{(s - Z_1)}{(s - P_1)(s - P_2)} \begin{cases} Z_1 = -d/c; \\ P_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1^* = e^{-d \cdot h/c}; \\ P_{1,2}^* = e^{h \cdot \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}; \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{K^*(z - Z_1^*)}{(z - P_1^*)(z - P_2^*)} \Rightarrow \frac{K^*(z - Z_1^*)}{z^2 - (P_1^* + P_2^*)z + P_1^*P_2^*} \Rightarrow \frac{(z - V_C) \cdot K^*}{z^2 - V_A \cdot z + V_B} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для (3.4) допоміжні змінні:

$$V_A = 2e^{-\frac{p}{2}h} \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}h\right)$$

$$V_B = e^{-h \cdot p}$$

$$V_C = e^{-\frac{d}{c}h}$$

Знайдений відкоректований коефіцієнт передачі дискретної передавальної функції матиме вигляд:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{c \cdot s + d}{s^2 + p \cdot s + q} = \frac{d}{q} \Rightarrow \frac{d}{q} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - V_C) \cdot K^*}{z^2 - V_A \cdot z + V_B} \Rightarrow K^* = \frac{d \cdot (1 - V_A + V_B)}{q \cdot (1 - V_C)} \quad (3.5)$$

А після алгебраїчних перетворень, рекурентна моделювальна формула виглядатиме наступним чином:

$$y_{i+1} = V_A y_i - V_B y_{i-1} + K^* \cdot (x_i - V_C x_{i-1}) \quad (3.6)$$

Отримана дискретна передавальна функція має один дійсний дискретний нуль і два дискретних полюси, які також потраплятимуть в одиничне коло області стійкості дискретних систем у випадку стійкої неперервної системи. Наведені вище рекурентні рівняння, які отримані з відповідних дискретних

передавальних функцій є стійкими для будь-якого періоду дискретизації або кроку моделювання. Це зумовлено тим, відповідно до прикладної математики, в них є властивість сильної стійкості. В такому випадку, вибір періоду дискретизації для отриманих таким способом рекурентних рівнянь, визначатиметься уже не за умовою стійкості числового методу, а за необхідним для дослідника рівнем точності та деталізації процесу, який досліджується.

Водночас, варто згадати і про несприятливі наслідки у випадку збільшення кроку:

- фазна похибка (або фазний зсув) внаслідок процесів часової дискретизації [41, 42]. У випадку, коли неперервний прототип є стійким, а після процесу дискретизації зі збільшенням кроку з'являється фазна похибка, замкнена цифрова система керування може зазнати нестійкості цифрової моделі. Така ж ситуація буде і в процесі комп'ютерного моделювання замкнених систем автоматичного керування.

- втрата інформації. Відповідно до наслідку теореми відліків Шеннона-Котельникова, коли через великий період дискретизації (крок моделювання), система не пропускає високочастотні складові робочого спектру сигналу.

Разом з тим, втрата інформації несе меншу загрозу ніж фазна похибка. Якщо система автоматичного керування, яка є низькочастотним фільтром, спроектована правильно, то вміст вищих складових у робочому спектрі є незначним. Окрім цього, втрата невеликої частини вищих складових спектру, здебільшого, не призводить до фазних зсувів і тому не має впливу на стійкість системи.

### **3.2.1. Динамічна ланка першого порядку**

На прикладі динамічної ланки першого порядку можна розглянути базовий процес застосування методу нулів і полюсів для формування динамічних ланок. Це зумовлено кількома причинами. По-перше, ланка першого з одним дійсним

поллюсом дозволяє отримати будь-яку ланку іншого типу. По-друге, така ланка – відповідним звичайного диференціального рівняння першого порядку. Таке рівняння є базовим для опису більшості елементів електротехнічних систем і для такого рівняння відомі методи розв’язування:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{T \cdot s + 1} \Leftrightarrow T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) \quad (3.7)$$

На рисунку 3.5 наведена структура, яка складається з ланки першого порядку (один лінійний полюс). Також, ланка охоплена одним додатним зворотним зв’язком, що у свою чергу дозволяє отримати ланку з нульовим полюсом, тобто, інтегруючу ланку, яку легко довести сумарною передавальною функцією:

$$W_i(s) = \frac{\frac{1}{T_1 s + 1}}{1 - \frac{1}{T_1 s + 1}} = \frac{1}{T_1 s} \quad (3.8)$$

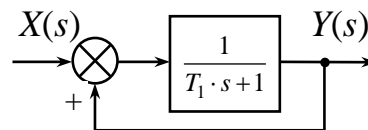


Рисунок 3.5 – Модель інтегруючої ланки

Для моделі зображеної на рисунку 3.5 диференціальне рівняння матиме вигляд:

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) + y(t) \quad (3.9)$$

Структура, зображена на рисунку 3.6, де є один дійсний полюс та дві послідовно з’єднані ланки першого порядку, які охоплені одиничним зворотним зв’язком, дозволяє отримати динамічну ланку з парою комплексно-спряжених полюсів, що легко довести сумарною передавальною функцією:

$$W_2(s) = \frac{\frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}} = \frac{1/2}{\frac{T_1 T_2}{2} s^2 + \frac{T_1 + T_2}{2} s + 1} \quad (3.10)$$

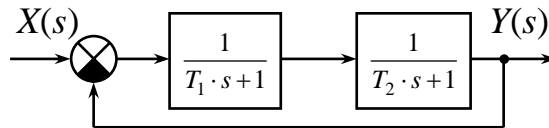


Рисунок 3.6 – Структура моделі ланки з парою комплексно-спряжених полюсів

Для структури на рисунку 3.6 відповідним відтворенням через диференціальні рівняння, буде системи наступного вигляду:

$$\begin{cases} T_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = x(t) - y_2(t); \\ T_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = y_1(t); \end{cases} \quad (3.11)$$

де  $y(t) = y_2(t)$ .

Така конфігурація має недолік – неповна відповідність класичній коливній ланці другого порядку з передавальною функцією  $\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ . Це можна пояснити тим, що діапазон можливих змін коефіцієнта демпфування  $\xi$  залежно від співвідношення сталих часу  $T_1, T_2$  еквівалентного кола замалий (рисунок 3.7).

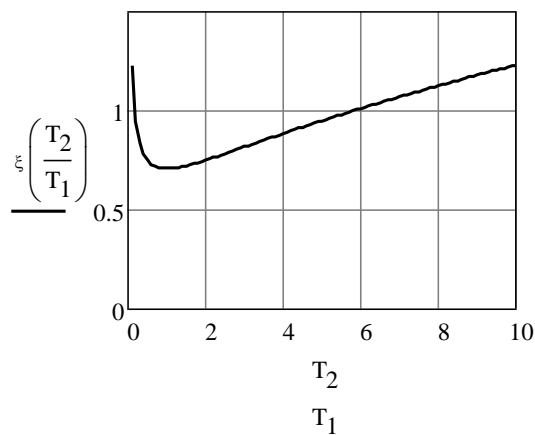


Рисунок 3.7 – Залежність коефіцієнта демпфування від співвідношення сталих часу  $T_1, T_2$ .

Через цей недолік, доречним буде використання дещо зміненої структури (рисунок 3.8)

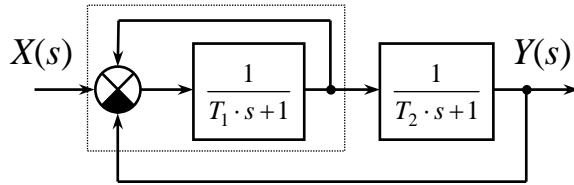


Рисунок 3.8 – Побудова моделі ланки з парою комплексно-спряжених полюсів

Отже, для такої зміненої структури, яка складається з двох послідовно з'єднаних ланок першого порядку (з одним дійсним полюсом), які охоплені:

- перша ланка – додатним одиничним зворотним зв'язком, що перетворює таке поєднання на еквівалентну інтегруючу ланку;
- загальним від'ємним одиничним зв'язком, який дає змогу отримати ланку з парою комплексно-спряжених полюсів, з передавальною функцією:

$$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Як і у випадку структури з рисунку 3.6, це легко доводиться сумарною передавальною функцією:

$$W_i(s) = \frac{\frac{1}{T_1 s + 1}}{1 - \frac{1}{T_1 s + 1}} = \frac{1}{T_1 s}; \quad W_2(s) = \frac{\frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (3.12)$$

А відповідна система диференціальних рівнянь для зміненої структури виглядатиме:

$$\begin{cases} T_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = x(t) + y_1(t) - y_2(t); \\ T_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = y_1(t); \end{cases} \quad (3.13)$$

де  $y(t) = y_2(t)$ .

Такі зміни та використання структури з рисунку 3.8 дозволяє варіювати коефіцієнт демпфування  $\xi$  залежно від співвідношення сталих часу  $T_1, T_2$  в широких межах. Реалізація дослідження моделі динамічної ланки з парою комплексно-спряжених полюсів в середовищі Mathcad наведено в Додатку Д.

### 3.2.2. Динамічна ланка другого порядку

Враховуючи, що підхід відображення нулів і полюсів є ефективним для ланок першого порядку, спробуємо застосувати цей метод на прикладі динамічної ланки другого порядку – пружній динамічній системі та однофазній моделі короткозамкненого асинхронного двигуна.

За об'єкт дослідження приймаємо просту коливну механічну систему, функціональна схема якої наведена на рисунку 3.9.

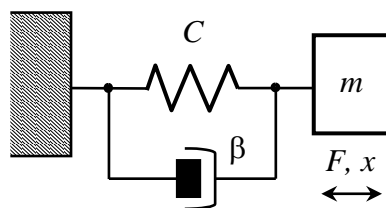


Рисунок 3.9 – Функціональна схема простої коливної механічної системи.

Описати систему можна диференціальним рівнянням другого порядку (3.14)

$$m \cdot x'' + \beta x' + C \cdot x = F \quad (3.14)$$

де  $m$  – маса рухомої частини механічної системи;

$\beta$  – коефіцієнт демпфування (вгамування);

$C$  – коефіцієнт пружності;

$F$  – зовнішні зусилля;

$x$  – переміщення рухомої частини механізму.

У випадку використання методу відображення нулів і полюсів до конкретно обраної механічної системи (рисунок 3.9) передавальна функція матиме вигляд (3.15), що у свою чергу є відповідником парі комплексно-спряжених полюсів  $P_{1,2}$ . Реалізація цього методу починається з простої, зокрема за рахунок використання сучасних математичних застосунків, дії – пошук неперервних нулів і полюсів цієї системи (3.16).

$$\frac{F}{ms^2 + \beta s + C} \quad (3.15)$$



$$ms^2 + \beta s + C \rightarrow P_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4Cm}}{2m} \quad (3.16)$$

Згідно із (3.16), пара дискретних полюсів

$P_{1,2}^*$  матиме наступний вигляд:

$$P_{1,2}^* = e^{\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4Cm}}{2m}} \quad (3.17)$$

І враховуючи рівняння пари дискретних полюсів отримуємо результуюче характеристичне рівняння дискретної передавальної функції:

$$\begin{aligned} (z - P_1^*)(z - P_2^*) &= \left( z - e^{\frac{-\beta + j\sqrt{4Cm - \beta^2}}{2m}h} \right) \left( z - e^{\frac{-\beta - j\sqrt{4Cm - \beta^2}}{2m}h} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow z^2 - 2 \cos\left(\frac{h\sqrt{4Cm - \beta^2}}{2m}\right) e^{-\frac{\beta h}{2m}} z + e^{-\frac{\beta h}{m}} & \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для отриманого рівняння позначаємо допоміжні змінні А та В

$$A = 2 \cos\left(\frac{h\sqrt{4Cm - \beta^2}}{2m}\right) e^{-\frac{\beta h}{2m}} \quad (3.19)$$

$$B = e^{-\frac{\beta h}{m}} \quad (3.20)$$

Підставивши допоміжні змінні в (3.18) та виконавши алгебраїчні перетворення, отримуємо рекурентну моделювальну формулу:

$$x_{i+1} = A \cdot x_i - B \cdot x_{i-1} + (1 - A + B) \cdot F \quad (3.21).$$

На рисунку 3.10 зображено результати розрахунку методом відображення нулів і полюсів поведінки механічної системи за умови прикладання до її рухомої частини деякі зусилля  $F=10 \text{ Н}$ .

Для порівняння, на цьому ж рисунку наведено графіки аналітичного розв'язку та похибки аналітичної системи з наступними параметрами:  $m = 0,05 \text{ кг}$  – маса рухомої механічної системи,  $\beta = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$  – коефіцієнт демпфування,  $C = 2 \text{ Н}/\text{м}$  – коефіцієнт пружності.

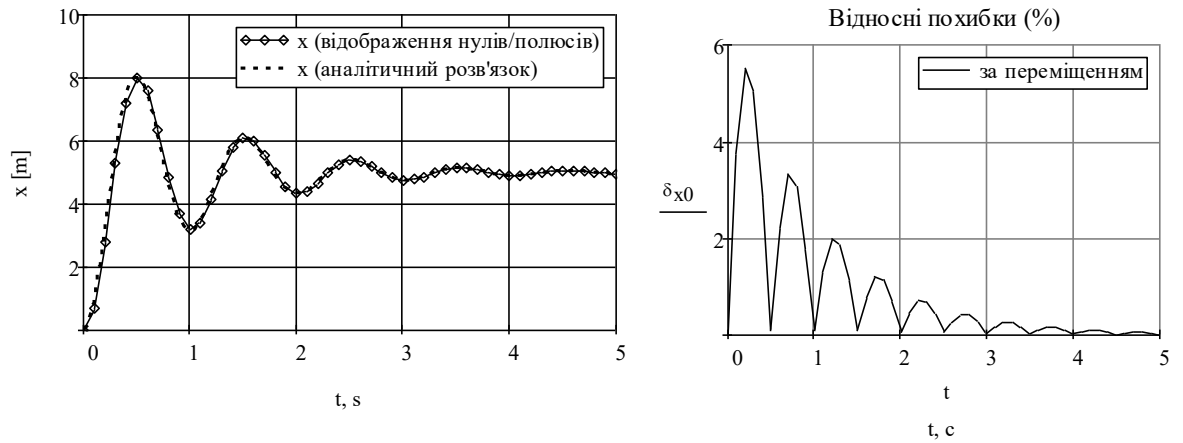


Рисунок 3.10 – Графіки переміщення для моделі простої механічної системи

Середньоквадратична похибка для переміщення відносно аналітичного розв'язку складала 1,5%. Це за умови фіксованого кроку розв'язування  $h=0,1$  с – 50 точок на весь проміжок часу розрахунку перехідного процесу. Реалізація методу відображення нулів/полосів наведена в Додатку Е.

Для більш ґрунтовного огляду методу відображення нулів і полюсів пропонується моделювання динаміки асинхронної машини. Асинхронний двигун є одним із ключових елементів сучасних електроприводів змінного струму. До того ж, при моделюванні такої електромеханічної системи можна комплексно оцінити переваги методу відображення нулів і полюсів.

Оскільки однофазна модель асинхронної машини в багатьох випадках дозволяє забезпечити достатню точність відтворення робочих координат і в своїй основі має еквівалентну Т-подібну заступну електричну схему (рисунок 3.11) розглянемо приклад.

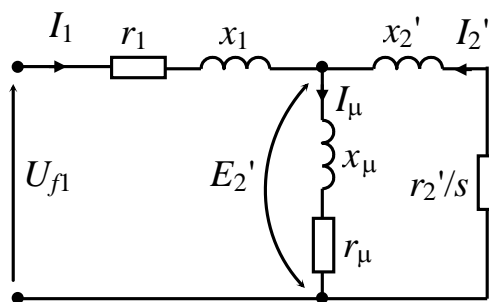


Рисунок 3.11 – Т-подібна заступна електрична схема моделі асинхронної машини.

Для заданої схеми вжито позначення:

$U_{f1}$  – діюче значення фазної напруги;

$I_1$  – діюче значення струму статора;

$I_2'$  – зведене до статора діюче значення струму ротора;

$r_1$  – активний опір статора;

$x_1$  – реактивний опір розсіювання статора;

$r_\mu$  – активний опір кола намагнічування;

$x_\mu$  – реактивний опір кола намагнічування;

$r_2'$  – зведений до статора активний опір ротора;

$x_2'$  – зведений до статора реактивний опір ротора;

$s = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$  – ковзання АМ, де

$\omega_0$  – синхронна кутова швидкість обертання;

$\omega$  – кутова швидкість ротора.

Для опису моделі на рисунку 3.11 відповідна система рівнянь [44, 45]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|x_1 + x_e(s)|}{\omega_e} \cdot \frac{dI_1}{dt} + I_1 \cdot |z_1 + z_e(s)| = U_{f1}; \\ \frac{|x_2'|}{\omega_e} \cdot \frac{dI_2'}{dt} + I_2' \cdot |z_2'(s)| = U_{f1} - I_1 \cdot |z_1|; \\ s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}; \\ M_{em}(s) = \frac{3I_2'^2 r_2'/s}{\omega_0}; \\ J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_{em}(s) - M_{mech}(s), \end{array} \right. \quad (3.22)$$

де  $\omega_e$  – кутова частота напруги мережі живлення;

$x_e(s)$  – зведений до статора еквівалентний реактивний опір ротора, який залежить від ковзання  $s$ ;

$$z_e(s) = \frac{z'_2(s) \cdot z_\mu}{z'_2(s) + z_\mu} - \text{зведений до статора еквівалентний імпеданс ротора,}$$

який залежить від ковзання  $s$ ; де  $z'_2(s) = \frac{r'_2}{s} + j \cdot x'_2$ ;  $z_\mu = r_\mu + j \cdot x_\mu$ ;

$M_{mech}(s) = M_{ном} (0.1 + 0.9 \cdot (1-s)^2)$  – момент навантаження (механічний момент) – імітація типового "вентиляторного" моменту навантаження, де  $M_{ном}$  – номінальний момент асинхронної машини.

Для експериментального дослідження для процесу прямого пуску з вентиляторним моментом навантаження асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором з використання методу відображення нулів і полюсів було використано наступні вхідні дані:

Таблиця 3.1

Вхідні дані експериментального дослідження

Параметр	Значення	Параметр	Значення
$P_{ном}$	30 кВт	$n_{ном}$	979 об./хв.
$r_1$	0.18 Ом	$r'_2$	0.09 Ом
$x_1$	0.47 Ом	$x'_2$	0.5 Ом
$\cos \varphi_{ном}$	0.9	$J_M$	0.45 кг·м <sup>2</sup>
$U_{f1}$	220 В	$J_\Sigma$	0.9 кг·м <sup>2</sup>
$p_n$	3		

З отриманого графіку на рисунку 3.12 бачимо, що сумарна модель є нелінійною значною мірою:

- 1) момент навантаження асинхронної машини має вентиляторну квадратичну механічну характеристику
- 2) електромагнітний момент описується нелінійною залежністю (в літературі згадана як формули Клоса) у функції ковзання машини  $s$ .

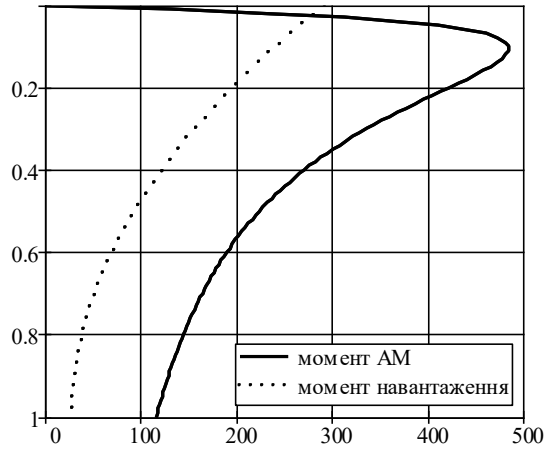


Рисунок 3.12 – Залежності моментів асинхронної машини і навантаження від ковзання  $s$

Увівши відповідні позначення для еквівалентних сталей часу моделі, дещо інакше запишемо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|x_1 + x_e(s)|}{\omega_e \cdot |z_1 + z_e(s)|} \cdot \frac{dI_1}{dt} + I_1 = \frac{U_{f1}}{|z_1 + z_e(s)|}; \\ \frac{|x'_2|}{\omega_e \cdot |z'_2(s)|} \cdot \frac{dI'_2}{dt} + I'_2 = \frac{U_{f1} - I_1 \cdot |z_1|}{|z'_2(s)|}; \\ s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}; \\ M_{em}(s) = \frac{3I_2'^2 r_2'/s}{\omega_0}; \\ J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_{em}(s) - M_{mech}(s), \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Вводимо еквівалентні сталі часу кола ротора (3.24) та статора (3.24).

$$T_1(s) = \frac{x_1 + x_e(s)}{\omega_e \cdot |z_1 + z_e(s)|} \quad (3.24)$$

$$T_2(s) = \frac{x'_2}{\omega_e \cdot |z'_2(s)|} \quad (3.25)$$

І отримуємо остаточну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(s) \cdot \frac{dI_1}{dt} + I_1 = \frac{U_{f1}}{|z_1 + z_e(s)|}; \\ T_2(s) \cdot \frac{dI'_2}{dt} + I'_2 = \frac{U_{f1} - I_1 \cdot |z_1|}{|z'_2(s)|}; \\ M_{em}(s) = \frac{3I_2'^2 r_2'/s}{\omega_0}; \\ J_\Sigma \frac{d\omega}{dt} = M_{em}(s) - M_{mech}(s). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

На цьому етапі варто зауважити, що еквівалентні сталі часу ротора (3.24) та статора (3.26) в комп'ютерній моделі є нелінійними і суттєво залежать від ковзання асинхронної машини  $s$ , що і зображено на рисунку 3.13.

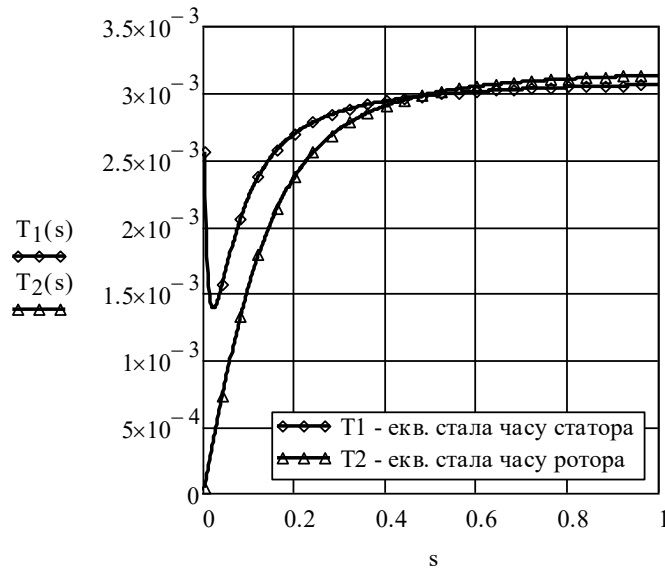


Рисунок 3.13 – Величини еквівалентних сталей часу моделі асинхронної машини у залежності від величини ковзання  $s$

Окрім графічного розв'язку та результатів, під час комп'ютерних досліджень, протягом процесу пуску асинхронного двигуна (зміна ковзання відбувалась в межах 0,002..1) величина співвідношення між кроком моделювання  $h=1$  мс та еквівалентними сталими часу статора і ротора змінювалась в таких межах:

$$0.33 \leq h/T_1 \leq 0.72 \text{ – більш, ніж удвічі};$$

$$0.32 \leq h/T_2 \leq 28.3 \text{ – практично на два порядки.}$$

Перш ніж складати систему рекурентних рівнянь для системи рівнянь (3.26) для подальшого комп'ютерного моделювання, варто звернути увагу, що кожна досліджувана координата (кутова швидкість, струми ротора і статора) описані диференціальним рівнянням першого порядку, тобто є ланками першого порядку. Це суттєво спрощує задачу і дає можливість застосовувати нескладні рекурентні формули [35, 46]. Власне таке застосування наведено нижче:

$$\begin{aligned}
 T \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x & \xRightarrow{\text{відображення за Лапласом}} \frac{K}{Ts + 1} \xRightarrow{\text{дискретна передавальна функція}} \frac{\left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) K}{z - e^{-\frac{h}{T}}} \xRightarrow{\text{рекурентне рівняння}} \\
 \Rightarrow y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot K \cdot x_i
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

І відповідно система рівнянь матиме наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned}
 s &= \frac{\omega_0 - \omega_i}{\omega_0}; \\
 I_{1i+1} &= I_{1i} \cdot e^{-\frac{h}{T_1(s)}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T_1(s)}}\right) \frac{U_{f1}}{|z_1 + z_e(s)|}; \\
 I_{2i+1} &= I_{2i} \cdot e^{-\frac{h}{T_2(s)}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T_2(s)}}\right) \frac{U_{f1} - I_{1i} \cdot |z_1|}{|z_2'(s)|}; \\
 M_{em} &= \frac{3I_{2i+1}^2 r_2' / s}{\omega_0}; \\
 \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{h}{J_\Sigma} \left( M_{em} - M_{\text{ном}} (0.1 + 0.9 \cdot (1 - s)^2) \right).
 \end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

Результати, які були отримані, були порівняні з еталонним обчисленням, які проведені в середовищі математичного застосунку Mathcad комбінованим методом Адамса-BDF – стандартною функцією розв'язування з автоматичним вибором кроку інтегрування. Точність обчислень встановлена на рівні  $10^{-6}$ .

А самі результати дослідження динамічної характеристики пуску асинхронної машини для фіксованого кроку моделювання  $h=1$  мс наведені на рисунку 3.14.

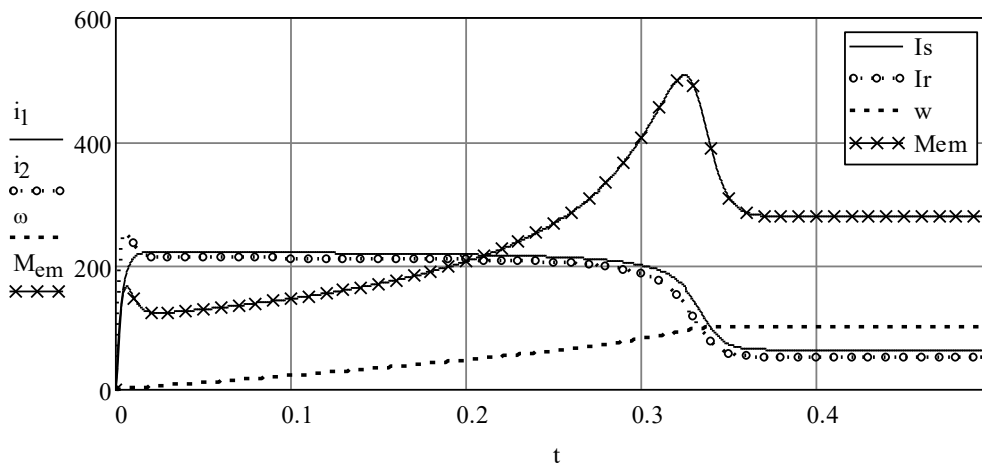


Рисунок 3.14 – Результати моделювання процесу пуску асинхронної машини для кроку  $h=1$  мс

Що стосується рівня похибок під час обчислень, то інтегральна середньоквадратична відносна та максимальна похибки були в межах:

- Для діючого струму статора – 0,4% та 2,4%.
- Для діючого струму ротора – 0,4% та 6%
- Для обертового моменту – 1,02% та 4,6%
- Для кутової швидкості – 0,42% та 0,66%.

Враховуючи, що обраним методом був метод відображення нулів та полюсів, для дослідження можна провести обчислення для більшого кроку  $h=5$  мс (100 точок на весь інтервал пуску). Результати таких обчислень наведені на рисунку 3.15.

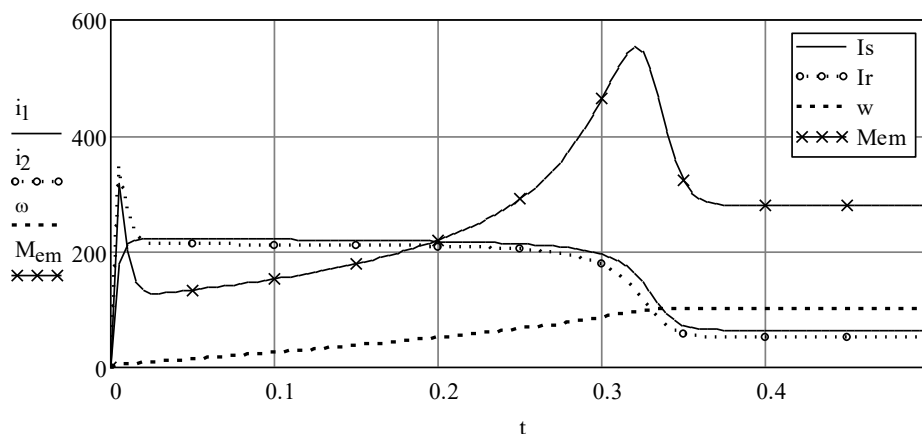


Рисунок 3.15 – Результати моделювання процесу пуску асинхронної машини для кроку  $h=5$  мс



І аналогічно для отриманих результатів інтегральна середньоквадратична відносна та максимальна похибки були в межах:

- Для діючого струму статора – 1,5% та 7,3%.
- Для діючого струму ротора – 1,5% та 44%
- Для обертового моменту – 5,8% та 33,6%
- Для кутової швидкості – 3,1% та 5,3%.

При проведенні обчислень із збільшеним кроком, співвідношення між кроком моделювання  $h$  та еквівалентними сталими часу ротора і статора коливалось між 1,63..3,6 та 1,6..141 відповідно. В такому випадку класичні числові методи непридатні для таких співвідношень кроку розв'язування і сталих часу через низьку точність та числову нестійкість у випадку фіксованого кроку [47].

Після реалізації дослідження комп'ютерної моделі із використанням методу відображення нулів і полюсів є декілька очевидних переваг методу:

- завдяки простоті формул та їх простій імплементації на мікроконтролерах є можливість реалізації систем моделювання в реальному часі;
- стійкість числового розв'язку незалежно від кроку моделювання;
- доступність реалізації паралельних обчислень завдяки застосуванню паралельної декомпозиції моделі системи, яка досліджується.

Окрім переваг в контексті комп'ютерного моделювання, метод відповідності нулів і полюсів ефективний і під час синтезу цифрових систем керування, оскільки:

- метод дозволяє реалізувати відомі з теорії автоматичного керування методи синтезу аналогових регуляторів;
- забезпечує рекурентні рівняння, які будуть простими та стійкими для широкого діапазону періодів дискретизації, до того ж реалізувати їх можна на малопотужних контролерах.

### **Висновки до розділу 3**

1. Досліджено метод відповідності нулів і полюсів як базовий метод  $z$ -перетворення, визначено його переваги та недоліки. Описано алгоритм застосування методу відповідності (відображення) нулів і полюсів.
2. Розроблено процедуру формування методом нулів і полюсів цифрових моделей елементарних динамічних ланок, яку реалізовано на прикладі динамічних ланок першого та другого порядку.
3. Виявлено, що декомпозиція, як підхід методу відображення нулів/полюсів, зменшує сумарні похибки через втрату інформації в процесі переходу до дискретної системи;
4. Розглянуто проблеми декомпозиції електротехнічних систем, зроблено висновок, паралельна декомпозиція дозволяє проводити паралельні обчислення параметрів моделі системи;

## РОЗДІЛ 4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

### *Комп'ютерні моделі електротехнічних систем*

Використання комп'ютерної техніки для моделювання та дослідження інженерних, в тому числі електротехнічних, систем стає все частішою практикою також через перехід від аналогових систем до цифрових. За допомогою такого моделювання, інженер має змогу створювати, редагувати модель та отримувати результати без об'ємних математичних розрахунків.

Одним із варіантів реалізації комп'ютерного моделювання є MATLAB. Модулі MATLAB мають широкий спектр можливостей. Наприклад, Simulink містить багато вбудованих готових інженерських моделей, які користувач змінює шляхом задавання параметрів. Окрім цього, можна проводити математичний аналіз, обробка та візуалізація даних.

На думку А.Луцика [48] використання пакету MATLAB для моделювання та дослідження об'єктів електроенергетики дозволяє пришвидшити процес побудови моделі, редагувати модель на будь-якому етапі, створити модель для схеми будь-якої складності та оперативно виконувати регулювання моделі.

### *Експерименти з мікроконтролером*

Для проведення експериментального дослідження використано відлагоджувальну плату STM Nucleo G474. Це плата розробки на основі мікроконтролера STM32G474RE від STMicroelectronics. Вона призначений для створення прототипів і тестування нових вбудованих систем і програм.

Плата оснащена процесором ARM Cortex-M4, що працює на частоті до 170 МГц, має 512 КБ флеш-пам'яті та 128 КБ SRAM. Він також включає різні комунікаційні інтерфейси, такі як USB, CAN, SPI, I2C, UART і PWM. Крім того, апаратний модуль роботи з числами з плаваючою комою (FPU – float point unit).

Плата Nucleo G474 включає сумісний з Arduino Uno інтерфейс, який дозволяє легко підключатися до зовнішніх компонентів і екранів. Він також має відладчик/програмактор ST-LINK, який дозволяє легко програмувати та

налагоджувати мікроконтролер за допомогою програмного забезпечення STM32CubeIDE.

Загалом, STM Nucleo G474 — це потужна та універсальна плата розробки, яку можна використовувати для широкого спектру проєктів вбудованих систем.

Для розрахунку рекурентного рівняння передавальної функції з чітко встановленим інтервалом використано операційну систему реального часу FreeRTOS. FreeRTOS — це операційна система реального часу (RTOS) з відкритим кодом, розроблена для мікроконтролерів і вбудованих систем. Вона надає набір функцій ядра, які забезпечують багатозадачність, взаємодію між завданнями, синхронізацію та керування пам'яттю, що полегшує розробку складних програм реального часу.

Однією з ключових особливостей FreeRTOS є її здатність планувати та розставляти пріоритети завдань на основі їх критичності, гарантуючи, що найважливіші завдання виконуються першими. Вона також підтримує різні механізми синхронізації, такі як семафори, м'ютекси та черги, які дозволяють завданням керовано спілкуватися та спільно використовувати ресурси.

FreeRTOS розроблена як легкий і ефективний, з невеликим обсягом пам'яті, що робить її придатною для використання в середовищах з низьким енергоспоживанням і обмеженими ресурсами. Вона також має широкі можливості конфігурації, що дозволяє розробникам налаштовувати її відповідно до конкретних вимог своєї програми.

Вона поширюється за ліцензією MIT, що дозволяє розробникам вільно використовувати та змінювати її навіть у комерційних проєктах.

Для експерименту із класичним диференціюванням та дискретизації за допомогою дискретних перетворень обрано схему, зображену на рисунку 4.1 та структурну схему моделі диференціювання на рисунку 4.2.

Завданням експериментального дослідження було підтвердити практично отримані висновки час комп'ютерного та математичного моделювання щодо

стійкості рекурентних рівнянь передавальних функцій числового інтегратора до кроку дискретизації.

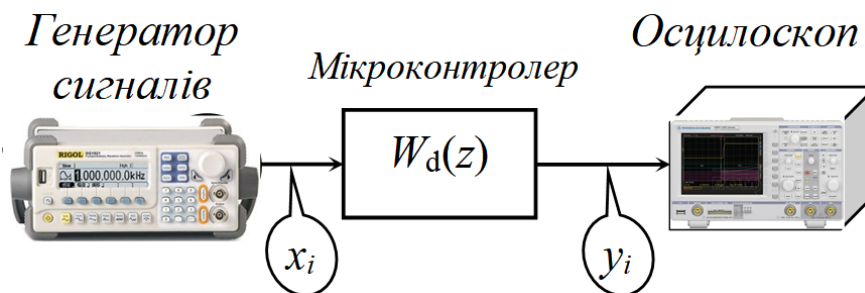


Рисунок 4.1 – Структурна схема експерименту

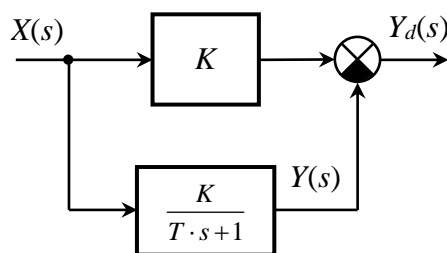


Рисунок 4.2 – Структурна схема моделі диференціювання

Виконані перетворення для диференціювання (4.1)

$$\begin{aligned}
 K = 10; \quad T = 1; \\
 \frac{K}{Ts+1} &\Rightarrow \frac{\left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right)K}{z - e^{-\frac{h}{T}}} \Rightarrow y_{i+1} = y_i \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot K \cdot x_i; \\
 k_1 = e^{-\frac{h}{T}}; \quad k_2 = \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right) \cdot K; \\
 \Rightarrow y_{i+1} &= y_i \cdot k_1 + k_2 \cdot x_i.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Для (4.1.) остаточною системою рівнянь для операції диференціювання:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i \cdot k_1 + k_2 \cdot x_i; \\ y_{d_{i+1}} = K \cdot x_i - y_{i+1}; \end{cases} \tag{4.2.}$$

Перехідна характеристика об'єкту керування 4-го порядку без розкладання на прості динамічні ланки:

$$\underline{W}(s) := \frac{1}{(0.2 \cdot s + 1) \cdot (0.4 \cdot s + 1) \cdot (0.1 \cdot s^2 + 0.4 \cdot s + 1)} \xrightarrow{\text{collect, s}} \frac{250.0}{2.0 \cdot s^4 + 23.0 \cdot s^3 + 105.0 \cdot s^2 + 250.0 \cdot s + 250.0}$$

Рисунок 4.3 – Об'єкт керування 4-го порядку

Створена дискретна передавальна функція:

Wod =

$$\frac{0.0008893 z^3 + 0.002668 z^2 + 0.002668 z + 0.0008893}{z^4 - 2.974 z^3 + 3.343 z^2 - 1.679 z + 0.3166}$$

Рисунок 4.4. – Дискретна передавальна функція рекурентне рівняння для об'єкту керування для кроку дискретизації  $h=0,1$  с:

$$y_{i+1} = 2.974 y_i - 3.343 y_{i-1} + 1.679 y_{i-2} - 0.3166 y_{i-3} + 0.0008893 x_i + 0.002668 x_{i-1} + 0.002668 x_{i-2} + 0.0008893 x_{i-3} \quad (4.3)$$

Дискретні передавальні функції для  $h=0,03$ с (рисунок 4.5),  $h=0,01$  с (рисунок 4.6),  $h=0,003$  (рисунок 4.7),  $h=0,001$  (рисунок 4.8):

Wod =

$$\frac{1.066e-05 z^3 + 3.199e-05 z^2 + 3.199e-05 z + 1.066e-05}{z^4 - 3.667 z^3 + 5.045 z^2 - 3.086 z + 0.7082}$$

Sample time: 0.03 seconds  
Discrete-time transfer function.

Рисунок 4.5 – Дискретна функція для кроку  $h=0,03$ с

Wod =

$$\frac{1.475e-07 z^3 + 4.426e-07 z^2 + 4.426e-07 z + 1.475e-07}{z^4 - 3.886 z^3 + 5.664 z^2 - 3.669 z + 0.8914}$$

Sample time: 0.01 seconds  
Discrete-time transfer function.

Рисунок 4.6 – Дискретна функція для кроку  $h=0,01$ с

Wod =

$$\frac{1.244e-09 z^3 + 3.732e-09 z^2 + 3.732e-09 z + 1.244e-09}{z^4 - 3.966 z^3 + 5.897 z^2 - 3.898 z + 0.9661}$$

Sample time: 0.003 seconds  
Discrete-time transfer function.

Рисунок 4.7 – Дискретна функція для кроку  $h=0,003$ с

Wod =

$$\frac{1.554e-11 z^3 + 4.661e-11 z^2 + 4.661e-11 z + 1.554e-11}{z^4 - 3.989 z^3 + 5.966 z^2 - 3.966 z + 0.9886}$$

Sample time: 0.001 seconds

Discrete-time transfer function.

Рисунок 4.8 – Дискретна функція для кроку  $h=0,01c$

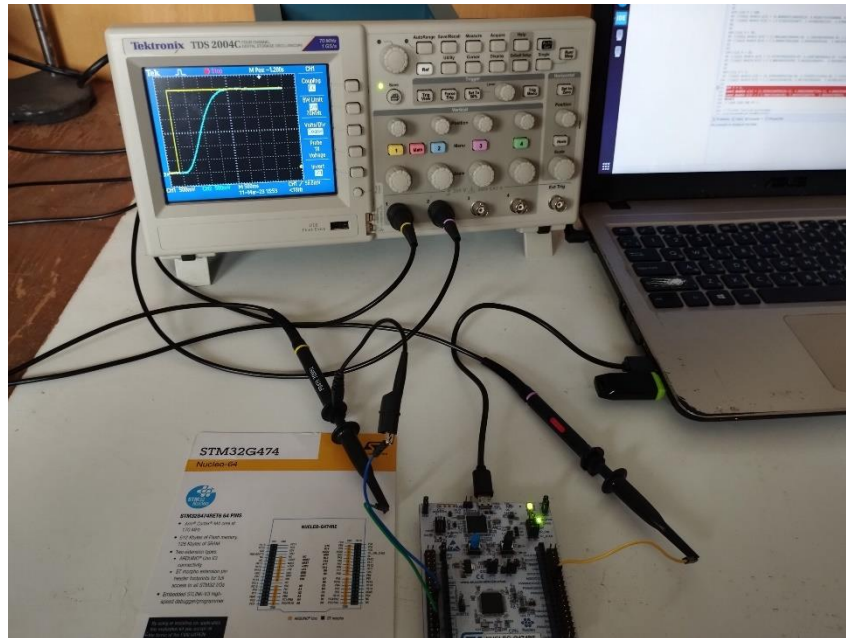


Рисунок 4.9 – Проведення експерименту

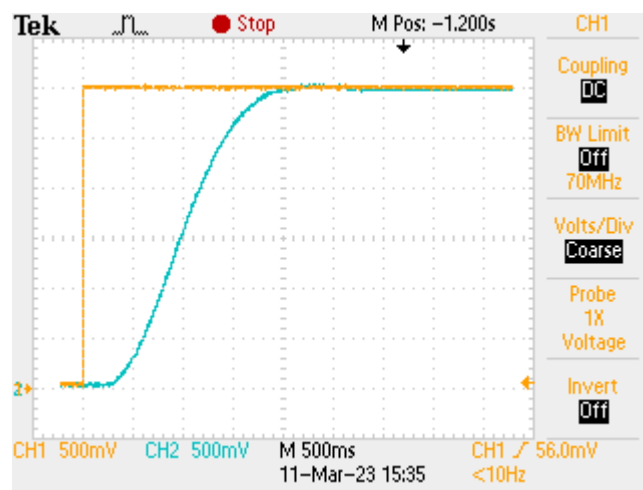


Рисунок 4.10 – Осцилограма диференціювання для кроку дискретизації

$$h=0.0001 c$$

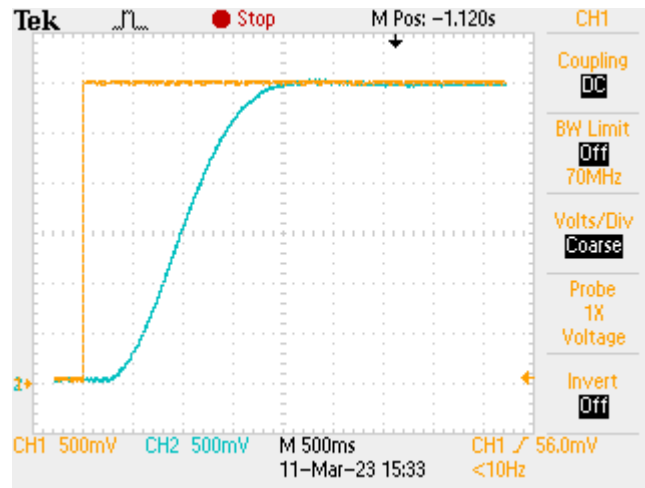


Рисунок 4.11 – Осцилограма диференціювання для кроку дискретизації  $h=0.003\text{ c}$

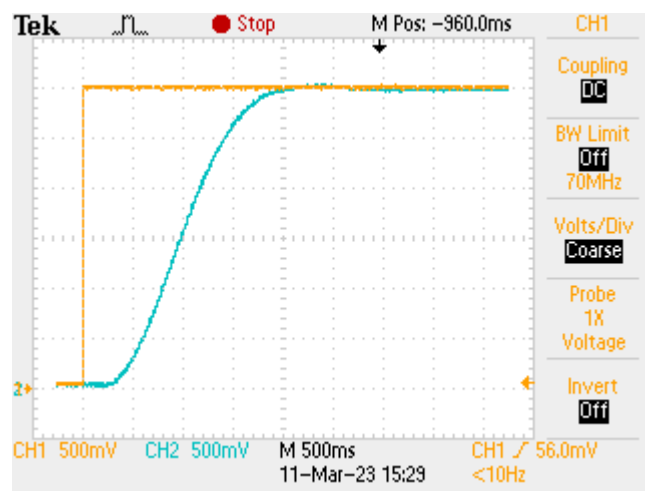


Рисунок 4.12 – Осцилограма диференціювання для кроку дискретизації  $h=0.01\text{ c}$

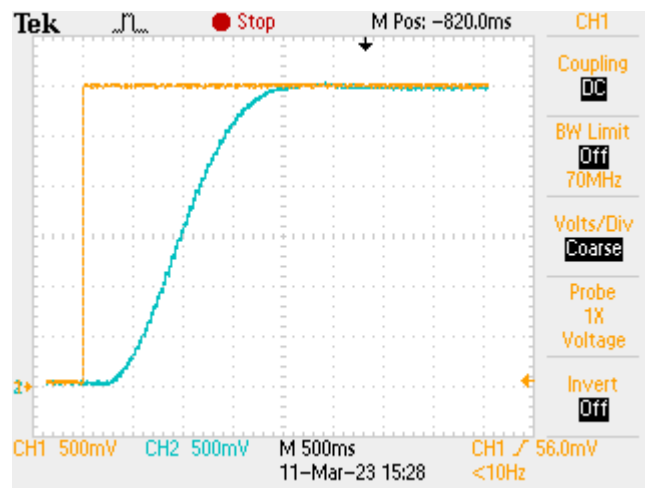


Рисунок 4.13 – Осцилограма диференціювання для кроку дискретизації  $h=0.03\text{ c}$



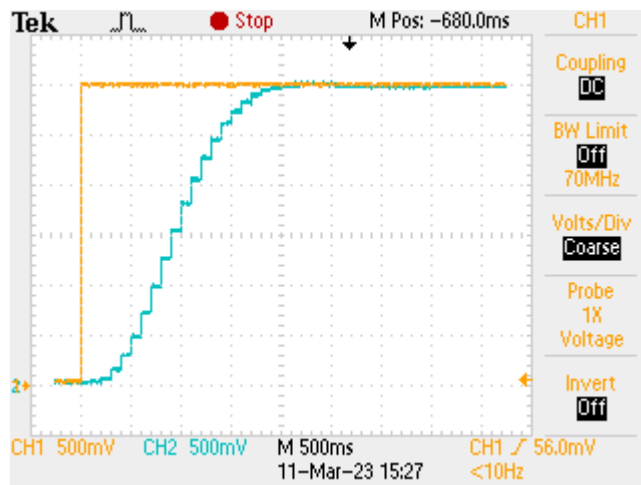


Рисунок 4.14 – Осцилограма диференціювання для кроку дискретизації  $h=0.1$  с

Отриманий графічний результат із осцилоскопа демонструє підтвердження кількох висновків з попередніх розділів:

- дискретизація із використанням передавальних функцій дозволяє отримати реакцію системи на вхідний сигнал без втрати стійкості із збільшенням кроку.
- застосування передавальних функції фактично не впливає на форму частотних характеристик зі збільшенням кроку.

#### Висновки до розділу 4

1. Для здійснення експериментального дослідження складено експериментальну установку на основі відлагоджувальної плати STM Nucleo G474 на основі мікроконтролера STM32G474RE від STMicroelectronics, яка призначена для створення прототипів і тестування нових вбудованих систем і програм.

2. Розраховано рекурентне рівняння передавальної функції з чітко встановленим інтервалом на основі операційної системи реального часу FreeRTOS. Експерименту із класичним диференціюванням та дискретизації за допомогою дискретних перетворень обрано схему, зображену на рисунку 4.1 та структурну схему моделі диференціювання на рисунку 4.2.

3. На основі експериментального дослідження підтверджено отримані автором результати щодо часу комп'ютерного та математичного моделювання та стійкості рекурентних рівнянь передавальних функцій числового інтегратора до кроку дискретизації.

4. На основі натурного експерименту підтверджено, що дискретизація із використанням передавальних функцій дозволяє отримати реакцію системи на вхідний сигнал без втрати стійкості із збільшенням кроку. Застосування передавальних функцій фактично не впливає на форму частотних характеристик зі збільшенням кроку.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено науково-технічні проблеми розвитку методів та аналізу динамічних систем електромеханічних систем на основі використання числових методів, аналізу їх поведінки та впливу на характеристики електромеханічних систем.

1. Виконано аналіз та класифікацію числових методів і їхнього застосування для диференціальних рівнянь, якими описують данамічні системи. Встановлено доцільність і ефективність їхнього використання для моделювання чи аналізу в задачах електротехніки та електромеханіки.

2. Вперше теоретично обґрунтовано недоцільність використання числових інтеграторів високого порядку через втрату стійкості та накопичення похибок. Такий результат отримано для класичних числових методів та числових інтеграторів, які дискретизують аналоговий прототип.

3. З отриманих результатів аналізу під час комп'ютерного моделювання, встановлено, що числовий метод вносить зміни до результуючих частотних характеристик динамічної системи. Це встановлено і в результуючих рівняннях, і під час отримання графічного відображення розв'язку.

4. Для зменшення сумарних похибок в процесу переходу від аналогової до дискретної форми системи доцільно використовувати паралельну декомпозицію. Також, такий підхід дозволяє проводити паралельні обчислення параметрів моделі системи.

5. Використання рекурентних рівнянь методу відображення нулів/полісів виявлено ефективним методом для аналізу динаміки задач електроетехніки. Такий підхід дозволяє виконувати аналіз динамічної системи із будь-яким кроком дискретизації, при цьому система не втрачатиме стійкість, а результуюча форма частотних характеристик не зазнаватиме впливу.

6. На основі експериментального дослідження встановлено, що дискретизація із використанням передавальних функцій дозволяє отримати

реакцію системи на вхідний сигнал без втрати стійкості із збільшенням кроку.  
Застосування передавальних функції фактично не впливає на форму частотних характеристик зі збільшенням кроку.

## Список використаних джерел

1. Мороз В., Вакарчук А. Дослідження впливу числових інтеграторів на поведінку цифрових систем. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: матеріали міжнар. наук. конф., м.Кам'янець-Подільський, 14-15 трав. 2020 р. С. 55-57.
2. Мороз В. Числові інтегратори в цифрових системах керування. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка» «Електроенергетичні та електромеханічні системи»*. 2006. №563. С.99-104.
3. Smith J. M. *Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists*. 2nd ed. New York : Wiley, 1987. 448 p.
4. Чорний О.П., Луговой А.В., Д.Й.Родькін, Сисюк Г.Ю., Садовой О.В. *Моделювання електромеханічних систем : підручник*. Кременчук, 2001. 410 с.
5. Мусіяка В.Г. *Основи числових методів : підручник*. Дніпро : ЛІРА, 2017. 256 с.
6. Костинюк Л.В., Паранчук Я.С., Мороз В.І. *Моделювання електроприводів: навч. посіб. для вищ. навч. закл.* Львів : Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2004. 402 с.
7. Forsythe, G.E. *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*. New Jersey : Prentice-Hall, 1967. 430 p.
8. Richard C.Dorf, Robert H.Bishop. *Modern Control Systems*. 12th Edition. New Jersey : Pearson, 2010. 1104 p.
9. Jury E. *Sampled-data control systems*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1958. 453 p.
10. Хвищун І.О. *Програмування і математичне моделювання: Підручник*. Київ : Видавничий Дім «Ін Юре», 2007. 544 с.
11. Carson J. R. The Heaviside Operational Calculus. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1926. Vol. 32, No. 1. P. 43-68.

12. Mathews, J.H., Fink, K.D. Numerical Methods Using MATLAB. London : Pearson Education. 2013. 696 p.
13. Аналіз ефективності методів Адамс для розв'язання диференціальних рівнянь. *Вісник НТУ "ХПІ", Серія "Математика, фізика, комп'ютерні науки*, № 80, с. 117-123
14. Deutsch J. Guide to the Applications of the Laplace and Z Transforms Dover Publications. New York : Van Nostrand Reinhold, 1971. 240 p.
15. Лозинський О., Мороз В. Розрахунки перехідних процесів в електромеханічних системах з використанням інтегралу згортки з ненульовими початковими умовами. *Теоретична електротехніка*. 2007. Вип. 59. С. 119-130.
16. Moroz V. Computer simulation of the electromechanical systems using convolution integral. *Zeszyty naukowe NR 254. Bydgoszcz*. 2009. No. 14. Pp. 17-24.
17. Moroz V., Vakarchuk A. Frequency features of the numerical method sampling of digital control systems. *Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»*. № 2, С. 201-209.
18. Astrom K.J, Witternmark B. Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third edition. New York : Dover Books on Electrical Engineering, 2013. 578 p.
19. Мороз В. Аналіз раціонального порядку апроксимації для відновлення інформації за її дискретними відліками *Науковий журнал «Радіоелектроніка, інформатика, управління»*. 2008. №1(19). С.74-78
20. Jury E. Theory and Application of the Z-Transform Method. Florida : Krieger Pub Co, 1973. P.330.
21. Ogata K. Discrete-Time Control Systems, 2nd edition. New Jersey : Pearson, 1995. 744 p.
22. Control System Toolbox: Design and analyze control systems. <https://www.mathworks.com/products/control.html>
23. MATLAB Environment. 1994-2020 The MathWorks, Inc. Available at: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

24. Chua O. L., Lin P.-M. Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques. Nes Jersey : Prentice-Hall, 1975. 737 p.
25. Hairer E., Norset S, Wanner G., Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd Edition. Berlin : Springer Science & Business Media, 2008. 528 p.
26. Tou J. T. Digital and Sampled-Data Control System. New York : McGraw Hill Book Co, 1959. 631 p.
27. Haitian S. K., Gupta A. High Performance Computing in Power and Energy Systems. Power Systems Series. Berlin : Springer, 2013. 384 p.
28. Lozynskyi O., Paranchuk Ya., Moroz V., Stakhiv P.. Computer Model of the Electromechanical System of Moving Electrodes of an Arc Furnace with a Combined Control Law. *IEEE 20th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv-Slavsko, September 15-18, 2019.
29. Nazarova O.. Computer Modeling of Multi-Mass Electromechanical Systems. *The Third International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2020)*, Zaporizhzhia, April 27 – May 1, 2020. Vol. 2608, pp. 489-498.
30. Shampine L. The MATLAB ODE Suite. 1997. [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/otherdocs/ode\\_suite.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/otherdocs/ode_suite.pdf)
31. Moler C. Solving ODEs in MATLAB. Video and Webinar Series. 1994-2021, The MathWorks, Inc. <https://www.math-works.com/videos/series/solving-odes-in-matlab-117658.html>
32. Kostinyuk L., Moroz V.. Mathematical structural models of asynchronous motors based on single-phase interfering circuit. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic" "Electric power and electromechanical systems"*, 2008. No. 615. P. 46-50
33. Damelin S. B., Miller W.Jr. The Mathematics of Signal Processing. Cambridge : Cambridge University Press, 2012. 449 p.
34. Simulink. Simulation and Model-Based Design: Simulation: Choose a Solver. <https://www.mathworks.com/help/simulink/ug/choose-a-solver.html>

35. Hairer E., Nørsett S., Wanner G.. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. 2nd Edition. Berlin : Springer, 1996. 614 p.
36. Verlan A. F. Moskalyuk S. S. Mathematical modeling of continuous dynamical systems. Kyiv : Naukova Dumka, 1988. 288 p.
37. Verlan A. F., Sizikov V. S. Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs. Reference manual. Kyiv : Naukova Dumka, 1986. 544 p.
38. Verlan A.F., Fedorchuk V.A. Dynamics models of electromechanical systems. Kyiv : Naukova dumka, 2013. 222 p.
39. Filc R. Equivalents Method for Linear Circuits Transients Calculation. *International Conference on Modern Problems of Telecommunications, Computer Science and Engineering Training. TCSET'2002*, Lviv-Slavsko. February, 18-22, 2002. P. 18-23.
40. Filts R. Optimal strategy for modeling electromechanical systems. *Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"*. Kharkiv : NTU "KhPI", 2002, Vol. 2. No. 12. P. 428-431.
41. Smith J. M.. Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists. Second Edition. New Jersey : Wiley-Interscience, 1987. 448 p.
42. Moroz V. Analysis of the rational order of approximation for information recovery for discrete signals. *PIV (Radioelectronics. Informatics. Management)*. 2008. - No. 1 (19). - P. 74-78.
43. Moroz V., Yanchak T.-M. The Influence of Limited Bit on the Implementation of the Transfer in Digital Systems. *Electrical Power and Electromechanical Systems (SEPES)*, 2021. Vol. 3, No.1. Pp. 74–86.
44. Kostinyuk L., Paranchuk Ya. Moroz V. Modeling of electric drives: Heading guide. Lviv : View of the National University "Lviv Polytechnic", 2004. - 404 p.
45. Kostinyuk L., Moroz V. Mathematical structural models of asynchronous motors based on single-phase interfering circuits. *Bulletin of the National University*



"Lviv Polytechnic" "Electric power and electromechanical systems", 2008. No. 615. - P. 46-50.

46. Moroz V. Zastosuvannya Z-transformation in the modeling of automated electric drives. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic" "Electric power and electromechanical systems"*. 2003. No. 487. P. 28-32

47. Мороз В., Вакарчук А. Використання методу відображення нулів і полюсів для моделювання. *Electrical and Power Engineering and Electromechanics, Odessa*, 2022. С. 64-65.

48. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем. *Електротехніка і електромеханіка*. 2007. № 3. С. 39-43.

49. Луцик А.П. Моделювання електричних кіл у підмодулі SimPowerSystems в середовищі Matlab/Simulink. Науковий журнал : *Управління проектами, системний аналіз і логістика. Технічна серія*, 2012. Вип. 9. С.110-113.]

50. Шпачук В. П., Пушня В. О., Рубаненко О. І., Гарбуз А. О. Теоретична механіка. Динаміка: конспект лекцій з дисципліни. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 222 с.

51. Попов В. В. Методи обчислень : конспект лекцій для студентів механікоматематичного факультету. Київ : Видавничополіграфічний центр "Київський університет", 2012. 303 с.

52. Федюк Р.В., Попов В.О.. Аналіз та синтез лінійних САУ частина 1 : конспект лекцій. Донецьк : ДонНТУ, 2012. 168 с.

53. Moroz V., Vakarchuk A. Influence of the numerical method sampling on the digital PID-controller behavior. Науковий журнал *Electrical Power and Electromechanical Systems*, 2020, Vol.2, No. 1s, p. 35-45

54. Carson J. R. The Heaviside Operational Calculus. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1926. Vol. 32, No. 1. P. 43-68.

55. Gustafson G. Heaviside's Method. Salt Lake City : Mathematics Department University of Utah, 2022, 24 p .
56. Khaitan S.K., Gupta A., High Performance Computing in Power and Energy Systems. Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. 384 p.
57. Moroz V., Konoval V.. High-Speed Power System Stability Analysis. *16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE-2015)*. Lviv, September 2-5, 2015. P. 129-131.
58. L. Shampine, M. Reichelt. The MATLAB ODE Suite. 1997. [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/otherdocs/ode\\_suite.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/otherdocs/ode_suite.pdf).
59. PTC Mathcad. <https://www.mathcad.com/en/>
60. WolframAlpha. <https://www.wolframalpha.com/>
61. Damelin S.B., Miller W. Jr. The Mathematics of Signal Processing. Cambridge : Cambridge University Press, 2012. 449 p.
62. Moroz V., Vakarchuk A. Numerical Integrators on Electrical Circuits' Transient Calculation. *22nd International Conference "Computational Problems of Electrical Engineering" (CPEE-2021)*, Šumava, September 15-17th 2021.
63. Moroz V., Vakarchuk A. Why High-Order Integrators Not Rational on Electrical Systems' Computer Calculation. *IEEE 20th International Conference on Modern Electrical and Energy System*. Kremenchuk, September 21-24, 2021.
64. Мороз В. Погляд інженера-електрика на числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Електроенергетичні та електромеханічні системи"*, Львів, 2003. №485. с.208-213.
65. Фільц Р. Оптимальна стратегія моделювання електромеханічних систем. *Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Тематичний збірник наукових праць "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика"*. Харків : НТУ "ХПІ", 2002, № 12. С.428-431.

66. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем. Науковий журнал «Електротехніка і електромеханіка». Харків : НТУ «ХПІ», 2007. № 3. С.39-43.
67. Moroz V. Computer simulation of the electromechanical systems using convolution integral. Zeszyty naukowe NR «Elektrotechnika». Bydgoszcz, 2009. P. 17-24.
68. Johnson M. A., Moradi M. H. PID Control: New Identification and Design Methods. London : Springer-Verlag London Limited, 2005. 544 p.
69. Moroz V., Oksentyuk V., Snitkov I. Реалізація операцій диференціювання у мікроконтролерах. Збірник наук. праць «Математичне та комп'ютерне моделювання». Кам'янець-Подільський, 2010. Вип. 3. С.154-159.
70. Kuo B. C. Digital Control Systems, 2nd Edition. Oxford : Oxford University Press, 1995. 751 p.
71. Moroz V. The Numerically-Analytic Method for the Real-Time Computer Simulation. *9th International Workshops «Computational Problems of Electrical Engineering»*. Alushta, 2008.
72. Verlan A.F., Fedorchuk V.A. Dynamics models of electromechanical systems. Київ : Наукова думка, 2013. 222 p.
73. Moroz V., Holovach I. High-Speed Simulation of Electric Drives Using Modified Z-Transform (Old technique for modern purpose). *International Conference on MODERN ELECTRICAL AND ENERGY SYSTEMS (MEES-2017)*. Kremenchuk November 15-17 2017. P. 300-303.
74. Kostinyuk L., Moroz V. Numerical-analytical method for modeling mechanical systems with spring links. Науковий журнал «Машинознавство». Київ, 2008. No. 6 (132). P.32-37.
75. Kostinyuk L., Moroz V., Paranchuk Ya. Modeling of electric drives: Heading guide. Lviv : View of the National University «Lviv Polytechnic», 2004. 404 p.

76. Bossy M., Talay D. Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the burgers equation. *Journal The Annals of Applied Probability*. USA : Institute of Mathematical Statistics, 1996, Vol.6, No.3. P.818-861.
77. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer methods for mathematical computations. 1<sup>st</sup> ed. New Jersey : Prentice-Hall, 1977. 270 p.
78. Plakhtyna, O. Numerical One-Step Method of Electric Circuits Analysis and Its Application in Electromechanical Tasks. Kharkiv : Kharkivskiy Politekhnichnyi Instytut, 2008; Vol. 30, pp. 223–225.
79. Plakhtyna O., Kutsyk A., Semeniuk M. Real-time models of electromechanical power systems, based on the method of average voltages in integration step and their computer application. MDPI : *Energies*, 2020, No.13.
80. Мороз В., Вакарчук А.Б. Дослідження впливу числових інтеграторів на поведінку цифрових систем, *Міжнародна конференція OPTIMA-2020, м.Кам'янець-Подільський*, 2020. С.55-57.
81. Мороз В., Вакарчук А. (2021) Раціональність використання числових інтеграторів високого порядку в цифрових ПД-регуляторах, *V-а Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод»*, Краматорськ, 2021. С.238-240.
82. Мороз В., Вакарчук А. Числові інтегратори в розрахунках електричних кіл. *Науково-технічна конференція підрозділів Вінницького національного технічного університету, ОКЕУ-2021*, Вінниця, 2021. С.203-207.
83. Moroz V., Vakarchuk A. (2022) Application of the zeros and poles matched method for modeling of electrical systems. *Науковий журнал «Електроенергетичні та електромеханічні системи»*. Львів: Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2022. Випуск 4 (1), С.72–87.

Дослідження поведінки явних та неявних методів Ейлера  $h=0.4$

$$h := 0.4 \quad t_{\max} := 20 \quad n := \text{round}\left(\frac{t_{\max}}{h} + 0.5\right)$$

$$i := 0..n \quad t_i := i \cdot h \quad T := 1 \quad f := 1$$

Аналітичний розв'язок для стрибкоподібного сигналу  $\implies$

$$y(t) := f \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)\right)$$

$$y_0 := 0 \quad Y_0 := 0$$

Формула Адамса (явний метод Ейлера) 1-порядку

$$t_a := 0, 0.1.. t_{\max}$$

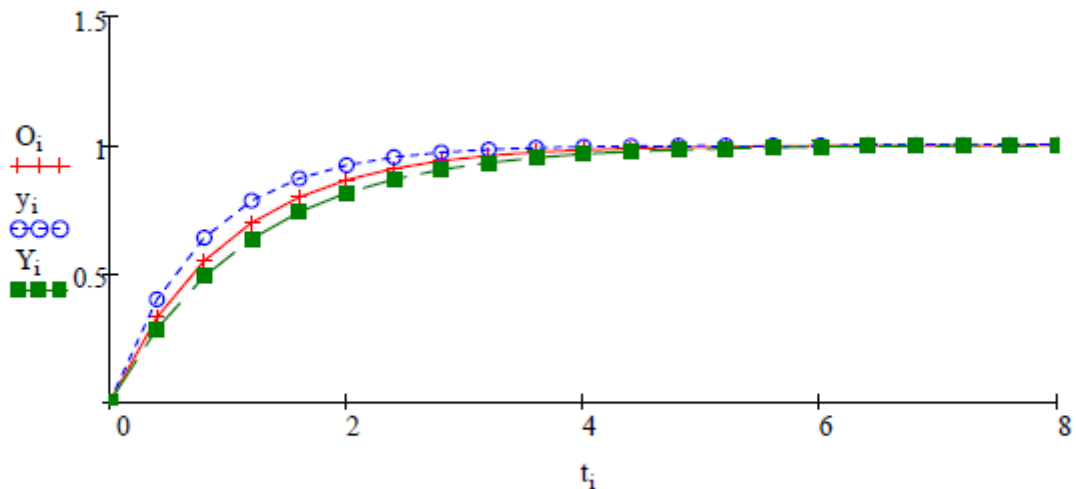
$$y_{i+1} := \left(1 - \frac{h}{T}\right) \cdot y_i + \frac{h \cdot f}{T}$$

Формула Адамса (неявний метод Ейлера) 1-го порядку

$$Y_{i+1} := \frac{T}{T+h} \cdot Y_i + \frac{h \cdot f}{T+h}$$

Точний розв'язок

$$O_i := f \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{T}\right)\right)$$



- +++ Точний розв'язок
- ooo Явний метод 1
- Неявний метод 1

Явна формула 2-го порядку

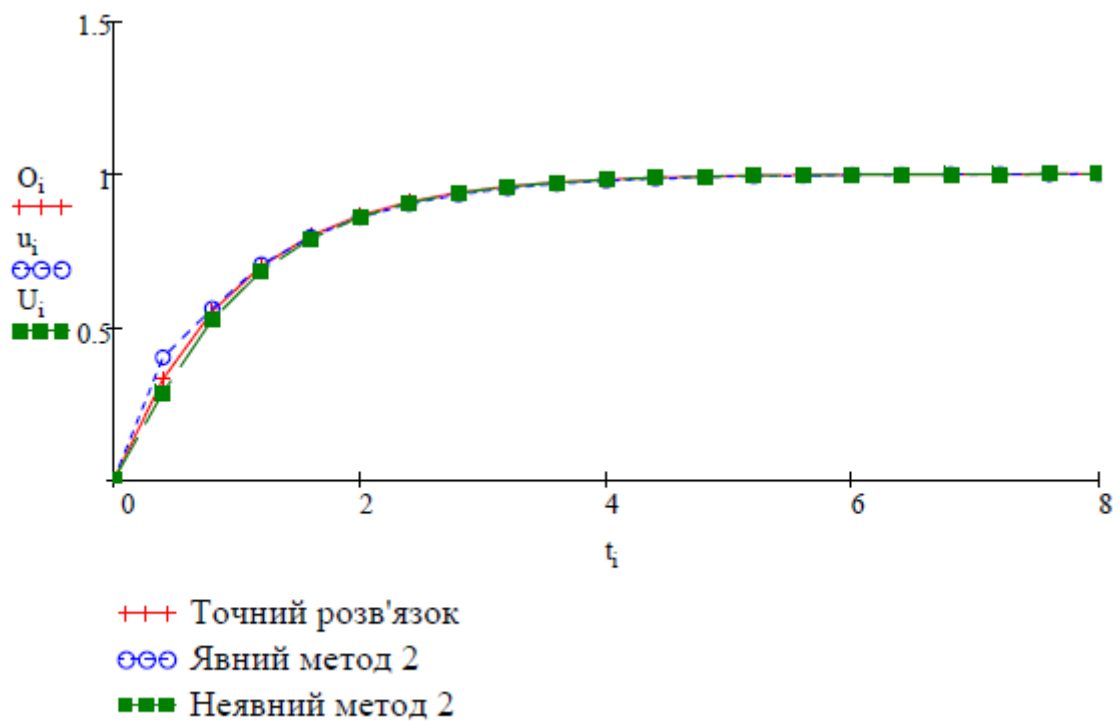
$$u_i := y_i \quad U_i := Y_i \quad i := 1 \dots n$$

$$u_{i+1} := \frac{2 \cdot T - 3 \cdot h}{2 \cdot T} \cdot u_i + \frac{h \cdot (3 \cdot f - f + u_{i-1})}{2 \cdot T}$$

Неявна формула 2-го порядку

$$U_{i+1} := \left( \frac{h - 2 \cdot T}{2 \cdot T + h} \right) \cdot U_i + \frac{h \cdot (f + f)}{2 \cdot T + h}$$

$$i := 0 \dots n$$



Явна формула 3-го порядку

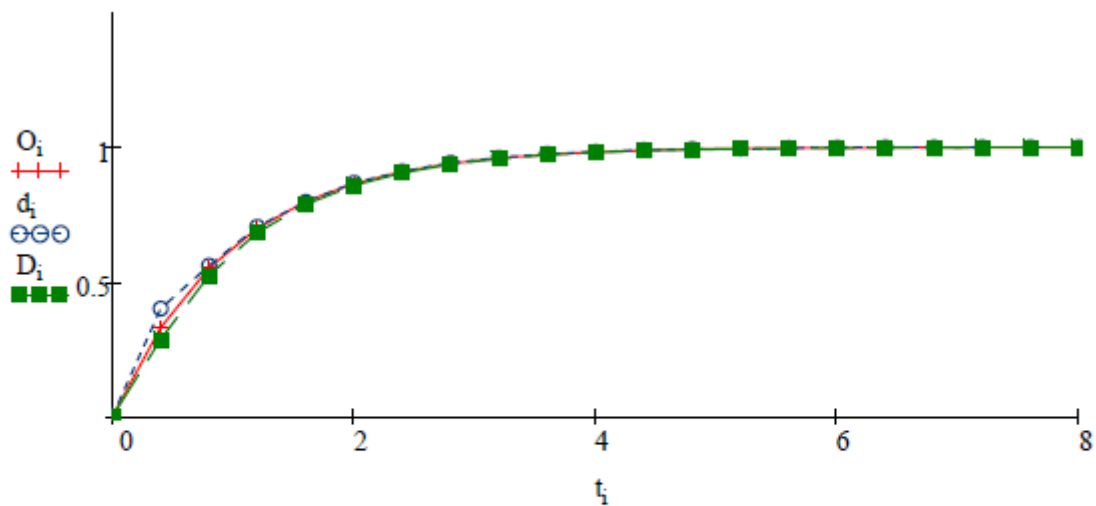
$$d_i := u_i \quad D_i := U_i \quad i := 3 \dots n$$

$$d_{i+1} := \frac{12 \cdot T - 23 \cdot h}{12 \cdot T} \cdot d_i + \frac{h \cdot (23 \cdot f - 16f + 5 \cdot f + 16 \cdot d_{i-1} - 5 \cdot d_{i-2})}{12 \cdot T}$$

Неявна формула 3-го порядку

$$D_{i+1} := \frac{12 \cdot T - 8 \cdot h}{12 \cdot T + 5 \cdot h} \cdot D_i + \frac{h \cdot (8 \cdot f + 5 \cdot f - f + d_{i-1})}{12 \cdot T + 5 \cdot h}$$

$$i := 0 \dots n$$



+++ Точний розв'язок

ooo Явний метод 3

■■■ Неявний метод 3

Явна формула 4-го порядку

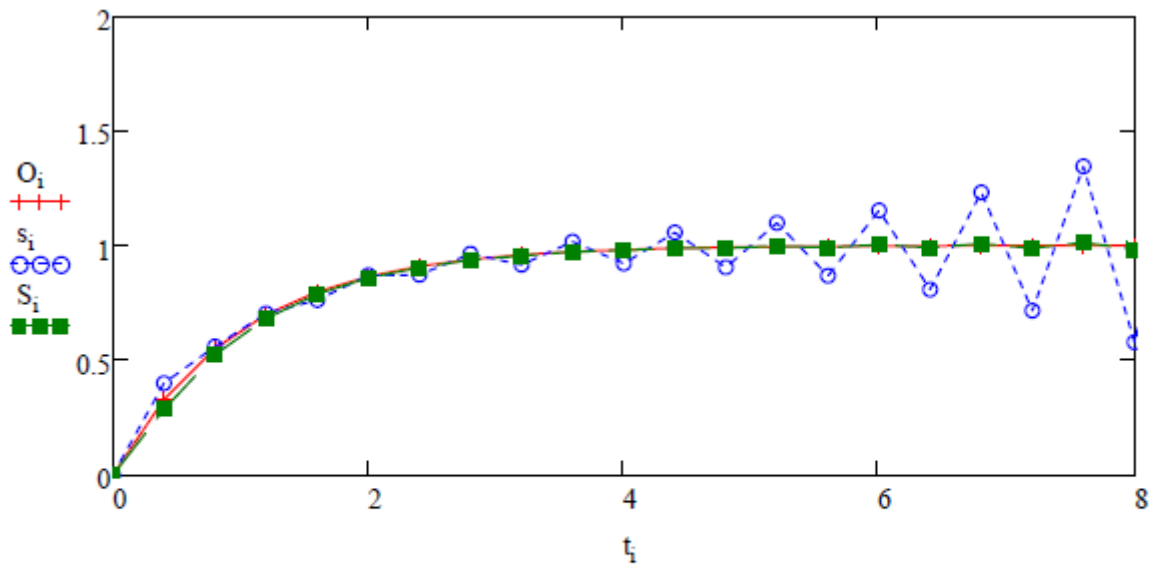
$$s_i := d_i \quad S_i := D_i \quad i := 3 \dots n$$

$$s_{i+1} := \frac{24 \cdot T - 55 \cdot h}{24 \cdot T} \cdot s_i + \frac{h \cdot (55 \cdot f - 59 \cdot f + 37 \cdot f - 9 \cdot f + 59 \cdot s_{i-1} - 37 \cdot s_{i-2} + 9 \cdot s_{i-3})}{24 \cdot T}$$

Неявна формула 4-го порядку

$$S_{i+1} := \frac{24 \cdot T - 19 \cdot h}{24 \cdot T + 9 \cdot h} \cdot S_i + \frac{h \cdot (19 \cdot f + 9 \cdot f - 5 \cdot f + f + 5 \cdot s_{i-1} - s_{i-2})}{24 \cdot T + 9 \cdot h}$$

$$i := 0 \dots n$$

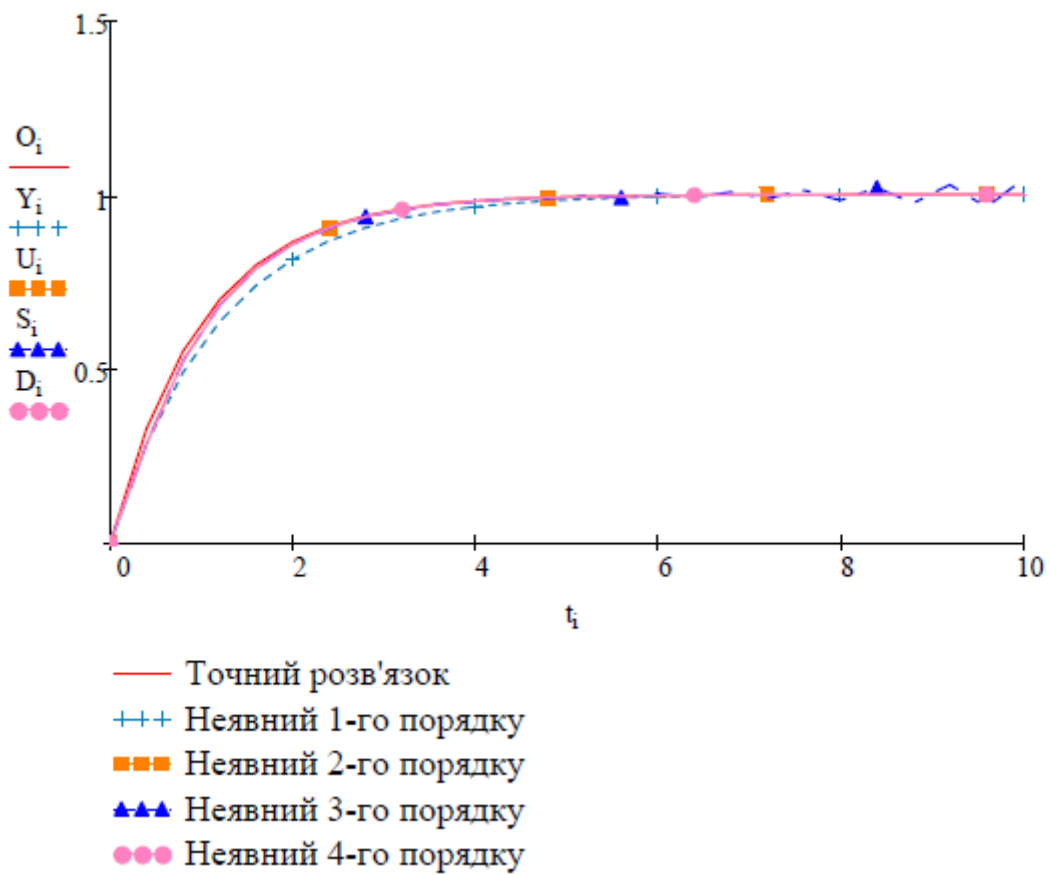
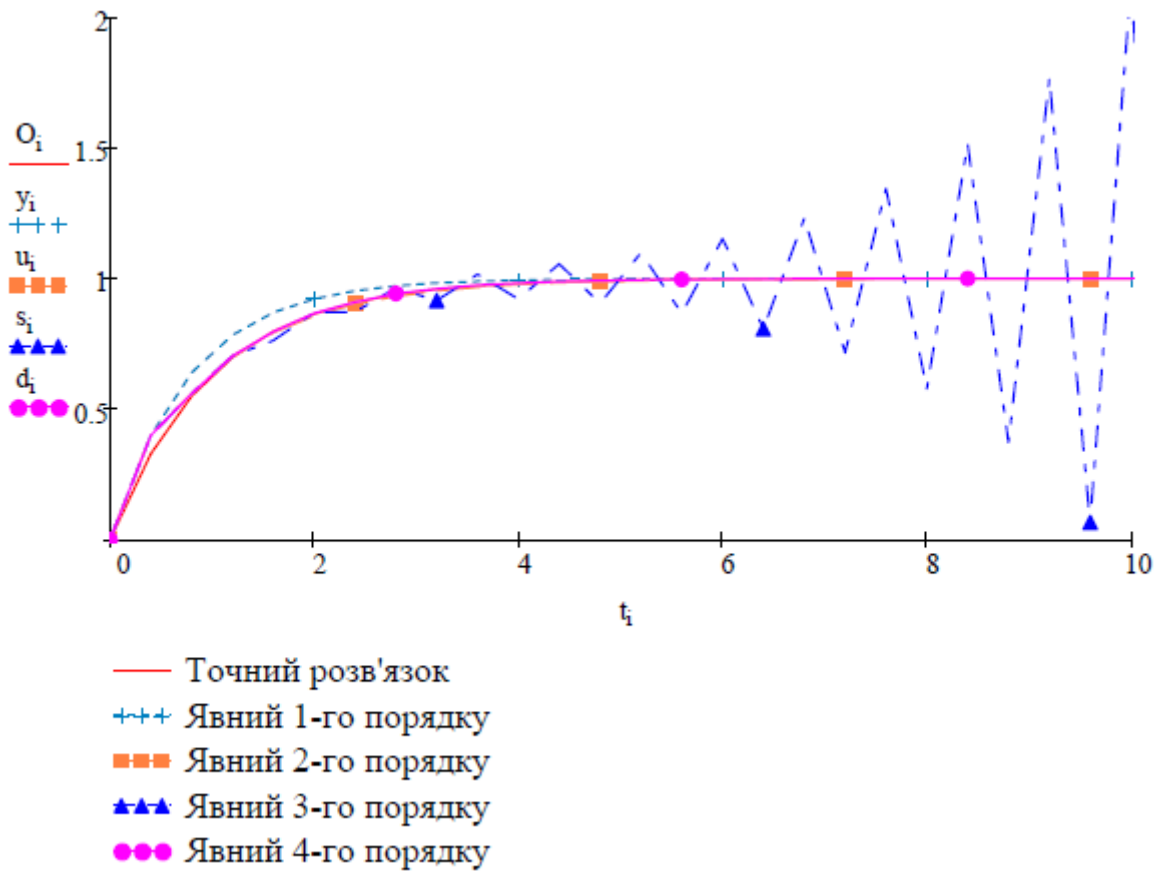


+++ Точний розв'язок

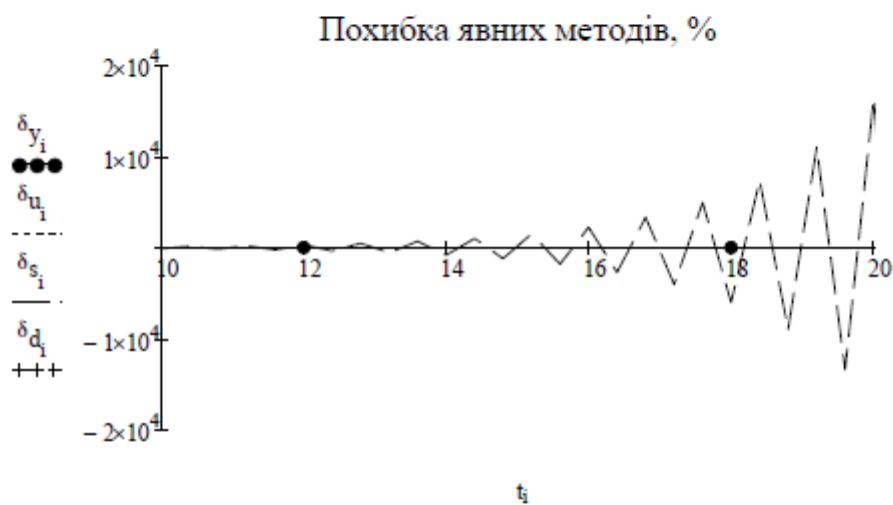
ooo Явний метод 4

■■■ Неявний метод 4





Похибка, %	Явний метод	Неявний метод
<u>1-го порядку</u>	$\delta_{y_i} := (O_i - y_i) \cdot 100$	$\delta_{Y_i} := (O_i - Y_i) \cdot 100$
<u>2-го порядку</u>	$\delta_{u_i} := (O_i - u_i) \cdot 100$	$\delta_{U_i} := (O_i - U_i) \cdot 100$
<u>3-го порядку</u>	$\delta_{s_i} := (O_i - s_i) \cdot 100$	$\delta_{S_i} := (O_i - S_i) \cdot 100$
<u>4-го порядку</u>	$\delta_{d_i} := (O_i - d_i) \cdot 100$	$\delta_{D_i} := (O_i - D_i) \cdot 100$



$y_{i+1} =$	$u_{i+1} =$	$d_{i+1} =$	$s_{i+1} =$	$Y_{i+1} =$
0.4	0.4	0.4	0.4	0.286
0.64	0.56	0.56	0.56	0.49
0.784	0.704	0.704	0.704	0.636
0.87	0.794	0.796	0.763	0.74
0.922	0.858	0.868	0.87	0.814
0.953	0.902	0.91	0.872	0.867
0.972	0.932	0.942	0.964	0.905
0.983	0.953	0.961	0.916	0.932
0.99	0.968	0.975	1.017	0.952
0.994	0.978	0.983	0.922	0.965
0.996	0.985	0.989	1.057	0.975
0.998	0.989	0.992	0.905	0.982
0.999	0.993	0.995	1.099	0.987
0.999	0.995	0.997	0.868	0.991
1	0.997	0.998	1.153	0.994
1	0.998	0.999	0.808	0.995
1	0.998	0.999	1.231	0.997
...	...	...	...	...

$U_{i+1} =$	$D_{i+1} =$	$S_{i+1} =$
0.286	0.286	0.286
0.524	0.524	0.524
0.683	0.683	0.683
0.788	0.788	0.788
0.859	0.858	0.859
0.906	0.905	0.903
0.937	0.937	0.937
0.958	0.958	0.955
0.972	0.972	0.972
0.981	0.981	0.978
0.988	0.987	0.989
0.992	0.992	0.988
0.994	0.994	0.998
0.996	0.996	0.991
0.998	0.998	1.003
0.998	0.998	0.991
0.999	0.999	1.008
...	...	...

Дослідження поведінки явних та неявних методів Ейлера  $h=0.8$

$$h := 0.8 \quad t_{\max} := 20 \quad n := \text{round}\left(\frac{t_{\max}}{h} + 0.5\right)$$

$$i := 0..n \quad t_i := i \cdot h \quad T := 1 \quad f := 1$$

Аналітичний розв'язок для стрибкоподібного сигналу  $\implies$

$$y(t) := f \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)\right)$$

$$y_0 := 0 \quad Y_0 := 0$$

Формула Адамса (явний метод Ейлера) 1-порядку

$$t_a := 0, 0.1..t_{\max}$$

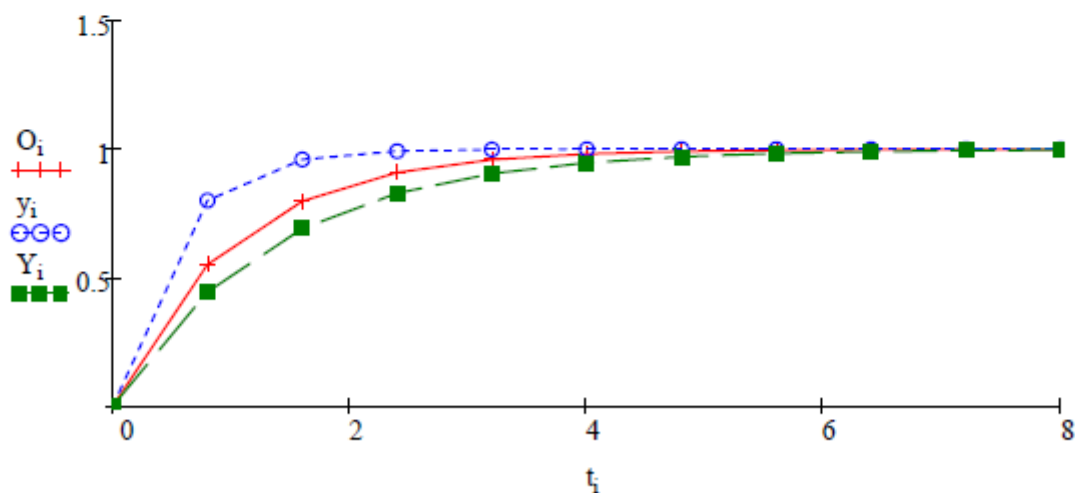
$$y_{i+1} := \left(1 - \frac{h}{T}\right) \cdot y_i + \frac{h \cdot f}{T}$$

Формула Адамса (неявний метод Ейлера) 1-го порядку

$$Y_{i+1} := \frac{T}{T+h} \cdot Y_i + \frac{h \cdot f}{T+h}$$

Точний розв'язок

$$O_i := f \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t_i}{T}\right)\right)$$



+++ Точний розв'язок

ooo Явний метод 1

■■■ Неявний метод 1

Явна формула 2-го порядку

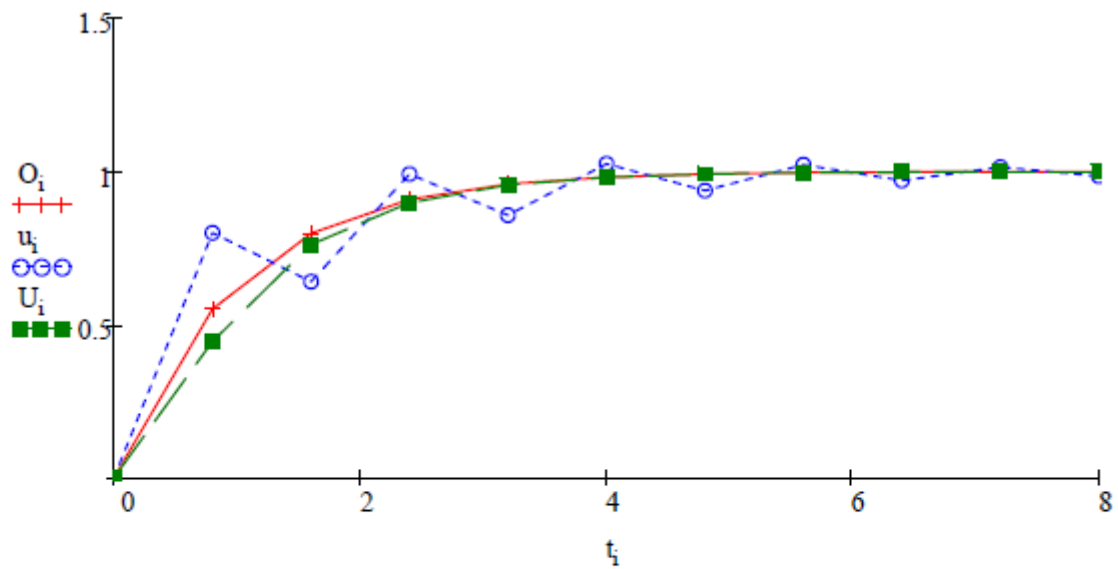
$$u_i := y_i \quad U_i := Y_i \quad i := 1..n$$

$$u_{i+1} := \frac{2 \cdot T - 3 \cdot h}{2 \cdot T} \cdot u_i + \frac{h \cdot (3 \cdot f - f + u_{i-1})}{2 \cdot T}$$

Неявна формула 2-го порядку

$$U_{i+1} := \left( \frac{h - 2 \cdot T}{2 \cdot T + h} \right) \cdot U_i + \frac{h \cdot (f + f)}{2 \cdot T + h}$$

$$i := 0..n$$



- +++ Точний розв'язок
- ooo Явний метод 2
- Неявний метод 2

Явна формула 3-го порядку

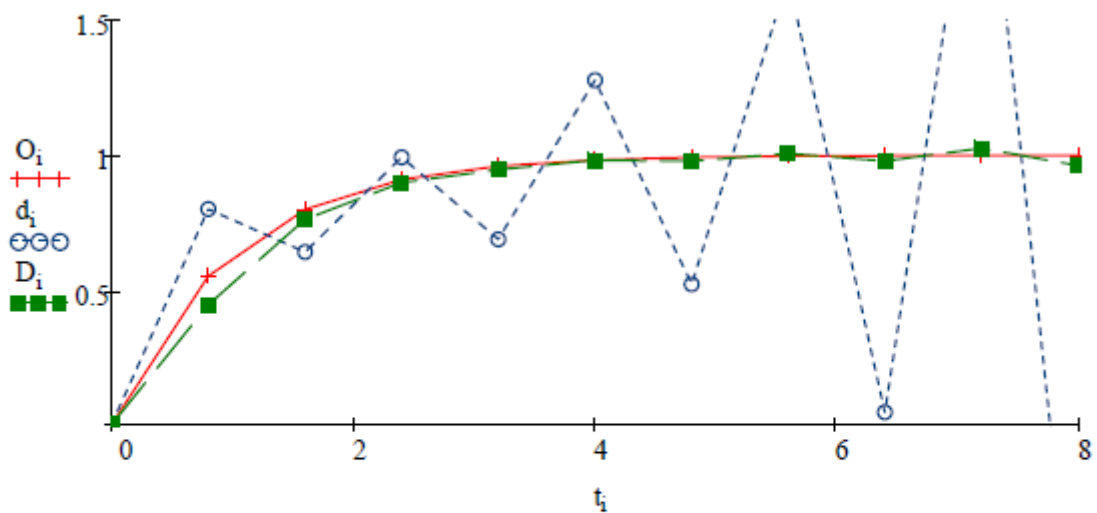
$$d_i := u_i \quad D_i := U_i \quad i := 3 \dots n$$

$$d_{i+1} := \frac{12 \cdot T - 23 \cdot h}{12 \cdot T} \cdot d_i + \frac{h \cdot (23 \cdot f - 16f + 5 \cdot f + 16 \cdot d_{i-1} - 5 \cdot d_{i-2})}{12 \cdot T}$$

Неявна формула 3-го порядку

$$D_{i+1} := \frac{12 \cdot T - 8 \cdot h}{12 \cdot T + 5 \cdot h} \cdot D_i + \frac{h \cdot (8 \cdot f + 5 \cdot f - f + d_{i-1})}{12 \cdot T + 5 \cdot h}$$

$$i := 0 \dots n$$



+++ Точний розв'язок

ooo Явний метод 3

■■■ Неявний метод 3

Явна формула 4-го порядку

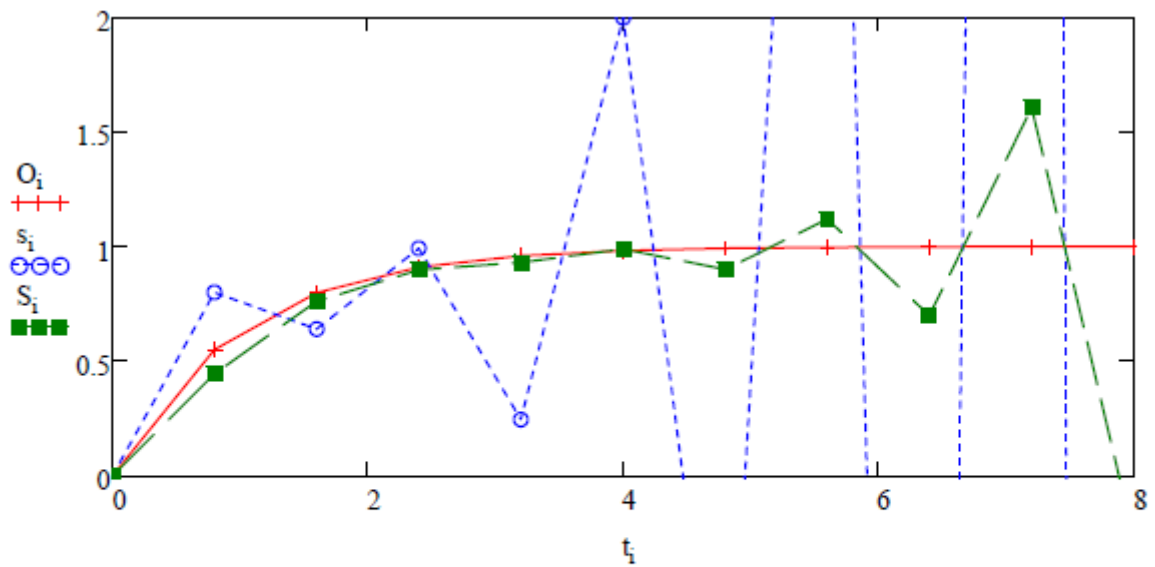
$$s_i := d_i \quad S_i := D_i \quad i := 3 \dots n$$

$$s_{i+1} := \frac{24T - 55h}{24T} \cdot s_i + \frac{h \cdot (55 \cdot f - 59 \cdot f + 37 \cdot f - 9 \cdot f + 59 \cdot s_{i-1} - 37 \cdot s_{i-2} + 9 \cdot s_{i-3})}{24T}$$

Неявна формула 4-го порядку

$$S_{i+1} := \frac{24T - 19h}{24T + 9h} \cdot S_i + \frac{h \cdot (19 \cdot f + 9 \cdot f - 5 \cdot f + f + 5 \cdot s_{i-1} - s_{i-2})}{24T + 9h}$$

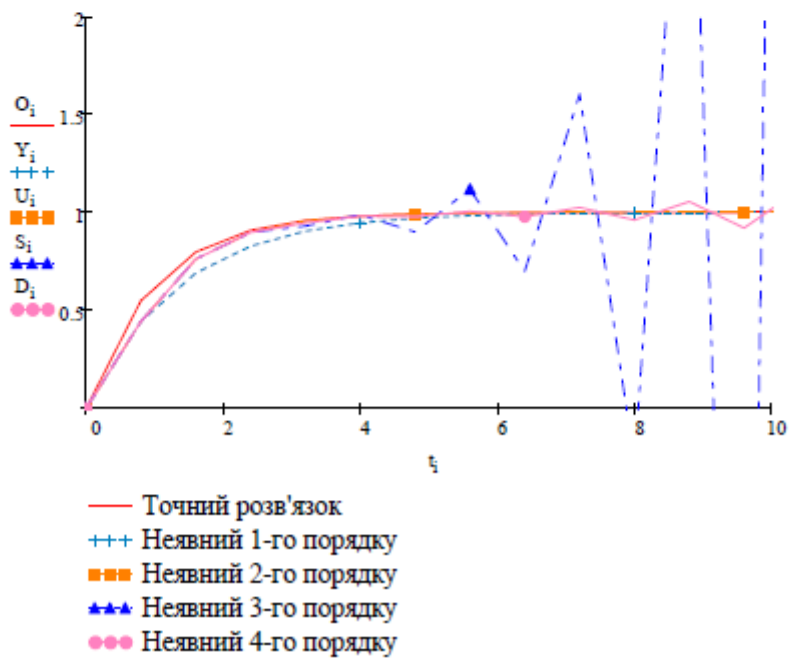
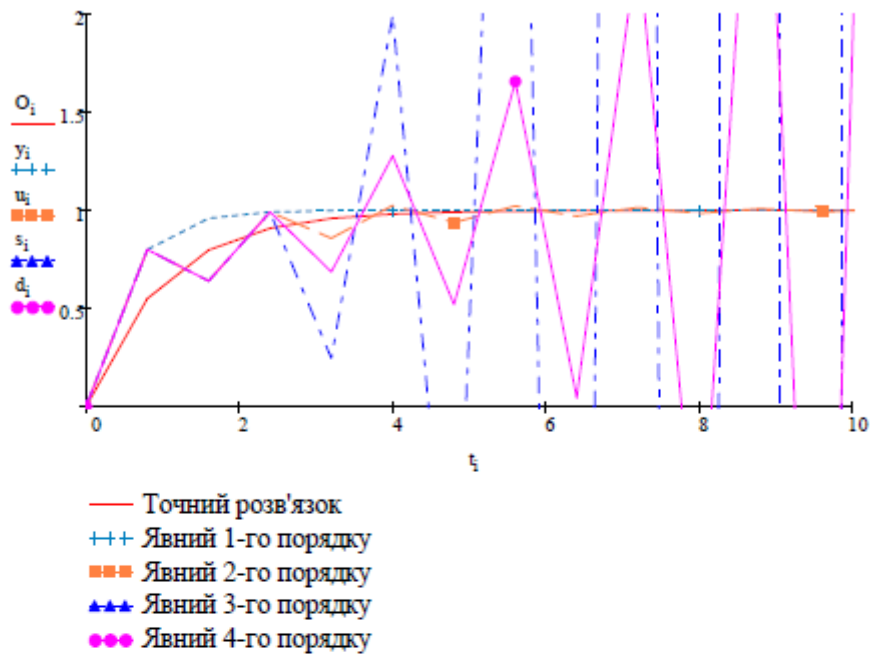
$$i := 0 \dots n$$



+++ Точний розв'язок

ooo Явний метод 4

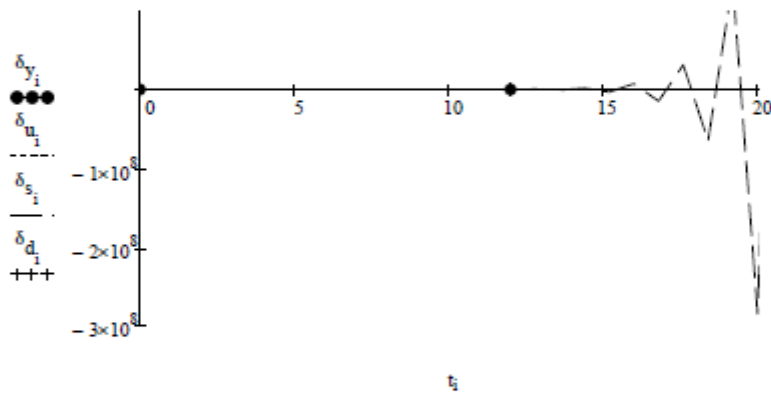
■■■ Неявний метод 4



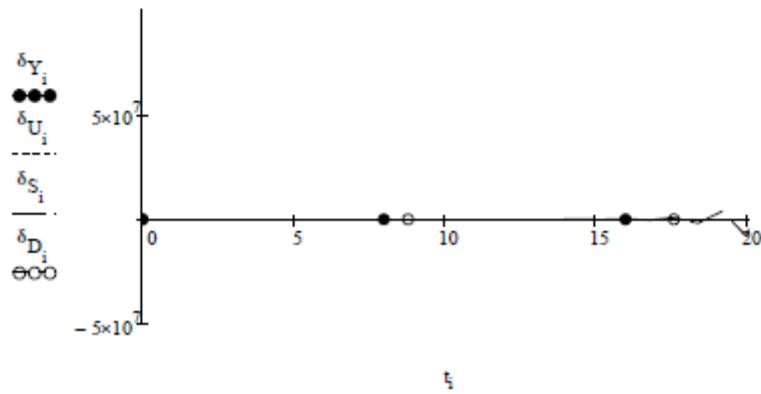


Похибка, %	Явний метод	Неявний метод
<u>1-го порядку</u>	$\delta_{y_i} := (O_i - y_i) \cdot 100$	$\delta_{Y_i} := (O_i - Y_i) \cdot 100$
<u>2-го порядку</u>	$\delta_{u_i} := (O_i - u_i) \cdot 100$	$\delta_{U_i} := (O_i - U_i) \cdot 100$
<u>3-го порядку</u>	$\delta_{s_i} := (O_i - s_i) \cdot 100$	$\delta_{S_i} := (O_i - S_i) \cdot 100$
<u>4-го порядку</u>	$\delta_{d_i} := (O_i - d_i) \cdot 100$	$\delta_{D_i} := (O_i - D_i) \cdot 100$

Похибка явних методів, %



Похибка неявних методів, %



$y_{i+1} =$	$u_{i+1} =$	$d_{i+1} =$	$s_{i+1} =$	$Y_{i+1} =$
0.8	0.8	0.8	0	0.444
0.96	0.64	0.64	0.6	0.691
0.992	0.992	0.992	0.96	0.829
0.998	0.858	0.687	0.24	0.905
1	1.025	1.278	1.96	0.947
1	0.938	0.52	-1.44	0.971
1	1.023	1.657	5	0.984
1	0.971	0.045	-9.28	0.991
1	1.015	2.37	22.48	0.995
1	0.985	-0.969	-43.96	0.997
1	1.009	3.83	94.82	0.998
1	0.992	-3.066	-195.07	0.999
1	1.005	6.844	410.79	1
1	0.996	-7.397	-855.27	1
1	1.003	13.067	1.79·10 <sup>3</sup>	1
...	...	...	...	...

$U_{i+1} =$	$D_{i+1} =$	$S_{i+1} =$
0.444	0.444	0.444
0.762	0.762	0.762
0.898	0.898	0.898
0.956	0.946	0.93
0.981	0.981	0.989
0.992	0.978	0.9
0.997	1.006	1.119
0.999	0.978	0.699
0.999	1.025	1.605
1	0.961	-0.274
1	1.055	3.659
1	0.921	-4.558
1	1.114	12.613
1	0.837	-23.269
1	1.235	51.715
...	...	...

Розв'язок RLC-кола за перетворенням Лапласа

$$E := 190 \quad L_1 := 0.14 \quad L_2 := 1.5 \quad C := 75 \cdot 10^{-6} \quad R_1 := 15 \quad R_2 := 7$$

$$Z_2(s) := \frac{(s \cdot L_2 + R_2) \cdot \left(\frac{1}{s \cdot C}\right)}{(s \cdot L_2 + R_2) + \frac{1}{s \cdot C}}$$

Знаходимо відображення струму  $I_1$ 

$$I_1(s) := \frac{\frac{E}{s}}{(R_1 + s \cdot L_1) + Z_2(s)} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{6333.0 \cdot s + 1357.0 \cdot s^2 + 1.2e7}{s \cdot (s + 13.0) \cdot (98.0 \cdot s + s^2 + 103534.0)}$$

$$U_{Z_2}(s) := \frac{E}{s} - I_1(s) \cdot (R_1 + s \cdot L_1) \left| \text{simplify} \right. \rightarrow \frac{0.02 \cdot s^3 - 151.62 \cdot s^2 + 1.8138525e7 \cdot s + 7.572898e7}{s \cdot (s + 13.0) \cdot (s^2 + 98.0 \cdot s + 103534.0)}$$

Знаходимо відображення струму  $I_C$ 

$$I_C(s) := \frac{U_{Z_2}(s)}{\left(\frac{1}{s \cdot C}\right)} \left| \text{simplify} \right. \rightarrow \frac{3.0 \cdot s^3 - 22743.0 \cdot s^2 + 2.72077875e9 \cdot s + 1.1359347e10}{2.0e6 \cdot s^3 + 2.22e8 \cdot s^2 + 2.09616e11 \cdot s + 2.691884e12}$$

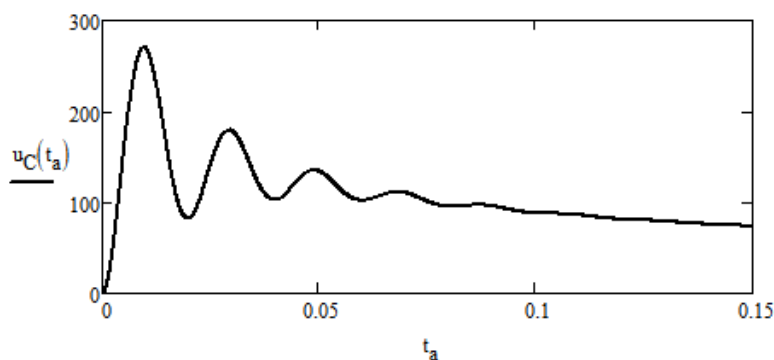
Записуємо відображення шуканої напруги  $U_C$ 

$$U_C(s) := \frac{1}{s \cdot C} \cdot I_C(s) \left| \text{simplify} \right. \rightarrow \frac{0.02 \cdot s^3 - 151.62 \cdot s^2 + 1.8138525e7 \cdot s + 7.572898e7}{s \cdot (s + 13.0) \cdot (s^2 + 98.0 \cdot s + 103534.0)}$$

Отримуємо часову залежність за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$u_C(t) := U_C(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 120.0 \cdot e^{-13.0 \cdot t} + -176.0 \cdot \cos(318.0 \cdot t) \cdot e^{-49.0 \cdot t} + -22.8 \cdot \sin(318.0 \cdot t) \cdot e^{-49.0 \cdot t} + 56.3$$

$$t_{\max} := 0.15 \quad t_a := 0.10^{-4} \cdot t_{\max}$$



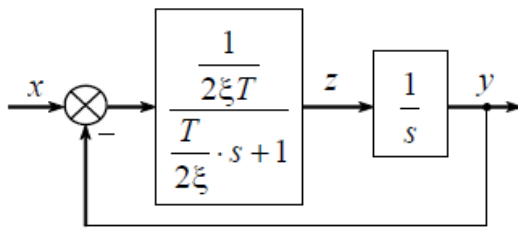
## Реалізація динамічної ланки з парою комплексно-спряжених полюсів

$$\frac{1}{T^2 \cdot s^2 + 2\xi \cdot T \cdot s + 1}$$

$$\frac{\alpha^2 + \Omega^2}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2} \quad \begin{array}{l} \text{Переведення стандартної форми запису коливної ланки} \\ \text{2-го порядку} \end{array}$$

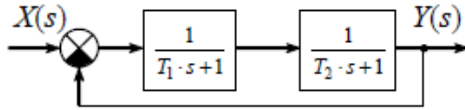
$$\left( \begin{array}{l} \frac{1}{T^2} = \alpha^2 + \Omega^2 \\ \xi \cdot T = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \text{solve, } \left( \begin{array}{l} \alpha \\ \Omega \end{array} \right) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \left( \begin{array}{l} \frac{\xi}{T} \quad \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \\ \frac{\xi}{T} \quad -\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \end{array} \right)$$

$$\alpha := \frac{\xi}{T} \quad \Omega := \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \quad \Theta := \text{atan}\left(\frac{-\alpha}{\Omega}\right)$$

Вихідна координата **y**

$$\frac{\frac{1}{2\xi \cdot T} \cdot \frac{1}{s}}{\frac{T}{2\xi} \cdot s + 1} \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{collect, } s \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + 1}$$

$$1 + \frac{\frac{1}{2\xi \cdot T} \cdot \frac{1}{s}}{\frac{T}{2\xi} \cdot s + 1}$$



$$\frac{\frac{1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 \cdot s + 1}}{1 + \frac{1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_2 \cdot s + 1}} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{collect, } s \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 2}$$

$$\left( \begin{array}{c} \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \\ T_1 + T_2 \\ \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} T^2 \\ 2 \cdot \xi \cdot T \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \text{solve, } \left( \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array} \right) \\ \text{collect, } T \end{array} \right. \rightarrow$$

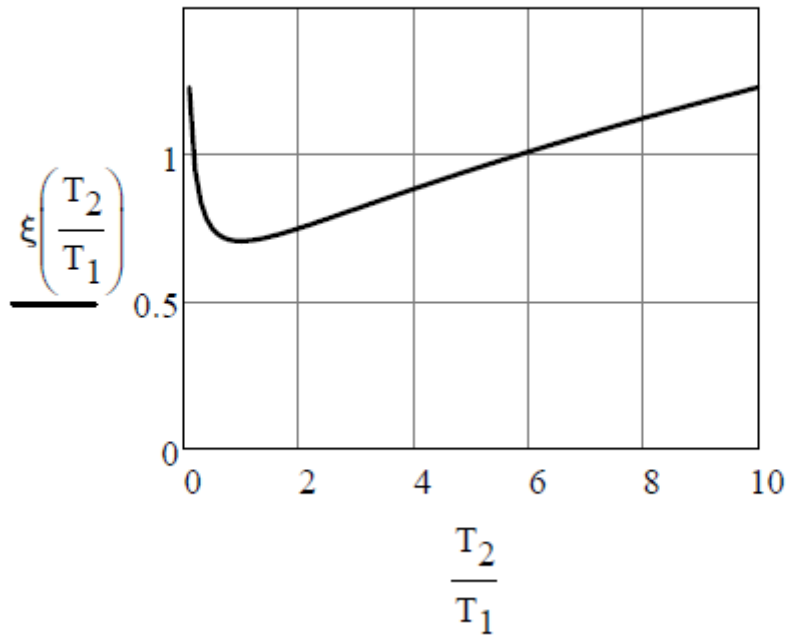
$$\left( \begin{array}{c} \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \\ T_1 + T_2 \\ \frac{T_1 \cdot T_2}{2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} T^2 \\ 2 \cdot \xi \cdot T \end{array} \right) \text{solve, } \left( \begin{array}{c} T \\ \xi \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cc} (2 \cdot \xi + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \xi^2 - 1}) \cdot T & (2 \cdot \xi - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \xi^2 - 1}) \cdot T \\ (2 \cdot \xi - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \xi^2 - 1}) \cdot T & (2 \cdot \xi + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \xi^2 - 1}) \cdot T \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}}{2} & \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} \cdot (T_1 + T_2)}{4} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}}{2} & \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} \cdot (T_1 + T_2)}{4} \end{array} \right]$$

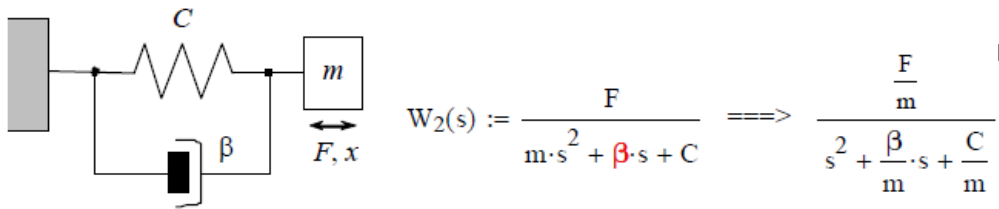
$$T_1 := 1 \quad T_2 := 0.1, 0.2 \dots 10$$

$$\underline{\xi}(T_2) := \sqrt{2} \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} \quad \xi(T_2) := \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}} \cdot (T_1 + T_2)}{4}$$



Реалізація методу відображення нулів/полісів

Проста модель пружної системи.



Неперервні корені

$$P := m \cdot s^2 + \beta \cdot s + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{solve, s} \end{array} \right.$$

Дискретні корені

$$Pd := \exp(h \cdot P) \rightarrow$$

$$Pd \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-\frac{h \cdot \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \cdot C \cdot m}}{2} \right)}{m}} \\ e^{-\frac{h \cdot \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \cdot C \cdot m}}{2} \right)}{m}} \end{bmatrix}$$

$$(s - P_0) \cdot (s - P_1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{simplify} \rightarrow s^2 + \frac{\beta}{m} \cdot s + \frac{C}{m} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{перевірка}$$

$$(z - Pd_0) \cdot (z - Pd_1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{simplify} \rightarrow z^2 + -2 \cdot e^{-\frac{\beta \cdot h}{2 \cdot m}} \cdot \cosh\left(\frac{h \cdot \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot C \cdot m}}{2 \cdot m}\right) \cdot z + e^{-\frac{\beta \cdot h}{m}} \\ \text{collect, z} \end{array} \right.$$

Дискретна передавальна функція:

$$W_{d2}(z) := \frac{K_{d2}}{z + A + B \cdot z^{-1}}$$

Згідно теореми про кінцеве значення:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_2(s) \rightarrow \begin{cases} \frac{F}{C} & \text{if } C \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} W_{d2}(z) = \frac{F}{C} \text{ solve, } K_{d2} \rightarrow \frac{F \cdot (A + B + 1)}{C}$$

Дискретна передатна функція за методом відображення нулів/полісів

$$W_{d2}(z) := \frac{1 + A + B}{z + A + B \cdot z^{-1}} \cdot \frac{F}{C}$$

де допоміжні змінні

$$A := -2 \cdot e^{-\frac{\beta \cdot h}{2 \cdot m}} \cdot \cosh\left(\frac{h \cdot \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot C \cdot m}}{2 \cdot m}\right) \quad B := e^{-\frac{\beta \cdot h}{m}}$$

Рекурентна моделювальна формула:

$$y_{i+1} := (-y)_i \cdot A - y_{i-1} \cdot B + (1 + A + B) \cdot \frac{F}{C} \cdot x_i$$

Вихідні дані:

$$\underline{C} := 2 \quad \underline{m} := 0.05 \quad \beta := 0.1 \quad \underline{F} := 10$$

Параметри розрахунку:  $h := 0.1 \quad T_{\max} := 5$

Число розрахункових точок  $\underline{N} := \frac{T_{\max}}{h} \quad N = 50$

$k := 0 .. N$  Час:  $t_k := h \cdot k \quad t_a := 0, 0.02 .. T_{\max}$

**Аналітичний розв'язок  
для координати  $x$**

$$x_a(t) := \frac{F}{s \cdot (m \cdot s^2 + \beta \cdot s + C)} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{float, } 4 \end{array} \right. \rightarrow 5.0 - (2.5 - 0.4003i) \cdot e^{-(1.0-6.245i) \cdot t} - (2.5 \cdot$$

$$+ 0.4003i) \cdot e^{-(1.0+6.245i) \cdot t}$$



## Основна система рівнянь

Допоміжні змінні  $A := -2 \cdot e^{-\frac{\beta \cdot h}{2 \cdot m}} \cdot \cosh\left(\frac{h \cdot \sqrt{\beta^2 - 4 \cdot C \cdot m}}{2 \cdot m}\right) = -1.468$

$$B := e^{-\frac{\beta \cdot h}{m}} = 0.819$$

Рекурентна моделювальна формула:  $x_{i+1} := -(x_i \cdot A) - x_{i-1} \cdot B + (1 + A + B) \cdot \frac{F}{C}$

### Розв'язок за допомогою явних формул 0-го порядку

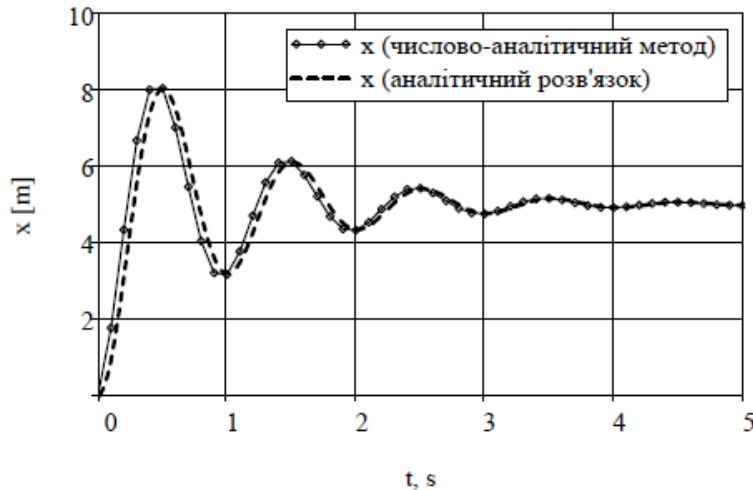
$$x_k := 0 \quad x_{0k} := 0$$

Знаходимо розв'язок для k+1-го моменту часу

$$x_{k+1} := -(x_k \cdot A) - \begin{cases} x_{k-1} \cdot B & \text{if } k > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} + (1 + A + B) \cdot \frac{F}{C}$$

Відносна похибка (%):  $\delta_{x_k} := |x_a(t_k) - x_k| \cdot \frac{C}{F} \cdot 100$

Середньоквадратична похибка (%):  $\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (\delta_{x_k})^2}{N}} = 7.068$





Приймаємо "ідеальні" початкові умови:

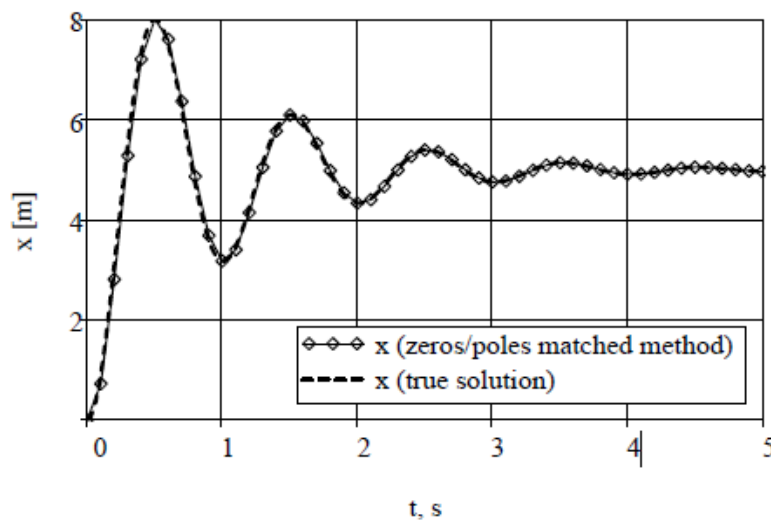
$$x_{0_{k+1}} := -(x_{0_k} \cdot A) - \begin{cases} x_{0_{k-1}} \cdot B & \text{if } k > 0 \\ x_a(-h) & \text{otherwise} \end{cases} + (1 + A + B) \cdot \frac{F}{C}$$

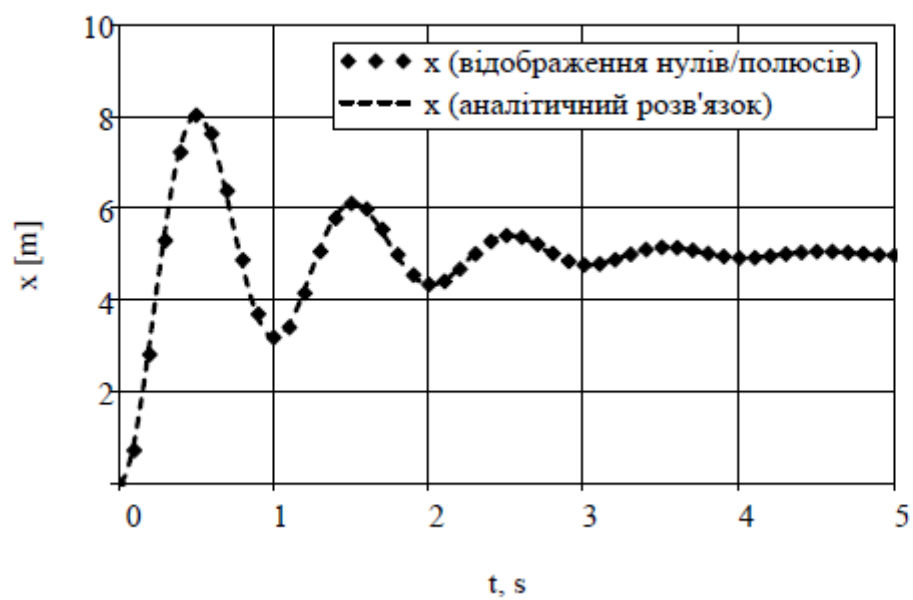
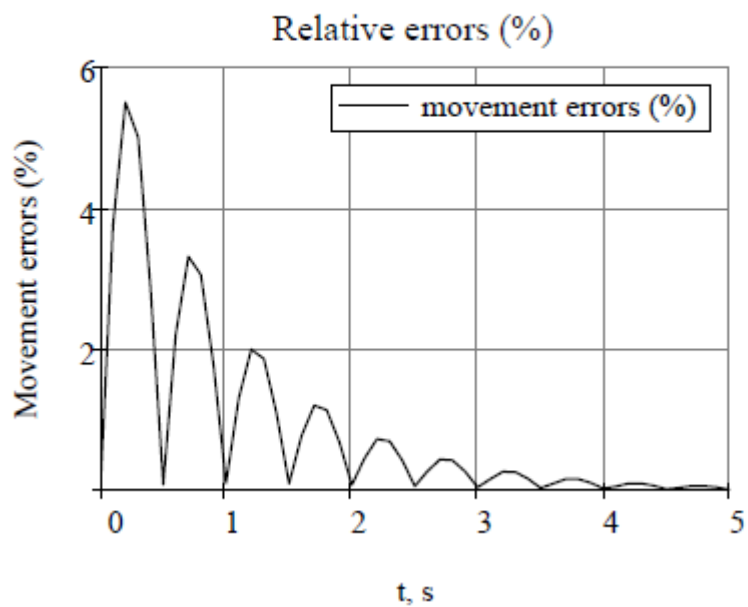
Відносна похибка (%):

$$\delta_{x_{0_k}} := \left| \frac{x_a(t_k) - x_{0_k}}{x_a(t_k)} \right| \cdot 100$$

Середньоквадратична похибка (%):

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (\delta_{x_{0_k}})^2}{N}} = 1.565$$





“ЗАТВЕРДЖУЮ”



Проректор з науково-педагогічної роботи  
 Національного університету "Львівська політехніка"

Олег ДАВИДЧАК

" 09 2023 р.

про використання результатів дисертаційної роботи

Вакарчук Анастасії Борисівни

на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD) на тему

“Аналіз впливу динаміки числових методів на характеристики електромеханічних систем з  
 цифровим керуванням”

Комісія у складі голови – директора Інституту енергетики та систем керування Національного університету “Львівська політехніка” А. О. Лозинського та членів: професорів кафедри теоретичної і загальної електротехніки Національного університету “Львівська політехніка” В.С. Маляра та С. Й. Рендзіняка склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі на кафедрі теоретичної і загальної електротехніки під час викладання дисципліни “Математичне моделювання електротехнічних систем та їх елементів” для магістрів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка.

У теоретичній частині навчальної дисципліни використовуються навчально-методичні матеріали щодо результатів аналізу ефективності використання числових методів для розрахунку перехідних процесів в електричних колах і, зокрема застосування числових методів дискретизації цифрових систем керування.

У практичній частині курсу здійснюється застосування числових методів інтегрування як базового методу дискретизації неперервних систем з подальшим впровадженням отриманих залежностей у програмне забезпечення цифрових систем.

**Голова комісії:**

Директор Інституту енергетики  
 та систем керування,  
 д.т.н., проф.

Андрій ЛОЗИНСЬКИЙ

**Члени комісії:**

Проф. кафедри теоретичної  
 і загальної електротехніки,  
 д.т.н., проф.

Василь МАЛЯР

Проф. кафедри теоретичної  
 і загальної електротехніки,  
 д.т.н., проф.

Сергій РЕНДЗІНЯК